理论力学笔记

作者：温晨煜

组织：清华大学致理书院

版本：1.0

目录

前言

本笔记记录了我在大学阶段再次学习理论力学时的一些想法，试图用微分几何和群论的观点，来重新审视理论力学。

第一章 Hamilton 力学

1.1 Hamilton 正则方程

Lagrangian 微分

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{1.1}$$

对 Lagrangian 进行 Legendre 变换，定义 Hamiltonian：

$$H(p,q,t) = p_i\dot{q}_i - L \tag{1.2}$$

Hamiltonian 的微分

$$dH = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{1.3}$$

得到

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{1.4}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{1.5}$$

1.2 Poisson 括号

$f(p,q,t)$ 随时间的变化率：

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i \tag{1.6}$$

定义 Poisson 括号：

$$[f,H] = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{1.7}$$

代入正则方程，则有

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f,H] \tag{1.8}$$

Poisson 括号的性质

1. 双线性
2. 乘积性质 $[f_1f_2,g] = f_1[f_2,g] + f_2[f_1,g]$
3. Jacobi 等式 $[f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] = 0$

1.3 作用量为端点的函数

1.3.1 Hamilton-Jacobi 方程

在真实轨道下，考虑端点的变化

$\eta_1(t)$ 和 $\eta_2(t)$ 均为真实轨道，固定起始端点 $(t_0, q(t_0))$，考察另一端点 $(t, q(t) = \eta_1(t))$ 与 $(t + \mathrm{d}t, q(t) + \mathrm{d}q(t)\eta_2(t + \mathrm{d}t))$

$$\mathrm{d}S = p_i \mathrm{d}q_i - H\mathrm{d}t \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0 \tag{1.11}$$

1.3.2 Hamilton 正则方程

固定两端点：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (p_i \mathrm{d}q_i - H\mathrm{d}t) \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta(p_i \dot{q}_i - H)\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}) - (\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i})]\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{1.14}$$

1.3.3 Maupertuis 原理

起点广义坐标 $q(t_0)$ 和终点广义坐标 $q(t_2)$ 固定，除起点外每一个时刻 t'，时间可变 $\delta t'$，考虑路径 η_1 变为 η_2 带来的变分。记等时变分 $\Delta f(t') = f_2(t') - f_1(t')$，非等时变分 $\delta f(t) = f_2(t + \delta t) - f_1(t)$

$$\delta q(t) = \eta_2(t + \delta t) - \eta_1(t) = 0 \tag{1.15}$$

作用量的变分

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^{t+\delta t} L_2(t')\mathrm{d}t' - \int_{t_0}^{t} L_1(t')\mathrm{d}t' \\ &= \int_{t}^{t+\delta t} L_2(t')\mathrm{d}t' + \int_{t_0}^{t} \Delta L(t')\mathrm{d}t' \\ &= L(t)\delta t + (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Delta q_i(t'))\Big|_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} (\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\Delta q_i(t')\mathrm{d}t' \end{aligned} \tag{1.16}$$

又有

$$\begin{aligned} \Delta q(t') &= \eta_2(t') - \eta_1(t') \\ &= \eta_2(t' + \delta t') - \eta_1(t') - \eta_2(t' + \delta t') + \eta_2(t') \\ &= \delta q - \dot{\eta}_2 \delta t' \\ &\approx \delta q - \dot{q}\delta t' \quad (\dot{q} \text{ 与 } \dot{\eta}_2 \text{ 之间的差为一阶小量}) \end{aligned} \tag{1.17}$$

轨道两端广义固定，$\delta q(t_0)=\delta q(t)=0$，真实轨道 Lagranian 满足 Lagrange 方程，最后一项为 0

$$\begin{aligned}\delta S &= -(p_i\dot{q}_i - L)\delta t \\ &= -E\delta t\end{aligned} \tag{1.18}$$

另一方面，由积分后求变分，

$$\begin{aligned}\delta S &= \int (p_i \mathrm{d}q_i - H\mathrm{d}t) \\ &= \delta S_0 - E\delta t\end{aligned} \tag{1.19}$$

定义简约作用量：

$$S_0 = \int p_i \mathrm{d}q_i \tag{1.20}$$

则得到 Maupertuis 原理

$$\delta S_0 = 0 \tag{1.21}$$

考虑质量为 m 的简单粒子的运动，则有 Jacobi 原理

$$\delta \int \sqrt{2m(E-V)}\mathrm{d}s = 0 \tag{1.22}$$

1.4 正则变换

考虑 (p,q,t) 变换为 (P,Q,t) 且仍满足正则方程，Hamiltonian 由 $h(q,p,t)$ 变为 $H(Q,P,t)$

$$\delta \int (p_i \mathrm{d}q_i - h(q,p,t)\mathrm{d}t) = 0 \tag{1.23}$$

$$\delta \int (P_i \mathrm{d}Q_i - H(Q,P,t)\mathrm{d}t) = 0 \tag{1.24}$$

$$p_i \mathrm{d}q_i - h(q,p,t)\mathrm{d}t = P_i \mathrm{d}Q_i - H(Q,P,t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}F \tag{1.25}$$

$$\mathrm{d}F = p_i \mathrm{d}q_i - P_i \mathrm{d}Q_i + (H-h)\mathrm{d}t \tag{1.26}$$

$F(q,Q,t)$ 称为正则变换的生成函数

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = \frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad H = h + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{1.27}$$

以 (p,q,P,Q) 中四选二作为独立变量，可以得到四种正则变换，其余三种正则变换的生成函数可以由 F 做 Legendre 变换得到

正则变换不改变 Poisson 括号

$$[f,g]_{p,q} = [f,g]_{P,Q} \tag{1.28}$$

1.5 Hamilton-Jacobi 方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+h(q,\frac{\partial S}{\partial q},t)=0 \tag{1.29}$$

$$S=S(q,Q,t)+S_0 \tag{1.30}$$

Q 为 f 个常数，S_0 为任意相加常数，不会对系统产生影响

以 $S(q,Q,t)$ 为生成函数做正则变换，变换后 Hamiltonian

$$H=h+\frac{\partial S}{\partial t}=0 \tag{1.31}$$

使用方法：

1. 根据 Hamiltonian 写下 Hamilton-Jacobi 方程
   在保守系统下是能量守恒定律
2. 利用分离变量法，求出 $S(q,Q,t)$
   对于循环坐标 q_j，$S=S'+Q_jq_j$，S' 与 q_j 无关
3. 求出新的广义动量 $P_i=-\frac{\partial S}{\partial Q_i}$
4. 反解出原广义坐标 $q=q(Q,P,t)$，进而求出原广义动量 $p_i=\frac{\partial S}{\partial q_i}$

1.5.1 Hamilton-Jacobi 方程与量子力学波动方程

取波函数

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\sqrt{\rho(\boldsymbol{r})}\mathrm{e}^{\frac{iS(\boldsymbol{r},t)}{\hbar}} \tag{1.32}$$

假定 $\rho(\boldsymbol{r})$ 为常数，$S(\boldsymbol{r},t)\gg\hbar$

Schödinger 方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V\psi \tag{1.33}$$

将波函数代入，

$$[\frac{(\nabla S)^2}{2m}+V]+\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\nabla^2 S \tag{1.34}$$

在经典极限 $\hbar\nabla^2 S\ll(\nabla S)^2$ 下，上式得到 Hamilton-Jacobi 方程。经典近似的条件是动量在 de Broglie 波长内变化不大，也就是势能在 de Broglie 波长内变化不大

1.5.2 Hamilton-Jacobi 方程与波动光学

光的波函数 $\phi(\boldsymbol{r},t)$ 满足波动方程

$$\nabla^2\psi-\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0 \tag{1.35}$$

在折射率随空间的变化缓慢时，波函数的解

$$\psi=\mathrm{e}^{A(\boldsymbol{r})}\mathrm{e}^{ik_0(L(\boldsymbol{r})-ct)} \tag{1.36}$$

代入波动方程，

$$\nabla^2 A + (\nabla A)^2 + k_0^2(n^2 - (\nabla L)^2) = 0 \tag{1.37}$$

$$\nabla^2 L + 2\nabla A \cdot \nabla L = 0 \tag{1.38}$$

取短波近似（几何光学近似），介质在波长范围内变化很小，得到

$$(\nabla L)^2 = n(\boldsymbol{r})^2 \tag{1.39}$$

对比 Hamilton-Jacobi 方程（作用量 $S = W - Et$）

$$(\nabla W)^2 = 2m(E - V(\boldsymbol{r})) \tag{1.40}$$

Fermat 原理

$$\delta \int n\mathrm{d}s = 0 \tag{1.41}$$

对比 Jacobi 原理

$$\delta \int \sqrt{2m(E - V)}\mathrm{d}s = 0 \tag{1.42}$$