



09/09/2020

**RB** Informatics;

كلية الهندسة المعلوماتية

السنة الثالثة

## التوابع القابلة للحوسبة باستخدام آلة تورينغ

د. محمد الأحمد

محتوى مجاني غير مخصص للبيع التجاري



# اللغات الصورية

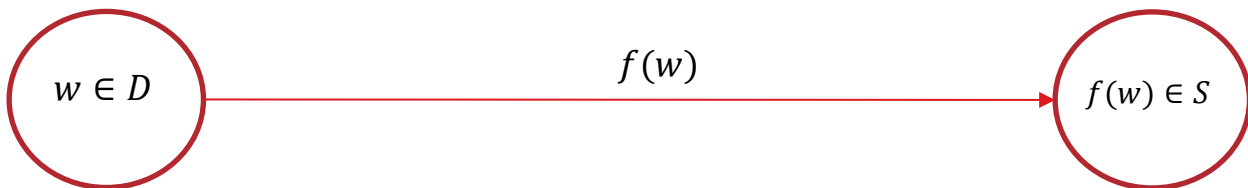
التابع: كائن رياضي يمثل علاقة تربط كل عنصر من مجموعة تدعى المنطلق بعنصر واحد فقط من مجموعة تدعى المستقر .

فإذا كان المنطلق هو مجموعة القيم التي يمكن ان يأخذها متغير  $w$  فإن المستقر هو مجموعة القيم الممكنة لقيم التابع  $f(w)$ .

A function  $f(w)$  has:

Domain: D

Result Region: S



- أي مشكلة يمكن ان نضع لها خوارزمية بخطوات محدودة يمكن ان نضع لها Turing machine قادرة على حل هذه المشكلة، وبالتالي يوجد مشاكل غير قابلة للحل مثل: كتابة خوارزمية لإيجاد جميع الكلمات التي ليس لها معنى في لغة معينة، وبالتالي **أي مشكلة قابلة للحل يمكن وضع TM لها.**
- يوجد تشابه كبير بين TM والكمبيوتر الحالي لان كل عملية يمكن تنفيذها على الكمبيوتر ويمكن عمل خوارزمية لها يمكن ان يتم تمثيل هذه العملية بـ TM بعدها ولكن قدرات TM تختلف عن قدرات الكمبيوتر لأنه في الكمبيوتر طريقة الوصول للذاكرة هي random access memory بينما في TM الوصول للذاكرة يكون محدود.



وما نيل المطالب بالتمني

ولكن تؤخذ الدنيا غلابا

## التتابع القابلة للحوسبة Computing Functions

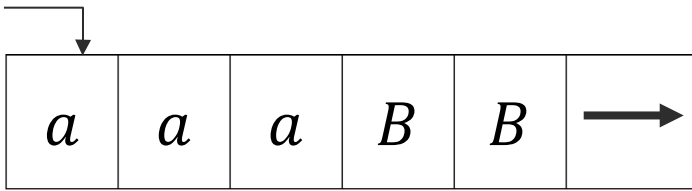
من استخدامات آلة تورينغ الأخرى : حساب ناتج العمليات الحسابية والتتابع على الأعداد الصحيحة، حيث يصبح الهدف هنا من آلة تورينغ هو تحويل دخل الآلة إلى خرج معين (ناتج العملية الحسابية) وليس التعرف على اللغة .  
فالتابع القابل للحوسبة: هو كل تابع يمكن تمثيل المشكلة او العملية الحسابية الخاصة به بآلة تورينغ .

- Function is computable if and only if there is a Turing machine represents the problem .

جميع توابع increment (++) و decrement (--) والجمع والطرح والضرب والقسمة قابلة للحوسبة ويمكن رسم TM لها.

### كيف تتعامل آلة تورينغ مع التتابع القابلة للحوسبة ؟

قبل ان نشرح طريقة تعامل TM مع computing function يجب ان نتذكر عملية قبول السلسلة في TM وفهم الحالة البدائية لآلة تورينغ. initial configuration.



في الحالة البدائية initial configuration يكون لدينا شريط يحوي عدد لا نهائي من الخلايا تتوزع على خلايا الشريط الكلمة وباقي الخلايا عبارة عن Blank ورأس الشريط موجود اقصى اليسار.

وفي عملية قبول السلسلة يجب الانتقال من حالة معينة والانتهاء بأخذ الحالات النهائية وعندها نحكم على هذه السلسلة بأنها مقبولة أم غير مقبولة.

### أما في التتابع القابلة للحوسبة:

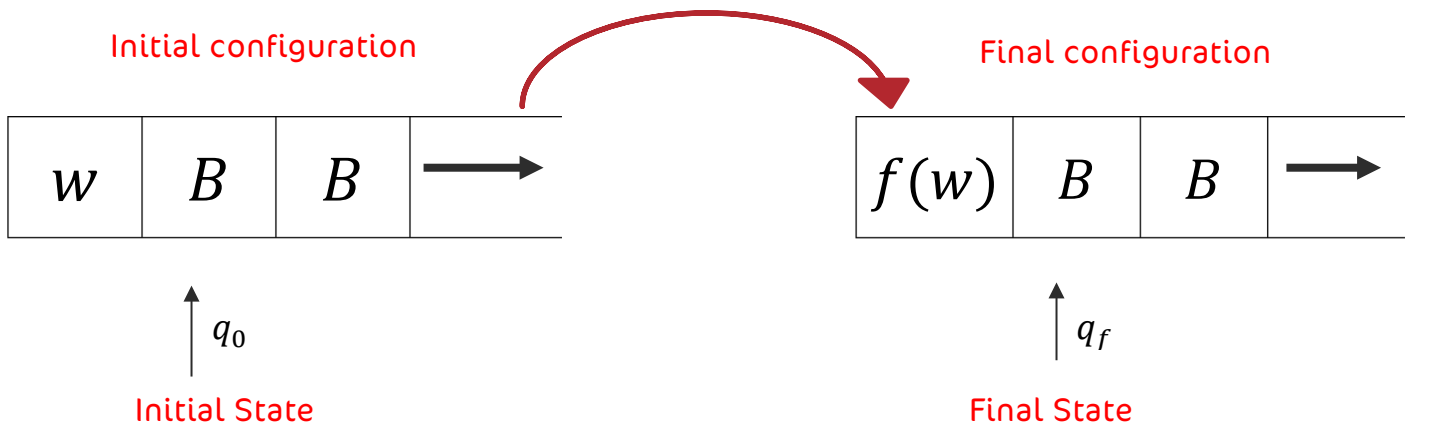
نعلم أن التابع هو علاقة بين مجموعتين، بحيث نكون في المجموعة الأولى ( $w$ ) ونريد الانتقال لـ  $f(w)$  (صورة  $w$ ) ففي TM نعتبر انه في الحالة البدائية يكون لدينا الدخل  $w$  موجود على الشريط ونتيجة تطبيق بعض الانتقالات يصبح لدينا الخرج أي  $f(w)$  موجود على نفس الشريط فيحل محل ما كان موجود قبله أي  $w$  .

تخبو العزائم عندها نعلو بها المهم  
نحن الهشاعل في طريق الهجد تسيقنا

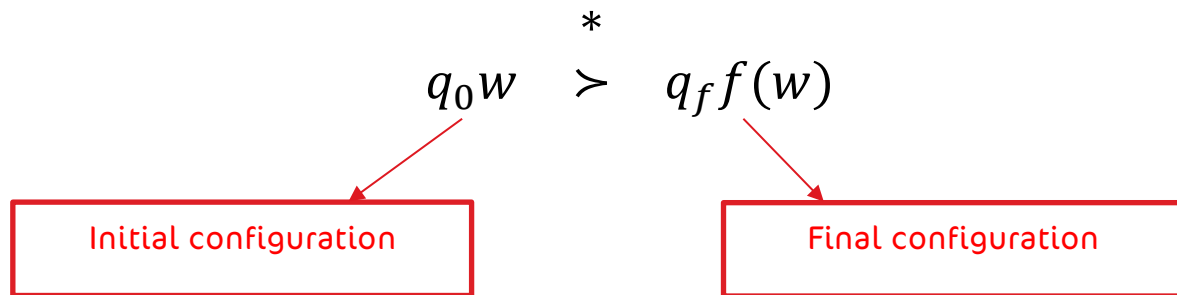


توضيح:

A function  $f$  is computable if there is a Turing machine  $M$  such that:



وبطريقة أخرى:



أي نقول عن تابع انه قابل للحوسبة: إذا استطعنا الانتقال من الحالة الابتدائية (العنصر الموجود بالمنطلق  $w$ ) موجود على الشريط) الى الحالة نهائية (صورة  $w$  أي العنصر الموجود في المستقر  $f(w)$  موجود على نفس الشريط).

في آلة تورينغ لا نقوم بتمثيل الأعداد بالطريقة الثنائية (Binary) بل نتمثلها بالطريقة الأحادية (unary) لأنها أسهل بالتعامل في TM.

الطريقة الأحادية (Unary): وهي تمثيل كل رقم بمجموعة من الواحدات بحيث يعبر عدد الواحدات عن هذا الرقم.

مثال:

Decimal : 5

Binary : 101

Unary: 11111

وإذا أردنا تمثيل الرقم صفر فهو يمثل بعدم وجود شيء

Decimal : 0

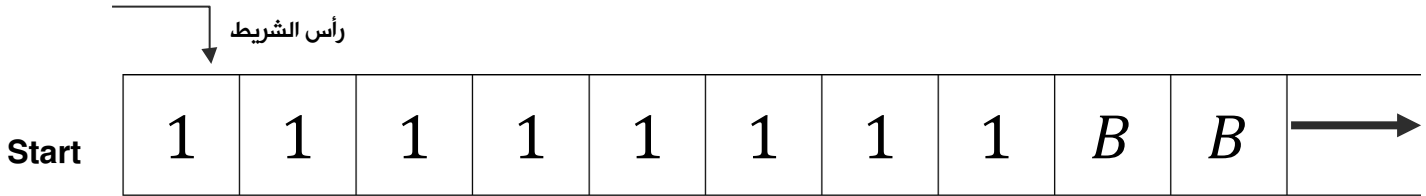
Binary : 0

Unary: \_

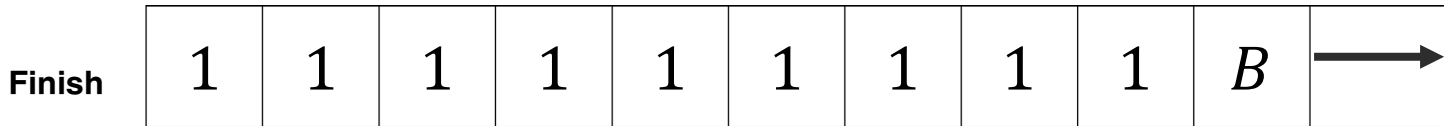
مثال بسيط: لتكن لدينا الكلمة التالية  $w = 8$  هل التابع التالي قابل للحوسبة  $f(w) = w + +$

الحل:

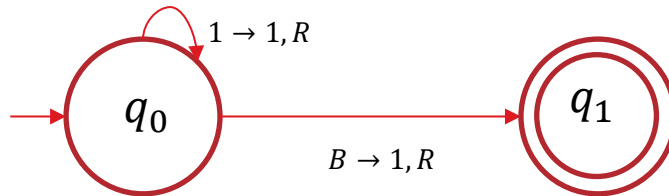
في الحالة البدائية تكون الكلمة موجودة على الشريط حيث  $w = 8$  أي تمثل على الشريط بثمانية خانات كل خانة تحوي 1 بالشكل التالي:



التابع  $f(w)$  يقوم بإضافة 1 على الكلمة أي يجب ان تصبح 9 أي في الشريط السابق عندما نقرأ 1 نذهب لليمين وعندما نصل الى أول B ونقرأها نستبدلها ب 1 وهكذا نكون وصلنا لحالة نهائية بالشكل التالي:



وتكون آلة تورينغ للتابع  $w + 1$ :  $f(w)$  بالشكل التالي:



جمع عددين:

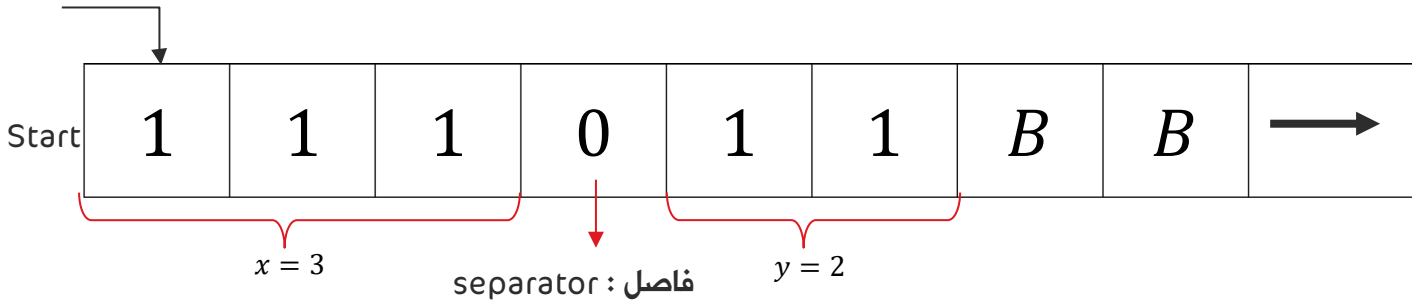
مثال: صمم آلة تورينغ لحساب ناتج جمع عددين.

الدخل:  $x = 3, y = 2$

الخرج:  $f(x, y) = x + y$

الحل:

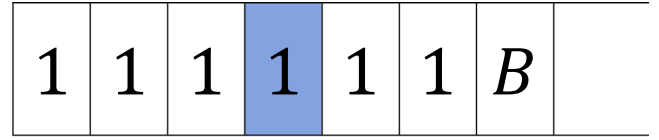
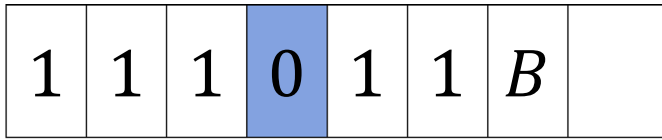
بالحالة البدائية يجب ان يتم تمثيل الدخيلين  $x, y$  حيث يكون  $x$  عبارة عن 3 واحدات و  $y$  عبارة عن واحدتين، يتم تمثيلها بالشكل التالي :



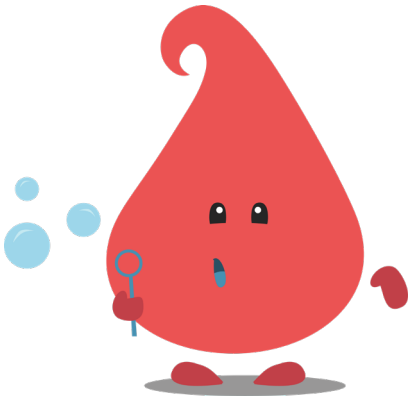
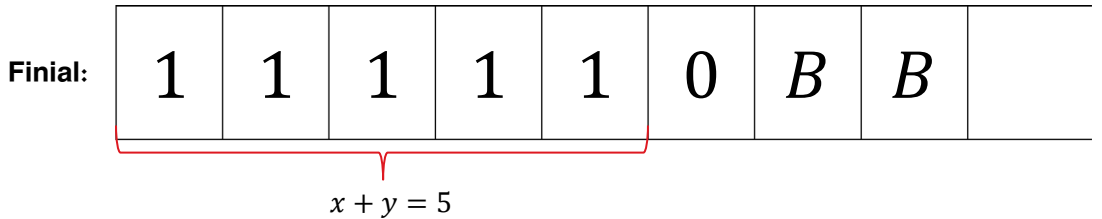
ملاحظة: إن رموز الأبجدية هي 1 فقط، أما الرمز 0 يستخدم للفصل بين العددين ويمكن استخدام أي رمز آخر بدل 0.

من أجل الوصول من الحالة البدائية الى الحالة النهائية يجب ان يكون لدينا  $x + y$  على الشريط فيتم الوصول للحالة النهائية بالشكل التالي:

على الشريط نبدأ من اليسار في كل مرة نقرأ الرمز 1 نبقىه كما هو ونذهب لليمين عند أول قراءة للرمز 0 نستبدله ب 1 ونكمل نحو اليمين



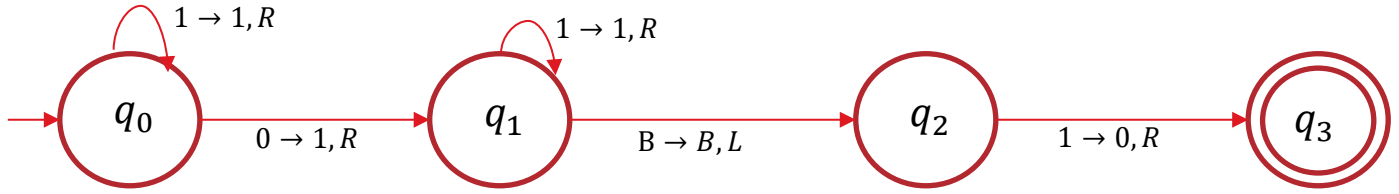
عندما نقرأ الرمز B نتحرك خانة واحدة نحو اليسار ونستبدل الرمز 1 ب 0 فيكون الشريط بالشكل التالي:



أي تكون عملية الجمع بالحالة البدائية بالشكل التالي:  $x0y$

ونحاول الوصول لحالة نهائية تكون بالشكل التالي:  $xy0$

ويكون تصميم آلة تورينغ لتابع  $f(x, y) = x + y$ :



من الحالة  $q_0$  نقرأ 1 ونذهب نحو اليمين، عندما نقرأ الرمز 0 نستبدله بـ 1 ونستمر نحو اليمين ونذهب للحالة  $q_1$  عندما نقرأ الرمز B نذهب نحو اليسار خانة واحدة ونكون في الحالة  $q_2$ ، نستبدل الرمز 1 الذي يسبق الرمز B بـ 0 ونستمر نحو اليمين ونكون قد وصلنا لحالة نهائية.

❖ طرح عددين :

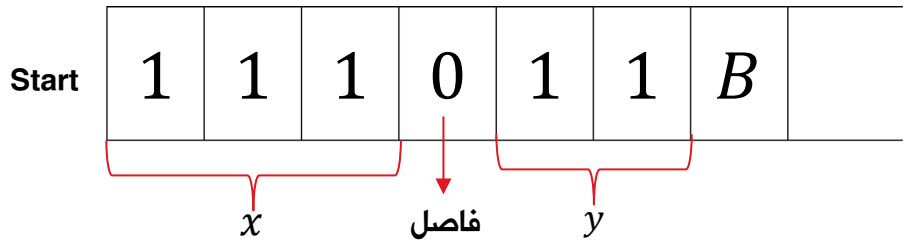
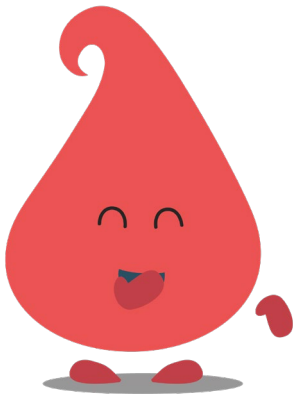
مثال : صمم آلة تورينغ لحساب ناتج عملية الطرح المعرفة بالشكل :

$$sub(x, y) = \begin{cases} x - y & ; x > y \\ 0 & ; x \leq y \end{cases}$$

حيث  $x = 3$  &  $y = 2$  .

الحل: سوف نهتم ونعالج حالة  $x > y$  فقط

يكون الأوتومات بالحالة الابتدائية بالشكل التالي :



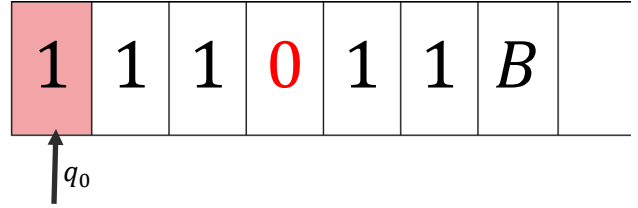
فكرة التمرين:

من أجل الوصول للحالة النهائية يجب الغاء كل 1 من القسم الأول " القسم قبل الرمز الفاصل 0 " مع 1 من القسم الثاني " القسم بعد الرمز الفاصل 0 " وعندما يتم الغاء جميع واحدات أحد القسمين نقوم باستبدال الرمز الفاصل بـ 1 وستكون الخطوات بالشكل التالي:

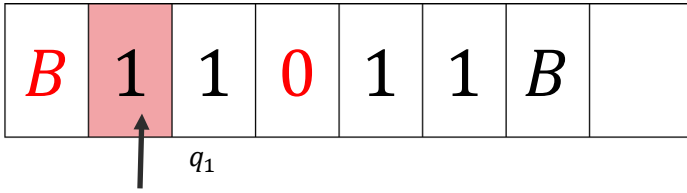
Hang in there



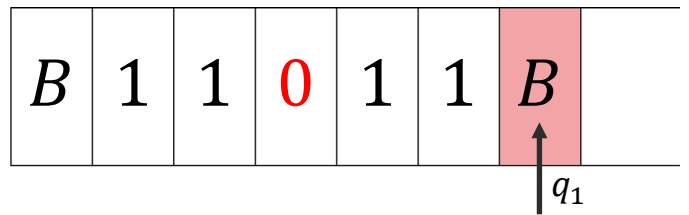
1. الحالة البدائية:



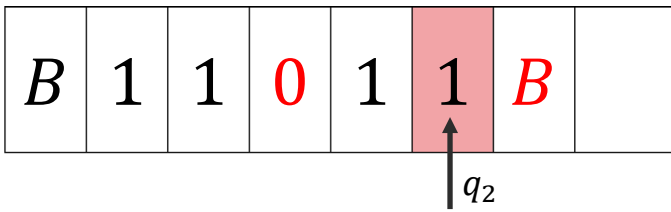
2. نقوم بتبديل الـ 1 التي يشير إليها الرأس بـ B ونقوم بتحريك الرأس باتجاه اليمين:



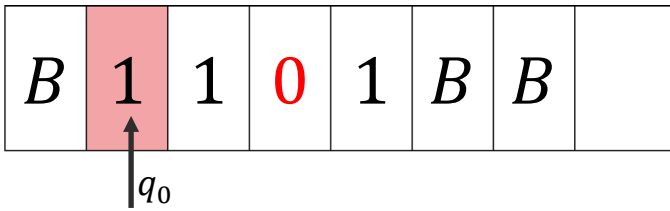
3. يتابع الرأس الانتقال باتجاه اليمين حتى يصل الى الرمز B



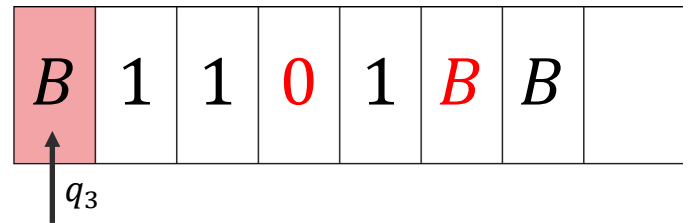
4. يصل الرأس الى الرمز B فينتقل خانة واحدة يساراً ويستبدل الرمز 1 بـ B



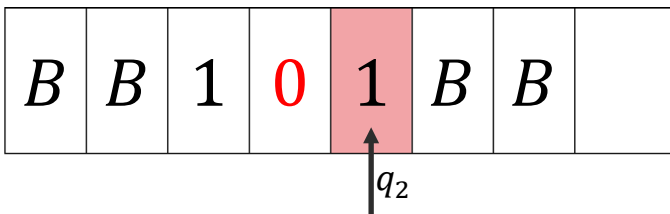
6. عندها ينتقل خانة واحدة باتجاه اليمين ويقوم باستبدال الرمز 1 بـ B:



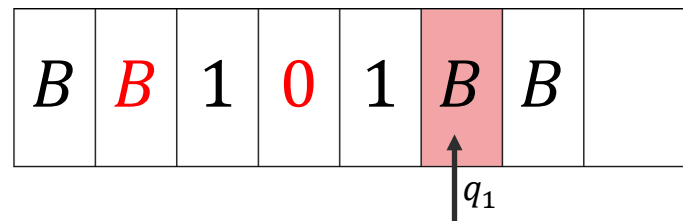
5. يتابع الرأس الانتقال باتجاه اليسار حتى يصل الى الرمز B



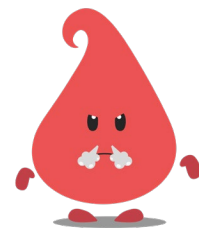
8. عندما يصل الرأس الى الرمز B ينتقل الرأس خانة واحدة يساراً ويستبدل 1 بـ B:



7. يتابع الرأس الانتقال باتجاه اليمين حتى يصل الى الرمز B

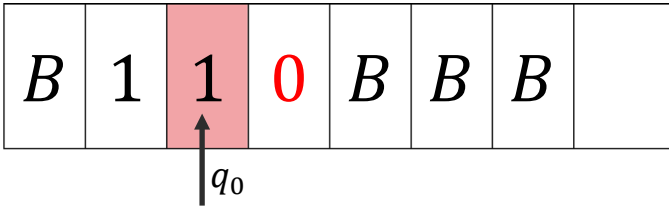
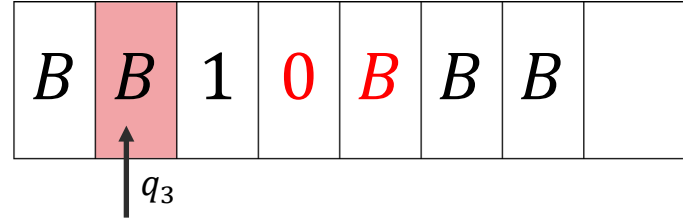


Keep pushing

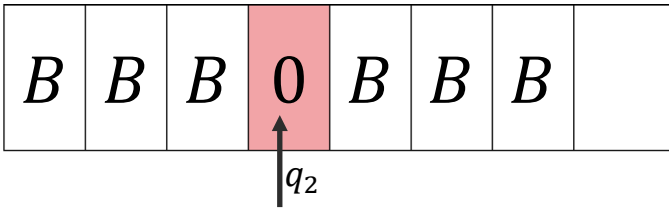
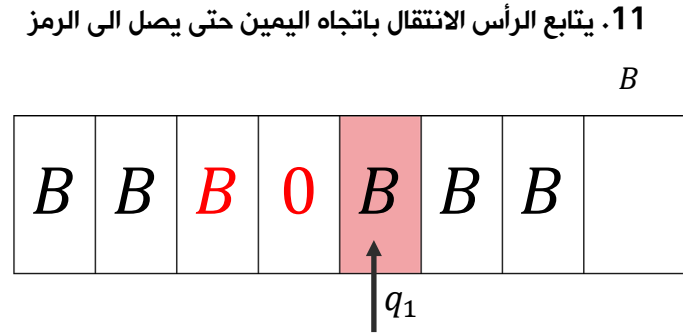


9. يتابع الرأس الانتقال باتجاه اليسار حتى يصل الى الرمز  $B$

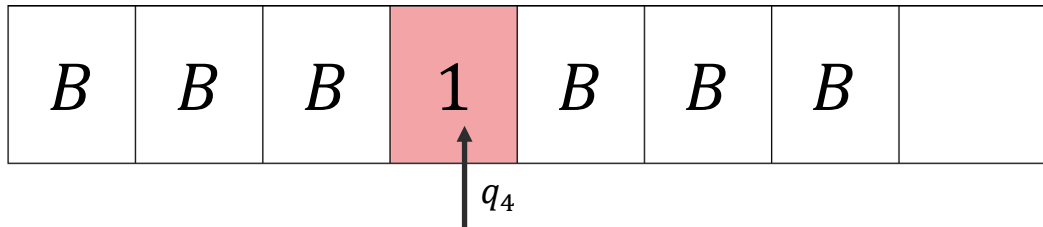
10. عندها ينتقل خانة واحدة باتجاه اليمين ويقوم باستبدال الرمز 1 بـ  $B$ :



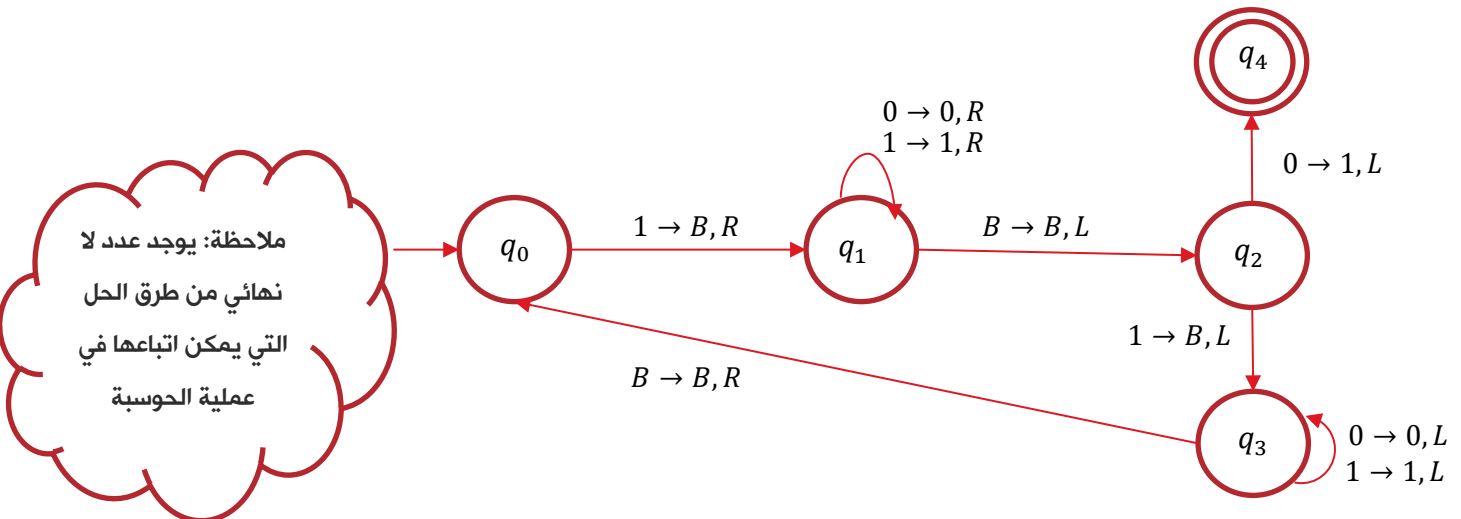
11. يتابع الرأس الانتقال باتجاه اليمين حتى يصل الى الرمز  $B$  ويتنقل خانة واحدة يساراً ويقراً الرمز 0 ويقوم باستبداله بـ 1:



13. ونكون قد وصلنا للحالة النهائية والنتيجة هي 1:



ويكون تصميم آلة تورينغ للتابع  $sub(x, y)$ :





## ضرب عددين:

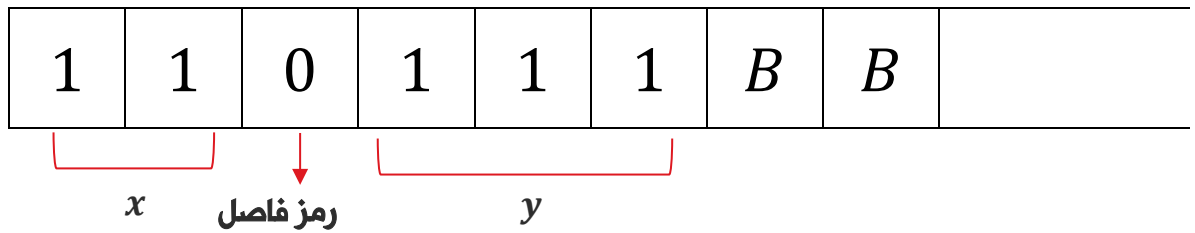
مثال:

ابن آلة تورينغ لحساب ناتج عملية الضرب المعروفة بالشكل

$$f(x, y) = x \times y$$

$$x = 2, y = 3$$

يكون الأوتومات بالحالة البدائية بالشكل التالي:



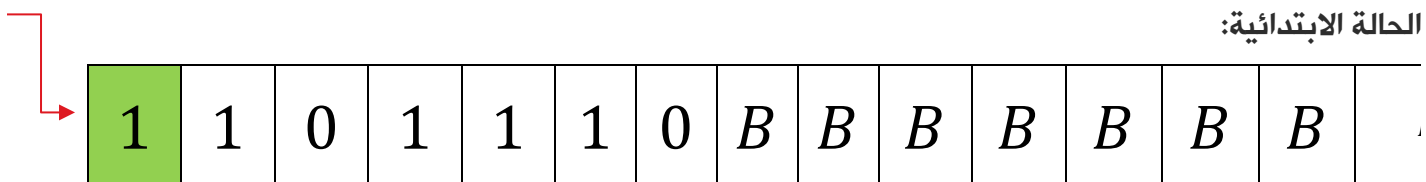
إن فكرة الضرب هي عبارة عن تكرار عملية الجمع فمثلا  $2 \times 3$  هي عبارة عن تكرار الرقم 3 مرتين أو تكرار الرقم 2 ثلاث مرات في الشريط السابق من أجل كل 1 موجود قبل الرمز الفاصل 0 سنقوم بتكرار سلسلة الرموز الموجودة بعد الرمز الفاصل 0

سنقوم بإجراء إضافة الرمز فاصل آخر على الشريط السابق ليصبح بالشكل التالي:




من أجل الوصول للحالة النهائية وهي ناتج ضرب  $2 \times 3$  نتبع الخطوات التالية:

الحالة الابتدائية:




سنبدأ من الرمز الأول الموجود على يسار الشريط، 1 نقوم باستبداله بـ  $B$  ومن أجل هذا الرمز سنقوم بتكرار سلسلة الواحدات الموجودة بعد الرمز الفاصل (لا يمكن التكرار دفعة واحدة سنقوم بتكرار كل 1 موجود بعد الرمز الفاصل على حدة).




$B$	1	0	1	1	1	0	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	
-----	---	---	---	---	---	---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	--

بعد استبدال أول رمز 1 بالرمز  $B$  نذهب نحو اليمين باتجاه أول خانة بعد الرمز الفاصل ونقوم باستبدال هذا الرمز بالرمز  $Y$  قمنا باستخدام الرمز  $Y$  بدل الرمز  $B$  من أجل أن نعرف الرموز التي نكررها عن باقي الرموز.




$B$	1	0	$Y$	1	1	0	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	
-----	---	---	-----	---	---	---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	--

بعد أن قمنا باستبدال أول رمز بعد الرمز الفاصل بـ  $Y$  سنقوم بتكرار الـ 1 بالطريقة التالية:  
 (سنذهب نحو اليمين باتجاه أول  $B$  بعد الرمز الفاصل الثاني ونقوم باستبدالها بـ 1) ★




$B$	1	0	$Y$	1	1	0	1	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	
-----	---	---	-----	---	---	---	---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	--

ثم نذهب نحو اليسار باتجاه الخانة التي تحوي الرمز  $Y$  وتذهب خانة واحدة نحو اليمين ونقوم باستبدال الرمز 1 بالرمز  $Y$



$B$	1	0	$Y$	$Y$	1	0	1	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	
-----	---	---	-----	-----	---	---	---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	--


ثم نذهب نحو اليمين باتجاه أول  $B$  ونستبدلها بـ 1 كما في الخطوة ★



$B$	1	0	$Y$	$Y$	1	0	1	1	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	
-----	---	---	-----	-----	---	---	---	---	-----	-----	-----	-----	-----	--

ثم نذهب نحو اليسار باتجاه الخانة التي تحوي الرمز  $Y$  ثم نذهب خانة واحدة نحو اليمين ونقوم باستبدال الرمز 1 بالرمز  $Y$

ثم نكرر الخطوة ★ أن نذهب بعد استبدال الرمز 1 بـ  $Y$  باتجاه أول  $B$  ونستبدلها بـ 1 فيصبح الشريط بالشكل التالي:



$B$	1	0	$Y$	$Y$	$Y$	0	1	1	1	$B$	$B$	$B$	$B$	
-----	---	---	-----	-----	-----	---	---	---	---	-----	-----	-----	-----	--

ثم نذهب نحو اليسار باتجاه الخانة التي تحوي الرمز  $Y$  وتذهب خانة واحدة نحو اليمين نلاحظ أننا نقرأ الرمز 0 وجميع  
الوحدات الموجودة سابقاً ثم تحويلها لـ  $Y$   
بعد قراءة الرمز 0 وهو الرمز الفاصل يبقى كما هو ونقوم بالتحرك نحو اليسار ونقوم بإعادة رموز 1 التي قمنا بإبدالها بـ  
 $Y$  إلى ما كانت عليه (111) فيكون الشريط كالتالي:

$B$	1	0	1	1	1	0	1	1	1	$B$	$B$	$B$	$B$	
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----	-----	-----	-----	--

بعد إعادة الرموز 1 نقوم بالتحرك نحو اليسار باتجاه أول رمز  $B$  وتذهب خانة واحدة نحو اليمين ونستبدل الرمز 1  
بالرمز  $B$  ومن أجل هذا الرمز سنقوم بتكرار سلسلة الوحدات الموجودة بعد لرمز الفاصل  
أي نعيد تطبيق الخطوات السابقة من البداية نفسها حتى يصبح لدينا الشريط بالشكل التالي:

$B$	$B$	0	$Y$	$Y$	$Y$	0	1	1	1	1	1	1	$B$	$B$	
-----	-----	---	-----	-----	-----	---	---	---	---	---	---	---	-----	-----	--

أصبح الرأس المتحرك يشير إلى الخانة 1 التي تسبق الرمز  $B$  بالشريط ثم تذهب نحو اليسار باتجاه الخانة التي تحوي  
الرمز  $Y$  وتذهب خانة واحدة نحو اليمين نلاحظ أننا نقرأ الرمز 0 نتحرك نحو اليسار ونقوم بإعادة رموز 1 التي قمنا بإبدالها  
بـ  $Y$

$B$	$B$	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	$B$	$B$	
-----	-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----	-----	--

**Every new day is another  
chance to change your life.**



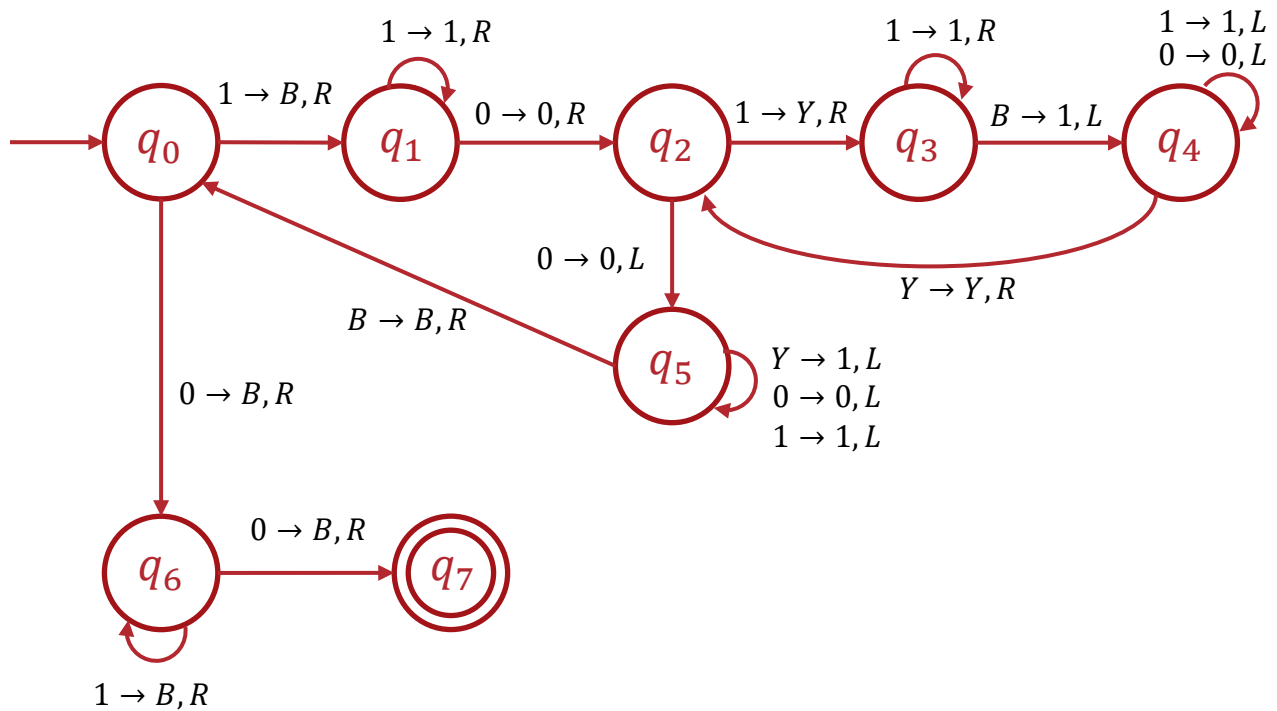
نذهب نحو اليسار باتجاه أول رمز  $B$  ونذهب خانة واحدة نحو اليمين  
نقرأ الرمز الفاصل 0 وبالتالي هذا يشير إلى أننا انتهينا من عملية الضرب (قمنا بتكرار الوسيط الثاني 3 بمقدار الوسيط  
الأول 2).

بالتالي نقوم باستبدال الرمز الفاصل بالرمز  $B$  ونقوم باستبدال جميع رموز الوسيط الثاني بالرمز  $B$  حتى نصل للرمز الفاصل الثاني  $0$  ونقوم باستبداله بـ  $B$  أيضا فيصبح لدينا الشريط بالحالة النهائية بالشكل التالي:

Final

$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$B$	$B$	$B$
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

وهكذا نكون حصلنا على ناتج عملية الضرب ويكون تصميم آلة تورينغ لتابع الضرب بالشكل التالي:



## قسمة عددين

ابن آلة تورينغ لحساب عملية القسمة المعرفة بالشكل

$$f(X, Y) = X \div Y$$

$$X = 6, Y = 2$$

الحل:

تمثيل الوسيطين على الشريط في الحالة الابتدائية يختلف قليلا عن الأمثلة السابقة فمثلا لتمثيل  $X \div Y$  لا نقوم بتمثيل  $X$  ثم نضع فاصل  $0$  ثم نمثل الرقم  $Y$  ثم الفاصل  $0$  بل العكس فمن أجل العملية  $X \div Y$  نمثل الرقم  $Y$  أولاً ثم نضع فاصل  $0$  ثم الرقم  $X$  ثم نضع فاصل  $0$  ويتم تخزين ناتج عملية القسمة بعد الرمز الفاصل الثاني. يكون لشريط بالحالة الابتدائية بالشكل التالي:

$B$	$1$	$1$	$0$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$0$	$B$	$B$
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

إن عملية القسمة هي عملية طرح مكرر وبالتالي من أجل  $6 \div 2$  ستكون عملية الطرح بالشكل التالي:

$$6 - 2 = 4$$

$$4 - 2 = 2$$

$$2 - 2 = 0$$

وعدد عمليات الطرح التي قمنا بها ستكون هي ناتج القسمة

ستكون الخطوات بالشكل التالي:

B	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	B	B	B
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

إن السلسلة الموجودة على يسار الشريط، وقبل الرمز الفاصل (11) سنقوم بطرحها من السلسلة الموجودة بعد الرمز الفاصل (111111) وسيبقى لدينا من هذه السلسلة بعد عملية الطرح (1111) وبعدها نقوم بتحويل أول B لدينا لـ 1 وهي تدل على أول عملية طرح قمنا بها فيصبح الشريط بالشكل التالي:

B	1	1	0	<del>1</del>	<del>1</del>	1	1	1	1	0	1	B	B
---	---	---	---	--------------	--------------	---	---	---	---	---	---	---	---

سنكرر عملية الطرح مرة ثانية بحيث سنقوم بطرح السلسلة الموجودة قبل الرمز الفاصل (11) من السلسلة الموجودة بعد الرمز الفاصل (1111) وسيبقى لدينا من هذه السلسلة بعد الطرح (11) وبعدها نقوم بتحويل أول B لدينا لـ 1 وهي تدل على ثان عملية طرح قمنا بها.

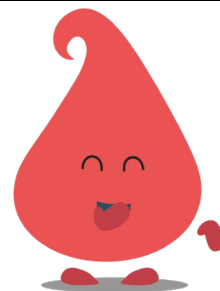
فيصبح لدينا الشريط بالشكل التالي:

B	1	1	0	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	1	1	0	1	1	B
---	---	---	---	--------------	--------------	--------------	--------------	---	---	---	---	---	---

سنكرر عملية الطرح مرة ثالثة ونقوم بتحويل أول B لدينا لـ 1 وهي تدل على ثالث عملية طرح قمنا بها فيصبح الشريط بالشكل التالي:

B	1	1	0	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	0	1	1	1	B	B
---	---	---	---	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	---	---	---	---	---	---

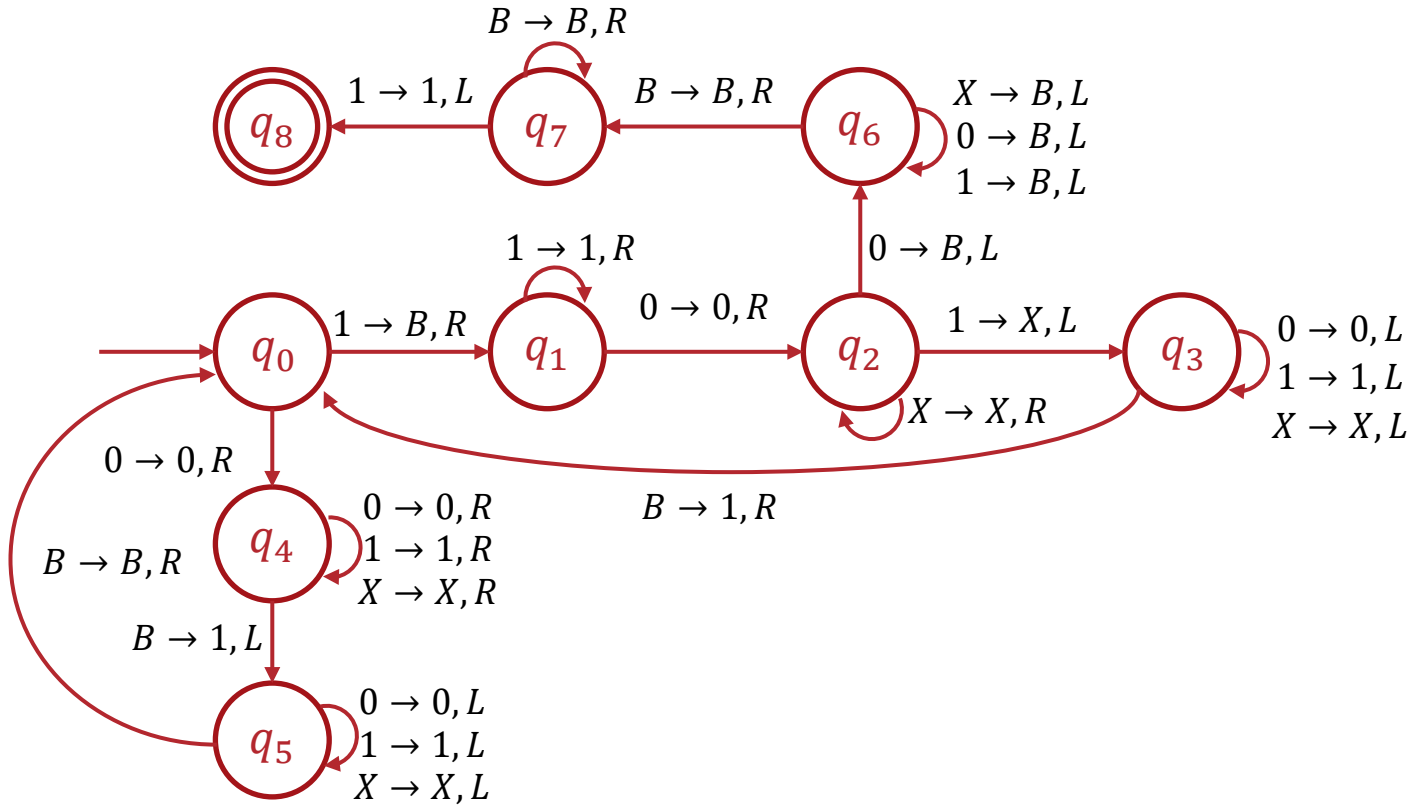
If you want to live a happy life,  
tie + to a goal more than to people or objects.



بما أن السلسلة الموجودة بين الرمزین الفاصلین تم استخدام جميع رموزها هذا يعني أن عملية القسمة انتهت وبالتالي نقوم بتحويل جميع الرموز الوسيطة والرموز الفاصلة لـ  $B$  ويبقى لدينا ناتج عملية القسمة على الشريط كما في الشكل التالي:

$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	1	1	1	$B$	
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	---	---	---	-----	--

ويكون تصميم آلة تورينغ لتابع القسمة بالشكل التالي:



وصلنا إلى نهاية مقرر اللغات الصورية والحمد لله رب العالمين

اعذرونا على أخطائنا فجل من لا يخطأ

منّا نحن فريق الأرسيز كل المحبة

دمتم بأمان الله ونلقاكم بمقررات قادمة

وفقنا الله وإياكم آمين

