

Методы математического анализа,
теоретические вопросы и задания к
экзамену (лектор Шатина А.В.)
3 семестр

20 января 2017 г.

1. Числовой ряд, его сходимость. Доказать, что ряды а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, $|q| < 1$ сходятся и найти их суммы. Доказать, что гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.
2. Определение n-го остатка числового ряда. Доказать, что, если ряд сходится, то любой его остаток сходится, а если какой-либо остаток ряда расходится, то и сам ряд расходится.
3. Необходимый признак сходимости числового ряда. Доказать расходимость рядов а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3n+4}{5n+1}}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2n+1}{2n-1})^n$.
4. Критерий Коши сходимости числового ряда. Отрицание критерия Коши. Используя критерий Коши, доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$. Доказать расходимость гармонического ряда, используя отрицания критерия Коши.
5. Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами.
6. Признак сравнения рядов с неотрицательными членами. Исследовать на сходимость ряды: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$.
7. Признак сравнения в предельной форме рядов с положительными членами. Исследовать на сходимость ряды: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{2}{n\sqrt{n}})$, $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n})$.
8. Признак Д'Аламбера сходимости рядов с положительными членами. Исследовать на сходимость ряды: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^2}{n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.
9. Признак Коши сходимости рядов с положительными членами. Исследовать на сходимость ряды: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (1 - \frac{1}{n})^{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n^2+1}{3n^2+1})^n$.
10. Интегральный признак Коши сходимости рядов с положительными членами. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

11. Признак Раабе (б/д). Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.
12. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда. Оценка его остатка.
13. Преобразование Абеля. Признак Дирихле. Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.
14. Преобразование Абеля. Признак Абеля. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \cos(\frac{\pi}{n})}{\ln \ln n}$, $\alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
15. Абсолютная и условная сходимость числового ряда. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $x \in (0; \pi)$ не сходится абсолютно.
16. Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда.
17. Теорема о сумме и произведении абсолютно сходящегося ряда.
18. Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда.
19. Функциональный ряд, область его сходимости. Найти области сходимости и абсолютной сходимости рядов: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{|x|}{x}\right)^n$.
20. Равномерная сходимость функционального ряда. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (x^{n-1} - x^n)$ сходится равномерно на отрезке $[-r; r]$, $0 < r < 1$, и сходится неравномерно на промежутке $(-1; 1]$.
Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx)^2}$ сходится неравномерно на промежутке $(0; \infty)$.
Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (x+4)^{4n}$ сходится неравномерно на интервале $(-5; 3)$.
21. Признак Вейрештрасса равномерной сходимости функциональ-

ного ряда. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость рядов на указанных множествах: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx}{1+n^5x^2}$, $E = (-\infty; +\infty)$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx}$, $E = [0; +\infty)$.

22. Непрерывность суммы функционального ряда. Доказать, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx}$ непрерывна на промежутке $E = [0; +\infty)$ и найти эту сумму.

23. Теорема о почленном интегрировании функциональных рядов. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, $x \in (-1; 1)$.

24. Теорема о почленном дифференцировании функциональных рядов. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $x \in (-1; 1)$.

25. Степенной ряд. Теорема Абеля. Радиус сходимости, интервал сходимости степенного ряда. Поведение ряда на концах интервала сходимости.

26. Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда.

27. Теорема о почленном интегрировании и дифференцировании степенных рядов. Бесконечная гладкость суммы степенного ряда в интервале сходимости.

28. Необходимое условие разложимости функции в степенной ряд. Ряд Тейлора.

29. Критерий разложимости функции в степенной ряд.

30. Достаточные условия разложимости функции в степенной ряд.

31. Ряды Тейлора для основных элементарных функций: e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcsin} x$.

32. Тригонометрический ряд. Ортогональность тригонометрической системы функций $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ на отрезке $[-\pi; \pi]$.
33. Теорема о коэффициентах равномерно сходящегося тригонометрического ряда. Тригонометрический ряд Фурье.
34. Достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.
35. Ряд Фурье для функции с произвольным периодом.
36. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
37. Метод Фурье решения краевых задач для уравнения свободных колебаний струны.