Kelompok 5

- 1. Rafif Rabbani (2102286)
- 2. Bagas Ghulam Maulana (2102476)
- 3. Muhammad Rahman Wicaksono (2102800)

Pertemuan 3 Analisis Numerik

1. Diberikan persamaan sebagai berikut:

$$x^2 - 3 - \ln(x) = 0$$

Bagaimana metode iterasi titik tetap mencari hampiran akar-akar persamaan tak linier tersebut?

Misalkan diberikan persamaan f(x) = 0, maka ubah persamaan menjadi bentuk

- (1) $x = g_1(x)$
- (2) $x = g_2(x)$

:

$$(n) x = q_n(x)$$

Kemudian diantara fungsi-fungsi tersebut, pilih fungsi q(x) yang memenuhi

$$|g(x)| < 1, \forall x \in [a, b]$$

untuk suatu selang [a,b]. Lalu pilih titik perkiraan awal $x_0 \in [a,b]$. Selanjutnya perkiraan akar-akar x_n dihitung dengan

$$x_n = g(x_{n-1})$$

Lakukan secara iterasi berulang hingga tingkat galat yang diinginkan tercapai yaitu dengan menghitung

$$\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| < \varepsilon$$

dimana ε adalah tingkat galat yang diinginkan.

Untuk kasus $x^2 - 3 - \ln(x)$, terdapat 2 fungsi yang dapat digunakan yaitu

(1)
$$x = g_1(x) = \pm \sqrt{3 + \ln(x)}$$

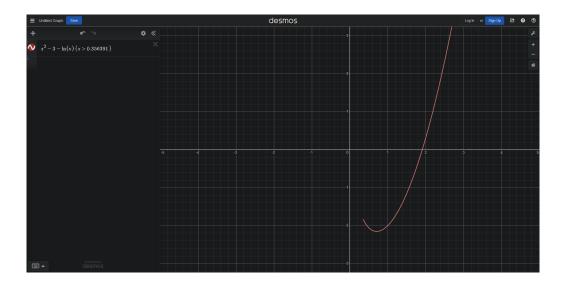
(2)
$$x = q_1(x) = e^{(x^2-3)}$$

Untuk fungsi $g_1(x)$, diperoleh

$$|g_1'(x)| = \left| \pm \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x) + 3}} \right| = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x) + 3}} < 1, \forall x \in (0.356391, \infty)$$

Kemudian akan digunakan juga metode grafik tunggal untuk menentukan perkiraan akar x_0

1



Dari grafik diatas, terlihat bahwa akar sejati terletak di sekitar 1.5. Maka dipilih nilai $x_0=1.5$. Untuk menghitung hampiran akar-akarnya, akan digunakan bahasa pemograman "Rust" sebagai berikut

```
use std::io;
fn read() -> String {
   let mut buffer = String::new();
    io::stdin()
        .read_line(&mut buffer)
        .expect("Failed");
    return buffer;
}
fn f(x:f64) -> f64{
    (x * x) - 3.0 - x.ln()
fn g(x:f64) -> f64 {
    (3.0 + x.ln()).sqrt()
}
fn main() {
    println!();
    println!("x = ");
    let mut x : f64 = read()
        .trim()
        .parse()
        .expect("Failed");
    if f(x) == 0.0 {
        println!();
        println!();
```

```
println!("f(x) = {}", f(x));
    println!();
    println!("Solusi akhir = {x}");
    return ();
}
// INPUT GALAT
println!();
println!("Batas galat = ");
let galat : f64 = read()
    .trim()
    .parse()
    .expect("Failed");
println!();
println!("Batas iterasi = ");
let max : i32 = read()
    .trim()
    .parse()
    .expect("Failed");
let mut iter = 0;
        (true)
while
        & (f(g(x)) != 0.0)
        & ((g(x) - x).abs() > galat)
        & (iter < max){
        // OUTPUT ITERASI
        println!();
        println!();
println!("Iterasi {iter}");
        println!();
        println!("x{iter} = \{x\}");
        println!("f(x\{iter\}) = \{\}",f(x));
        println!();
        println!("x{} = {}", iter + 1, g(x));
        println!("f(x{}) = {}", iter + 1, f(g(x)));
        println!();
        println!("galat = {}", ((g(x) - x) / g(x)).abs());
    }
    x = g(x);
    iter = iter + 1;
    println!();
    println!();
    println!("Iterasi {iter}");
    println!();
    println!("x{iter} = {x}");
    println!("f(x{iter}) = {}",f(x));
    println!();
    println!("x{} = {}", iter + 1, g(x));
    println!("f(x{}) = {}", iter + 1, f(g(x)));
    println!();
    println!("galat = \{\}", ((g(x) - x) / g(x)).abs());
```

```
println!();
    println!();
    println!("Solusi akhir = {x}");
}
}
```

Kemudian perhitungan dilakukan dengan galat sebesar 0.0000001. Diperoleh hasil sebagai berikut

```
x =
1.5
Batas galat =
0.0000001
Batas iterasi =
1000
Iterasi 0
x0 = 1.5
f(x0) = -1.1554651081081644
x1 = 1.8453902319314917
f(x1) = -0.20722565484164668
galat = 0.18716379113483567
Iterasi 1
x1 = 1.8453902319314917
f(x1) = -0.20722565484164668
x2 = 1.9007079636150872
f(x2) = -0.029535666248805104
galat = 0.029103751203516267
Iterasi 2
x2 = 1.9007079636150872
f(x2) = -0.029535666248805104
x3 = 1.9084617966306312
f(x3) = -0.004071146319573171
galat = 0.0040628704379795854
Iterasi 3
x3 = 1.9084617966306312
f(x3) = -0.004071146319573171
x4 = 1.9095281028354072
```

```
f(x4) = -0.0005585694360532578
galat = 0.0005584134651868497
Iterasi 4
x4 = 1.9095281028354072
f(x4) = -0.0005585694360532578
x5 = 1.9096743557356166
f(x5) = -0.00007658818921885135
galat = 0.00007658525641827714
Iterasi 5
x5 = 1.9096743557356166
f(x5) = -0.00007658818921885135
x6 = 1.9096944083133984
f(x6) = -0.00001050046697304019
galat = 0.00001050041184313098
Iterasi 6
x6 = 1.9096944083133984
f(x6) = -0.00001050046697304019
x7 = 1.9096971575646318
f(x7) = -0.000001439627849819658
galat = 0.0000014396268133121415
Iterasi 7
x7 = 1.9096971575646318
f(x7) = -0.000001439627849819658
x8 = 1.9096975344902878
f(x8) = -0.0000001973745508143665
galat = 0.00000019737453141815822
Iterasi 8
x8 = 1.9096975344902878
f(x8) = -0.0000001973745508143665
x9 = 1.9096975861672012
f(x9) = -0.000000027060260365807665
galat = 0.000000027060260111046353
```

Solusi akhir = 1.9096975344902878

Kemudian dilakukan juga perhitungan menggunakan software Microsoft Excel dan diperoleh hasil sebagai berikut

Iterasi	>	(g(x)
	1	1.5	1.845390232
	2	1.845390232	1.900707964
	3	1.900707964	1.908461797
	4	1.908461797	1.909528103
	5	1.909528103	1.909674356
	6	1.909674356	1.909694408
	7	1.909694408	1.909697158
	8	1.909697158	1.909697534

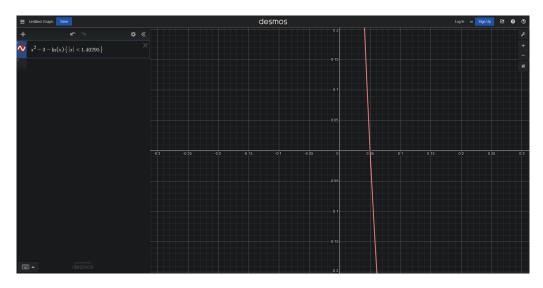
Diperoleh hasil akhir x = 1.9096975344902878.

Untuk fungsi $g_2(x)$, diperoleh

$$|g_2'(x)| < 1$$

 $|2xe^{x^2-3}| < 1$
 $-1 < 2xe^{x^2-3} < 1$
 $-1.40295 < x < 1.40295$

Kemudian akan digunakan juga metode grafik tunggal untuk menentukan perkiraan akar \boldsymbol{x}_0



Dari grafik diatas, terlihat bahwa akar sejati terletak di sekitar 1. Maka dipilih nilai $x_0=1$. Untuk menghitung hampiran akar-akarnya, akan digunakan bahasa pemograman "Rust" sebagai berikut

```
use std::io;
fn read() -> String {
    let mut buffer = String::new();
    io::stdin()
         .read_line(&mut buffer)
         .expect("Failed");
    return buffer;
}
fn f(x:f64) -> f64{
    (x * x) - 3.0 - x.ln()
}
fn g(x:f64) -> f64 {
    (x * x - 3.0).exp()
}
fn main() {
    println!();
    println!("x = ");
    let mut x : f64 = read()
         .trim()
         .parse()
         .expect("Failed");
    if f(x) == 0.0 {
        println!();
        println!();
        println!("f(x) = {}", f(x));
        println!();
        println!("Solusi akhir = {x}");
        return ();
    }
    // INPUT GALAT
    println!();
    println!("Batas galat = ");
let galat : f64 = read()
        .trim()
         .parse()
         .expect("Failed");
    // INPUT BATAS ITERASI
    println!();
    println!("Batas iterasi = ");
let max : i32 = read()
        .trim()
         .parse()
        .expect("Failed");
```

```
let mut iter = 0;
    while
             (true)
             & (f(g(x)) != 0.0)
             & ((g(x) - x).abs() > galat)
             & (iter < max){
             // OUTPUT ITERASI
             println!();
             println!();
             println!("Iterasi {iter}");
             println!();
             println!("x{iter} = \{x\}");
             println!("f(x\{iter\}) = \{\}",f(x));
             println!();
             println!("x{} = {}", iter + 1, g(x));
println!("f(x{}) = {}", iter + 1, f(g(x)));
             println!();
             println!("galat = {}", ((g(x) - x) / g(x)).abs());
         }
        x = g(x);
        iter = iter + 1;
        println!();
        println!();
        println!("Iterasi {iter}");
        println!();
        println!("x{iter} = {x}");
println!("f(x{iter}) = {}",f(x));
        println!();
         println!("x{} = {}", iter + 1, g(x));
        println!("f(x{}) = {}", iter + 1, f(g(x)));
         println!();
        println!("galat = {}", ((g(x) - x) / g(x)).abs());
        println!();
        println!();
        println!("Solusi akhir = {x}");
    }
}
```

Kemudian perhitungan dilakukan dengan galat sebesar 0.00001. Diperoleh hasil sebagai berikut

```
x =
1

Batas galat =
0.00001

Batas iterasi =
1000

Iterasi 0
```

```
x0 = 1
f(x0) = -2
x1 = 0.1353352832366127
f(x1) = -0.9816843611112658
galat = 6.3890560989306495
Iterasi 1
x1 = 0.1353352832366127
f(x1) = -0.9816843611112658
x2 = 0.050707352401841294
f(x2) = -0.015744403301129584
galat = 1.6689479301565424
Iterasi 2
x2 = 0.050707352401841294
f(x2) = -0.015744403301129584
x3 = 0.04991524736843919
f(x3) = -0.00007970366775200688
galat = 0.015868999457326945
Iterasi 3
x3 = 0.04991524736843919
f(x3) = -0.00007970366775200688
x4 = 0.04991126909869063
f(x4) = -0.00000039713681054820427
galat = 0.00007970684417365161
Solusi akhir = 0.04991524736843919
```

Kemudian dilakukan juga perhitungan menggunakan software Microsoft Excel dengan hasil sebagai berikut

r	Xr	X(r+1) - Xr	0.0001
0	1		
1	0.135335283236613	0.864664716763387	Lanjut
2	0.0507073524018413	0.0846279308347714	Lanjut
3	0.0499152473684392	0.000792105033402102	Lanjut
4	0.0499112690986906	3.97826974855853E-06	Stop

Diperoleh hasil akhir x = 0.04991524736843919.

2. Gunakan metode iterasi titik tetap untuk masalah penentuan hampiran akar-akar untuk

$$x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x - 4 = 0$$

Dari persamaan $x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x - 4 = 0$, diperoleh

$$x = g_1(x) = \frac{1}{2}(4 + x^2 - 3x^3 - x^4)$$

$$x = g_2(x) = \sqrt{x^4 + 3x^3 + 2x - 4}$$

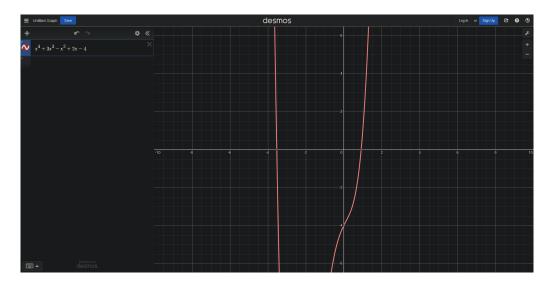
$$x = g_3(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{3}(4 - 2x + x^2 - x^4)}$$

$$x = g_4(x) = \sqrt[4]{4 - 2x + x^2 - 3x^3}$$

$$x = g_5(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 2x + 4}{x + 3}}$$

$$x = g_6(x) = \sqrt[3]{\frac{-3x^3 + x^2 - 2x + 4}{x}}$$

Kemudian titik awal x_0 ditentukan dengan metode grafik tunggal sebagai berikut



Terlihat bahwa kurva memotong sumbu x di sekitar titik 1 dan -4. Maka akan dipilih 2 titik perkiraan awal x_0 yaitu $x_0 = 1$ dan $x_0 = -3$. Perhitungan hampiran akar akan dilakukan menggunakan bahasa pemograman "Rust" sebagai berikut

```
use std::io;

// INPUT KE VARIABEL
fn read() -> String {
    let mut buffer = String::new();
    io::stdin()
        .read_line(&mut buffer)
        .expect("Failed");
    return buffer;
}

// FUNGSI f(x)
fn f(x:f64) -> f64{
```

```
x.powi(4) + 3.0 * x.powi(3) - x.powi(2) + 2.0 * x - 4.0
}
fn g(x:f64) -> f64 {
    (4.0 + x.powi(2) - 3.0 * x.powi(3) - x.powi(4)) / 2.0 // g1(x)
    (2.0 * x - 4.0 + 3.0 * x.powi(3) + x.powi(4)).sqrt() // g2(x)
    ((4.0 - 2.0 * x + x.powi(2) - x.powi(4)) / 3.0).cbrt() // g3(x)

(4.0 - 2.0 * x + x.powi(2) - 3.0 * x.powi(3)).powf(0.25) // g4(x)
}
fn main() {
    println!();
    println!("x = ");
let mut x : f64 = read()
         .trim()
         .parse()
         .expect("Failed");
    if f(x) == 0.0 {
        println!();
        println!();
         println!("f(x) = {}", f(x));
         println!();
        println!("Solusi akhir = {x}");
        return ();
    println!();
    println!("Batas galat = ");
    let galat : f64 = read()
         .trim()
         .parse()
         .expect("Failed");
    // INPUT BATAS ITERASI
    println!();
    println!("Batas iterasi = ");
    let max : i32 = read()
         .trim()
         .parse()
         .expect("Failed");
    // LOOPING ALGORITMA
    let mut iter = 0;
    while
             (true)
             & (f(g(x)) != 0.0)
             & ((g(x) - x).abs() > galat)
             & (iter < max){
             println!();
             println!();
```

```
println!("Iteras {iter}");
             println!();
             println!("x{iter} = \{x\}");
             println!("f(x\{iter\}) = \{\}",f(x));
             println!();
             println!("x{} = {}", iter + 1, g(x));
             println!("f(x{}) = {}", iter + 1, f(g(x)));
             println!();
             println!("galat = {}", ((g(x) - x) / g(x)).abs());
         }
         x = g(x);
         iter = iter + 1;
         println!();
         println!();
         println!("Iteras {iter}");
         println!();
         println!("x{iter} = {x}");
println!("f(x{iter}) = {}",f(x));
         println!();
         println!("x{} = {}", iter + 1, g(x));
println!("f(x{}) = {}", iter + 1, f(g(x)));
         println!();
         println!("galat = {}", ((g(x) - x) / g(x)).abs());
         println!();
         println!();
         println!("Solusi akhir = {x}");
    }
}
```

Perhitungan dilakukan dengan galat sebesar 0.00001 dan diperoleh hasil sebagai berikut

- (a) Untuk $g_1(x)$
 - i. Untuk $x_0 = 1$

```
x =
1
Batas galat =
0.00001
Batas iterasi =
1000

Iteras 0

x0 = 1
f(x0) = 1

x1 = 0.5
f(x1) = -2.8125
```

Diperoleh untuk $x_0 = 1$, perhitungan divergen

ii. Untuk $x_0 = -3$

```
x =
-3

Batas galat =
0.00001

Batas iterasi =
1000

Iteras 0

x0 = -3
f(x0) = -19

x1 = 6.5
f(x1) = 2575.6875

galat = 1.4615384615384615

Iteras 1

x1 = 6.5
f(x1) = 2575.6875
```

Diperoleh untuk $x_0 = -3$, perhitungan divergen

- (b) Untuk $g_2(x)$
 - i. Untuk $x_0 = 1$

```
x =
Batas galat =
0.00001
Batas iterasi =
1000
Iteras 0
x0 = 1
f(x0) = 1
x1 = 1.4142135623730951
f(x1) = 9.313708498984761
galat = 0.29289321881345254
Iteras 1
x1 = 1.4142135623730951
f(x1) = 9.313708498984761
x2 = 3.3635856610148585
f(x2) = 233.57734586330625
galat = 0.5795517923731427
```

Diperoleh untuk $x_0=1$, perhitungan divergen

ii. Untuk $x_0 = -3$

```
x =
-3

Batas galat =
0.00001

Batas iterasi =
1000

Iteras 0

x0 = -3
f(x0) = -19

x1 = NaN
f(x1) = NaN
galat = NaN
Solusi akhir = -3
```

Diperoleh untuk $x_0 = -3$ perhitungan divergen

- (c) Untuk $g_3(x)$
 - i. Untuk $x_0 = 1$

```
x =
1

Batas galat =
0.00001

Batas iterasi =
1000

Iteras 0
```

```
x0 = 1
f(x0) = 1
x1 = 0.8735804647362988
f(x1) = -0.4335949224054252
galat = 0.14471424255333196
Iteras 1
x1 = 0.8735804647362988
f(x1) = -0.4335949224054252
x2 = 0.93262920676064
f(x2) = 0.1856033326436215
galat = 0.06331427495117692
Iteras 12
x12 = 0.9157548534009559
f(x12) = 0.000039532295601496514
x13 = 0.9157496155450033
f(x13) = -0.00001697223888941224
galat = 0.0000057197468211931175
Solusi akhir = 0.9157548534009559
```

Diperoleh hasil akhir x = 0.9157548534009559

ii. Untuk $x_0 = -3$

```
x =
-3

Batas galat =
0.00001

Batas iterasi =
1000

Iteras 0

x0 = -3
f(x0) = -19

x1 = -2.7442487702296905
f(x1) = -22.30492426861962

galat = 0.09319535187362166
```

```
Iteras 1

x1 = -2.7442487702296905
f(x1) = -22.30492426861962

x2 = -2.3652213652991407
f(x2) = -22.723910163170096

galat = 0.16025028798207747

.
.
.
Iteras 17

x17 = 0.9157549868296531
f(x17) = 0.00004097169610517426

x18 = 0.915749558259892
f(x18) = -0.00001759021102865077

galat = 0.000005928006966622007

Solusi akhir = 0.9157549868296531
```

Diperoleh hasil akhir x = 0.9157549868296531

- (d) Untuk $g_4(x)$
 - i. Untuk $x_0 = 1$

```
x =
1
Batas galat =
0.00001
Batas iterasi =
1000

Iteras 0

x0 = 1
f(x0) = 1

x1 = 0
f(x1) = -4

galat = inf

Iteras 1

x1 = 0
f(x1) = -4
```

```
x2 = 1.4142135623730951
f(x2) = 9.313708498984761

galat = 1

Iteras 2

x2 = 1.4142135623730951
f(x2) = 9.313708498984761

x3 = NaN
f(x3) = NaN
galat = NaN

Solusi akhir = 1.4142135623730951
```

Diperoleh untuk $x_0 = 1$ perhitungan divergen

ii. Untuk $x_0 = -3$

```
x =
- 3
Batas galat =
0.00001
Batas iterasi =
1000
Iteras 0
x0 = -3
f(x0) = -19
x1 = 3.1622776601683795
f(x1) = 187.1928851253882
galat = 1.948683298050514
Iteras 1
x1 = 3.1622776601683795
f(x1) = 187.1928851253882
x2 = NaN
f(x2) = NaN
galat = NaN
Solusi akhir = 3.1622776601683795
```

Diperoleh untuk $x_0 = -3$ perhitungan divergen

(e) Untuk $g_5(x)$

Untuk fungsi $g_5(x)$, perhitungan dilakukan dengan software Microsoft Excel sebagai berikut

r	Xr	X(r+1)-Xr	0.0001
0	0.01		
1	1.09759595055116	1.08759595055116	Lanjut
2	0.902241791682542	0.195354158868614	Lanjut
3	0.917056548580811	0.0148147568982694	Lanjut
4	0.915627300573917	0.0014292480068937	Lanjut
5	0.915762967278311	0.000135666704394133	Lanjut
6	0.915750069217386	1.28980609249707E-05	Stop

Diperoleh hasil akhir x = 0.915750069217386

(f) Untuk $g_6(x)$

Untuk fungsi $g_6(x)$, perhitungan dilakukan dengan software Microsoft Excel sebagai berikut

r	Xr	X(r+1)-Xr	0.0001
0	-3		
1	-3.21829794868543	0.218297948685432	Lanjut
2	-3.34816164111402	0.129863692428589	Lanjut
3	-3.42488677671783	0.0767251356038079	Lanjut
4	-3.470012011725	0.0451252350071729	Lanjut
5	-3.49647797695354	0.026465965228534	Lanjut
6	-3.51197425362695	0.0154962766734186	Lanjut
7	-3.52103856884729	0.00906431522033691	Lanjut
8	-3.52633749911181	0.00529893026451944	Lanjut
9	-3.52943414885049	0.00309664973867774	Lanjut
10	-3.53124344020269	0.00180929135220342	Lanjut
11	-3.53230043722413	0.00105699702143847	Lanjut
12	-3.53291789761792	0.000617460393789404	Lanjut
13	-3.53327858169092	0.000360684072999273	Lanjut
14	-3.53348926717297	0.00021068548205383	Lanjut
15	-3.53361233266363	0.000123065490652774	Lanjut
16	-3.53368421703493	7.18843713003459E-05	Stop

Diperoleh hasil akhir x = -3.53368421703493

Dari semua kemungkinan, diperoleh

- (a) fungsi $g_3(x)$ dengan $x_0=1$ konvergen dan diperoleh hasil akhir x=0.9157511353924488
- (b) fungsi $g_3(x)$ dengan $x_0=-3$ konvergen dan diperoleh hasil akhir x=0.9157549868296531
- (c) fungsi $g_5(x)$ dengan $x_0=1$ konvergen dan diperoleh hasil akhir x=0.915750069217386
- (d) fungsi $g_6(x)$ dengan $x_0=-3$ konvergen dan diperoleh hasil akhir x=-3.53368421703493

3. Apa yang dapat kalian simpulkan mengenai kelebihan dan kekurangan metode iterasi titik tetap dibandingkan dengan metode-metode lain yang digunakan untuk menentukan hampiran akar persamaan tak linier? Jelaskan!

(a) Kelebihan

i. Algoritma yang digunakan lebih mudah jika dibandingkan dengan metode sebelumnya

(b) Kekurangan

- i. Proses iterasi yang tidak efisien
- ii. Tidak dapat digunakan untuk semua fungsi
- iii. Nilai x saat iterasi dapat menjauhi nilai hampiran akar x sebenarnya
- iv. Jika f(x) mempunyai beberapa akar, maka akar tersebut tidak dapat dicari secara langsung atau bersamaan
- v. Tidak dapat mencari akar kompleks
- vi. Jika persamaan non linear cukup rumit, akan sulit untuk mencari turunan g(x) (untuk mencari kekonvergenan)

Jika dilihat dari soal nomor 1, iterasi yang diperlukan untuk mendapatkan hampiran akar sama atau lebih sedikit dari metode-metode sebelumnya. Namun perbandingan ini tidak begitu menggambarkan perbedaan metode-metode ini karena pengambilan titik perkiraan awal x_0 pada metode iterasi titik tetap bergantung pada pemilihan fungsi g(x) yang akan digunakan. Selain itu, metode iterasi titik tetap menjamin kekonvergenan jika titik perkiraan awal x_0 diambil dari interval dimana |g'(x)| < 1. Tetapi terkadang menentukan solusi untuk |g'(x)| < 1 tidak dapat dilakukan sehingga menentukan fungsi g(x) yang akan digunakan harus dilakukan dengan mencoba-coba. Metode ini sangatlah fleksibel tapi karena fleksibelnya itu cukup susah untuk menemukan hampiran akar karena terlalu banyak kemungkinan persamaan yg dapat dibuat.