



电动力学笔记

作者：温晨煜

组织：清华大学致理书院

版本：1.0



目录

第一章 电动力学基本规律	1
1.1 真空中的 Maxwell 方程组	1
1.2 电磁势与规范对称性	2
1.3 介质中的 Maxwell 方程组	2
1.4 电磁守恒律	3
第二章 静电学	5
2.1 Poisson 方程	5
2.1.1 无边界的无穷大空间中的解	5
2.1.2 Green 函数法	5
2.1.3 静电镜像法	6
2.1.4 Laplace 方程的分离变量法	6
2.2 多极展开	7
第三章 静磁学	8
3.1 Poisson 方程	8
3.2 磁场的能量	8
3.3 磁多极展开	8
3.4 磁标势	9
第四章 电磁波的传播	11
4.1 电磁波在介质界面的折射与反射	11
4.2 电磁波在导电介质中的传播	12
4.3 介质色散的经典模型	13
4.4 电磁波在色散介质中的传播	13
4.4.1 因果律与 Kramers-Kronig 关系	14
4.5 波导与谐振腔	14
4.5.1 Maxwell 方程组的分离	14
4.5.2 金属波导	14
4.5.3 谐振腔	14
4.5.4 介质波导	14
4.5.4.1 平面介质波导	14
4.5.4.2 圆形介质波导	14
第五章 电磁波的辐射和散射	15

5.1 波动方程的推迟解	15
5.2 辐射场的 Taylor 展开	15
5.2.1 电偶极辐射	16
5.2.2 磁偶极辐射	17
5.2.3 电四极辐射	18
5.3 辐射场的多极展开	19
5.4 电磁波的散射	20
第六章 狭义相对论	21
6.1 狭义相对论的基本假设与实验验证	21
6.2 洛伦兹变换	21
6.3 四维张量	22
6.4 Lorentz 变换的数学性质	23
第七章 相对论性电动力学	24
7.1 自由粒子	24
7.2 电磁场中的粒子	25
7.3 电磁场	26
7.4 宏观运动物体中的电磁场	27
7.4.1 运动的电介质	27
7.4.2 运动的导体	28
7.5 均匀静电磁场中带电粒子的运动	28
7.5.1 在均匀静电场中的运动	28
7.5.2 在均匀静磁场中的运动	28
7.5.3 在正交静电磁场中的运动	28
7.5.4 在一般电磁场中的运动	29
第八章 运动带电粒子的辐射	30
8.1 Liénard-Wiechert 势	30
8.2 Larmor 公式与 Thomson 散射	32
8.3 频谱分析	33
8.3.1 连续谱	33
8.3.2 分立谱	34
8.4 Cherenkov 辐射	35
8.5 辐射阻尼	36
附录 A 特殊函数	38
A.1 球函数	38

A.1.1 Legendre 多项式的性质	39
A.2 柱函数	40
A.2.1 递推关系	41
A.2.2 渐进展开	41
A.2.3 整数阶的生成函数与积分表示	41
A.3 常用展开式	42

第一章 电动力学基本规律

内容提要

- 真空与介质中的 Maxwell 方程组
- 电荷、能量、动量、角动量守恒
- 电磁势

1.1 真空中的 Maxwell 方程组

定理 1.1 (真空中的 Maxwell 方程组)

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

定理 1.2 (洛伦兹力公式)

力的密度

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

性质 Maxwell 方程组的性质

- 线性
- 洛伦兹协变性
- 规范对称性
- 分立对称性
 - 空间反射变换 (宇称变换) $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$, 有 $\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}, \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$
 - 称在空间反射变换下改变符号的三维矢量为极矢量
 - 称在空间反射变换下不变的三维矢量为轴矢量
 - 时间反演变换 $t \rightarrow -t$ 下, 有 $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}, \mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$

1.2 电磁势与规范对称性

定义 1.1 (电磁势)

关于电磁势的方程是二阶偏微分方程

电磁势 (Φ, \mathbf{A}) 中, Φ 称为标量势, 简称标势; \mathbf{A} 称为矢量势, 简称矢势.

电磁场与电磁势的关系为

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.1)$$

电磁势的选取不是唯一的。若电磁势 (Φ', \mathbf{A}') 与 (Φ, \mathbf{A}) 对应于相同的电磁场 (\mathbf{E}, \mathbf{B}) , 则二者满足规范变换

$$\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \\ \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 Λ 为任意标量场。电磁场这样的对称性称为规范对称性。

经典电动力学中, 电磁势并不是可观测的物理量, 需要加入规范条件来确定。

1. Lorenz 规范:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

齐次方程自动满足, 代入非齐次方程, 得到波动方程

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \end{cases} \quad (1.4)$$

2. Coulomb 规范:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (1.5)$$

1.3 介质中的 Maxwell 方程组

定义 1.2 (电极化强度)

介质中单位体积中的平均电偶极矩称为电极化强度, 记为 \mathbf{P}

束缚电荷密度

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (1.6)$$

介质界面束缚电荷面密度

$$\sigma_b = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \quad (1.7)$$

束缚电流密度

$$\mathbf{J}_b = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (1.8)$$

定义 1.3 (磁化强度)

介质单位体积中的平均磁偶极矩称为磁化强度，记为 \mathbf{M}
分子电流密度

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (1.9)$$

介质界面面电流密度

$$\mathbf{K}_m = -\mathbf{n} \times \mathbf{M} \quad (1.10)$$

定理 1.3 (线性介质中的 Maxwell 方程组)

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

考虑线性、均匀、各向同性介质，存在本构关系

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \end{cases}$$

在一般情形下， \mathbf{D} 和 \mathbf{H} 与 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 之间存在本构关系，此时 \mathbf{D} 和 \mathbf{H} 由 Maxwell 方程组前二式定义。

定理 1.4 (介质交界面的边界条件)

\mathbf{n} 是由介质 1 指向介质 2 的单位法向量

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \end{cases}$$

1.4 电磁守恒律

定理 1.5 (电荷守恒定律)

Maxwell 方程组自动满足电荷守恒

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

定理 1.6 (能量守恒)

电磁场能量密度

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

能流密度 (又称为 Poynting 矢量)

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

磁场对电流不做功, 电场对电流做功功率 W , 则有

$$-W = - \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} \right) dV$$

**定理 1.7 (动量守恒)**

$$\frac{d}{dt}(P_i^{source} + P_i^{field}) = \oint_{\partial V} T_{ij} dS_j$$

\mathbf{P}^{source} 是带电粒子的动量, \mathbf{P}^{field} 是电磁场的动量

定义电磁场动量密度

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S}$$

应力张量

$$T_{ij} = \epsilon_0(E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\delta_{ij})$$

**定理 1.8**

角动量密度

$$\mathcal{M} = \mathbf{x} \times \mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$



第二章 静电学

2.1 Poisson 方程

定理 2.1

引入静电势 Φ , 有

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi$$

得到 Poisson 方程

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon}$$

若 $\rho(\mathbf{x}) = 0$, 有 Laplace 方程

$$\nabla^2\Phi = 0$$

下面是 Poisson 方程的解法

2.1.1 无边界的无穷大空间中的解

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

2.1.2 Green 函数法

边界条件:

1. Dirichlet 边界条件: 已知 $\Phi|_S$
2. Neumann 边界条件: 已知 $\frac{\partial\Phi}{\partial n}|_S$

Green 函数 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 在 V 内满足

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}'}^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \text{适当的边界条件} \end{cases} \quad (2.1)$$

则

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial\Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \right) dS'$$

$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 可以写成如下形式:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$$

通过选取 $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 来使得求解出的静电势 $\Phi(\mathbf{x})$ 满足对应的边界条件.

(1) Dirichlet 边界条件

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0, \mathbf{x}' \in S$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} dS'$$

(2) Neumann 边界条件

$$G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{4\pi}{A_S}, \mathbf{x}' \in S$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \langle \Phi \rangle_S + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} dS'$$

2.1.3 静电镜像法

定理 2.2 (唯一性定理)

空间 V 内满足 Poisson 方程和边界条件的解 $\Phi(\mathbf{x})$ 是唯一的

定义 2.1 (反演变换)

反演变换半径 R , 中心取为原点, n 维欧氏空间中 \mathbf{x} 在反演变换下的像为

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{R^2}{\|\mathbf{x}\|^2} \mathbf{x}$$

球面经过反演变换仍是球面

2.1.4 Laplace 方程的分离变量法

(1) 直角坐标系

$$\Phi(\mathbf{x}) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$X(x) \propto e^{k_1 x}, \quad Y(y) \propto e^{k_2 y}, \quad Z(z) \propto e^{k_3 z}$$

$$\text{满足 } k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0$$

k_i 的取值可以为实数或纯虚数

(2) 柱坐标系

$$\Phi(\mathbf{x}) = R(r)\Phi(\phi)Z(z)$$

$$Z(z) \propto e^{\pm k z}, \quad \Phi(\phi) \propto e^{\pm i m \phi}, \quad R(r) \propto J_m(kr), N_m(kr)$$

m 为正整数, k 为正实数或虚部为正的纯虚数

(3) 球坐标系

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

2.2 多极展开

在远处的 \mathbf{x} 点, $r = |\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \left(\int_V Y_{lm}^*(\mathbf{n}') (r')^l \rho(\mathbf{x}') dV' \right) \frac{Y_{lm}(\mathbf{n})}{r^{l+1}} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\mathbf{n})}{r^{l+1}}\end{aligned}$$

其中多极矩

$$q_{lm} = \int_V Y_{lm}^*(\mathbf{n}') (r')^l \rho(\mathbf{x}') dV'$$

另一种展开方式:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} - \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{6} \sum_{i,j} D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r} + \dots \right) \\ \mathbf{p} &= \int_V \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') dV' \\ D_{ij} &= \int_V (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{x}') dV'\end{aligned}$$

电偶极矩静电场

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3} \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}}{r^3} - \frac{4\pi}{3} \mathbf{p} \delta^3(\mathbf{x}) \right)\end{aligned}$$

第三章 静磁学

3.1 Poisson 方程

定理 3.1

引入磁矢势后，磁矢势 \mathbf{A} 满足 Poisson 方程：

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

满足 Coulumb 规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 电流连续性方程 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$

无边界的无穷大空间中的解为

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

3.2 磁场的能量

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV = \frac{1}{2\mu} \int (\nabla \times \mathbf{A})^2 dV \\ (\nabla \times \mathbf{A})^2 &= \epsilon^i_{jk} \epsilon^i_{lm} (\partial^j A^k) (\partial^l A^m) \\ &= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) (\partial^j A^k) (\partial^l A^m) \\ &= (\partial^j A^k) (\partial^j A^k) - (\partial^j A^k) (\partial^k A^j) \\ &= \partial^j (A^k \partial^j A^k) - A^k (\partial^j \partial^j A^k) - \partial^j (A^k \partial^k A^j) + A^k (\partial^j \partial^k A^j) \\ &= (\mathbf{A} \cdot \nabla) (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \partial^j (A^k \partial^j A^k) - A^k (\partial^j \partial^j A^k) - \partial^j (A^k \partial^k A^j) \end{aligned}$$

第一项由于 Coulumb 规范为 0，全微分对全空间积分没有贡献，因此

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV$$

3.3 磁多极展开

在远处的 \mathbf{x} 点， $r = |\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$

$$A_i(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi r} \int J_i(\mathbf{x}') dV' + \frac{\mu x_j}{4\pi r^3} \int J_i(\mathbf{x}') x'_j dV' + \dots$$

对于第一项,

$$\begin{aligned}\int \partial'_i (J_i(\mathbf{x}') x'_j) dV' &= 0 \\ \int x'_j \partial'_i (J_i(\mathbf{x}')) dV' + \int J_j(\mathbf{x}') dV' &= 0 \\ \int J_j(\mathbf{x}') dV' &= 0\end{aligned}$$

对于第二项,

$$\begin{aligned}\int \partial'_k (J_k(\mathbf{x}') x'_i x'_j) dV' &= 0 \\ \int (x'_i J_j(\mathbf{x}') + x'_j J_i(\mathbf{x}')) dV' &= 0\end{aligned}$$

说明对称部分没有贡献, 考虑反对称部分,

$$\begin{aligned}x_j \int J_i(\mathbf{x}') x'_j dV' &= -\frac{1}{2} x_j \int (x'_i J_j(\mathbf{x}') - x'_j J_i(\mathbf{x}')) dV' \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} x_j \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}'))_k dV' \\ &= -\frac{1}{2} (\mathbf{x} \times \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')) dV')_i\end{aligned}$$

定义磁矩

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')) dV'$$

磁场

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{r^3} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{r^3} + \frac{8\pi}{3} \mathbf{m} \delta^3(\mathbf{x}) \right)\end{aligned}$$

1. 磁矩的受力: $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$
2. 磁矩受到的力矩: $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$
3. 磁矩在外场中的能量: $U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$

3.4 磁标势

定义 3.1

无自由电流处, $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, 可以引入磁标势 $\Phi_M(\mathbf{x})$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = -\nabla \Phi_M(\mathbf{x})$$

满足类 Poisson 方程

$$\nabla^2 \Phi_M(\mathbf{x}) = -(-\nabla \cdot \mathbf{M})$$

等效磁荷密度与等效磁荷面密度

$$\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M}, \quad \sigma_M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}$$



考虑两种简单情形：

1. 线性介质： $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\nabla^2 \Phi_M(\mathbf{x}) = 0$
2. 硬铁磁体： $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ 是已知矢量场

第四章 电磁波的传播

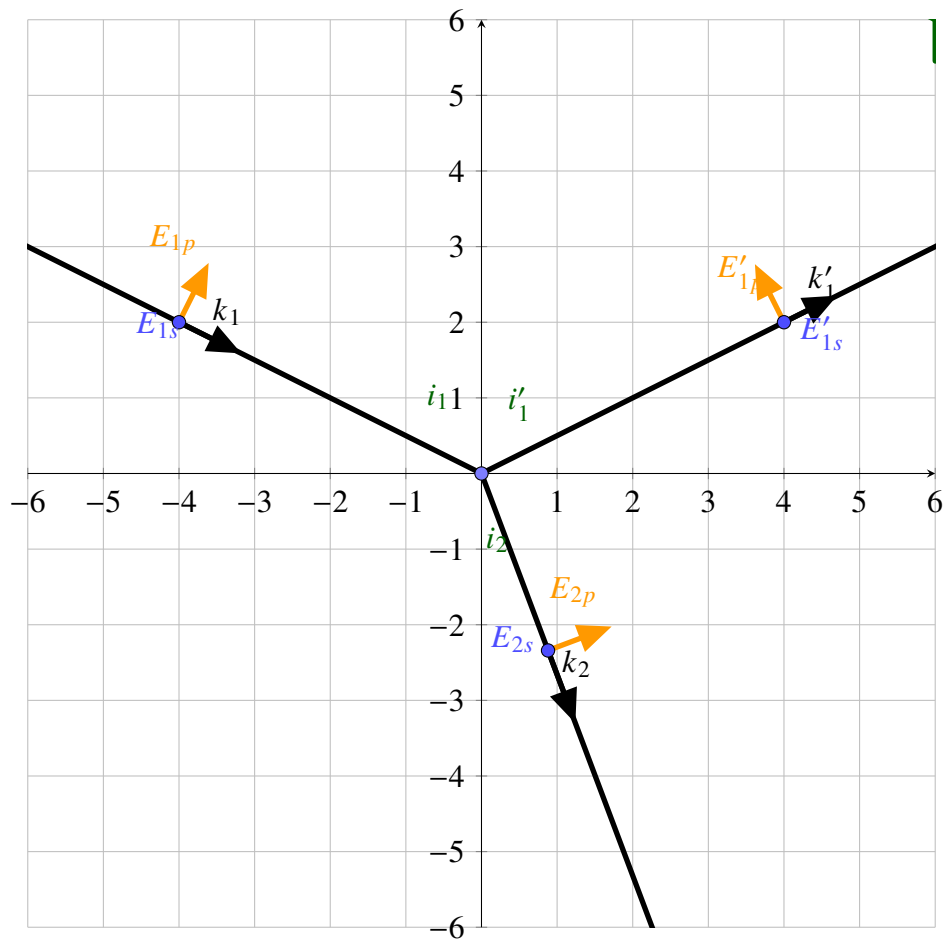
能流

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{n}$$

能量密度

$$u = \frac{\epsilon}{2} |\mathbf{E}_0|^2$$

4.1 电磁波在介质界面的折射与反射



$$\begin{aligned}
 r_p &= \frac{E'_{1p}}{E_{1p}} = \frac{\frac{n_2}{\mu_2} \cos i_1 - \frac{n_1}{\mu_1} \cos i_2}{\frac{n_2}{\mu_2} \cos i_1 + \frac{n_1}{\mu_1} \cos i_2} \\
 r_s &= \frac{E'_{1s}}{E_{1s}} = \frac{\frac{n_1}{\mu_1} \cos i_1 - \frac{n_2}{\mu_2} \cos i_2}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos i_1 + \frac{n_2}{\mu_2} \cos i_2} \\
 t_p &= \frac{E_{2p}}{E_{1p}} = \frac{2 \frac{n_1}{\mu_1} \cos i_1}{\frac{n_2}{\mu_2} \cos i_1 + \frac{n_1}{\mu_1} \cos i_2} \\
 t_s &= \frac{E_{2s}}{E_{1s}} = \frac{2 \frac{n_1}{\mu_1} \cos i_1}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos i_1 + \frac{n_2}{\mu_2} \cos i_2}
 \end{aligned}$$

大多数情况下 $\mu_1 \approx \mu_2$

入射角为 Bruster 角

$$i_B = \arctan \frac{n_2}{n_1}$$

反射波只有垂直分量

全反射角

$$i_0 = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

4.2 电磁波在导电介质中的传播

Maxwell 方程组给出

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} = -i\omega(\epsilon + i\frac{\sigma}{\omega})\mathbf{E}$$

复介电常数

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$$

色散关系

$$k^2 = \mu\epsilon\omega^2(1 + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon})$$

$$\begin{cases} t = 0 \text{ 时导体中已经存在电磁场: } & \omega \text{ 是复数, } \mathbf{k} \text{ 是实数} \\ \text{外界电磁波入射到导体: } & \omega \text{ 是实数, } \mathbf{k} \text{ 是复数} \end{cases}$$

解得

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(\sqrt{\frac{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} + 1}{2}} + i\sqrt{\frac{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} - 1}{2}}\right)$$

$$1. \text{ 对于不良导体, } \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1: k \approx \sqrt{\mu\epsilon}\omega + i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\sigma$$

$$2. \text{ 对于良导体, } \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1: k \approx (1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

对于良导体, 传导电流远大于位移电流, 称为准静态近似, 有扩散方程

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

4.3 介质色散的经典模型

介质中的束缚电子视为阻尼简谐振子，在外场下受迫振动，电子产生电偶极矩

$$\mathbf{p} = \frac{e^2}{m} \frac{\mathbf{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$$

相对介电常数

$$\epsilon_r = 1 + \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i}$$

n 为原子体密度， f_i 为权重， e 为电子电荷， m 为电子质量

对于导体， $\omega_0 = 0$ ，对比之前可得

$$\sigma = \frac{f_0 n e^2}{m(\gamma - i\omega)}$$

在高频极限下，

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{nZe^2}{\epsilon_0 m}$$

对于等离子体，所有电子都是自由的，在忽略阻尼时，上式对任何频率都成立

在一般频率下，介质阻尼较小，相对介电常数为实数，但在 $\omega \approx \omega_i$ 附近，相对介电常数虚部增强，产生共振吸收

4.4 电磁波在色散介质中的传播

Fourier 变换

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx - i\omega(k)t} dk$$

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0) e^{-ikx} dx$$

相速度

$$v_p = \frac{\omega}{k}$$

群速度

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}$$

当 $k \approx k_0$ 时，做 Taylor 展开，

$$\omega(k) \approx \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} (k - k_0)$$

代入得

$$u(x, t) \approx u(x - v_g t, 0) e^{i(k_0 v_g - \omega_0)t}$$

此时 v_g 可以代表波包信息传播的速度和能量流动的速度

注意在某些情形下, v_g 可能超过光速或者是负的, 但这不违反相对论, 因为在这种情形下不能代表能量和信息传播的速度

4.4.1 因果律与 Kramers-Kronig 关系

4.5 波导与谐振腔

$$\text{远程通信} \begin{cases} \text{无线通信} \\ \text{有线通信 (波导)} \end{cases} \begin{cases} \text{金属波导} \\ \text{介质波导} \end{cases}$$

4.5.1 Maxwell 方程组的分离

$$\mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_3 + \mathbf{E}_\perp = E_z \mathbf{e}_3 + (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}) \times \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{B} = B_z \mathbf{e}_3 + \mathbf{B}_\perp = B_z \mathbf{e}_3 + (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}) \times \mathbf{e}_3$$

Maxwell 方程组

$$\frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial z} + i\omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}_\perp = \nabla_\perp E_z$$

$$\mathbf{e}_3 \cdot (\nabla_\perp \times \mathbf{E}_\perp) = i\omega B_z$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_\perp}{\partial z} - i\mu\epsilon\omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_\perp = \nabla_\perp B_z$$

$$\mathbf{e}_3 \cdot (\nabla_\perp \times \mathbf{B}_\perp) = -i\mu\epsilon\omega E_z$$

4.5.2 金属波导

4.5.3 谐振腔

4.5.4 介质波导

4.5.4.1 平面介质波导

4.5.4.2 圆形介质波导

第五章 电磁波的辐射和散射

辐射：带电粒子变速运动 $\left\{ \begin{array}{l} \text{宏观电流周期振荡（第五章）} \\ \text{微观带电粒子变速运动（第八章）} \end{array} \right.$

5.1 波动方程的推迟解

波动方程

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\mathbf{x}, t)$$

进行 Fourier 变换，得到 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2 + k^2) \tilde{\Psi}(\mathbf{x}, \omega) = -4\pi \tilde{f}(\mathbf{x}, \omega)$$

求解 Helmholtz 方程的 Green 函数：

$$(\nabla^2 + k^2) \tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$\tilde{G}^{(\pm)}(\mathbf{R}) = \frac{e^{\pm i k R}}{R}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$$

波动方程的含时 Green 函数

$$(\nabla_{\mathbf{x}}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) G^{(\pm)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -4\pi \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t')$$

$$G^{(\pm)}(\mathbf{R}, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\pm i k R}}{R} e^{-i\omega \tau} d\omega$$

在真空中， $k = \frac{\omega}{c}$

$$G^{(\pm)}(\mathbf{R}, \tau) = \frac{\delta(\tau \mp \frac{R}{c})}{R} = \frac{\delta(t - (t' \pm \frac{R}{c}))}{R}$$

取 + 时为推迟格林函数，符合因果律，得到磁矢势

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int G^+(\mathbf{R}, \tau) \mathbf{J}(\mathbf{x}', t') dV' dt' = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t - \frac{R}{c})}{R} dV'$$

5.2 辐射场的 Taylor 展开

考虑谐振源，

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$$

复振幅应当满足电荷守恒

辐射场

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{ikR}}{R} dV' \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= \frac{i}{ck\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{H} \end{aligned}$$

按照辐射源尺度 d ，场点与原点距离 $r = |\mathbf{x}|$ ，波长 λ 分类，假定总有 $r \gg d$ ：

1. 近场区（静态区）： $d \ll r \ll \lambda$
2. 中间区（感应区）： $d \ll r \sim \lambda$
3. 远场区（辐射区）： $d \ll \lambda \ll r$

在 $\lambda \gg d$ 情况下，

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 + \frac{\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{x}'}{r} + \dots\right) (1 - ik\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{x}' + \dots)$$

5.2.1 电偶极辐射

保留最低阶

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'$$

根据3.3的方法，

$$\begin{aligned} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' &= - \int \mathbf{x}' (\nabla' \cdot \mathbf{J}) dV' \\ &= -i\omega \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') dV' \\ &= -i\omega \mathbf{p} \end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{p} \\ \mathbf{H} &= \frac{ck^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p} \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ k^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}) \times \hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}\right) e^{ikr} (3(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{p})\hat{\mathbf{e}}_r - \mathbf{p}) \right\} \end{aligned}$$

取长波近似，

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{ck^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p} \\ \mathbf{E} &= \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} (\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}) \times \hat{\mathbf{e}}_r \end{aligned}$$

辐射功率

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2} \Re[r^2 \hat{\mathbf{e}}_r \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)] = \frac{ck^4}{32\pi^2 \epsilon_0} p^2 \sin^2 \theta$$

$$P = \frac{ck^4}{12\pi \epsilon_0} p^2$$

θ 为 \mathbf{p} 与 $\hat{\mathbf{e}}_r$ 夹角

5.2.2 磁偶极辐射

保留到一阶,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \int (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \int \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' \mathbf{J} - \mathbf{J} \mathbf{x}'}{2} \right) dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \int \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{x}'}{2} \right) dV' \end{aligned}$$

考虑反对称部分

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \int \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' \mathbf{J} - \mathbf{J} \mathbf{x}'}{2} \right) dV' \\ &= \frac{ik\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{m} \end{aligned}$$

\mathbf{m} 为磁矩, \mathbf{A} 类似电偶极辐射中的 \mathbf{H} , 则磁场类似电偶极辐射中的电场

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ k^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{m}) \times \hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{ikr} (3(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{m}) \hat{\mathbf{e}}_r - \mathbf{m}) \right\} \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 c k^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{m} \end{aligned}$$

辐射功率

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2} \Re[r^2 \hat{\mathbf{e}}_r \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)] = \frac{\mu_0 c k^4}{32\pi^2} m^2 \sin^2 \theta$$

$$P = \frac{\mu_0 c k^4}{12\pi} m^2$$

θ 为 \mathbf{m} 与 $\hat{\mathbf{e}}_r$ 夹角, 要求磁偶极矩分量之间没有相位差

形式上电偶极辐射到磁偶极辐射的变换规则:

$$\begin{cases} \mathbf{p} \rightarrow \frac{\mathbf{m}}{c} \\ \mathbf{E} \rightarrow \frac{\mu_0}{c} \mathbf{H} \\ \frac{\mu_0}{c} \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E} \end{cases}$$

5.2.3 电四极辐射

考虑对称项，利用电荷守恒 $\nabla \cdot \mathbf{J} = i\omega\rho$

$$\begin{aligned} \int \partial'_k (J_k(\mathbf{x}') x'_i x'_j) dV' &= 0 \\ \int (x'_i J_j(\mathbf{x}') + x'_j J_i(\mathbf{x}')) dV' + i\omega \int \rho(\mathbf{x}') x'_i x'_j dV' &= 0 \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \int \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{x}'}{2} \right) dV' \\ &= -\frac{\mu_0 c k^2}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \int \rho(\mathbf{x}') (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{x}') \mathbf{x}' dV' \end{aligned}$$

仅考虑远场区，

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{ik}{\mu_0} \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{A} \\ &= -\frac{ick^3}{24\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{e}}_r \times (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r) \\ \mathbf{E} &= \frac{i}{ck\epsilon_0} ik \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{H} \\ &= \frac{ik^3}{24\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{e}}_r \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)) \end{aligned}$$

辐射功率

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{ck^6}{1152\pi^2\epsilon_0} \hat{\mathbf{e}}_r \cdot [(\hat{\mathbf{e}}_r \times (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)) \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)))] \\ &= \frac{ck^6}{1152\pi^2\epsilon_0} |\hat{\mathbf{e}}_r \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r))|^2 \\ &= \frac{ck^6}{1152\pi^2\epsilon_0} |\hat{\mathbf{e}}_r \times (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)|^2 \end{aligned}$$

积分

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk} \epsilon_{ilm} &= \delta^j_l \delta^k_m - \delta^j_m \delta^k_l \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \\ (\hat{\mathbf{e}}_r \times (\mathbf{D}^* \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_r \times (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)) &= (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{D}^*) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{D}) - (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{D}^* \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r) \end{aligned}$$

由对称性,

$$\begin{aligned}
\int (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{D}^*) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{D}) r^2 d\Omega &= D_i^{*k} \delta_{kl} D_j^l \int n^i n^j d\Omega \\
&= D_i^{*k} \delta_{kl} D_j^l K_1 \delta^{ij} \\
&= K_1 \text{Tr}(\mathbf{D}^\dagger \mathbf{D}) \\
\int (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{D}^* \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r) r^2 d\Omega &= D_{ij}^* D_{kl} \int r^i r^j r^k r^l d\Omega \\
&= D_{ij}^* D_{kl} K_2 (\delta^{ij} \delta^{kl} + \delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}) \\
&= K_2 (\text{Tr}(\mathbf{D}^\dagger) \text{Tr}(\mathbf{D}) + 2\text{Tr}(\mathbf{D}^\dagger \mathbf{D})) \\
\delta_{ij} \int n^i n^j d\Omega &= \int n^i n^i d\Omega = 4\pi \\
\delta_{ij} \delta_{kl} \int n^i n^j n^k n^l d\Omega &= \int (n^i)^2 (n^k)^2 d\Omega = 4\pi \\
K_1 d &= 4\pi, \quad K_2 (d^2 + 2d) = 4\pi \\
K_1 &= \frac{4}{3}\pi, \quad K_2 = \frac{4}{15}\pi \\
\text{Tr}(\mathbf{D}^\dagger) &= \text{Tr}(\mathbf{D}) = 0
\end{aligned}$$

则有

$$P = \frac{ck^6}{1440\pi\epsilon_0} \text{Tr}(\mathbf{D}^\dagger \mathbf{D})$$

5.3 辐射场的多极展开

球面波加法定理:

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = 4\pi i k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l j_l(kr_<) h_l^{(1)}(kr_>) Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n})$$

角动量算符

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{L}} &= -i\mathbf{x} \times \nabla \\
\hat{\mathbf{L}}^2 &= -\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}) - \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \\
\hat{L}_\pm &= \hat{L}_x \pm \hat{L}_y
\end{aligned}$$

本征方程

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{L}}^2 Y_{lm} &= l(l+1) Y_{lm} \\
\hat{L}_z Y_{lm} &= m Y_{lm}
\end{aligned}$$

代入计算

$$\begin{aligned}
 \hat{L}_+ Y_{lm} &= \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} Y_{l,m+1} \\
 \hat{L}_- Y_{lm} &= \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} Y_{l,m-1} \\
 |\hat{L} Y_{lm}|^2 &= |\hat{L}_x Y_{lm}|^2 + |\hat{L}_y Y_{lm}|^2 + |\hat{L}_z Y_{lm}|^2 \\
 &= \left| \frac{\hat{L}_+ + \hat{L}_-}{2} Y_{lm} \right|^2 + \left| \frac{\hat{L}_+ - \hat{L}_-}{2i} Y_{lm} \right|^2 + |\hat{L}_z Y_{lm}|^2 \\
 &= \frac{l(l+1) - m(m+1)}{2} |Y_{l,m+1}|^2 + \frac{l(l+1) - m(m-1)}{2} |Y_{l,m-1}|^2 + m^2 |Y_{lm}|^2
 \end{aligned}$$

5.4 电磁波的散射

第六章 狭义相对论

6.1 狭义相对论的基本假设与实验验证

基本假设：

1. 相对性原理：Galileo→Einstein
2. 光速不变原理：信号传递的最大速度是光速

加上时空均匀、各向同性可以得到狭义相对论和相对论性电动力学

实验验证：

1. Michelson-Morley 实验：光速不变
2. 动源光速测量：光学灭绝问题（Ewald-Oseen 灭绝定理）：当光进入探测器的介质时会使介质极化，完全抵消真空中的入射场并发出电磁波

Alvager 实验： π^0 介子衰变

自由电子激光装置 FLASH

遥远星体辐射

6.2 洛伦兹变换

时空均匀性 \Rightarrow 坐标变换为线性变换各向同性

$$\Delta s^2 = A(|\mathbf{v}'|)\Delta s'^2$$

$$\Delta s'^2 = A(|-\mathbf{v}'|)\Delta s^2 = A(|\mathbf{v}'|)\Delta s^2 = A(|\mathbf{v}'|)^2\Delta s^2$$

由变换的连续性， $A=1$ ，

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2$$

Minkowski 时空：四维间隔不变

- 类时： $\Delta s^2 > 0$
- 类空： $\Delta s^2 < 0$
- 类光： $\Delta s^2 = 0$

Lorentz 变换：

考虑 K' 系沿 K 系 x 轴以匀速 v 运动， $t=0$ 时两系坐标原点重合

$$ct' = x \sinh \psi + ct \cosh \psi$$

$$x' = x \cosh \psi + ct \sinh \psi$$

其中 $\tanh \psi = -\frac{v}{c}$ 得到 Lorentz 变换

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

速度方向一般情况下:

$$ct' = \gamma(ct - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x})$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + (\gamma - 1) \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}}{\beta^2} \boldsymbol{\beta} - \gamma \boldsymbol{\beta} ct$$

同时相对性, 因果性

6.3 四维张量

标量: Lorentz 变换下不变的量, 间隔平方 Δs^2 , 四维体积元 d^4x
四维矢量:

1. 逆变矢量: $A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu$

$$x^\mu = (ct, \mathbf{x})$$

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right)$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

2. 协变矢量: $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$

$$x_\mu = (ct, -\mathbf{x})$$

度规 $\eta_{\mu\nu}$ 和度规的逆 $\eta^{\mu\nu}$,

$$\eta_{\mu\beta} \eta^{\beta\nu} = \delta_\mu^\nu$$

Minkowski 时空的度规:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

指标缩并

内积: $A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu$ 任意两个矢量的内积是标量

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

$$\phi = k^\mu x_\mu$$

$$\text{d'Alembert 算符: } \square = -\partial^\mu \partial_\mu = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$$

相对性原理给出正确物理方程的必要条件: 以正确的张量形式写出, 称为协变性

6.4 Lorentz 变换的数学性质

内积不变给出

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta &= \eta_{\alpha\beta} \\ \implies \det \Lambda &= \pm 1 \end{aligned}$$

Lorentz 变换构成 Lorentz 群, $O(1,3)$, 是无限群, 是 Lie 群, 每个元素可以用六个实参数表示,

$$\Lambda = e^{i\theta_i S_i - \omega_i K_i}$$

这里三维矢量 θ, ω 和三阶矩阵 S, K 不遵循上下标约定, 仍有重复求和
其中 θ_i 为旋转角, ω_i 为 boost 角, S_i 为旋转生成元, K_i 为 boost 生成元

$$\begin{aligned} iS_{1,2,3} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ K_{1,2,3} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

对易关系

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk} S_k,$$

$$[K_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} S_k,$$

$$[S_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k$$

仅涉及 boost 的 Lorentz 变换:

$$\Lambda(\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_1^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_2^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

第七章 相对论性电动力学

本章采用高斯单位制

7.1 自由粒子

$$S = -mc \int ds = -mc^2 \int d\tau$$

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

m 是一个非负 Lorentz 标量，称为静止质量

重参数化不变性：

$$x^\mu = x^\mu(\tau) = x^\mu(\tau(t\tilde{a}u))$$

$$S = -mc \int d\tau \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau}} = -mc \int d\tilde{\tau} \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tilde{\tau}} \frac{dx_\mu}{d\tilde{\tau}}}$$

τ 可以是固有时，也可以是固有时的任意单调递增函数

正则动量

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Hamiltonian

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

定义协变四维速度

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \gamma(1, \frac{\mathbf{v}}{c})$$

根据最小作用量原理得到运动方程

$$\frac{du_\mu}{ds} = 0$$

四维动量

$$p^\mu = mcu^\mu = (\frac{E}{c}, \mathbf{p})$$

零质量粒子：

引入世界线的单元基：正定标量函数 $e(\tau)$ ，作用量

$$S = -\frac{1}{2} \int (\frac{1}{e(\tau)} \frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + e(\tau)m^2c^2) d\tau$$

对 $e(\tau)$ 变分

$$\frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} - e(\tau)^2 m^2 c^2 = 0$$

$$e(\tau) = \frac{1}{mc} \sqrt{\frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau}}$$

代入后得到原来的结果. 对于零质量粒子也适用
重参数化不变性

$$\tilde{e}(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} = e(\tau) d\tau$$

7.2 电磁场中的粒子

电荷 e 也是 Lorentz 标量
作用量

$$S = -mc \int ds - \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu$$

四维矢量势

$$A^\mu(x) = (\Phi(x), \mathbf{A}(x))$$

Lagrangian

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\Phi$$

正则动量

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

Hamiltonian

$$H = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - L = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2} + e\Phi$$

最小作用量原理

$$\begin{aligned} \delta S &= mc \int \frac{du_\mu}{ds} \delta x^\mu ds - \frac{e}{c} \int (\delta A_\mu dx^\mu + A_\mu \delta dx^\mu) \\ &= mc \int \frac{du_\mu}{ds} \delta x^\mu ds - \frac{e}{c} \int (\partial_\nu A_\mu \delta x^\nu dx^\mu - \partial_\nu A_\mu dx^\nu \delta x^\mu) \\ &= mc \int \frac{du_\mu}{ds} \delta x^\mu ds - \frac{e}{c} \int (\partial_\mu A_\nu \delta x^\mu dx^\nu - \partial_\nu A_\mu dx^\nu \delta x^\mu) \end{aligned}$$

得到运动方程

$$mc \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu$$

电磁场场强张量

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

7.3 电磁场

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$$

在仅有推促的 Lorentz 变换下

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})\boldsymbol{\beta}$$

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B})\boldsymbol{\beta}$$

Bianchi 恒等式（对应无源齐次 Maxwell 方程）

$$\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0$$

或者定义对偶张量

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bianchi 恒等式

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

作用量

$$S = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x$$

带电粒子作用量电磁场项

$$S_{int} = -\frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu = -\frac{1}{c^2} \int A_\mu J^\mu d^4x$$

合在一起

$$S = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x - \frac{1}{c^2} \int A_\mu J^\mu d^4x$$

最小作用量原理 $\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = 0$ 得到有源 Maxwell 方程

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

电流密度四维矢量

$$J^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt} = (c\rho, \mathbf{J})$$

电荷守恒定律

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

四维协变电磁规律:

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \\ \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0 \\ \partial_\mu J^\mu = 0 \end{cases}$$

7.4 宏观运动物体中的电磁场

考虑相对论效应的一阶修正

7.4.1 运动的电介质

(\mathbf{D}, \mathbf{H}) 构成场张量 $H_{\mu\nu}$

电介质中 Maxwell 方程组

$$\partial_\mu H^{\mu\nu} = 0$$

本构关系: Minkowski 方程

$$H^{\mu\nu} u_\nu = \epsilon F_{\mu\nu} u^\nu$$

$$F_{\mu\nu} u_\lambda + F_{\nu\lambda} u_\mu + F_{\lambda\mu} u_\nu = \mu (H_{\mu\nu} u_\lambda + H_{\nu\lambda} u_\mu + H_{\lambda\mu} u_\nu)$$

三维形式

$$\mathbf{D} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H} = \epsilon(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} = \mu(\mathbf{H} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{D})$$

一阶近似

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + (\epsilon\mu - 1) \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} - (\epsilon\mu - 1) \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}$$

边界条件

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \beta_n(\mu_2 - \mu_1)\mathbf{H}_t \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = -\beta_n(\epsilon_2 - \epsilon_1)\mathbf{E}_t \end{cases}$$

\mathbf{E}_t 和 \mathbf{H}_t 不需要区分是何种介质, 因为两种介质切向分量差值为小量

7.4.2 运动的导体

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}'$$

代入到电磁感应定律和环路定律,

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \nabla^2 \mathbf{H}$$

7.5 均匀静电磁场中带电粒子的运动

7.5.1 在均匀静电场中的运动

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) + e\mathbf{E}_0 t$$

7.5.2 在均匀静磁场中的运动

设 $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_3$

回旋频率

$$\omega_B = \frac{eB}{\gamma mc}$$

回旋半径

$$a = \frac{cp_{\perp}}{eB}$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_{\parallel} + \omega_B a (\cos \omega_B t \mathbf{e}_1 - \sin \omega_B t \mathbf{e}_2)$$

7.5.3 在正交静电磁场中的运动

换到参照系 K' , 回归到只有静电场或静磁场的情况. 设 K' 速度为 \mathbf{u}

$$1. |\mathbf{B}| > |\mathbf{E}|: \mathbf{u} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}$$

$$\mathbf{E}' = 0, \mathbf{B}' = \sqrt{\frac{B^2 - E^2}{E^2}} \mathbf{B}$$

$$2. |\mathbf{B}| < |\mathbf{E}|: \mathbf{u} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{E}|^2}$$

$$\mathbf{E}' = \sqrt{\frac{E^2 - B^2}{E^2}} \mathbf{E}, \mathbf{B}' = 0$$

7.5.4 在一般电磁场中的运动

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^\mu{}_\nu u^\nu$$

利用 Lorentz 变换生成元,

$$F^\mu{}_\nu \rightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{K} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$$

$$u(\tau) = u(0) e^{\frac{e\tau}{mc} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{K} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}]}$$

第八章 运动带电粒子的辐射

8.1 Liénard-Wiechert 势

直接在四维协变形式下求解

规范条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c} J^\nu \\ \partial_\mu \partial^\mu &= \frac{4\pi}{c} J^\nu\end{aligned}$$

考虑 d'Alembert 算符的四维协变形式 Green 函数 $D(x, x')$

$$-\partial_\mu \partial^\mu D(x, x') = \delta^4(x - x')$$

Fourier 变换解得

$$D(x, x') = \int \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-x')}}{k^2} d^4 k$$

k^2 在实轴上有奇点, 选取推迟 Green 函数

$$D^{(+)}(x, x') = \int \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-x')}}{(k^0 + i\epsilon)^2 - \mathbf{k}^2} d^4 k$$

由复变函数 Jordan 引理,

1. 若 $x_0 < x'_0$, 积分围道在上半平面, 结果为 0
2. 若 $x_0 > x'_0$, 积分围道在下半平面, 结果为 $k_0 = \pm|\mathbf{k}|$ 处留数之和

$$\begin{aligned}D^{(+)}(x, x') &= \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot R} d^3 \mathbf{k} \int \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ik^0 R_0}}{(k^0 + i\epsilon)^2 - \mathbf{k}^2} dk^0 \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot R} d^3 \mathbf{k} i \left(\frac{e^{-i|\mathbf{k}|R_0}}{2|\mathbf{k}|} - \frac{e^{i|\mathbf{k}|R_0}}{2|\mathbf{k}|} \right) \\ &= -i \int \frac{1}{16\pi^3} e^{ik \cdot R} d^3 \mathbf{k} \frac{e^{i|\mathbf{k}|R_0} - e^{-i|\mathbf{k}|R_0}}{|\mathbf{k}|} \\ &= -\frac{i}{8\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \frac{e^{i|\mathbf{k}|R_0} - e^{-i|\mathbf{k}|R_0}}{|\mathbf{k}|} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{R}| \cos \theta} |\mathbf{k}|^2 \sin \theta d|\mathbf{k}| d\theta \\ &= -\frac{i}{8\pi^2} \int_0^{+\infty} |\mathbf{k}| (e^{i|\mathbf{k}|R_0} - e^{-i|\mathbf{k}|R_0}) \frac{e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{R}|} - e^{-i|\mathbf{k}||\mathbf{R}|}}{i|\mathbf{k}||\mathbf{R}|} d|\mathbf{k}| \\ &= -\frac{1}{4\pi|\mathbf{R}|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i|\mathbf{k}|(R_0+|\mathbf{R}|)} - e^{-i|\mathbf{k}|(R_0-|\mathbf{R}|)}) d|\mathbf{k}| \\ &= -\frac{1}{4\pi|\mathbf{R}|} (\delta(R_0 + |\mathbf{R}|) - \delta(R_0 - |\mathbf{R}|)) \\ &= \frac{1}{4\pi|\mathbf{R}|} \delta(x_0 - x'_0 - |\mathbf{R}|)\end{aligned}$$

结合上述讨论, 推迟 Green 函数

$$D^{(+)}(x, x') = \frac{\theta(x_0 - x'_0)}{4\pi|\mathbf{R}|} \delta(x_0 - x'_0 - |\mathbf{R}|) = \frac{\theta(x_0 - x'_0)}{2\pi|\mathbf{R}|} \delta((x - x')^2)$$

推迟势

$$A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int D^{(+)}(x, x') J^\mu(x') d^4x' \quad (8.1)$$

真空中运动的粒子产生的势 $A^\mu(x)$, 世界线 $r^\mu(\tau)$

$$\begin{aligned} J^\mu(x') &= ec^2 \int u^\mu(\tau) \delta^4(x' - r(\tau)) d\tau \\ A^\mu(x) &= \frac{4\pi}{c} \int D^{(+)}(x, x') J^\mu(x') d\tau \\ &= 2ec \int u^\mu(\tau) \theta(x^0 - r^0(\tau)) \delta((x - r(\tau))^2) d\tau \end{aligned}$$

δ 函数只在 τ_0 处有贡献, $(x - r(\tau_0))^2 = 0, x^0 - r^0(\tau_0) = |\mathbf{R}|$

$$\begin{aligned} \delta((x - r(\tau))^2) &= \frac{\delta(\tau - \tau_0)}{\frac{d}{d\tau}(x - r(\tau))^2 \Big|_{\tau=\tau_0}} = \frac{\delta(\tau - \tau_0)}{2(x - r(\tau)) \frac{d}{d\tau}(x - r(\tau)) \Big|_{\tau=\tau_0}} \\ A^\mu(x) &= \frac{eu^\mu(\tau)}{u \cdot (x - r(\tau))} \Big|_{\tau=\tau_0} \end{aligned}$$

改写成三维形式

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})R} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e\boldsymbol{\beta}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})R} \end{aligned}$$

电磁场

$$\begin{aligned} \partial^\mu \delta((x - r(\tau))^2) &= -\frac{(x - r)^\mu}{u \cdot (x - r)} \frac{d}{d\tau} \delta((x - r(\tau))^2) \\ \partial^\nu A^\mu &= 2ec \int u^\mu(\tau) \theta(x^0 - r^0(\tau)) \partial^\nu \delta((x - r(\tau))^2) d\tau \\ &= 2ec \int \delta((x - r(\tau))^2) \frac{d}{d\tau} [u^\mu(\tau) \frac{(x - r)^\nu}{u \cdot (x - r)}] d\tau \\ &= 2ec \frac{d}{d\tau} [u^\mu(\tau) \frac{(x - r)^\nu}{u \cdot (x - r)}] \Big|_{\tau=\tau_0} \\ F^{\mu\nu} &= 2ec \frac{d}{d\tau} \left[\frac{(x - r)^\mu u^\nu - (x - r)^\nu u^\mu}{u \cdot (x - r)} \right] \Big|_{\tau=\tau_0} \end{aligned}$$

三维形式

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{e(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{\gamma^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R^2} + \frac{e}{c} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{n} \times \mathbf{E} \end{aligned}$$

8.2 Larmor 公式与 Thomson 散射

Larmor 公式：在非相对论极限 $\beta \ll 1$ 下，辐射功率

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{cR^2}{4\pi} |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \sin^2 \Theta$$

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2$$

Liénard 公式：推广到相对论情况， P 是 Lorentz 不变量，

$$P = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau} \right)^2 \right)$$

$$= \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} [\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2]$$

t 时刻观测的辐射，在 $t' = t - \frac{R}{c}$ 时刻发出，

$$dt = dt' (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})$$

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = R^2 S \cdot \mathbf{n} \frac{dt}{dt'}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi c} \frac{|\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^5}$$

1. 沿 z 轴直线运动：

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}$$

2. 圆周运动： $\boldsymbol{\beta}$ 沿 z 轴， $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 沿 x 轴

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{\dot{v}^2}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right]$$

Thomson 散射：在低频情况下自由电子对电磁波的散射
入射波

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega t}$$

$$\mathbf{e}_0 = \cos \phi_0 \hat{x} + \sin \phi_0 \hat{y}$$

$$\mathbf{k}_0 = k_0 \hat{z}$$

偏振为 \mathbf{e} 的散射波

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{cR^2}{8\pi} |\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*| = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}_0|^2$$

能流

$$I = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2$$

微分散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}_0|^2$$

对 \mathbf{e}_θ 和 \mathbf{e}_ϕ 两个偏振方向取平均后相加

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \\ \sigma &= \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\end{aligned}$$

8.3 频谱分析

频谱：带电粒子辐射电磁波的能量按角频率的分布

8.3.1 连续谱

连续谱：非周期性运动粒子

$$\begin{aligned}\frac{dP(t)}{d\Omega} &= \frac{e^2}{4\pi c} \left| \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \right|^2 = |\mathbf{A}(t)|^2 \\ \frac{dW}{d\Omega} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{A}(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} d\omega \\ \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} &= 2|\mathbf{A}(\omega)|^2 \\ \mathbf{A}(\omega) &= \sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2 c}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} dt \\ &= \sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2 c}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t' + \frac{R(t')}{c})} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^2} dt'\end{aligned}$$

假定辐射粒子的运动在原点附近， $R(t') \approx |\mathbf{x}| - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t')$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\omega) &= \sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2 c}} e^{i\omega \frac{|\mathbf{x}|}{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t')}{c})} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')}{(1 - \boldsymbol{\beta}(t') \cdot \mathbf{n})^2} dt' \\ \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} &= \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t')}{c})} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')}{(1 - \boldsymbol{\beta}(t') \cdot \mathbf{n})^2} dt' \right|^2 \\ &= \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t')}{c})} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}(t'))] dt' \right|^2\end{aligned}$$

8.3.2 分立谱

分立谱：周期性运动粒子

$$\frac{dP}{d\Omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |A_n|^2 = |A_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |A_n|^2$$

$\omega_n = n\omega_0$ 平均功率角分布

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{d\Omega} &= 2|A_n|^2 \\ &= \frac{e^2 n^2 \omega_0^2}{2\pi c T^2} \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{i\omega(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t')}{c})} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}(t'))] dt' \right|^2 \end{aligned}$$

同步辐射：相对论性带电粒子周期性圆周运动的辐射

带电粒子圆周运动圆频率为 ω_0 ，半径为 a ，在 xOy 平面内做匀速圆周运动，取圆心为原点

$$\mathbf{r}(t) = a(\cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t, 0)$$

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \beta(-\sin \omega_0 t, \cos \omega_0 t, 0)$$

$$\beta = \frac{\omega_0 a}{c}$$

$$\mathbf{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$$

偏振方向

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\parallel} = -\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{z}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\perp} = -\hat{y}$$

Schott 公式：频谱角分布

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{d\Omega} &= \frac{e^2 n^2 \omega_0^2}{2\pi c} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{in(\phi - \beta \sin \theta \cos \phi)} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})] d\phi \right|^2 \\ &= \frac{e^2 n^2 \omega_0^2}{2\pi c} |\cot \theta J_n(n\beta \sin \theta) \boldsymbol{\epsilon}_{\parallel} + i\beta J'_n(n\beta \cos \theta) \boldsymbol{\epsilon}_{\perp}|^2 \\ &= \frac{e^2 n^2 \omega_0^2}{2\pi c} [\cot^2 \theta J_n^2(n\beta \sin \theta) + \beta^2 J_n'^2(n\beta \cos \theta)] \end{aligned}$$

积分得到

$$P_n = \frac{2e^2 \omega_0}{v} [n\beta^2 J'_{2n}(2n\beta) - \frac{n^2}{\gamma^2} \int_0^\beta J_{2n}(2n\xi) d\xi]$$

对于极端相对论情形， $n \gg 1$ 起主要作用，

$$P_n = -\frac{2e^2 \omega_0^2 n^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\pi} c} [\Phi'(u) + \frac{u}{2} \int_u^{+\infty} \Phi(u) du]$$

其中 Airy 函数 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos(\frac{t^3}{3} - xt) dt$ ， $u = n^{\frac{2}{3}} \gamma^{-2}$

1. $1 \ll n \ll \gamma$

$$P_n \approx 0.52 \frac{e^2 \omega_0^2}{c} n^{\frac{1}{3}}$$

2. $n \ll \gamma$

$$P_n = \frac{e^2 \omega_0^2}{2\sqrt{\pi}c} \sqrt{\frac{n}{\gamma}} e^{-\frac{2}{3}n\gamma^{-3}}$$

8.4 Cherenkov 辐射

高速带电粒子穿过介质
波动方程

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Phi - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho \\ \nabla^2 A - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{\epsilon} J\end{aligned}$$

Fourier 变换得到

$$\begin{aligned}J(\mathbf{k}, \omega) &= 2\pi e v \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \\ A(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{8\pi^2 e \beta}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})\end{aligned}$$

假设速度沿 z 方向

$$A(\mathbf{x}, t) = 4\pi e \beta \int \frac{e^{ik_3(x_3 - vt)} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}}{k_3^2(1 - \beta^2 \epsilon) + \mathbf{k}_\perp^2} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3}$$

近似将 ϵ 视为常数, 当 $\beta > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ 时, 类似于推迟 Green 函数, 在 $x_3 < vt$ 积分才不为 0, 则以粒子为顶点, 电磁势不为 0 的点构成一个锥体, 半锥角

$$\theta_C = \arccos \frac{c}{v\sqrt{\epsilon}}$$

矢势

$$\begin{aligned}A(\mathbf{x}, t) &= \frac{4\pi e \beta}{1 - \beta^2 \epsilon} \iiint \frac{e^{ik_3(x_3 - vt)} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}}{k_3^2 - (\frac{k_\perp}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}})^2} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{4\pi e \beta}{1 - \beta^2 \epsilon} \iint \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp} \frac{e^{ik_\perp \frac{x_3 - vt}{\sqrt{\beta^2 \epsilon - 1}}} - e^{-ik_\perp \frac{x_3 - vt}{\sqrt{\beta^2 \epsilon - 1}}}}{2 \frac{k_\perp}{\sqrt{\beta^2 \epsilon - 1}}} \\ &= \frac{e \beta}{\pi \sqrt{\beta^2 \epsilon - 1}} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{ik|\mathbf{x}_\perp| \cos \theta} \sin(k \frac{x_3 - vt}{\sqrt{\beta^2 \epsilon - 1}}) dk d\theta \\ &= \frac{2e \beta}{\sqrt{\beta^2 \epsilon - 1}} \int_0^{+\infty} J_0(k|\mathbf{x}_\perp|) \sin(k \frac{x_3 - vt}{\sqrt{\beta^2 \epsilon - 1}}) dk \\ &= \frac{2e \beta}{\sqrt{(x_3 - vt)^2 - (\beta^2 \epsilon - 1)\mathbf{x}_\perp^2}}\end{aligned}$$

8.5 辐射阻尼

辐射阻尼：带电粒子自身辐射的电磁场对自身运动的影响（经典电动力学不能完美解决）

Abraham-Lorentz 方程：能量角度的反作用

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{rad}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} dt$$

分部积分得到

$$\mathbf{F}_{rad} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}} = m\tau \ddot{\mathbf{v}}$$

得到 Abraham-Lorentz 方程

$$m(\dot{\mathbf{v}} - \tau \ddot{\mathbf{v}}) = \mathbf{F}_{ext}$$

该方程存在发散解，对于发散解，分部积分的边界项不可以舍去

Abraham-Lorentz 模型：动量角度的反作用

系统动量守恒

$$\int (\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV = 0$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_{self}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_{ext} + \mathbf{B}_{self}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} = - \int (\rho \mathbf{E}_{self} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}_{self}) dV$$

选定合适参考系使电流为 0

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \int dV \rho(\mathbf{x}, t) [\nabla \Phi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}]$$

Taylor 展开

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! c^n} \int dV \int dV' \rho(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^n}{\partial t^n} [\rho(\mathbf{x}', t) \nabla R^{n-1} + \frac{R^{n-1}}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{\partial t}]$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{c^{n+2}} \frac{2}{3n!} \frac{\partial^{n+1} \mathbf{v}}{\partial t^{n+1}} \int dV \int dV' \rho(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}', t) R^{n-1}$$

$n = 0$ 项

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)_{n=0} = \frac{2}{3c^2} \dot{\mathbf{v}} \int dV \int dV' \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{R} = \frac{4U_{em}}{3c^2} \dot{\mathbf{v}}$$

静电能

$$U_{em} = \frac{1}{2} \int dV \int dV' \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{R}$$

电磁质量

$$m_{em} = \frac{U_{em}}{c^2}$$

$n = 1$ 项

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)_{n=1} = -\frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}$$

更高阶项在带电粒子尺度 $a \rightarrow 0$ 时会趋于 0

$$\frac{4}{3}m_{em}\dot{\mathbf{v}} - \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{ext}$$

该模型的缺陷在于， $a \rightarrow 0$ 时静电能会发散，要求带电粒子有非零尺度（电子的经典半径） $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$. 在 r_0 尺度之下，需要运用量子电动力学，电子自能按 a 的对数发散，需要重整化才能解决

附录 A 特殊函数

A.1 球函数

Legendre 方程:

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dy}{dx}) + \nu(\nu+1)y = 0$$

复方程的解为 ν 次 Legendre 函数

$$P_\nu(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$

$$Q_\nu(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{e^{-i\nu\pi} P_\nu(z) - P_\nu(-z)}{\sin \nu\pi}, & \Im z > 0 \\ \frac{\pi}{2} \frac{e^{i\nu\pi} P_\nu(z) - P_\nu(-z)}{\sin \nu\pi}, & \Im z < 0 \end{cases}$$

在 $[-1, 1]$ 上的解:

- 在 $x = 1$ 处, $P_\nu(x)$ 有界, $Q_\nu(x)$ 对数发散, 解中不含 $Q_\nu(x)$
- 在 $x \rightarrow -1$ 时,

$$P_\nu(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

$$= -\frac{\sin \nu\pi}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\nu+n+1)\Gamma(n-\nu)}{(n!)^2} (-1)^n \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

$$\sim \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \ln \frac{2}{1+x}$$

对数发散, 需要截断为多项式, ν 为自然数 l , 得到 l 次 Legendre 多项式

$$P_l(x) = \sum_{n=0}^l \frac{1}{(n!)^2} \frac{(l+n)!}{(l-n)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

连带 Legendre 方程:

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dy}{dx}) + (\nu(\nu+1) - \frac{m^2}{1-x^2})y = 0$$

1. 复方程的解为

$$P_\nu^m(z) = (z^2-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_\nu(z)}{dz^m}$$

$$Q_\nu^m(z) = (z^2-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_\nu(z)}{dz^m}$$

2. 实轴上的解定义为

$$\begin{aligned}
 P_\nu^m(x) &= i^m P_\nu^m(x + 0i) = i^{-m} P_\nu^m(x - 0i) \\
 &= (-)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_\nu(x)}{dx^m} \\
 Q_\nu^m(x) &= \frac{(-)^m}{x} (i^{-m} Q_\nu^m(x + 0i) + i^m Q_\nu^m(x - 0i)) \\
 &= (-)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_\nu(x)}{dx^m}
 \end{aligned}$$

3. 在 $[-1, 1]$ 上的解:

- 在 $x = 1$ 处, $P_\nu^m(x)$ 有界, $Q_\nu^m(x)$ 对数发散, 解中不含 $Q_\nu^m(x)$
- 在 $x = -1$ 处, $P_\nu^m(x)$ 发散, 要求 $P_\nu(x)$ 截断为多项式, ν 为自然数且 $\nu \geq m$

本征函数为 m 阶 l 次连带 Legendre 多项式:

$$\begin{aligned}
 P_l^m(x) &= (-)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \\
 P_l^{-m}(x) &= (-)^m \frac{(l - m)!}{(l + m)!} P_l^m(x)
 \end{aligned}$$

球谐函数

$$\begin{aligned}
 Y_{l,m}(\mathbf{n}) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \\
 Y_{l,-m}(\mathbf{n}) &= (-)^m Y_{l,m}^*(\mathbf{n})
 \end{aligned}$$

A.1.1 Legendre 多项式的性质

- 微分形式: Rodrigues 公式

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

- 正交完备性

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx &= \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \\
 \int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx &= \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \\
 \int Y_{lm}^*(\mathbf{n}) Y_{l'm'}(\mathbf{n}) d\Omega &= \delta_{ll'} \delta_{mm'} \\
 \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}) &= \delta(\cos \theta' - \cos \theta) \delta(\phi' - \phi)
 \end{aligned}$$

- 生成函数

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{l=0}^{+\infty} P_l(x) t^l, \quad |t| < \min |x \pm \sqrt{x^2 - 1}|$$

• 递推关系

$$\begin{cases} P'_{l+1}(x) = xP'_l(x) + (l+1)P_l(x) \\ P'_{l-1}(x) = xP'_l(x) - lP_l(x) \end{cases}$$

A.2 柱函数

Bessel 方程

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0$$

Bessel 函数

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\nu}$$

Neumann 函数

$$N_\nu(x) = \frac{\cos \nu \pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu \pi}$$

(1) 当 $\nu \notin \mathbb{Z}$ 时, Bessel 方程的解为 $J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 的线性组合

(2) 当 $\nu = m \in \mathbb{Z}$ 时, $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$, Bessel 方程的解为 $J_m(x)$ 与 $N_m(x)$ 的线性组合

Hankel 函数

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + iN_\nu(x) \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - iN_\nu(x) \end{aligned}$$

虚宗量 Bessel 函数

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &= i^{-\nu} J_\nu(ix) \\ K_\nu(x) &= \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} (I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)) \end{aligned}$$

球 Bessel 方程

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2} \right) y = 0$$

解为球 Bessel 函数

$$\begin{aligned} j_l(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x) \\ n_l(x) &= (-1)^{l+1} j_{-l-1}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+\frac{1}{2}}(x) \end{aligned}$$

球 Hankel 函数

$$\begin{aligned} h_l^{(1)}(x) &= j_l(x) + i n_l(x) \\ h_l^{(2)}(x) &= j_l(x) - i n_l(x) \end{aligned}$$

A.2.1 递推关系

上述函数统称为柱函数，均满足：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^\nu C_\nu(x)) &= x^\nu C_{\nu-1}(x) \\ \frac{d}{dx}(x^{-\nu} C_\nu(x)) &= -x^{-\nu} C_{\nu+1}(x)\end{aligned}$$

A.2.2 渐进展开

$x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}J_\nu(x) &\sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \\ N_\nu(x) &\sim -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}, \quad N_0(x) \sim \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2}\end{aligned}$$

$x \rightarrow \infty, |\arg(x)| < \pi$:

$$\begin{aligned}J_\nu(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ N_\nu(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ H_\nu^{(1)}(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \\ H_\nu^{(2)}(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \\ j_l(x) &\sim \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right) \\ n_l(x) &\sim -\frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{l\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$|x| \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}I_\nu(x) &\sim \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x \\ K_\nu(x) &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}\end{aligned}$$

A.2.3 整数阶的生成函数与积分表示

生成函数：

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) t^n, \quad 0 < |t| < \infty$$

积分表示：

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta$$

A.3 常用展开式

下取 $r = |\mathbf{x}|, r' = |\mathbf{x}'|, r_{>} = \max\{r, r'\}, r_{<} = \min\{r, r'\}$, γ 为 \mathbf{x} 与 \mathbf{k} 夹角
加法定理:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n})$$

平面波按柱面波展开: 生成函数中取 $t = ie^{i\theta}$,

$$e^{ikr \cos \theta} = J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} i^n \cos n\theta J_n(kr)$$

平面波按球面波展开:

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = 4\pi \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l i^l j_l(kr) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{n}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})$$