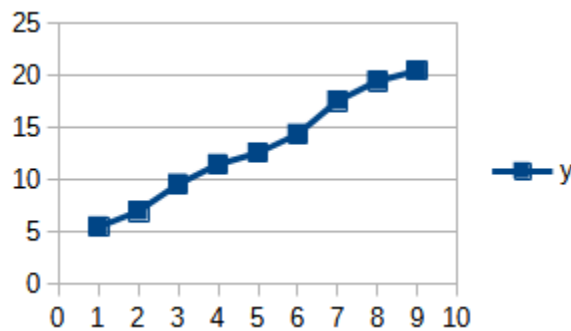


Sebuah percobaan memberikan nilai-nilai pada tabel berikut untuk peubah tak bebas untuk himpunan nilai-nilai yang diberikan. Asumsikan $y = f(x)$. Lakukan pencocokan kuadrat terkecil yang sesuai untuk data berikut.

1. Soal no.1

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	5.5	7	9.6	11.5	12.6	14.4	17.6	19.5	20.5

Grafik plotting dari data tersebut adalah sebagai berikut



Terlihat bahwa plotting menyerupai grafik fungsi linier, sehingga dipilih

$$f(x) = ax + b$$

Maka diperoleh simpangan bakunya adalah

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^9 (y_i - f(x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^9 (y_i - ax_i - b) \end{aligned}$$

S bernilai minimum ketika $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$ dan $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial S}{\partial a} \\ 0 &= \sum_{i=1}^9 (y_i - ax_i - b)x_i \\ 0 &= \sum_{i=1}^9 y_i x_i - a \sum_{i=1}^9 x_i^2 - b \sum_{i=1}^9 x_i \\ \Rightarrow a \sum_{i=1}^9 x_i^2 + b \sum_{i=1}^9 x_i &= \sum_{i=1}^9 y_i x_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial S}{\partial b} \\
0 &= -2 \sum_{i=1}^9 (y_i - ax_i - b) \\
0 &= \sum_{i=1}^9 y_i - a \sum_{i=1}^9 x_i - b \sum_{i=1}^9 1 \\
\Rightarrow a \sum_{i=1}^9 x_i + b \sum_{i=1}^9 1 &= \sum_{i=1}^9 y_i
\end{aligned}$$

Dari data awal dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^9 x_i &= 45 & \sum_{i=1}^9 x_i^2 &= 285 \\
\sum_{i=1}^9 y_i &= 118,2 & \sum_{i=1}^9 y_i x_i &= 707,4 \\
\sum_{i=1}^9 1 &= 9
\end{aligned}$$

Maka diperoleh SPL sebagai berikut

$$\begin{aligned}
285a + 45b &= 707,4 \\
45a + 9b &= 118,2
\end{aligned}$$

Menggunakan program Gauss naif dari pertemuan sebelumnya, diperoleh nilai a, b, c sebagai berikut

```

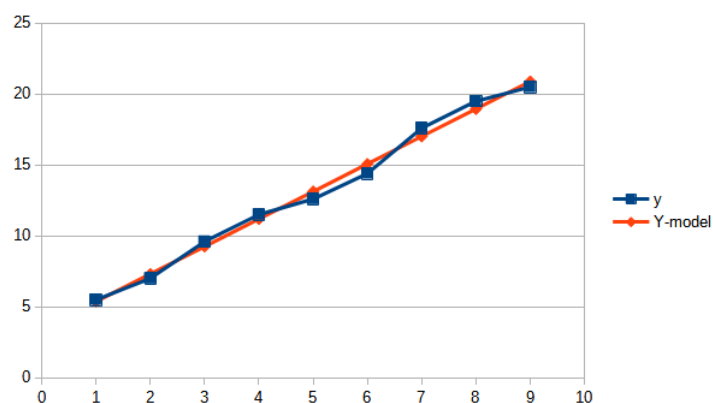
Gauss Naif:
a = 1.9399999999999995
b = 3.4333333333333367

```

Maka diperoleh

$$f(x) = 1,9399999999999995x + 3.4333333333333367$$

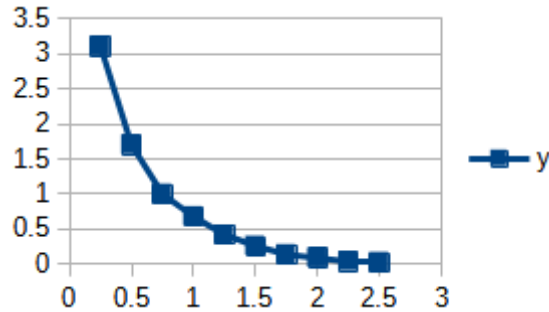
Diperoleh perbandingan grafik fungsi tersebut dengan plotting data awal adalah sebagai berikut



2. Soal no.4

x	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
y	3.1	1.7	1	0.68	0.42	0.26	0.14	0.09	0.04	0.03

Grafik plotting dari data tersebut adalah sebagai berikut



Terlihat bahwa plotting menyerupai grafik fungsi eksponen, sehingga dipilih

$$f(x) = be^{ax}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ \ln(y) &= \ln(f(x)) \\ &= \ln(be^{ax}) \\ &= ax + \ln(b) \end{aligned}$$

Maka diperoleh simpangan bakunya adalah

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{10} (\ln(y_i) - \ln(f(x_i))) \\ &= \sum_{i=1}^{10} (\ln(y_i) - ax_i - \ln(b)) \end{aligned}$$

S bernilai minimum ketika $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$ dan $\frac{\partial S}{\partial \ln(b)} = 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial S}{\partial a} \\ 0 &= -\sum_{i=1}^{10} (\ln(y_i) - ax_i - \ln(b))x_i \\ 0 &= \sum_{i=1}^{10} \ln(y_i)x_i - a \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \ln(b) \sum_{i=1}^{10} x_i \\ \Rightarrow a \sum_{i=1}^{10} x_i^2 + \ln(b) \sum_{i=1}^{10} x_i &= \sum_{i=1}^{10} \ln(y_i)x_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial S}{\partial \ln(b)} \\
0 &= -2 \sum_{i=1}^{10} (\ln(y_i) - ax_i - \ln(b)) \\
0 &= \sum_{i=1}^{10} \ln(y_i) - a \sum_{i=1}^{10} x_i - \ln(b) \sum_{i=1}^{10} 1 \\
&\Rightarrow a \sum_{i=1}^{10} x_i + \ln(b) \sum_{i=1}^{10} 1 = \sum_{i=1}^{10} \ln(y_i)
\end{aligned}$$

Dari data awal dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{10} x_i &= 13,75 & \sum_{i=1}^{10} x_i^2 &= 24,0625 \\
\sum_{i=1}^{10} \ln(y_i) &= -12,0376985211429 & \sum_{i=1}^{10} \ln(y_i)x_i &= -27,2079380741985 \\
\sum_{i=1}^{10} 1 &= 10
\end{aligned}$$

Maka diperoleh SPL sebagai berikut

$$\begin{aligned}
24,0625a + 13,75b &= -27,2079380741985 \\
13,75a + 10b &= -12,0376985211429
\end{aligned}$$

Menggunakan program Gauss naif dari pertemuan sebelumnya, diperoleh nilai a, b, c sebagai berikut

```

Gauss Naif:
a = -2.0666380814791774
ln(b) = 1.6378575099195791

```

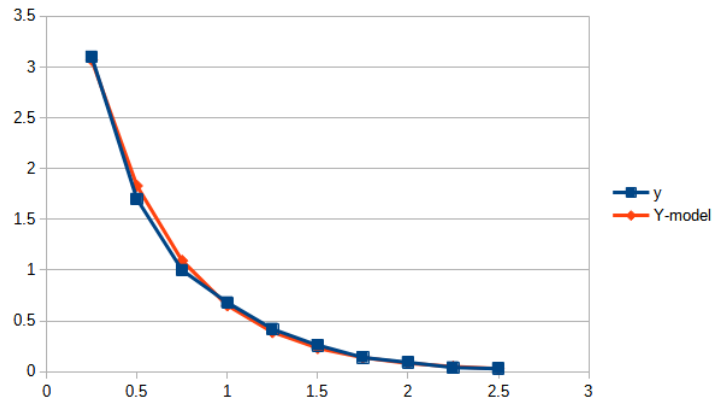
Maka

$$\begin{aligned}
a &= -2,0666380814791774 \\
b &= 5,14413643604038
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$f(x) = 5,14413643604038e^{-2,0666380814791774x}$$

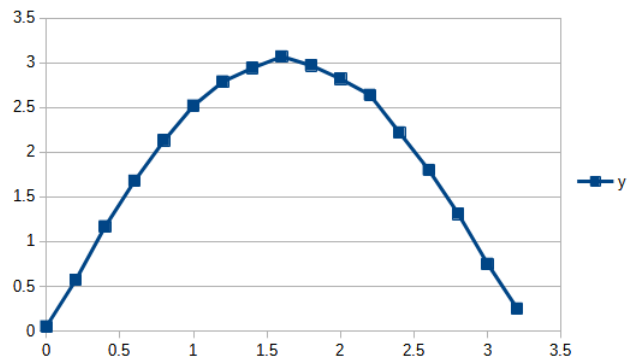
Diperoleh perbandingan grafik fungsi tersebut dengan plotting data awal adalah sebagai berikut



3. Soal no.5

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6
y	0.05	0.57	1.17	1.68	2.13	2.52	2.79	2.94	3.07
x	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3	3.2	
y	2.97	2.82	2.64	2.22	1.8	1.31	0.75	0.25	

Grafik plotting dari data tersebut adalah sebagai berikut



Terlihat bahwa plotting menyerupai grafik fungsi polinom derajat 2, maka dipilih

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Maka diperoleh simpangan bakunya adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{i=1}^{17} (y_i - f(x_i))^2 \\
 &= \sum_{i=1}^{17} (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2
 \end{aligned}$$

S bernilai minimum ketika $\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \frac{\partial S}{\partial c} = 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial S}{\partial a} \\
0 &= \cancel{2} \sum_{i=1}^{17} (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)x_i^2 \\
0 &= \sum_{i=1}^{17} y_i x_i^2 - a \sum_{i=1}^{17} x_i^4 - b \sum_{i=1}^{17} x_i^3 - c \sum_{i=1}^{17} x_i^2 \\
&\Rightarrow a \sum_{i=1}^{17} x_i^4 + b \sum_{i=1}^{17} x_i^3 + c \sum_{i=1}^{17} x_i^2 = \sum_{i=1}^{17} y_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial S}{\partial b} \\
0 &= \cancel{2} \sum_{i=1}^{17} (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)x_i \\
0 &= \sum_{i=1}^{17} y_i x_i - a \sum_{i=1}^{17} x_i^3 - b \sum_{i=1}^{17} x_i^2 - c \sum_{i=1}^{17} x_i \\
&\Rightarrow a \sum_{i=1}^{17} x_i^3 + b \sum_{i=1}^{17} x_i^2 + c \sum_{i=1}^{17} x_i = \sum_{i=1}^{17} y_i x_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial S}{\partial c} \\
0 &= \cancel{2} \sum_{i=1}^{17} (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \\
0 &= \sum_{i=1}^{17} y_i - a \sum_{i=1}^{17} x_i^2 - b \sum_{i=1}^{17} x_i - c \sum_{i=1}^{17} 1 \\
&\Rightarrow a \sum_{i=1}^{17} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{17} x_i + c \sum_{i=1}^{17} 1 = \sum_{i=1}^{17} y_i
\end{aligned}$$

Dari data awal dapat diperoleh

$\sum_{i=1}^{17} 1 = 17$	$\sum_{i=1}^{17} x_i = 27,2$
$\sum_{i=1}^{17} x_i^2 = 59,84$	$\sum_{i=1}^{17} x_i^3 = 147,968$
$\sum_{i=1}^{17} x_i^4 = 390,1568$	$\sum_{i=1}^{17} y_i = 31,68$
$\sum_{i=1}^{17} y_i x_i = 51,71$	$\sum_{i=1}^{17} y_i x_i^2 = 100,5532$

Maka diperoleh SPL sebagai berikut

$$\begin{array}{rclcl} 390,1568a & + & 147,968b & + & 59,84c & = & 100,5532 \\ 147,968a & + & 59,84b & + & 27,2c & = & 51,71 \\ 59,84a & + & 27,2b & + & 17c & = & 31,68 \end{array}$$

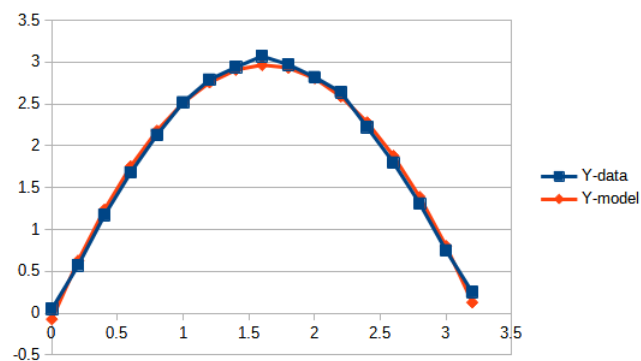
Menggunakan program Gauss naif dari pertemuannya sebelumnya, diperoleh nilai a, b, c sebagai berikut

```
Gauss Naif:
a = -1.1473490712074155
b = 3.734139576883333
c = -0.07242518059852361
```

Maka diperoleh

$$f(x) = -1,1473490712074155x^2 + 3,734139576883333x - 0,07242518059852361$$

Diperoleh perbandingan grafik fungsi tersebut dengan plotting data awal adalah sebagai berikut



Perhatikan bahwa plotting data awal juga menyerupai fungsi trigonometri. Agar fungsi linier terhadap koefisien-koefisien yang akan dicari, maka dipilih

$$f(x) = a \sin(x) + b$$

Maka dengan cara yang sama seperti sebelumnya, diperoleh

$$a \sum_{i=1}^{17} \sin^2(x_i) + b \sum_{i=1}^{17} \sin(x_i) = \sum_{i=1}^{17} y_i \sin(x_i)$$

dan

$$a \sum_{i=1}^{17} \sin(x_i) + b \sum_{i=1}^{17} 1 = \sum_{i=1}^{17} y_i$$

Dari data diperoleh

$$\sum_{i=1}^{17} 1 = 17$$

$$\sum_{i=1}^{17} = 7,85796495077195$$

$$\sum_{i=1}^{17} y_i \sin(x_i) = 24,2807262974767$$

$$\sum_{i=1}^{17} \sin(x_i) = 9,92895966988763$$

$$\sum_{i=1}^{17} y_i = 31,68$$

Diperoleh SPL sebagai berikut

$$\begin{aligned} 7,85796495077195a + 9,92895966988763b &= 24,2807262974767 \\ 9,92895966988763a + 17b &= 31,68 \end{aligned}$$

Solusi dari SPL tersebut adalah

```
Gauss Naif:
a = 2.8062753744875977
b = 0.2245061755361081
```

Diperoleh

$$f(x) = 2,8062753744875977 \sin(x) + 0,2245061755361081$$

Grafik perbandingan antara fungsi dengan data diberikan sebagai berikut

