2014-2015 学年第一学期期末考试 A 卷

【注】：第 1~9 题，每题均为 6 分；第 10~13 题，每题均为 10 分；第 14 题 6 分.

1、设$f(x)=(x-1)(x^2-2)(x^3-3)(x^{100}-100)$，求：$f'(1)$.

2、设函数$y=y(x)$是由参数方程$\begin{cases}x=t^3+3t+1\\y=t^3-3t+2\end{cases}$所确定，求：曲线$y=y(x)$的凹凸区间（用参数$t$的区间表示，并且也用$x$的区间能表示）；并计算拐点坐标.（用点$(x,y)$表示）

3、设函数$y=y(x)$是由方程$x^2=\int_0^{y-x}e^{-t^2}dt$确定，求：曲线$y=y(x)$上$x=0$处的曲率半径.

4、求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$.

5、设$f(x)=\lim\limits_{n\to +\infty}\frac{x^{2n+1}+(a-1)x^n+1}{x^{2n}-ax^n+1}$在区间$(0,\ +\infty)$内连续，求：常数$a$的值.

6、求曲线$y=\frac{1}{x}+\frac{x}{1-e^x}$的所有渐近线的方程.

7、求定积分：$\int_{-2}^{2}(x-1)^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

8、计算反常积分：$\int_{1}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^{3}}dx$.

9、设常数$a>0,a_n=\int_{0}^{\frac{1}{n}}\sqrt{a+x^n}\,dx$，讨论级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$是条件收敛，绝对收敛还是发散？并给出论证过程.

10、设$f(x)=(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}(x\neq 0)$，且$f(x)$在$x=0$处连续.求：$f(0)$及曲线$y=f(x)$在$x=0$处的切线方程.

11、摆线L的参数方程$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi,a>0)$，曲线$L$与$x$轴所围成的区域为$D$,求:$D$绕直线$y=2a$旋转一周所得立体的体积.

12、求幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$的收敛半径、收敛域及和函数.

13、（1）设$0<x<+\infty$，证明：$\exists\eta\in(0,1)$使得$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\eta}}$；

（2）对上面所得η,求出η关于x的表达式$\eta=\eta(x)$，并确定当$0<x<+\infty$时，函数$\eta=\eta(x)$的值域.

14、证明：(1)$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx>0$；

(2)对$\forall\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，有$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx>\sin\alpha\ln\frac{\pi^2-\alpha^2}{\alpha(2\pi-\alpha)}$.

2014-2015 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

1、【方法一】$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2)(x^3-3)\cdots(x^{100}-100)=-99!$

【方法二】$f(x)=(x-1)[(x^2-2)(x^3-3)(x^{100}-100)]$，则：

$$f'(x)=(x^2-2)(x^3-3)(x^{100}-100)+(x-1)[(x^2-2)(x^3-3)(x^{100}-100)]'$$

故，$f'(1)=(-1)(-2)\cdots(-99)=-99!$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 导数

2、【解析】$\dfrac{dx}{dt}=3t^2+3,\dfrac{dy}{dt}=3t^2-3$，则：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$

令 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{4t}{3(t^2+1)^3}=0$，则：$t=0$

当$t<0$，即$x<1$时，$\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$；当$t>0$，即$x>1$时，$\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$；

因此，$y=y(x)$的凸区间为$(-\infty,1)$；凹区间为$(1,+\infty)$，拐点为(1,2)

【考点延伸】《考试宝典》专题三 1.3 凹凸性

3、【解析】（1）当$x=0$时，$\displaystyle\int_0^y e^{-t^2}dt=0$，而$e^{-t^2}>0$，且为连续函数，则：$y=0$

（2）等式两边同时对x求导：$2x=e^{-(y-x)^2}\cdot(y'-1)$.则：$y'=2xe^{(y-x)^2}+1$，

且$y'(0)=1$

（3）在（2）两边再对x求导，则：$2=-2e^{-(y-x)^2}(y'-1)^2+e^{-(y-x)^2}\cdot y''$.因此，$y''(0)=2$

（4）曲线$y=y(x)$在点$x=0$处的曲率$\rho=\dfrac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

故，曲线$y=y(x)$在点$x=0$处的曲率半径$R=\dfrac{1}{\rho}=\sqrt{2}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题三 导数的应用

4、【方法一】$I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\tan x+x)(\tan x-x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x+x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2x-1}{3x^2}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2x}{x^2}=\dfrac{2}{3}$

【方法二】$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-2x\cos^2x+x^2\cdot 2\cos x\sin x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)\sin 2x-2x\cos^2x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin 2x+2(1+x^2)\cos 2x-2\cos^2x+2x\sin 2x}{12x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x+8x\cos 2x+4x\cos 2x-4(1+x^2)\sin 2x+2\sin 2x}{24x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{24x}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{2}+0+0=\frac{2}{3}$$

【方法三】$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]^2-x^2\left[1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]^2}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)\right]-x^2[1-x^2+o(x^2)]}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{2}{3}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3 极限的计算

5、【解析】由于$f(x)=\begin{cases}1 & (0<x<1)\\ \dfrac{1+a}{2-a} & (x=1)\\ x & (x>1)\end{cases}$，而$f(x)$在$(0,+\infty)$内连续，

则：$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$；又$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$，

故，$f(1)=\dfrac{1+a}{2-a}=1\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 3.1 基本概念

6、【解析】（1）由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-e^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{-x}=-1$，故$\lim\limits_{x\to 0}y=\infty$；故$x=0$为其渐近线.

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}y=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{1-e^x}=0$，故，$y=0$为其渐近线.

(3) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{1-e^x}=1$，

$$\lim_{x\to -\infty}(y-x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to -\infty}\frac{xe^x}{1-e^x}=\lim_{x\to -\infty}xe^x\overset{x=-u}{=}\lim_{u\to +\infty}\frac{-u}{e^u}=0$$

因此，该曲线的渐近线为：$y=x$.综上，曲线的所有渐近线为：$x=0,y=0$和$y=x$

【考点延伸】《考试宝典》专题三 渐近线与函数作图

7、【方法一】$I=\int_{-2}^{2}(x^2+1-2x)\sqrt{4-x^2}\,dx=2\int_{0}^{2}(x^2+1)\sqrt{4-x^2}\,dx$（令$x=2\sin u$）

$$=8\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(4\sin^2u+1)\cos^2u\,du=8\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+3\sin^2u-4\sin^4u)\,du$$

$$=8\cdot\left(\frac{\pi}{2}+3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=4\pi$$

【方法二】$I=\int_{-2}^{2}(x^2+1-2x)\sqrt{4-x^2}\,dx=2\int_{0}^{2}(x^2+1)\sqrt{4-x^2}\,dx$

$$=2\int_{0}^{2}(5-(4-x^2))\sqrt{4-x^2}\,dx=10\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx-2\int_{0}^{2}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$(\text{令}x=2\sin u)=10\cdot\frac{\pi}{4}\times2^2-2\cdot2^4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4u\,du=10\pi-32\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=4\pi$$

【考点延伸】《考试宝典》专题五 定积分

8、【方法一】$I=-\frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty}\arctan x\,d\frac{1}{x^2}=-\frac{\arctan x}{2x^2}\Big|_{1}^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}-\arctan x\right)\Big|_{1}^{+\infty}=\frac{1}{2}$$

【方法二】令$\arctan x=u$，则：$.x=\tan u, dx=\sec^2u\,du$

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}u\csc^2u\cot u\,du=-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}u\,d(\cot^2u)$$

$$=-\frac{1}{2}(u\cot^2u)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2u-1)\,du=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}(-\cot u-u)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题五 3.1 反常积分的定义

9、【解析】

（1）$a_n=\int_{0}^{\frac{1}{n}}\sqrt{a+x^n}\,dx\le\int_{0}^{\frac{1}{n}}\sqrt{a+1}\,dx=\frac{\sqrt{a+1}}{n}$，$a_n>\int_{0}^{\frac{1}{n}}\sqrt{a}\,dx=\frac{\sqrt{a}}{n}$.

因此，$\frac{\sqrt{a}}{n}<a_n<\frac{\sqrt{a+1}}{n}$;故，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

（2）$a_{n+1}=\int_{0}^{\frac{1}{n+1}}\sqrt{a+x^n}\,dx<\int_{0}^{\frac{1}{n}}\sqrt{a+x^n}\,dx=a_n$，.则：$\{a_n\}$单调递减.根据莱布尼兹判别法，交错级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^na_n$收敛.

（3）又$a_n > \dfrac{\sqrt{a}}{n}$.，而$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$发散，故，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$发散.从而级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$条件收敛.

【考点延伸】《考试宝典》专题五 3.2 敛散性的判别法

10、【解析】(1)$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}}=e^2$,故$f(0)=e^2$.

（2）$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}-e^2}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+\sin 2x)}{x}}-e^2}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+\sin 2x)-2x}{x}}-1}{x}$$

$$=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x)-2x}{x^2}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\cos 2x}{1+\sin 2x}-2}{2x}$$

$$=e^2\lim_{x\to 0}\frac{2(\cos 2x-1)-2\sin 2x}{2x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x}-e^2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=-2e^2$$

（3）曲线$y=y(x)$在点$(0,e^2)$处的切线方程为$y=-2e^2x+e^2$

【考点延伸】《考试宝典》专题三 导数的应用

11、【方法一】: $V=\pi\cdot(2a)^2\cdot 2\pi a-\pi\displaystyle\int_0^{2\pi a}(2a-y)^2dx$

$$=8\pi^2a^3-\pi\int_0^{2\pi}a^2(1+\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)dt\ =8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}4\cos^4\frac{t}{2}\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}dt$$

$$\overset{\frac{t}{2}=u}{=}8\pi^2a^3-16\pi a^3\int_0^{\pi}\cos^4u(1-\cos^2u)du=8\pi^2a^3-32\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4u(1-\cos^2u)du$$

$$=8\pi^2a^3-32\pi a^3\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=7\pi^2a^3$$

【方法二】: 利用“柱壳法”（套筒法）及对称性.

$$V=2\times 2\pi\int_0^{2\pi a}(\pi a-x)(2a-y)dy=4\pi a^3\int_0^{\pi}(\pi-t+\sin t)(1+\cos t)\sin t dt$$

$$=4\pi a^3\int_0^{\pi}(\pi\sin t-t\sin t+\sin^2t-t\sin t\cos t+\pi\sin t\cos t+\sin^2t\cos t)dt$$

$$=4\pi a^3\left(2\pi-\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+0+0\right)=7\pi^2a^3$$

【注】: • $\displaystyle\int_0^{\pi}t\sin t dt=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin t dt=\pi$，$\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2t dt=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{\pi}{2}$，

- $\int_0^{\pi} t\sin t\cos t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} td(\sin^2 t) = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 t dt = -\frac{\pi}{4}$、

【考点延伸】《考试宝典》专题五 定积分

12、【解析】（1） $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}\cdot\frac{2n+1}{4n^2+4n+3} = 1$

故，级数的收敛半径$r=1$；当$x=-1$或$x=1$时，级数的通项不趋向于零，

故，级数发散；因此，该级数的收敛域为:$(-1,1)$

（2）记$S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left((2n+1)+\frac{2}{2n+1}\right)x^{2n}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)x^{2n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$$

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)x^{2n} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x (2n+1)x^{2n}dx\right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n+1}\right)' = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = S_2(0) + \int_0^x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'dx = \int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}dx = \int_0^x\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

因此，$S(x) = \begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x} & (-1<x<1\text{且}x\neq 0)\\ 3 & (x=0)\end{cases}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 3.3 幂级数的运算

13、【方法一】:（1）记$f(x)=\sqrt{x}$，则：$f(x)$在$(0,+\infty)$内连续，且$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

在区间$[x,x+1]$上应用拉格朗日中值定理，$\exists\eta\in(0,1)$使得

$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\eta}}$.又当$x>0$时，$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$，故，上式所得$\eta$是唯一的；即$\eta$为$x$的函数.

（2）由（1）可得，$\eta = \frac{1}{4}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2 - x$，且

$\eta'(x) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-1\geq 0$.注（柯西不等式）

因此，$\eta(x)$在$(0,\ +\infty)$内单调递增.

（3）$\lim\limits_{x\to 0^+}\eta(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{4}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2 - x\right) = \frac{1}{4}$，

$$\lim_{x\to+\infty}\eta(x) = \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\left(1+2\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\right) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{2}$$

因此，$\eta(x)$的值域为$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

【方法二】:(1)由$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\eta}}$可得，$\eta = \frac{1}{4}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2 - x$.

因此，对任意$0<x<+\infty$均存在η满足：$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\eta}}$.

(2)下面证明：$\eta\in(0,1)$.当$x>0$时，有

$$\eta=\frac{1}{4}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2-x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{x(x+1)}-x\right)>\frac{1}{4}$$

$$\eta=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{x(x+1)}-x\right)<\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{x+(x+1)}{2}-x\right)=\frac{1}{2}$$

因此，$\dfrac{1}{4}<\eta<\dfrac{1}{2}$.【注意】：由此并不能得出$\eta(x)$的值域为$\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$.

（3）$\eta'(x)=\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)-1\geqslant 0$.（注:柯西不等式）

因此，$\eta(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增.

$$\lim_{x\to 0^+}\eta(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{4}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2-x\right)=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\eta(x)=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\left(1+2\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{1}{2}$$

因此，$\eta(x)$的值域为$\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 1.1 函数的基本概念

14、【解析】（1）$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx\overset{x=\pi+u}{=}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\int_0^{\pi}\frac{-\sin u}{u+\pi}du$

$$=\int_0^{\pi}\sin x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\pi}\right)dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x(x+\pi)}dx>0$$

（2）对$\forall\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x(x+\pi)}dx>\pi\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{\sin x}{x(x+\pi)}dx$

$$>\pi\sin\alpha\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{dx}{x(x+\pi)}=\sin\alpha\cdot\left(\ln x-\ln(x+\pi)\right)\Big|_{\alpha}^{\pi-\alpha}=\sin\alpha\ln\frac{\pi^2-\alpha^2}{\alpha(2\pi-\alpha)}$$

【注】：本题证明的关键在于计算$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x(x+\pi)}dx$时，如何消去被积函数中的$\sin x$，而当

$x\in(\alpha,\pi-\alpha)$时，$\sin x>\sin\alpha$.

【考点延伸】《考试宝典》专题五 定积分