



# 电动力学笔记

作者：温晨煜

组织：清华大学致理书院

版本：1.0



# 目录

<b>第一章 电动力学基本规律</b>	<b>1</b>
1.1 真空中的 Maxwell 方程组 . . . . .	1
1.2 电磁势与规范对称性 . . . . .	2
1.3 介质中的 Maxwell 方程组 . . . . .	2
1.4 电磁守恒律 . . . . .	3
<b>第二章 静电学</b>	<b>5</b>
2.1 Poisson 方程 . . . . .	5
2.1.1 无边界的无穷大空间中的解 . . . . .	5
2.1.2 Green 函数法 . . . . .	5
2.1.3 静电镜像法 . . . . .	6
2.1.4 Laplace 方程的分离变量法 . . . . .	6
2.2 多极展开 . . . . .	7
<b>第三章 静磁学</b>	<b>8</b>
3.1 Poisson 方程 . . . . .	8
3.2 磁场的能量 . . . . .	8
3.3 磁多极展开 . . . . .	8
3.4 磁标势 . . . . .	9
<b>第四章 电磁波的传播</b>	<b>11</b>
4.1 电磁波在介质界面的折射与反射 . . . . .	11
4.2 电磁波在导电介质中的传播 . . . . .	12
4.3 介质色散的经典模型 . . . . .	13
4.4 电磁波在色散介质中的传播 . . . . .	13
4.4.1 因果律与 Kramers-Kroning 关系 . . . . .	14
4.5 波导与谐振腔 . . . . .	14
4.5.1 Maxwell 方程组的分离 . . . . .	14
4.5.2 金属波导 . . . . .	14
4.5.3 谐振腔 . . . . .	14
4.5.4 介质波导 . . . . .	14
4.5.4.1 平面介质波导 . . . . .	14
4.5.4.2 圆形介质波导 . . . . .	14
<b>第五章 电磁波的辐射和散射</b>	<b>15</b>

5.1 波动方程的推迟解 . . . . .	15
5.2 辐射场的 Taylor 展开 . . . . .	15
5.2.1 电偶极辐射 . . . . .	16
5.2.2 磁偶极辐射 . . . . .	17
5.2.3 电四极辐射 . . . . .	18
5.3 辐射场的多极展开 . . . . .	19
5.4 电磁波的散射 . . . . .	20
<b>第六章 狹义相对论</b>	<b>21</b>
6.1 狹义相对论的基本假设与实验验证 . . . . .	21
6.2 洛伦兹变换 . . . . .	21
6.3 四维张量 . . . . .	22
6.4 Lorentz 变换的数学性质 . . . . .	23
<b>第七章 相对论性电动力学</b>	<b>24</b>
7.1 自由粒子 . . . . .	24
7.2 电磁场中的粒子 . . . . .	25
7.3 电磁场 . . . . .	26
7.4 宏观运动物体中的电磁场 . . . . .	27
7.4.1 运动的电介质 . . . . .	27
7.4.2 运动的导体 . . . . .	28
7.5 均匀静电磁场中带电粒子的运动 . . . . .	28
7.5.1 在均匀静电场中的运动 . . . . .	28
7.5.2 在均匀静磁场中的运动 . . . . .	28
7.5.3 在正交静电磁场中的运动 . . . . .	28
7.5.4 在一般电磁场中的运动 . . . . .	29
<b>第八章 运动带电粒子的辐射</b>	<b>30</b>
8.1 Liénard-Wiechert 势 . . . . .	30
8.2 Larmor 公式与 Thomson 散射 . . . . .	32
8.3 频谱分析 . . . . .	33
8.3.1 连续谱 . . . . .	33
8.3.2 分立谱 . . . . .	34
8.4 Cherenkov 辐射 . . . . .	35
8.5 辐射阻尼 . . . . .	36
<b>附录 A 特殊函数</b>	<b>38</b>
A.1 球函数 . . . . .	38

---

A.1.1 Legendre 多项式的性质 . . . . .	39
A.2 柱函数 . . . . .	40
A.2.1 递推关系 . . . . .	41
A.2.2 漸进展开 . . . . .	41
A.2.3 整数阶的生成函数与积分表示 . . . . .	41
A.3 常用展开式 . . . . .	42

# 第一章 电动力学基本规律

## 内容提要

- 真空与介质中的 Maxwell 方程组
- 电荷、能量、动量、角动量守恒
- 电磁势

## 1.1 真空中的 Maxwell 方程组

### 定理 1.1 (真空中的 Maxwell 方程组)

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$



### 定理 1.2 (洛伦兹力公式)

力的密度

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$



性质 Maxwell 方程组的性质

1. 线性
2. 洛伦兹协变性
3. 规范对称性
4. 分立对称性
  - (a). 空间反射变换(宇称变换)  $x \rightarrow -x$ , 有  $\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}, \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ 
    - I. 称在空间反射变换下改变符号的三维矢量为极矢量
    - II. 称在空间反射变换下不变的三维矢量为轴矢量
  - (b). 时间反演变换  $t \rightarrow -t$  下, 有  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}, \mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$

## 1.2 电磁势与规范对称性

### 定义 1.1 (电磁势)

关于电磁势的方程是二阶偏微分方程

电磁势  $(\Phi, \mathbf{A})$  中,  $\Phi$  称为标量势, 简称标势;  $\mathbf{A}$  称为矢量势, 简称矢势.



电磁场与电磁势的关系为

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.1)$$

电磁势的选取不是唯一的。若电磁势  $(\Phi', \mathbf{A}')$  与  $(\Phi, \mathbf{A})$  对应于相同的电磁场  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ , 则二者满足规范变换

$$\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \\ \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{cases} \quad (1.2)$$

其中  $\Lambda$  为任意标量场。电磁场这样的对称性称为规范对称性。

经典电动力学中, 电磁势并不是可观测的物理量, 需要加入规范条件来确定。

1. Lorenz 规范:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

齐次方程自动满足, 代入非齐次方程, 得到波动方程

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \end{cases} \quad (1.4)$$

2. Coulomb 规范:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (1.5)$$

## 1.3 介质中的 Maxwell 方程组

### 定义 1.2 (电极化强度)

介质中单位体积中的平均电偶极矩称为电极化强度, 记为  $\mathbf{P}$

束缚电荷密度

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (1.6)$$

介质界面束缚电荷面密度

$$\sigma_b = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \quad (1.7)$$

束缚电流密度

$$\mathbf{J}_b = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (1.8)$$



**定义 1.3 (磁化强度)**

介质单位体积中的平均磁偶极矩称为磁化强度，记为  $\mathbf{M}$

分子电流密度

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (1.9)$$

介质界面面电流密度

$$\mathbf{K}_m = -\mathbf{n} \times \mathbf{M} \quad (1.10)$$

**定理 1.3 (线性介质中的 Maxwell 方程组)**

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

考虑线性、均匀、各向同性介质，存在本构关系

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \end{cases}$$



在一般情形下， $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{H}$  与  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  之间存在本构关系，此时  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{H}$  由 Maxwell 方程组前二式定义。

**定理 1.4 (介质交界面的边界条件)**

$\mathbf{n}$  是由介质 1 指向介质 2 的单位法向量

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \end{cases}$$



## 1.4 电磁守恒律

**定理 1.5 (电荷守恒定律)**

Maxwell 方程组自动满足电荷守恒

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$



**定理 1.6 (能量守恒)**

电磁场能量密度

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

能流密度 (又称为 Poynting 矢量)

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

磁场对电流不做功，电场对电流做功功率  $W$ ，则有

$$-W = - \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, dV = \int_V \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} \right) \, dV$$

**定理 1.7 (动量守恒)**

$$\frac{d}{dt}(P_i^{source} + P_i^{field}) = \oint_{\partial V} T_{ij} \, dS_j$$

$\mathbf{P}^{source}$  是带电粒子的动量， $\mathbf{P}^{field}$  是电磁场的动量

定义电磁场动量密度

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S}$$

应力张量

$$T_{ij} = \epsilon_0(E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\delta_{ij})$$

**定理 1.8**

角动量密度

$$\mathcal{M} = \mathbf{x} \times \mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$



## 第二章 静电学

### 2.1 Poisson 方程

#### 定理 2.1

引入静电势  $\Phi$ , 有

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi$$

得到 Poisson 方程

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon}$$

若  $\rho((\mathbf{x})) = 0$ , 有 Laplace 方程

$$\nabla^2\Phi = 0$$



下面是 Poisson 方程的解法

#### 2.1.1 无边界的无穷大空间中的解

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

#### 2.1.2 Green 函数法

边界条件:

1. Dirichlet 边界条件: 已知  $\Phi|_S$
2. Neumann 边界条件: 已知  $\frac{\partial\Phi}{\partial n}|_S$

Green 函数  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  在  $V$  内满足

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}'}^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \text{适当的边界条件} \end{cases} \quad (2.1)$$

则

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S (G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial\Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'}) dS'$$

$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  可以写成如下形式:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$$

通过选取  $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  来使得求解出的静电势  $\Phi(\mathbf{x})$  满足对应的边界条件.

(1) Dirichlet 边界条件

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0, \mathbf{x}' \in S$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') dV' + \frac{1}{4\pi} - \oint_S \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} dS'$$

(2) Neumann 边界条件

$$G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{4\pi}{A_S}, \mathbf{x}' \in S$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \langle \Phi \rangle_S + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} dS'$$

### 2.1.3 静电镜像法

#### 定理 2.2 (唯一性定理)

空间  $V$  内满足 Poisson 方程和边界条件的解  $\Phi(\mathbf{x})$  是唯一的



#### 定义 2.1 (反演变换)

反演变换半径  $R$ , 中心取为原点,  $n$  维欧氏空间中  $\mathbf{x}$  在反演变换下的像为

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{R^2}{\|\mathbf{x}\|^2} \mathbf{x}$$

球面经过反演变换仍是球面



### 2.1.4 Laplace 方程的分离变量法

(1) 直角坐标系

$$\Phi(\mathbf{x}) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$X(x) \propto e^{k_1 x}, \quad Y(y) \propto e^{k_2 y}, \quad Z(z) \propto e^{k_3 z}$$

$$\text{满足 } k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0$$

$k_i$  的取值可以为实数或纯虚数

(2) 柱坐标系

$$\Phi(\mathbf{x}) = R(r)\Phi(\phi)Z(z)$$

$$Z(z) \propto e^{\pm kz}, \quad \Phi(\phi) \propto e^{\pm im\phi}, \quad R(r) \propto J_m(kr), N_m(kr)$$

$m$  为正整数,  $k$  为正实数或虚部为正的纯虚数

(3) 球坐标系

$$\Phi(r, \mathbf{n}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}) Y_{lm}(\mathbf{n})$$

## 2.2 多极展开

在远处的  $\mathbf{x}$  点,  $r = |\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \left( \int_V Y_{lm}^*(\mathbf{n}') (r')^l \rho(\mathbf{x}') dV' \right) \frac{Y_{lm}(\mathbf{n})}{r^{l+1}} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\mathbf{n})}{r^{l+1}}\end{aligned}$$

其中多极矩

$$q_{lm} = \int_V Y_{lm}^*(\mathbf{n}') (r')^l \rho(\mathbf{x}') dV'$$

另一种展开方式:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{r} - \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{6} \sum_{i,j} D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r} + \dots \right) \\ \mathbf{p} &= \int_V \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') dV' \\ D_{ij} &= \int_V (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{x}') dV'\end{aligned}$$

电偶极矩静电场

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3} \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}}{r^3} - \frac{4\pi}{3} \mathbf{p} \delta^3(\mathbf{x}) \right)\end{aligned}$$

# 第三章 静磁学

## 3.1 Poisson 方程

### 定理 3.1

引入磁矢势后，磁矢势  $\mathbf{A}$  满足 Poisson 方程：

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

满足 Coulomb 规范  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  电流连续性方程  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$



无边界的无穷大空间中的解为

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

## 3.2 磁场的能量

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV = \frac{1}{2\mu} \int (\nabla \times \mathbf{A})^2 dV \\ (\nabla \times \mathbf{A})^2 &= \epsilon_{jk}^i \epsilon_{lm}^i (\partial^j A^k) (\partial^l A^m) \\ &= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) (\partial^j A^k) (\partial^l A^m) \\ &= (\partial^j A^k) (\partial^j A^k) - (\partial^j A^k) (\partial^k A^j) \\ &= \partial^j (A^k \partial^j A^k) - A^k (\partial^j \partial^j A^k) - \partial^j (A^k \partial^k A^j) + A^k (\partial^j \partial^k A^j) \\ &= (\mathbf{A} \cdot \nabla) (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \partial^j (A^k \partial^j A^k) - A^k (\partial^j \partial^j A^k) - \partial^j (A^k \partial^k A^j) \end{aligned}$$

第一项由于 Coulomb 规范为 0，全微分对全空间积分没有贡献，因此

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV$$

## 3.3 磁多极展开

在远处的  $\mathbf{x}$  点， $r = |\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$

$$A_i(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi r} \int J_i(\mathbf{x}') dV' + \frac{\mu x_j}{4\pi r^3} \int J_i(\mathbf{x}') x'_j dV' + \dots$$

对于第一项,

$$\begin{aligned}\int \partial'_i(J_i(\mathbf{x}')x'_j) dV' &= 0 \\ \int x'_j \partial'_i(J_i(\mathbf{x}')) dV' + \int J_j(\mathbf{x}') dV' &= 0 \\ \int J_j(\mathbf{x}') dV' &= 0\end{aligned}$$

对于第二项,

$$\begin{aligned}\int \partial'_k(J_k(\mathbf{x}')x'_i x'_j) dV' &= 0 \\ \int (x'_i J_j(\mathbf{x}') + x'_j J_i(\mathbf{x}')) dV' &= 0\end{aligned}$$

说明对称部分没有贡献, 考虑反对称部分,

$$\begin{aligned}x_j \int J_i(\mathbf{x}') x'_j dV' &= -\frac{1}{2} x_j \int (x'_i J_j(\mathbf{x}') - x'_j J_i(\mathbf{x}')) dV' \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} x_j \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}'))_k dV' \\ &= -\frac{1}{2} (\mathbf{x} \times \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')) dV')_i\end{aligned}$$

定义磁矩

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')) dV'$$

磁场

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{r^3} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu}{4\pi} \left( \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{r^3} + \frac{8\pi}{3} \mathbf{m} \delta^3(\mathbf{x}) \right)\end{aligned}$$

1. 磁矩的受力:  $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$
2. 磁矩受到的力矩:  $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$
3. 磁矩在外场中的能量:  $U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$

## 3.4 磁标势

### 定义 3.1

无自由电流处,  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ , 可以引入磁标势  $\Phi_M(\mathbf{x})$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = -\nabla \Phi_M(\mathbf{x})$$

满足类 Poisson 方程

$$\nabla^2 \Phi_M(\mathbf{x}) = -(-\nabla \cdot \mathbf{M})$$

等效磁荷密度与等效磁荷面密度

$$\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M}, \quad \sigma_M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}$$



考虑两种简单情形：

1. 线性介质:  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ,  $\nabla^2 \Phi_M(\mathbf{x}) = 0$
2. 硬铁磁体:  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$  是已知矢量场

# 第四章 电磁波的传播

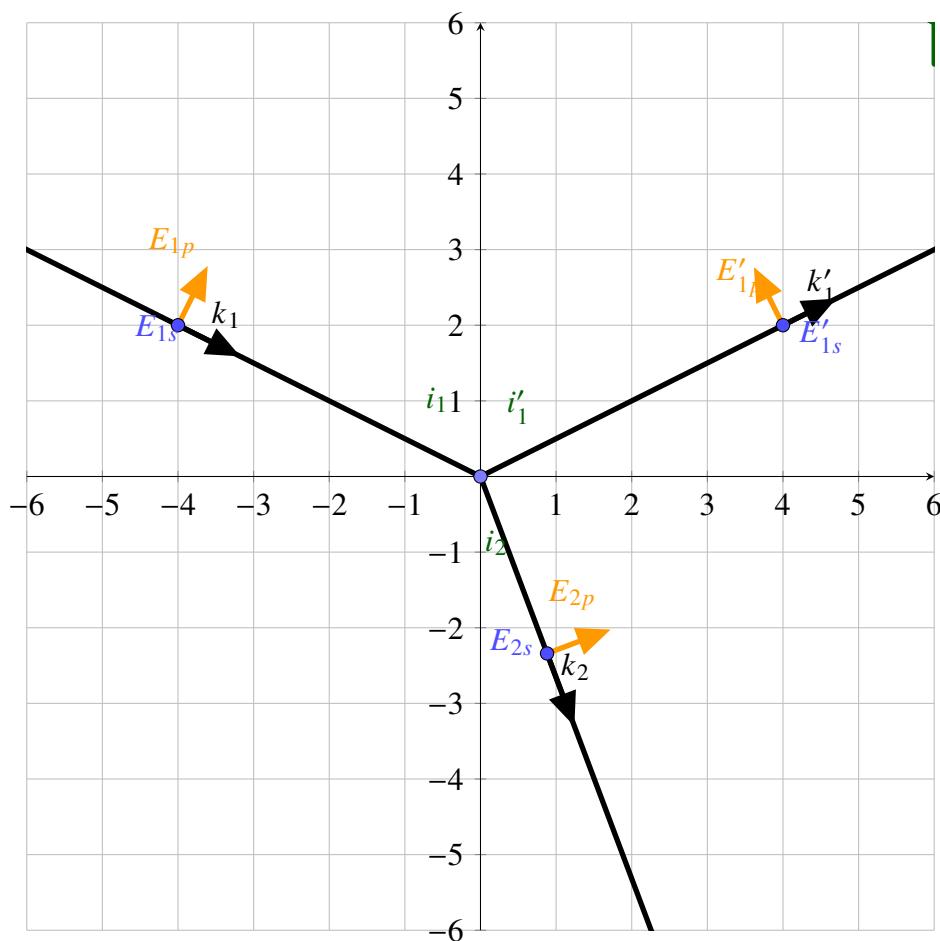
能流

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |E_0|^2 n$$

能量密度

$$u = \frac{\epsilon}{2} |E_0|^2$$

## 4.1 电磁波在介质界面的折射与反射



$$r_p = \frac{E'_{1p}}{E_{1p}} = \frac{\frac{n_2}{\mu_2} \cos i_1 - \frac{n_1}{\mu_1} \cos i_2}{\frac{n_2}{\mu_2} \cos i_1 + \frac{n_1}{\mu_1} \cos i_2}$$

$$r_s = \frac{E'_{1s}}{E_{1s}} = \frac{\frac{n_1}{\mu_1} \cos i_1 - \frac{n_2}{\mu_2} \cos i_2}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos i_1 + \frac{n_2}{\mu_2} \cos i_2}$$

$$t_p = \frac{E_{2p}}{E_{1p}} = \frac{2 \frac{n_1}{\mu_1} \cos i_1}{\frac{n_2}{\mu_2} \cos i_1 + \frac{n_1}{\mu_1} \cos i_2}$$

$$t_s = \frac{E_{2s}}{E_{1s}} = \frac{2 \frac{n_1}{\mu_1} \cos i_1}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos i_1 + \frac{n_2}{\mu_2} \cos i_2}$$

大多数情况下  $\mu_1 \approx \mu_2$

入射角为 Bruster 角

$$i_B = \arctan \frac{n_2}{n_1}$$

反射波只有垂直分量

全反射角

$$i_0 = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

## 4.2 电磁波在导电介质中的传播

Maxwell 方程组给出

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} = -i\omega(\epsilon + i\frac{\sigma}{\omega})\mathbf{E}$$

复介电常数

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$$

色散关系

$$k^2 = \mu\epsilon\omega^2(1 + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon})$$

$$\begin{cases} t=0 \text{ 时导体中已经存在电磁场: } & \omega \text{ 是复数, } \mathbf{k} \text{ 是实数} \\ \text{外界电磁波入射到导体: } & \omega \text{ 是实数, } \mathbf{k} \text{ 是复数} \end{cases}$$

解得

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \left( \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} + 1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} - 1}{2}} \right)$$

1. 对于不良导体,  $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$ :  $k \approx \sqrt{\mu\epsilon}\omega + i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\sigma$

2. 对于良导体,  $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ :  $k \approx (1 + i)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$

对于良导体, 传导电流远大于位移电流, 称为准静态近似, 有扩散方程

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

## 4.3 介质色散的经典模型

介质中的束缚电子视为阻尼简谐振子，在外场下受迫振动，电子产生电偶极矩

$$\mathbf{p} = \frac{e^2}{m} \frac{\mathbf{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$$

相对介电常数

$$\epsilon_r = 1 + \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i}$$

$n$  为原子密度， $f_i$  为权重， $e$  为电子电荷， $m$  为电子质量

对于导体， $\omega_0 = 0$ ，对比之前可得

$$\sigma = \frac{f_0 ne^2}{m(\gamma - i\omega)}$$

在高频极限下，

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{nZe^2}{\epsilon_0 m}$$

对于等离子体，所有电子都是自由的，在忽略阻尼时，上式对任何频率都成立

在一般频率下，介质阻尼较小，相对介电常数为实数，但在  $\omega \approx \omega_i$  附近，相对介电常数虚部增强，产生共振吸收

## 4.4 电磁波在色散介质中的传播

Fourier 变换

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx - i\omega(k)t} dk$$

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0) e^{-ikx} dx$$

相速度

$$v_p = \frac{\omega}{k}$$

群速度

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}$$

当  $k \approx k_0$  时，做 Taylor 展开，

$$\omega(k) \approx \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} (k - k_0)$$

代入得

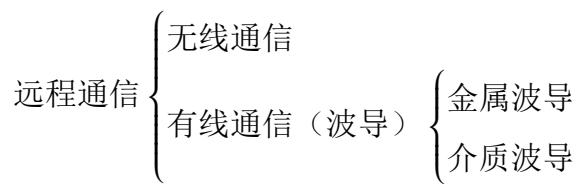
$$u(x, t) \approx u(x - v_g t, 0) e^{i(k_0 v_g - \omega_0)t}$$

此时  $v_g$  可以代表波包信息传播的速度和能量流动的速度

**注意**在某些情形下， $v_g$  可能超过光速或者是负的，但这不违反相对论，因为在这种情形下不能代表能量和信息传播的速度

#### 4.4.1 因果律与 Kramers-Kroning 关系

### 4.5 波导与谐振腔



#### 4.5.1 Maxwell 方程组的分离

$$\mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_3 + \mathbf{E}_{\perp} = E_z \mathbf{e}_3 + (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}) \times \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{B} = B_z \mathbf{e}_3 + \mathbf{B}_{\perp} = B_z \mathbf{e}_3 + (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}) \times \mathbf{e}_3$$

Maxwell 方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial z} + i\omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}_{\perp} &= \nabla_{\perp} E_z \\ \mathbf{e}_3 \cdot (\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp}) &= i\omega B_z \\ \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}}{\partial z} - i\mu\epsilon\omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_{\perp} &= \nabla_{\perp} B_z \\ \mathbf{e}_3 \cdot (\nabla_{\perp} \times \mathbf{B}_{\perp}) &= -i\mu\epsilon\omega E_z \end{aligned}$$

#### 4.5.2 金属波导

#### 4.5.3 谐振腔

#### 4.5.4 介质波导

##### 4.5.4.1 平面介质波导

##### 4.5.4.2 圆形介质波导

# 第五章 电磁波的辐射和散射

辐射：带电粒子变速运动  $\begin{cases} \text{宏观电流周期振荡 (第五章)} \\ \text{微观带电粒子变速运动 (第八章)} \end{cases}$

## 5.1 波动方程的推迟解

波动方程

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\mathbf{x}, t)$$

进行 Fourier 变换，得到 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2 + k^2) \tilde{\Psi}(\mathbf{x}, \omega) = -4\pi \tilde{f}(\mathbf{x}, \omega)$$

求解 Helmholtz 方程的 Green 函数：

$$(\nabla^2 + k^2) \tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$
$$\tilde{G}^{(\pm)}(\mathbf{R}) = \frac{e^{\pm i k R}}{R}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$$

波动方程的含时 Green 函数

$$(\nabla_{\mathbf{x}}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) G^{(\pm)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -4\pi \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t')$$
$$G^{(\pm)}(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\pm i k R}}{R} e^{-i\omega\tau} d\omega$$

在真空中， $k = \frac{\omega}{c}$

$$G^{(\pm)}(R, \tau) = \frac{\delta(\tau \mp \frac{R}{c})}{R} = \frac{\delta(t - (t' \pm \frac{R}{c}))}{R}$$

取 + 时为推迟格林函数，符合因果律，得到磁矢势

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int G^+(R, \tau) \mathbf{J}(\mathbf{x}', t') dV' dt' = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t - \frac{R}{c})}{R} dV'$$

## 5.2 辐射场的 Taylor 展开

考虑谐振源，

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$$

复振幅应当满足电荷守恒

辐射场

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{ikR}}{R} dV' \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= \frac{i}{ck\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{H} \end{aligned}$$

按照辐射源尺度  $d$ , 场点与原点距离  $r = |\mathbf{x}|$ , 波长  $\lambda$  分类, 假定总有  $r \gg d$ :

1. 近场区 (静态区):  $d \ll r \ll \lambda$
2. 中间区 (感应区):  $d \ll r \sim \lambda$
3. 远场区 (辐射区):  $d \ll \lambda \ll r$

在  $\lambda \gg d$  情况下,

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 + \frac{\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{x}'}{r} + \dots\right) \left(1 - ik\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{x}' + \dots\right)$$

### 5.2.1 电偶极辐射

保留最低阶

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'$$

根据3.3的方法,

$$\begin{aligned} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' &= - \int \mathbf{x}' (\nabla' \cdot \mathbf{J}) dV' \\ &= -i\omega \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') dV' \\ &= -i\omega \mathbf{p} \end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{p} \\ \mathbf{H} &= \frac{ck^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p} \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ k^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}) \times \hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}\right) e^{ikr} (3(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{p}) \hat{\mathbf{e}}_r - \mathbf{p}) \right\} \end{aligned}$$

取长波近似,

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{ck^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p} \\ \mathbf{E} &= \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} (\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}) \times \hat{\mathbf{e}}_r \end{aligned}$$

辐射功率

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2} \Re[r^2 \hat{\mathbf{e}}_r \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)] = \frac{ck^4}{32\pi^2\epsilon_0} p^2 \sin^2 \theta$$

$$P = \frac{ck^4}{12\pi\epsilon_0} p^2$$

$\theta$  为  $\mathbf{p}$  与  $\hat{\mathbf{e}}_r$  夹角

### 5.2.2 磁偶极辐射

保留到一阶,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left( \frac{1}{r} - ik \right) \int (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left( \frac{1}{r} - ik \right) \int \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \left( \frac{\mathbf{x}' \mathbf{J} - \mathbf{J} \mathbf{x}'}{2} \right) dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left( \frac{1}{r} - ik \right) \int \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \left( \frac{\mathbf{x}' \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{x}'}{2} \right) dV' \end{aligned}$$

考虑反对称部分

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left( \frac{1}{r} - ik \right) \int \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \left( \frac{\mathbf{x}' \mathbf{J} - \mathbf{J} \mathbf{x}'}{2} \right) dV' \\ &= \frac{ik\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left( 1 - \frac{1}{ikr} \right) \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{m} \end{aligned}$$

$\mathbf{m}$  为磁矩,  $\mathbf{A}$  类似电偶极辐射中的  $\mathbf{H}$ , 则磁场类似电偶极辐射中的电场

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ k^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{m}) \times \hat{\mathbf{e}}_r + \left( \frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{ikr} (3(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{m}) \hat{\mathbf{e}}_r - \mathbf{m}) \right\} \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 c k^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left( 1 - \frac{1}{ikr} \right) \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{m} \end{aligned}$$

辐射功率

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{1}{2} \Re[r^2 \hat{\mathbf{e}}_r \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)] = \frac{\mu_0 c k^4}{32\pi^2} m^2 \sin^2 \theta \\ P &= \frac{\mu_0 c k^4}{12\pi} m^2 \end{aligned}$$

$\theta$  为  $\mathbf{m}$  与  $\hat{\mathbf{e}}_r$  夹角, 要求磁偶极矩分量之间没有相位差

形式上电偶极辐射到磁偶极辐射的变换规则:

$$\begin{cases} \mathbf{p} \rightarrow \frac{\mathbf{m}}{c} \\ \mathbf{E} \rightarrow \frac{\mu_0}{c} \mathbf{H} \\ \frac{\mu_0}{c} \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E} \end{cases}$$

### 5.2.3 电四极辐射

考虑对称项，利用电荷守恒  $\nabla \cdot \mathbf{J} = i\omega\rho$

$$\begin{aligned} & \int \partial'_k (J_k(\mathbf{x}') x'_i x'_j) dV' = 0 \\ & \int (x'_i J_j(\mathbf{x}') + x'_j J_i(\mathbf{x}')) dV' + i\omega \int \rho(\mathbf{x}') x'_i x'_j dV' = 0 \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left( \frac{1}{r} - ik \right) \int \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \left( \frac{\mathbf{x}' \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{x}'}{2} \right) dV' \\ &= -\frac{\mu_0 c k^2}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left( 1 - \frac{1}{ikr} \right) \int \rho(\mathbf{x}') (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{x}') \mathbf{x}' dV' \end{aligned}$$

仅考虑远场区，

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{ik}{\mu_0} \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{A} \\ &= -\frac{ick^3}{24\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{e}}_r \times (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r) \\ \mathbf{E} &= \frac{i}{ck\epsilon_0} ik \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{H} \\ &= \frac{ik^3}{24\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{e}}_r \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)) \end{aligned}$$

辐射功率

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{ck^6}{1152\pi^2\epsilon_0} \hat{\mathbf{e}}_r \cdot [(\hat{\mathbf{e}}_r \times (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)) \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)))] \\ &= \frac{ck^6}{1152\pi^2\epsilon_0} |\hat{\mathbf{e}}_r \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r))|^2 \\ &= \frac{ck^6}{1152\pi^2\epsilon_0} |\hat{\mathbf{e}}_r \times (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)|^2 \end{aligned}$$

积分

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk} \epsilon_{ilm} &= \delta^j{}_l \delta^k{}_m - \delta^j{}_m \delta^k{}_l \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \\ (\hat{\mathbf{e}}_r \times (\mathbf{D}^* \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_r \times (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)) &= (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{D}^*) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{D}) - (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{D}^* \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r) \end{aligned}$$

由对称性,

$$\begin{aligned}
\int (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{D}^*) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{D}) r^2 d\Omega &= D_i^{*k} \delta_{kl} D_j^l \int n^i n^j d\Omega \\
&= D_i^{*k} \delta_{kl} D_j^l K_1 \delta^{ij} \\
&= K_1 \text{Tr}(\mathbf{D}^\dagger \mathbf{D}) \\
\int (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{D}^* \cdot \hat{\mathbf{e}}_r) (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r) r^2 d\Omega &= D_{ij}^* D_{kl} \int r^i r^j r^k r^l d\Omega \\
&= D_{ij}^* D_{kl} K_2 (\delta^{ij} \delta^{kl} + \delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}) \\
&= K_2 (\text{Tr}(\mathbf{D}^\dagger) \text{Tr}(\mathbf{D}) + 2 \text{Tr}(\mathbf{D}^\dagger \mathbf{D})) \\
\delta_{ij} \int n^i n^j d\Omega &= \int n^i n^i d\Omega = 4\pi \\
\delta_{ij} \delta_{kl} \int n^i n^j n^k n^l d\Omega &= \int (n^i)^2 (n^k)^2 d\Omega = 4\pi \\
K_1 d &= 4\pi, \quad K_2 (d^2 + 2d) = 4\pi \\
K_1 &= \frac{4}{3}\pi, \quad K_2 = \frac{4}{15}\pi \\
\text{Tr}(\mathbf{D}^\dagger) &= \text{Tr}(\mathbf{D}) = 0
\end{aligned}$$

则有

$$P = \frac{ck^6}{1440\pi\epsilon_0} \text{Tr}(\mathbf{D}^\dagger \mathbf{D})$$

## 5.3 辐射场的多极展开

球面波加法定理:

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = 4\pi ik \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l j_l(kr_<) h_l^{(1)}(kr_>) Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n})$$

角动量算符

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{L}} &= -i\mathbf{x} \times \nabla \\
\hat{\mathbf{L}}^2 &= -\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}) - \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \\
\hat{L}_\pm &= \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y
\end{aligned}$$

本征方程

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{L}}^2 Y_{lm} &= l(l+1) Y_{lm} \\
\hat{L}_z Y_{lm} &= m Y_{lm}
\end{aligned}$$

代入计算

$$\begin{aligned}
 \hat{L}_+ Y_{lm} &= \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} Y_{l,m+1} \\
 \hat{L}_- Y_{lm} &= \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} Y_{l,m-1} \\
 |\hat{\mathbf{L}} Y_{lm}|^2 &= |\hat{L}_x Y_{lm}|^2 + |\hat{L}_y Y_{lm}|^2 + |\hat{L}_z Y_{lm}|^2 \\
 &= \left| \frac{\hat{L}_+ + \hat{L}_-}{2} Y_{lm} \right|^2 + \left| \frac{\hat{L}_+ - \hat{L}_-}{2i} Y_{lm} \right|^2 + |\hat{L}_z Y_{lm}|^2 \\
 &= \frac{l(l+1) - m(m+1)}{2} |Y_{l,m+1}|^2 + \frac{l(l+1) - m(m-1)}{2} |Y_{l,m-1}|^2 + m^2 |Y_{lm}|^2
 \end{aligned}$$

## 5.4 电磁波的散射

# 第六章 狹義相對論

## 6.1 狹義相對論的基本假設與實驗驗證

基本假設：

1. 相對性原理：Galileo→Einstein
2. 光速不變原理：訊號傳遞的最大速度是光速

加上時空均勻、各向同性可以得到狹義相對論和相對論性電動力學

實驗驗證：

1. Michelson-Morley 實驗：光速不變
2. 運源光速測量：光學滅絕問題（Ewald-Oseen 灭絕定理）：當光進入探測器的介質時會使介質極化，完全抵消真空中的入射場並發出電磁波  
Alvager 實驗： $\pi^0$  介子衰變  
自由電子激光裝置 FLASH  
遙遠星體輻射

## 6.2 洛倫茲變換

時空均勻性  $\implies$  坐標變換為線性變換各向同性

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= A(|\nu'|)\Delta s'^2 \\ \Delta s'^2 &= A(|-\nu'|)\Delta s^2 = A(|\nu'|)\Delta s^2 = A(|\nu'|)^2 \Delta s^2\end{aligned}$$

由變換的連續性， $A=1$ ，

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2$$

Minkowski 時空：四維間隔不變

- 類時： $\Delta s^2 > 0$
- 類空： $\Delta s^2 < 0$
- 類光： $\Delta s^2 = 0$

Lorentz 變換：

考慮  $K'$  系沿  $K$  系  $x$  軸以勻速  $v$  運動， $t=0$  時兩系坐標原點重合

$$\begin{aligned}ct' &= x \sinh \psi + ct \cosh \psi \\ x' &= x \cosh \psi + ct \sinh \psi\end{aligned}$$

其中  $\tanh \psi = -\frac{v}{c}$  得到 Lorentz 变换

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

速度方向一般情况下：

$$ct' = \gamma(ct - \beta \cdot x)$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + (\gamma - 1) \frac{\beta \cdot \mathbf{x}}{\beta^2} \beta - \gamma \beta ct$$

同时相对性，因果性

## 6.3 四维张量

标量：Lorentz 变换下不变的量，间隔平方  $\Delta s^2$ ，四维体积元  $d^4x$

四维矢量：

1. 逆变矢量： $A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu$

$$x^\mu = (ct, \mathbf{x})$$

$$k^\mu = \left( \frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right)$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

2. 协变矢量： $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$

$$x_\mu = (ct, -\mathbf{x})$$

度规  $\eta_{\mu\nu}$  和度规的逆  $\eta^{\mu\nu}$ ，

$$\eta_{\mu\beta} \eta^{\beta\nu} = \delta_\mu^\nu$$

Minkowski 时空的度规：

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

指标缩并

内积:  $A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu$  任意两个矢量的内积是标量

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

$$\phi = k^\mu x_\mu$$

$$\text{d'Alembert 算符: } \square = -\partial^\mu \partial_\mu = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$$

相对性原理给出正确物理方程的必要条件: 以正确的张量形式写出, 称为协变性

## 6.4 Lorentz 变换的数学性质

内积不变给出

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}$$

$$\implies \det \Lambda = \pm 1$$

Lorentz 变换构成 Lorentz 群,  $O(1, 3)$ , 是无限群, 是 Lie 群, 每个元素可以用六个实参数表示,

$$\Lambda = e^{i\theta_i S_i - \omega_i K_i}$$

这里三维矢量  $\theta, \omega$  和三阶矩阵  $S, K$  不遵循上下标约定, 仍有重复求和  
其中  $\theta_i$  为旋转角,  $\omega_i$  为 boost 角,  $S_i$  为旋转生成元,  $K_i$  为 boost 生成元

$$iS_{1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_{1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对易关系

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk} S_k,$$

$$[K_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} S_k,$$

$$[S_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k$$

仅涉及 boost 的 Lorentz 变换:

$$\Lambda(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_1^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_2^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_3\beta_1}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

# 第七章 相对论性电动力学

本章采用高斯单位制

## 7.1 自由粒子

$$S = -mc \int ds = -mc^2 \int d\tau$$
$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$m$  是一个非负 Lorentz 标量，称为静止质量

重参数化不变性：

$$x^\mu = x^\mu(\tau) = x^\mu(\tau(t\tilde{u}))$$
$$S = -mc \int d\tau \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau}} = -mc \int d\tilde{\tau} \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tilde{\tau}} \frac{dx_\mu}{d\tilde{\tau}}}$$

$\tau$  可以是固有时，也可以是固有时的任意单调递增函数

正则动量

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Hamiltonian

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

定义协变四维速度

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \gamma(1, \frac{\mathbf{v}}{c})$$

根据最小作用量原理得到运动方程

$$\frac{du_\mu}{ds} = 0$$

四维动量

$$p^\mu = mc u^\mu = (\frac{E}{c}, \mathbf{p})$$

零质量粒子：

引入世界线的单元基：正定标量函数  $e(\tau)$ ，作用量

$$S = -\frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{e(\tau)} \frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + e(\tau) m^2 c^2 \right) d\tau$$

对  $e(\tau)$  变分

$$\frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} - e(\tau)^2 m^2 c^2 = 0$$

$$e(\tau) = \frac{1}{mc} \sqrt{\frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau}}$$

代入后得到原来的结果. 对于零质量粒子也适用

重参数化不变性

$$\tilde{e}(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} = e(\tau) d\tau$$

## 7.2 电磁场中的粒子

电荷  $e$  也是 Lorentz 标量

作用量

$$S = -mc \int ds - \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu$$

四维矢量势

$$A^\mu(x) = (\Phi(x), \mathbf{A}(x))$$

Lagrangian

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\Phi$$

正则动量

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

Hamiltonian

$$H = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - L = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2} + e\Phi$$

最小作用量原理

$$\begin{aligned} \delta S &= mc \int \frac{du_\mu}{ds} \delta x^\mu ds - \frac{e}{c} \int (\delta A_\mu dx^\mu + A_\mu \delta x^\mu) \\ &= mc \int \frac{du_\mu}{ds} \delta x^\mu ds - \frac{e}{c} \int (\partial_\nu A_\mu \delta x^\nu dx^\mu - \partial_\nu A_\mu dx^\nu \delta x^\mu) \\ &= mc \int \frac{du_\mu}{ds} \delta x^\mu ds - \frac{e}{c} \int (\partial_\mu A_\nu \delta x^\mu dx^\nu - \partial_\nu A_\mu dx^\nu \delta x^\mu) \end{aligned}$$

得到运动方程

$$mc \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu$$

电磁场场强张量

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ &= \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 7.3 电磁场

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$$

在仅有推促的 Lorentz 变换下

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})\boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B})\boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

Bianchi 恒等式 (对应无源齐次 Maxwell 方程)

$$\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0$$

或者定义对偶张量

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Bianchi 恒等式

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

作用量

$$S = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x$$

带电粒子作用量电磁场项

$$S_{int} = -\frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu = -\frac{1}{c^2} \int A_\mu J^\mu d^4x$$

合在一起

$$S = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x - \frac{1}{c^2} \int A_\mu J^\mu d^4x$$

最小作用量原理  $\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = 0$  得到有源 Maxwell 方程

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

电流密度四维矢量

$$J^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt} = (c\rho, \mathbf{J})$$

电荷守恒定律

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

四维协变电磁规律：

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \\ \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0 \\ \partial_\mu J^\mu = 0 \end{cases}$$

## 7.4 宏观运动物体中的电磁场

考虑相对论效应的一阶修正

### 7.4.1 运动的电介质

$(D, H)$  构成场张量  $H_{\mu\nu}$

电介质中 Maxwell 方程组

$$\partial_\mu H^{\mu\nu} = 0$$

本构关系：Minkowski 方程

$$H^{\mu\nu} u_\nu = \epsilon F_{\mu\nu} u^\nu$$

$$F_{\mu\nu} u_\lambda + F_{\nu\lambda} u_\mu + F_{\lambda\mu} u_\nu = \mu (H_{\mu\nu} u_\lambda + H_{\nu\lambda} u_\mu + H_{\lambda\mu} u_\nu)$$

三维形式

$$\mathbf{D} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H} = \epsilon (\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} = \mu (\mathbf{H} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{D})$$

一阶近似

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + (\epsilon\mu - 1) \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} - (\epsilon\mu - 1) \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}$$

边界条件

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \beta_n(\mu_2 - \mu_1)\mathbf{H}_t \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = -\beta_n(\epsilon_2 - \epsilon_1)\mathbf{E}_t \end{cases}$$

$\mathbf{E}_t$  和  $\mathbf{H}_t$  不需要区分是何种介质，因为两种介质切向分量差值为小量

## 7.4.2 运动的导体

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}'$$

代入到电磁感应定律和环路定律，

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \nabla^2 \mathbf{H}$$

## 7.5 均匀静电磁场中带电粒子的运动

### 7.5.1 在均匀静电场中的运动

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) + e\mathbf{E}_0 t$$

### 7.5.2 在均匀静磁场中的运动

设  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_3$

回旋频率

$$\omega_B = \frac{eB}{\gamma mc}$$

回旋半径

$$a = \frac{cp_{\perp}}{eB}$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_{\parallel} + \omega_B a (\cos \omega_B t \mathbf{e}_1 - \sin \omega_B t \mathbf{e}_2)$$

### 7.5.3 在正交静电磁场中的运动

换到参照系  $K'$ ，回归到只有静电场或静磁场的情况。设  $K'$  速度为  $\mathbf{u}$

$$1. |\mathbf{B}| > |E|: \mathbf{u} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}$$

$$\mathbf{E}' = 0, \mathbf{B}' = \sqrt{\frac{B^2 - E^2}{E^2}} \mathbf{B}$$

$$2. |\mathbf{B}| < |E|: \mathbf{u} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{E}|^2}$$

$$\mathbf{E}' = \sqrt{\frac{E^2 - B^2}{E^2}} \mathbf{E}, \mathbf{B}' = 0$$

#### 7.5.4 在一般电磁场中的运动

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^\mu{}_\nu u^\nu$$

利用 Lorentz 变换生成元,

$$F^\mu{}_\nu \rightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{K} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$$

$$u(\tau) = u(0) e^{\frac{e\tau}{mc} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{K} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}]}$$

# 第八章 运动带电粒子的辐射

## 8.1 Liénard-Wiechert 势

直接在四维协变形式下求解

规范条件  $\partial_\mu A^\mu = 0$

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c} J^\nu \\ \partial_\mu \partial^\mu &= \frac{4\pi}{c} J^\nu\end{aligned}$$

考虑 d'Alembert 算符的四维协变形式 Green 函数  $D(x, x')$

$$-\partial_\mu \partial^\mu D(x, x') = \delta^4(x - x')$$

Fourier 变换解得

$$D(x, x') = \int \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-x')}}{k^2} d^4 k$$

$k^2$  在实轴上有奇点，选取推迟 Green 函数

$$D^{(+)}(x, x') = \int \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-x')}}{(k^0 + i\epsilon)^2 - \mathbf{k}^2} d^4 k$$

由复变函数 Jordan 引理，

1. 若  $x_0 < x'_0$ ，积分围道在上半平面，结果为 0
2. 若  $x_0 > x'_0$ ，积分围道在下半平面，结果为  $k_0 = \pm|\mathbf{k}|$  处留数之和

$$\begin{aligned}D^{(+)}(x, x') &= \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} d^3 \mathbf{k} \int \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i\mathbf{k}^0 R_0}}{(k^0 + i\epsilon)^2 - \mathbf{k}^2} dk^0 \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} d^3 \mathbf{k} i \left( \frac{e^{-i|\mathbf{k}| R_0}}{2|\mathbf{k}|} - \frac{e^{i|\mathbf{k}| R_0}}{2|\mathbf{k}|} \right) \\ &= -i \int \frac{1}{16\pi^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} d^3 \mathbf{k} \frac{e^{i|\mathbf{k}| R_0} - e^{-i|\mathbf{k}| R_0}}{|\mathbf{k}|} \\ &= -\frac{i}{8\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \frac{e^{i|\mathbf{k}| R_0} - e^{-i|\mathbf{k}| R_0}}{|\mathbf{k}|} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{R}|\cos\theta} |\mathbf{k}|^2 \sin\theta d|\mathbf{k}| d\theta \\ &= -\frac{i}{8\pi^2} \int_0^{+\infty} |\mathbf{k}| (e^{i|\mathbf{k}| R_0} - e^{-i|\mathbf{k}| R_0}) \frac{e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{R}|} - e^{-i|\mathbf{k}||\mathbf{R}|}}{i|\mathbf{k}||\mathbf{R}|} d|\mathbf{k}| \\ &= -\frac{1}{4\pi|\mathbf{R}|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i|\mathbf{k}|(R_0+|\mathbf{R}|)} - e^{-i|\mathbf{k}|(R_0-|\mathbf{R}|)}) d|\mathbf{k}| \\ &= -\frac{1}{4\pi|\mathbf{R}|} (\delta(R_0 + |\mathbf{R}|) - \delta(R_0 - |\mathbf{R}|)) \\ &= \frac{1}{4\pi|\mathbf{R}|} \delta(x_0 - x'_0 - |\mathbf{R}|)\end{aligned}$$

结合上述讨论，推迟 Green 函数

$$D^{(+)}(x, x') = \frac{\theta(x_0 - x'_0)}{4\pi|\mathbf{R}|} \delta(x_0 - x'_0 - |\mathbf{R}|) = \frac{\theta(x_0 - x'_0)}{2\pi|\mathbf{R}|} \delta((x - x')^2)$$

推迟势

$$A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int D^{(+)}(x, x') J^\mu(x') d^4x' \quad (8.1)$$

真空中运动的粒子产生的势  $A^\mu(x)$ , 世界线  $r^\mu(\tau)$

$$\begin{aligned} J^\mu(x') &= ec^2 \int u^\mu(\tau) \delta^4(x' - r(\tau)) d\tau \\ A^\mu(x) &= \frac{4\pi}{c} \int D^{(+)}(x, x') J^\mu(x') d\tau \\ &= 2ec \int u^\mu(\tau) \theta(x^0 - r^0(\tau)) \delta((x - r(\tau))^2) d\tau \end{aligned}$$

$\delta$  函数只在  $\tau_0$  处有贡献,  $(x - r(\tau_0))^2 = 0, x^0 - r^0(\tau_0) = |\mathbf{R}|$

$$\begin{aligned} \delta((x - r(\tau))^2) &= \frac{\delta(\tau - \tau_0)}{\frac{d}{d\tau}(x - r(\tau))^2|_{\tau=\tau_0}} = \frac{\delta(\tau - \tau_0)}{2(x - r(\tau)) \frac{d}{d\tau}(x - r(\tau))|_{\tau=\tau_0}} \\ A^\mu(x) &= \left. \frac{eu^\mu(\tau)}{u \cdot (x - r(\tau))} \right|_{\tau=\tau_0} \end{aligned}$$

改写成三维形式

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})R} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e\boldsymbol{\beta}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})R} \end{aligned}$$

电磁场

$$\begin{aligned} \partial^\mu \delta((x - r(\tau))^2) &= -\frac{(x - r)^\mu}{u \cdot (x - r)} \frac{d}{d\tau} \delta((x - r(\tau))^2) \\ \partial^\nu A^\mu &= 2ec \int u^\mu(\tau) \theta(x^0 - r^0(\tau)) \partial^\nu \delta((x - r(\tau))^2) d\tau \\ &= 2ec \int \delta((x - r(\tau))^2) \frac{d}{d\tau} [u^\mu(\tau) \frac{(x - r)^\nu}{u \cdot (x - r)}] d\tau \\ &= 2ec \left. \frac{d}{d\tau} [u^\mu(\tau) \frac{(x - r)^\nu}{u \cdot (x - r)}] \right|_{\tau=\tau_0} \\ F^{\mu\nu} &= 2ec \left. \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{(x - r)^\mu u^\nu - (x - r)^\nu u^\mu}{u \cdot (x - r)} \right] \right|_{\tau=\tau_0} \end{aligned}$$

三维形式

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{e(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{\gamma^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R^2} + \frac{e \mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{c(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{n} \times \mathbf{E} \end{aligned}$$

## 8.2 Larmor 公式与 Thomson 散射

Larmor 公式：在非相对论极限  $\beta \ll 1$  下，辐射功率

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{cR^2}{4\pi} |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \sin^2 \Theta$$

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2$$

Liénard 公式：推广到相对论情况， $P$  是 Lorentz 不变量，

$$P = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left( \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{dE}{d\tau} \right)^2 \right)$$

$$= \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} [\dot{\beta}^2 - (\beta \times \dot{\beta})^2]$$

$t$  时刻观测的辐射，在  $t' = t - \frac{R}{c}$  时刻发出，

$$dt = dt' (1 - \beta \cdot \mathbf{n})$$

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = R^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \frac{dt}{dt'}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi c} \frac{|\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \beta) \times \dot{\beta}|^2}{(1 - \beta \cdot \mathbf{n})^5}$$

1. 沿  $z$  轴直线运动：

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}$$

2. 圆周运动： $\beta$  沿  $z$  轴， $\dot{\beta}$  沿  $x$  轴

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{\dot{v}^2}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left[ 1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right]$$

Thomson 散射：在低频情况下自由电子对电磁波的散射

入射波

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega t}$$

$$\mathbf{e}_0 = \cos \phi_0 \hat{x} + \sin \phi_0 \hat{y}$$

$$\mathbf{k}_0 = k_0 \hat{z}$$

偏振为  $\mathbf{e}$  的散射波

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{cR^2}{8\pi} |\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*| = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}_0|^2$$

能流

$$I = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2$$

微分散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}_0|^2$$

对  $\mathbf{e}_\theta$  和  $\mathbf{e}_\phi$  两个偏振方向取平均后相加

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \\ \sigma &= \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\end{aligned}$$

## 8.3 频谱分析

频谱：带电粒子辐射电磁波的能量按角频率的分布

### 8.3.1 连续谱

连续谱：非周期性运动粒子

$$\begin{aligned}\frac{dP(t)}{d\Omega} &= \frac{e^2}{4\pi c} \left| \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \right|^2 = |A(t)|^2 \\ \frac{dW}{d\Omega} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |A(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |A(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} d\omega \\ \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} &= 2|A(\omega)|^2 \\ A(\omega) &= \sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2 c}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} dt \\ &= \sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2 c}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t' + \frac{R(t')}{c})} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^2} dt'\end{aligned}$$

假定辐射粒子的运动在原点附近， $R(t') \approx |\mathbf{x}| - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t')$

$$\begin{aligned}A(\omega) &= \sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2 c}} e^{i\omega \frac{|\mathbf{x}|}{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t')}{c})} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')}{(1 - \boldsymbol{\beta}(t') \cdot \mathbf{n})^2} dt' \\ \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} &= \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t')}{c})} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')}{(1 - \boldsymbol{\beta}(t') \cdot \mathbf{n})^2} dt' \right|^2 \\ &= \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t')}{c})} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}(t))] dt' \right|^2\end{aligned}$$

### 8.3.2 分立谱

分立谱：周期性运动粒子

$$\frac{dP}{d\Omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |A_n|^2 = |A_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |A_n|^2$$

$\omega_n = n\omega_0$  平均功率角分布

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{d\Omega} &= 2|A_n|^2 \\ &= \frac{e^2 n^2 \omega_0^2}{2\pi c T^2} \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{i\omega(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t')}{c})} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}(t'))] dt' \right|^2 \end{aligned}$$

同步辐射：相对论性带电粒子周期性圆周运动的辐射

带电粒子圆周运动圆频率为  $\omega_0$ , 半径为  $a$ , 在  $xOy$  平面内做匀速圆周运动, 取圆心为原点

$$\mathbf{r}(t) = a(\cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t, 0)$$

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \beta(-\sin \omega_0 t, \cos \omega_0 t, 0)$$

$$\beta = \frac{\omega_0 a}{c}$$

$$\mathbf{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$$

偏振方向

$$\boldsymbol{\epsilon}_{||} = -\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{z}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\perp} = -\hat{y}$$

Schott 公式：频谱角分布

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{d\Omega} &= \frac{e^2 n^2 \omega_0^2}{2\pi c} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{in(\phi - \beta \sin \theta \cos \phi)} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})] d\phi \right|^2 \\ &= \frac{e^2 n^2 \omega_0^2}{2\pi c} |\cot \theta J_n(n\beta \sin \theta) \boldsymbol{\epsilon}_{||} + i\beta J'_n(n\beta \cos \theta) \boldsymbol{\epsilon}_{\perp}|^2 \\ &= \frac{e^2 n^2 \omega_0^2}{2\pi c} [\cot^2 \theta J_n^2(n\beta \sin \theta) + \beta^2 J'_n(n\beta \cos \theta)] \end{aligned}$$

积分得到

$$P_n = \frac{2e^2 \omega_0}{v} [n\beta^2 J'_{2n}(2n\beta) - \frac{n^2}{\gamma^2} \int_0^\beta J_{2n}(2n\xi) d\xi]$$

对于极端相对论情形,  $n \gg 1$  起主要作用,

$$P_n = -\frac{2e^2 \omega_0^2 n^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\pi} c} [\Phi'(u) + \frac{u}{2} \int_u^{+\infty} \Phi(u) du]$$

其中 Airy 函数  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos(\frac{t^3}{3} - xt) dt$ ,  $u = n^{\frac{2}{3}} \gamma^{-2}$

1.  $1 \ll n \ll \gamma$

$$P_n \approx 0.52 \frac{e^2 \omega_0^2}{c} n^{\frac{1}{3}}$$

2.  $n \ll \gamma$

$$P_n = \frac{e^2 \omega_0^2}{2\sqrt{\pi}c} \sqrt{\frac{n}{\gamma}} e^{-\frac{2}{3}n\gamma^{-3}}$$

## 8.4 Cherenkov 辐射

高速带电粒子穿过介质

波动方程

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Phi - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{\epsilon} \mathbf{J}\end{aligned}$$

Fourier 变换得到

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) &= 2\pi e \mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \\ \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{8\pi^2 e \beta}{\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})\end{aligned}$$

假设速度沿  $z$  方向

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 4\pi e \beta \int \frac{e^{ik_3(x_3-vt)} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}}{k_3^2(1-\beta^2\epsilon) + \mathbf{k}_\perp^2} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}$$

近似将  $\epsilon$  视为常数，当  $\beta > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$  时，类似于推迟 Green 函数，在  $x_3 < vt$  积分才不为 0，则以粒子为顶点，电磁势不为 0 的点构成一个锥体，半锥角

$$\theta_C = \arccos \frac{c}{v\sqrt{\epsilon}}$$

矢势

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{4\pi e \beta}{1-\beta^2\epsilon} \iiint \frac{e^{ik_3(x_3-vt)} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}}{k_3^2 - (\frac{\mathbf{k}_\perp}{\sqrt{\eta^2\epsilon-1}})^2} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{4\pi e \beta}{1-\beta^2\epsilon} \iint \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp} i \frac{e^{ik_\perp \frac{x_3-vt}{\sqrt{\beta^2\epsilon-1}}} - e^{-ik_\perp \frac{x_3-vt}{\sqrt{\beta^2\epsilon-1}}}}{2 \frac{k_\perp}{\sqrt{\beta^2\epsilon-1}}} \\ &= \frac{e \beta}{\pi \sqrt{\beta^2\epsilon-1}} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{ik|\mathbf{x}_\perp| \cos \theta} \sin(k \frac{x_3-vt}{\sqrt{\beta^2\epsilon-1}}) dk d\theta \\ &= \frac{2e \beta}{\sqrt{\beta^2\epsilon-1}} \int_0^{+\infty} J_0(k|\mathbf{x}_\perp|) \sin(k \frac{x_3-vt}{\sqrt{\beta^2\epsilon-1}}) dk \\ &= \frac{2e \beta}{\sqrt{(x_3-vt)^2 - (\beta^2\epsilon-1)\mathbf{x}_\perp^2}}\end{aligned}$$

## 8.5 辐射阻尼

辐射阻尼：带电粒子自身辐射的电磁场对自身运动的影响（经典电动力学不能完美解决）  
Abraham-Lorentz 方程：能量角度的反作用

$$m\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{rad}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\mathbf{v}} \cdot \ddot{\mathbf{v}} dt$$

分部积分得到

$$\mathbf{F}_{rad} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}} = m\tau \ddot{\mathbf{v}}$$

得到 Abraham-Lorentz 方程

$$m(\ddot{\mathbf{v}} - \tau \ddot{\mathbf{v}}) = \mathbf{F}_{ext}$$

该方程存在发散解，对于发散解，分部积分的边界项不可以舍去

Abraham-Lorentz 模型：动量角度的反作用

系统动量守恒

$$\int (\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV = 0$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_{self}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_{ext} + \mathbf{B}_{self}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} = - \int (\rho \mathbf{E}_{self} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}_{self}) dV$$

选定合适参考系使电流为 0

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \int dV \rho(\mathbf{x}, t) [\nabla \Phi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}]$$

Taylor 展开

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! c^n} \int dV \int dV' \rho(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^n}{\partial t^n} [\rho(\mathbf{x}', t) \nabla R^{n-1} + \frac{R^{n-1}}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{\partial t}]$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{c^{n+2}} \frac{2}{3n!} \frac{\partial^{n+1} \mathbf{v}}{\partial t^{n+1}} \int dV \int dV' \rho(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}', t) R^{n-1}$$

$n = 0$  项

$$\left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)_{n=0} = \frac{2}{3c^2} \dot{\mathbf{v}} \int dV \int dV' \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{R} = \frac{4U_{em}}{3c^2} \dot{\mathbf{v}}$$

静电能

$$U_{em} = \frac{1}{2} \int dV \int dV' \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{R}$$

电磁质量

$$m_{em} = \frac{U_{em}}{c^2}$$

$n = 1$  项

$$\left( \frac{dp}{dt} \right)_{n=1} = -\frac{2e^2}{3c^3} \ddot{v}$$

更高阶项在带电粒子尺度  $a \rightarrow 0$  时会趋于 0

$$\frac{4}{3}m_{em}\dot{v} - \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{v} = F_{ext}$$

该模型的缺陷在于， $a \rightarrow 0$  时静电能会发散，要求带电粒子有非零尺度（电子的经典半径） $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ . 在  $r_0$  尺度之下，需要运用量子电动力学，电子自能按  $a$  的对数发散，需要重整化才能解决

# 附录 A 特殊函数

## A.1 球函数

Legendre 方程:

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dy}{dx}) + \nu(\nu+1)y = 0$$

复方程的解为  $\nu$  次 Legendre 函数

$$P_\nu(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$
$$Q_\nu(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{e^{-i\nu\pi} P_\nu(z) - P_\nu(-z)}{\sin \nu\pi}, & \Im z > 0 \\ \frac{\pi}{2} \frac{e^{i\nu\pi} P_\nu(z) - P_\nu(-z)}{\sin \nu\pi}, & \Im z < 0 \end{cases}$$

在  $[-1, 1]$  上的解:

- 在  $x = 1$  处,  $P_\nu(x)$  有界,  $Q_\nu(x)$  对数发散, 解中不含  $Q_\nu(x)$
- 在  $x \rightarrow -1$  时,

$$P_\nu(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$
$$= -\frac{\sin \nu\pi}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\nu+n+1)\Gamma(n-\nu)}{(n!)^2} (-1)^n \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$
$$\sim \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \ln \frac{2}{1+x}$$

对数发散, 需要截断为多项式,  $\nu$  为自然数  $l$ , 得到  $l$  次 Legendre 多项式

$$P_l(x) = \sum_{n=0}^l \frac{1}{(n!)^2} \frac{(l+n)!}{(l-n)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

连带 Legendre 方程:

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dy}{dx}) + (\nu(\nu+1) - \frac{m^2}{1-x^2})y = 0$$

1. 复方程的解为

$$P_\nu^m(z) = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_\nu(z)}{dz^m}$$
$$Q_\nu^m(z) = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_\nu(z)}{dz^m}$$

2. 实轴上的解定义为

$$\begin{aligned} P_\nu^m(x) &= i^m P_\nu^m(x + 0i) = i^{-m} P_\nu^m(x - 0i) \\ &= (-)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_\nu(x)}{dx^m} \\ Q_\nu^m(x) &= \frac{(-)^m}{x} (i^{-m} Q_\nu^m(x + 0i) + i^m Q_\nu^m(x - 0i)) \\ &= (-)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_\nu(x)}{dx^m} \end{aligned}$$

3. 在  $[-1, 1]$  上的解:

- 在  $x = 1$  处,  $P_\nu^m(x)$  有界,  $Q_\nu^m(x)$  对数发散, 解中不含  $Q_\nu^m(x)$
- 在  $x = -1$  处,  $P_\nu^m(x)$  发散, 要求  $P_\nu(x)$  截断为多项式,  $\nu$  为自然数且  $\nu \geq m$

本征函数为  $m$  阶  $l$  次连带 Legendre 多项式:

$$\begin{aligned} P_l^m(x) &= (-)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \\ P_l^{-m}(x) &= (-)^m \frac{(l - m)!}{(l + m)!} P_l^m(x) \end{aligned}$$

球谐函数

$$\begin{aligned} Y_{l,m}(\mathbf{n}) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \\ Y_{l,-m}(\mathbf{n}) &= (-)^m Y_{l,m}^*(\mathbf{n}) \end{aligned}$$

### A.1.1 Legendre 多项式的性质

- 微分形式: Rodrigues 公式

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

- 正交完备性

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx &= \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \\ \int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx &= \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \\ \int Y_{lm}^*(\mathbf{n}) Y_{l'm'}(\mathbf{n}) d\Omega &= \delta_{ll'} \delta_{mm'} \\ \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}) &= \delta(\cos \theta' - \cos \theta) \delta(\phi' - \phi) \end{aligned}$$

- 生成函数

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{l=0}^{+\infty} P_l(x) t^l, \quad |t| < \min|x \pm \sqrt{x^2 - 1}|$$

- 递推关系

$$\begin{cases} P'_{l+1}(x) = xP'_l(x) + (l+1)P_l(x) \\ P'_{l-1}(x) = xP'_l(x) - lP_l(x) \end{cases}$$

## A.2 柱函数

Bessel 方程

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx^2} (x \frac{dy}{dx}) + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0$$

Bessel 函数

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

Neumann 函数

$$N_\nu(x) = \frac{\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$$

(1) 当  $\nu \notin \mathbb{Z}$  时, Bessel 方程的解为  $J_\nu(x)$  和  $J_{-\nu}(x)$  的线性组合

(2) 当  $\nu = m \in \mathbb{Z}$  时,  $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ , Bessel 方程的解为  $J_m(x)$  与  $N_m(x)$  的线性组合

Hankel 函数

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + iN_\nu(x) \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - iN_\nu(x) \end{aligned}$$

虚宗量 Bessel 函数

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &= i^{-\nu} J_\nu(ix) \\ K_\nu(x) &= \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} (I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)) \end{aligned}$$

球 Bessel 方程

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} (x^2 \frac{dy}{dx}) + (1 - \frac{l(l+1)}{x^2})y = 0$$

解为球 Bessel 函数

$$\begin{aligned} j_l(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x) \\ n_l(x) &= (-)^{l+1} j_{-l-1}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+\frac{1}{2}}(x) \end{aligned}$$

球 Hankel 函数

$$\begin{aligned} h_l^{(1)}(x) &= j_l(x) + in_l(x) \\ h_l^{(2)}(x) &= j_l(x) - in_l(x) \end{aligned}$$

### A.2.1 递推关系

上述函数统称为柱函数，均满足：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^\nu C_\nu(x)) &= x^\nu C_{\nu-1}(x) \\ \frac{d}{dx}(x^{-\nu} C_\nu(x)) &= -x^{-\nu} C_{\nu+1}(x)\end{aligned}$$

### A.2.2 渐进展开

$x \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}J_\nu(x) &\sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \\ N_\nu(x) &\sim -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}, \quad N_0(x) \sim \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2}\end{aligned}$$

$x \rightarrow \infty, |\arg(x)| < \pi$ :

$$\begin{aligned}J_\nu(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ N_\nu(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ H_\nu^{(1)}(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \\ H_\nu^{(2)}(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \\ j_l(x) &\sim \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right) \\ n_l(x) &\sim -\frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{l\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$|x| \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned}I_\nu(x) &\sim \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x \\ K_\nu(x) &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}\end{aligned}$$

### A.2.3 整数阶的生成函数与积分表示

生成函数：

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) t^n, \quad 0 < |t| < \infty$$

积分表示：

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta$$

### A.3 常用展开式

下取  $r = |\mathbf{x}|, r' = |\mathbf{x}'|, r_> = \max\{r, r'\}, r_< = \min\{r, r'\}$ ,  $\gamma$  为  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{k}$  夹角  
加法定理:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n})$$

平面波按柱面波展开: 生成函数中取  $t = ie^{i\theta}$ ,

$$e^{ikr \cos \theta} = J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} i^n \cos n\theta J_n(kr)$$

平面波按球面波展开:

$$e^{ik \cdot \mathbf{x}} = 4\pi \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l i^l j_l(kr) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{n}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})$$