

浙江大学 2016-2017 学年 秋冬 学期

《线性代数（甲）》课程期末考试试卷

一.(本题 10 分)计算行列式 $\begin{vmatrix} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} & \sin \frac{\alpha+\beta}{2} & \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos \frac{\beta-\gamma}{2} & \sin \frac{\beta+\gamma}{2} & \cos \frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos \frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin \frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos \frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix}$.

二.(本题 15 分)已知矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 而且 $A^{-1} + E$ 可逆, 如果矩阵 X 满足 $A^{-1}XA + XA + 2E = 0$, 求矩阵 X .

三.(本题 15 分)解线性方程组 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$.

四.(本题 15 分)

(1) 设 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 求矩阵 $C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值;

(2) 已知 $\sum_{k=1}^n a_k = 0$, 求 n 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1^2 + 1 & a_1a_2 + 1 & \cdots & a_1a_n + 1 \\ a_2a_1 + 1 & a_2^2 + 1 & \cdots & a_2a_n + 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 + 1 & a_na_2 + 1 & \cdots & a_n^2 + 1 \end{pmatrix}$ 的特征值.

五.(本题 15 分)已知 $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ 为实可逆矩阵, 其中 A_1, A_2 分别为 $p \times n, (n-p) \times n$ 矩阵.

- (1) 求二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T(A_1^T A_1 - A_2^T A_2)X$ 的正惯性指数和负惯性指数;
(2) 求证矩阵 $A_1^T A_1 - A_2^T A_2$ 可逆.

六.(本题 15 分)设 $R[x]$ 是实系数多项式全体, 定义其上内积函数如下:

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x) dx, \forall f(x), g(x) \in R[x].$$

- (1) 请将 $1, x, x^2, x^3$ 改造为正交多项式组;
(2) 请将多项式 $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ 用上述正交多项式组线性表示.

七.(本题 8 分)设 A 是 n 阶实矩阵, 如果对于任意 n 维向量 x , 都有 $\|Ax\| = \|x\|$, 则 A 是正交矩阵.

八.(本题 7 分)设 E_r, E_s 分别是 r 阶和 s 阶单位矩阵, a 为非零常数, A, B 分别为 $r \times s$ 和 $s \times r$ 矩阵.

(1) 试求矩阵 U, W, X, Y 使得

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ X & E_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aE_r & A \\ B & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aE_r & A \\ O & Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_r & W \\ O & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aE_r & A \\ B & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & O \\ B & E_s \end{pmatrix};$$

(2) 等式 $a^s |aE_r - AB| = a^r |aE_s - BA|$ 是否成立? 请尽量详细地说明理由.

浙江大学 2016-2017 学年 春夏 学期

《线性代数（甲）》课程期末考试试卷

一.(本题 10 分)计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 & 2-n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$ 的值.

二.(本题 15 分)设 a, b, c, d 为任意实常数,有线性方程组如下:
$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 = a^3 \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 = b^3 \\ x_1 + cx_2 + c^2x_3 = c^3 \\ x_1 + dx_2 + d^2x_3 = d^3 \end{cases}.$$

- (1)试证明当 a, b, c, d 互异时,上述方程组无解;
- (2)设 $a = b = k, c = d = -k$,且 $[-1, 1, 1]^T$ 是上述方程组的一个特解,试求上述方程组的通解.

三.(本题 15 分)设 $R^{2 \times 2}$ 是2阶实矩阵关于矩阵的加法运算和数乘运算构成的实线性空间,令 $V = \{A \in R^{2 \times 2} \mid \text{tr} A = 0\}$.

- (1)试证明 V 关于矩阵的加法运算和数乘运算构成实数域 R 上的线性空间;
- (2)试求线性空间 V 的一组基和维数.

四.(本题 15 分)设有 n 阶矩阵如下: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$,试求 A 的实特征值及其对应的特征向量.

五.(本题 15 分)当 t 取何值时,实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 是正定二次型?

六.(本题 15 分)设 $V = R[x]_3$ 是次数小于3的实系数一元多项式和零多项式组成的关于多项式加法和数乘所构成的实线性空间.

- (1)试证明 $\{1+x^2, 1+x, 1\}$ 是 V 的一组基,记作(I);
- (2)若对于任意的实系数多项式 $p_1(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2, p_2(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2$,定义他们的内积为 $(p_1(x), p_2(x)) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$,试用施密特正交化方法将上述基 $\{1+x^2, 1+x, 1\}$ 改造成 V 的标准正交基;
- (3)设 $\{1+x+x^2, 1-x^2, 1-x\}$ 是 V 的另外一组基,记作基(II),试求基(I)到基(II)的过渡矩阵
- (4)问基(I)和基(II)在(2)中的内积下的度量矩阵有何关系?

七.(本题 8 分)设 A, B 都是 n 阶方阵,求证:

- (1) $AB + B$ 和 $BA + B$ 有相同的特征值;
- (2)如果 $AB = (B - A^T)A$,则 $A = O$.

八.(本题 7 分)试证明任何一个方阵可表示为一个幂等矩阵(满足 $A^2 = A$ 的方阵)和一个可逆矩阵的乘积.

浙江大学 2017-2018 学年 秋冬 学期

《线性代数（甲）》课程期末考试试卷

一.(本题 10 分)设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

试证明: $\begin{vmatrix} a_{11} + b_1 & a_{11} + b_2 & \dots & a_{1n} + b_n \\ a_{21} + b_1 & a_{21} + b_2 & \dots & a_{2n} + b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + b_1 & a_{n1} + b_2 & \dots & a_{nn} + b_n \end{vmatrix} = D + \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^n A_{ij}$.

其中 A_{ij} 为 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

二.(本题 15 分)设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 是某个线性空间中的 4 个向量. 试证明: $\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \beta - \alpha_3$ 线性无关当且仅当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

三.(本题 15 分)设 A 是一个 $n(n \geq 2)$ 阶方阵, 试求所有满足 $A^* = A$ 的方阵 A , 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵.

四.(本题 15 分)求向量组 $\alpha_1 = (6, 4, 1, -1, 2)^T, \alpha_2 = (1, 0, 2, 3, -4)^T, \alpha_3 = (1, 4, -9, -16, 22)^T, \alpha_4 = (7, 1, 0, -1, 3)^T$ 的一个极大线性无关组和秩.

五.(本题 15 分)设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$, 其中数 $\omega \neq 1$ 且 $\omega^3 = 1$, 令 $V = \{f(A) | f \text{ 为复系数一元多项式}\}$.

(1) 试证明 V 关于矩阵的加法和数乘运算构成复数域 \mathbb{C} 上的一个线性空间;

(2) 试求线性空间 V 的一组基和维数.

六.(本题 15 分)设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 3.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的所有特征值与特征向量;

(2) 问是否存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵? 若存在, 求出 P ; 若不存在, 请说明理由;

(3) 请问是否存在正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角矩阵? 若存在, 求出 Q ; 若不存在, 请说明理由.

七.(本题 8 分)设 A 为 n 阶实对称矩阵, 试证明 A 半正定当且仅当 $\forall c > 0, cE + A$ 正定.

八.(本题 7 分)设 A 为可逆的 n 阶实对称矩阵, B 为 n 阶实反对称矩阵, 且有 $AB = BA$, 试证明: $A - B$ 可逆.

浙江大学 2017-2018 学年 春夏 学期

《线性代数（甲）》课程期末考试试卷

一.(本题 10 分)计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & 4^5 & 5^5 \end{vmatrix}$ 的值.

二.(本题 15 分)

(1)叙述向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关与线性无关的定义;

(2)设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$ 线性相关, 证明: β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 唯一线性表示.

三.(本题 15 分)设 X_1, \dots, X_t 是非齐次线性方程组 $AX = b$ 的 t 个解, 证明: $k_1 X_1 + \dots + k_t X_t$ 是 $AX = b$ 的解 $\Leftrightarrow k_1 + \dots + k_t = 1$.

四.(本题 15 分)设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为某个实线性空间 V 中的 n 个向量, 其秩为 $r \geq 1$, 且 $n - r \geq 1$, 设 $W = \{(k_1, \dots, k_n)^T \in R^n | k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n = 0\}$.

证明:(1) W 为 R^n 的一个子空间;

(2)求 W 的一组基和维数.

五.(本题 15 分)设(I): $1, x, x^2$, (II):($x - 2)(x - 3)$, $(x - 1)(x - 3)$, $(x - 1)(x - 2)$ 是线性空间 $R[x]_3$ 的两组基, 求:

(1)从基(I)到基(II)的过渡矩阵;

(2)从基(II)到基(I)的过渡矩阵;

(3)设 $p(x) = 1 + x + x^2$, 求 $p(x)$ 在基(II)下的坐标.

六.(本题 15 分)暂缺.

七.(本题 8 分)设 α, β 是 n 维欧氏空间的两个互异向量, $\|\alpha\| = \|\beta\| = 1$, 证明: $(\alpha, \beta) \neq 1$.

八.(本题 7 分)设 A 是 n 阶实对称矩阵, 如果有 n 阶实矩阵 B , 使得 $AB^T + BA$ 的所有特征值为正实数, 证明: A 可逆.

浙江大学 2018-2019 学年 秋冬 学期

《线性代数（甲）》课程期末考试试卷

一.(本题 15 分)设有 n 阶行列式如下:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n \end{vmatrix}, \text{其中 } a_1, \dots, a_n \text{ 为任意实常数.}$$

(1)证明: $\forall n \geq 3, D_n = a_n D_{n-1} + D_{n-2}$;

(2)当 $a_1 = \dots = a_n = 0$ 时,计算 D_n 的值;

(3)当 $a_1 = \dots = a_n = 1$ 时,计算 D_n 的值.

二.(本题 15 分)设 V 为所有二阶实对称矩阵组成的集合,已知 V 关于矩阵加法和矩阵数乘构成一个实

线性空间,试证明: $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 是 V 的一组基.

$$\text{三.(本题 15 分)解线性方程组} \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7 \end{cases}, \text{其中 } \lambda \text{ 为实参数.}$$

四.(本题 10 分)设 A 是一个 $n(n \geq 3)$ 阶方阵,试求所有满足 $(A^*)^* = A$ 的方阵 A .

五.(本题 15 分)设 $R[x]_3$ 是次数小于等于 3 的实系数多项式和零多项式组成的集合,已知 $R[x]_3$ 关于多项式加法和实数与多项式的乘法构成一个实线性空间.设 $W = \{k_1 x + k_2(1 + x^2) | k_1, k_2 \in R\}$.

(1)证明 W 是 $R[x]_3$ 的一个子空间;

(2)若在 W 上定义一个内积:

$$\forall \alpha(x), \beta(x) \in W, (\alpha(x), \beta(x)) = \int_0^1 \alpha(x)\beta(x)dx,$$

试将 W 的一组基 $x, 1 + x^2$ 化为 W 的一组标准正交基 η_1, η_2

(3)求基 $x, 1 + x^2$ 到基 η_1, η_2 的过渡矩阵.

六.(本题 15 分)设有实二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + 2x_3x_4 + tx_3^2 + 2x_4^2$, 其中 t 为参数.

(1)写出二次型 f 对应的矩阵 A ;

(2)若 3 是 A 的一个特征值,试求出 t 的值;

(3)设 $B = A^T A$, 问 t 取何值时 B 不是正定的?

七.(本题 8 分)设 A 为 n 阶实对称矩阵,且 $|A| < 0$, 试证明存在一个 n 维实列向量 X , 使得 $X^T A T < 0$.

八.(本题 7 分)设 A, B 是两个 $m \times n$ 阶矩阵且存在两个方阵 C, D 使得 $A = BC, B = AD$, 试证明: 存在可逆矩阵 M 使得 $B = AM$.

浙江大学 2019–2020 学年秋冬学期

《线性代数（甲）》课程期末考试试卷

一.(本题 10 分)设有 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 其中 $a_{ij} = \sin(i + j)$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$, 求行列式 $|A|$ 的值.

二.(本题 15 分)设 $\alpha_1 = (1, 2, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 1, 1, 2)^T, \alpha_3 = (3, 4, 3, 4)^T, \alpha_4 = (1, 1, 2, 1)^T, \alpha_5 = (4, 5, 6, 4)^T$ 是实向量空间 R^4 中的一个向量组, L 是该向量组生成的 R^4 的子空间.

(1) 试证明: $\beta_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$ 和 $\beta_2 = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}$ 分别是 L 的两组基;

(2) 求从基 β_1 到基 β_2 的过渡矩阵.

三.(本题 15 分)设有实矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 2 & b^2 & c+1 \end{bmatrix}$, 其中 a, b, c 为实常数. 已知齐次线性方程组 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 同解, 试求 a, b, c 的值.

四.(本题 20 分)设有三阶实方阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 其中 a, b 为实常数.

(1) 求出 A 的特征值;

(2) 试问 a, b 满足什么条件时, A 可相似于一对角化矩阵?

(3) 设 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 若 A 可相似对角化, 试问 A 是否相似于 B ? 请说明你的理由;

(4) 若 A 可相似对角化, 求一可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

五.(本题 15 分)

(1) 设 R_+ 为所有正实数组成的集合, 加法和数乘定义如下: $\forall a, b \in R_+, k \in R, a \oplus b = ab, k \odot a = a^k$, 已知 R_+ 关于加法 \oplus 和数乘 \odot 构成一个实线性空间, 试求 R_+ 的一组基和维数;

(2) 设 V 是一个 n 维实线性空间. 试证明: 存在 V 中的一个由可列无穷多个向量组成的向量组 $\{\alpha_i : i \in Z_+\}$, 使得其中的任意 n 个向量组成的向量组都是 V 的一组基.

六.(本题 10 分)设 A 是一个 n 阶实对称矩阵, 满足 $A^2 = E$ 以及 $0 < r(A + E) = r < n$.

(1) 求二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T AX$ 的规范型(其中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$);

(2) 设 $B = E + A + A^2 + A^3 + A^4$, 证明 B 正定, 并求行列式 $|B|$ 的值.

七.(本题 8 分)设 A 是一个 n 阶方阵($n \geq 2$), A^* 是 A 的伴随矩阵且满足 $A_{11} \neq 0$, 是一个 n 维非零列向量, 试证明: 非齐次线性方程组 $AX = \alpha$ 有无穷多解当且仅当 α 是齐次线性方程组 $A^*X = 0$ 的解.

八.(本题 7 分)设 β 是欧氏空间 V 中的一个非零向量, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是 V 中的三个向量, 并且满足:

(1) $(\beta_i, \beta) > 0, i = 1, 2, 3$;

(2) $(\beta_i, \beta_j) < 0, i, j = 1, 2, 3, i \neq j$.

试证明: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

浙江大学 2019-2020 学年 春夏 学期

《线性代数（甲）》课程期末考试试卷

一.(本题 10 分)设 x 为非零实常数,有 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足 $\forall i = 1, \dots, n, a_{ii} = 1 + x^2, \forall j = 1, \dots, n - 1, a_{j,j+1} = x, \forall l = 2, \dots, n, a_{l,l-1} = x$,其余元素全部为0.

试证明 $|A| = \sum_{k=0}^n x^{2k}$.

二.(本题 20 分)设 R^4 中有两组基.

(I): $\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T, \alpha_2 = (1, -1, 1, 1)^T, \alpha_3 = (-1, 2, 1, 1)^T, \alpha_4 = (-1, -1, 0, 1)^T$;

(II): $\beta_1 = (2, 1, 0, 1)^T, \beta_2 = (0, 1, 2, 2)^T, \beta_3 = (-2, 1, 1, 2)^T, \beta_4 = (1, 3, 1, 2)^T$.

(1)试求基(I)到基(II)的过渡矩阵 M ;

(2)设有向量 $\eta = (1, 0, 0, 0)^T$,试求它在基(I)下的坐标 X .

三.(本题 20 分)在 R^4 中求一非零向量 α ,使得它在下列两组基(I), (II)下有相同的坐标,其中基(I)为 $e_1 = (1, 0, 0, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0, 0)^T, e_3 = (0, 0, 1, 0)^T, e_4 = (0, 0, 0, 1)^T$,基(II)为 $\varepsilon_1 = (2, 1, -1, 1)^T, \varepsilon_2 = (0, 3, 1, 0)^T, \varepsilon_3 = (5, 3, 2, 1)^T, \varepsilon_4 = (6, 6, 1, 3)^T$.

四.(本题 10 分)如果一个 n 阶方阵至少有 $n^2 - n + 1$ 个元素为零,那么这个矩阵的秩最多是多少?试写出一个满足条件的具有最大秩的矩阵.

五.(本题 10 分)设 V 是一个 n 维实线性空间,(I): $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, (II): η_1, \dots, η_n 是 V 的两组基,设 $W = \{\alpha \in V | \alpha \text{ 在基(I)和基(II)下有相同的坐标}\}$.

(1)证明 W 是 V 的子空间;

(2)若设向量 $\varepsilon_1 - \eta_1, \dots, \varepsilon_n - \eta_n$ 的秩为 r ,试求 W 的维数.

六.(本题 15 分)设有二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,试求该二次型的规范形,并判断该二次型是否正定.

七.(本题 8 分)设正整数 r 满足 $0 < r < n$,令 $A = \begin{pmatrix} E_r & B \\ O & -E_{n-r} \end{pmatrix}$,其中 $B_{r \times (n-r)}$ 为任意实矩阵, O 是 $(n-r) \times r$ 零矩阵,试证明: A 可相似对角化.

八.(本题 7 分)

(1)设 A 是一个 n 阶实矩阵,试证明 A 是反对称矩阵当且仅当 $AA^T = -A^2$;

(2)设 C 是 n 阶正定矩阵, B 是满足 $BB^T = -B^2$ 的 n 阶实矩阵,试证明 $C + B$ 可逆.

浙江大学 2020-2021 学年 秋冬 学期

《线性代数（甲）》课程期末考试试卷

一.(本题 10 分)设 x, a, b 为实常数满足 $a \neq b$, 并有 $n(\geq 2)$ 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足 $\forall k = 1, \dots, n, a_{kk} = x, \forall p, q = 1, \dots, n, p < q, a_{pq} = a, \forall l, m = 1, \dots, n, l > m, a_{lm} = b$, 试计算 n 阶行列式 $|A|$.

二.(本题 20 分)设 R^3 中有一个向量组(I): $\alpha_1 = (1, -1, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1)^T, \alpha_3 = (1, 2, 2)^T$

- (1) 试证明向量组(I)是 R^3 的一组基;
- (2) 试用施密特正交化方法将基(I)改造为 R^3 的一组标准正交基, 并记作(II);
- (3) 试求基(II)到基(I)的过渡矩阵 M .

三.(本题 20 分)设 λ, μ 为实常数, 试求解线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + \mu x_4 = 1 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \mu \end{cases}$

四.(本题 15 分)设 a, b 为实常数, 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$ 与矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似.

- (1) 试求 a, b 的值;
- (2) 求一可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$.

五.(本题 10 分)设 m, n, p 为正整数, A 是一个 $m \times n$ 实矩阵, B 是一个 $p \times n$ 实矩阵, 并设 $W = \{AX \in \mathbb{R}^m | BX = 0_p\}$, 其中 0_p 是一个 p 维(元)零列向量.

- (1) 证明 W 是 \mathbb{R}^m 的子空间;
- (2) 若 $r \left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right) = r_1, r(B) = r_2$, 试求 W 的维数.

六.(本题 10 分)设有实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3$, 试求该二次型的规范形, 并求出该二次型的秩与正惯性指数.

七.(本题 8 分)

- (1) 设 A, B, C 为 3 个 n 阶方阵, 试写出关于方阵 A, B, C 秩的 Frobenius 不等式;
- (2) 设 A 是一个 n 阶实方阵, 试证明:
 - ① $2r(A^2) \leq r(A^3) + r(A)$;
 - ② $2021r(A^2) \leq r(A^{2022}) + 2020r(A)$.

八.(本题 7 分)

- (1) 设 A, B 都是 n 阶实对称矩阵且 A 正定, 试证明 AB 可相似对角化;
- (2) 设 D 是以一个 n 阶实正交矩阵, 已知 $D + E$ 可逆, 试证明:
 - ① 矩阵方程 $D(E + X) = E - X$ 有解 X ;
 - ② ① 中的解 X 为实反对称矩阵.

浙江大学 2021-2022 学年 秋冬 学期

《线性代数（甲）》课程期末考试试卷

一. $D = \begin{vmatrix} a_1 + x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n + x \end{vmatrix}$, 证明: $D = x^a + x^{n-1} \sum_{i=1}^n a_i$.

二. 已知 R^3 中的向量 $\alpha_1 = (2, 4, 2)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (2, 3, 1)^T, \alpha_4 = (3, 5, 2)^T$, 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 构成子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.

(1) 证明: 基(I) α_1, α_2 是 L 的一组基; 基(II) α_3, α_4 是 L 的一组基;

(2) 求基(II) 到基(I) 的过渡矩阵.

三. 设 λ 为实参数, 求解线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 = 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$

四. 实矩 A 满足 $6A^3 + 11A^2 - 6A + 1$.

(1) 求 A 的特征值;

(2) 令 $M_k = A^k = (a_{ij}(k))$, 证明 $\lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{ij}(k))$ 存在;

(3) 当 $k \rightarrow +\infty$ 时, 设 $M = M^k$, 证明 M 是幂等矩阵, 即 $M^2 = M$.

五. 对于 $x \in (0, 1)$ 的函数空间 V , 定义加法 $\forall f, g \in V, f + g \triangleq f(x) + g(x)$, 定义数乘法, $\forall k, f \in V, kf \triangleq kf(x)$.

(1) 证明: 由 $f(x) = ax + be^x$ 能构成子空间;

(2) 证明: 向量 $f(x) = x, g(x) = x + e^x$, 两个向量线性无关;

(3) 把 $f(x) = x, g(x) = x + e^x$ 化为欧氏空间一组标准正交基 η_1, η_2 .

六. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - x_1x_3$, 求二次型的规范形, 秩, 符号差.

七. 证明: 对 $A_{m \times n}, r \leq \min(m, n), r(A) = r$, 当且仅当 A 可分解为 $A = \sum_{i=1}^r \alpha_i \beta_i^T$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 和 β_1, β_2, \dots

, β_r 是线性无关的列向量.

八.(1) A 是 n 阶实对称矩阵, B 是 n 阶正定矩阵, 证明: 矩阵 AB 的特征值均为实数.

(2) A, B 均为实矩阵, 且符合 $A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1}$, 试证明 $(AB^{-1})^3 = E$.