微积分甲/乙 2020-2021 学年第一学期期中考试 A 卷

1. (7 分)写出函数极限 $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)=a$ 的$\varepsilon-\delta$定义，用定义证明: $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x}{x-2}=-1$.

2. (7 分)计算极限: $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sqrt{1-\sin(x^2)}-1}{x\ln(1+2\tan x)}$.

3. (7 分)计算极限: $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(\sin\dfrac{3}{x}+\cos\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{x}$.

4. (7 分)设$x_1\geqslant 0$, $x_{n+1}=\dfrac{4+x_n}{1+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$.证明:数列$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$存在极限,并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

5. (7 分)函数$f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x}, & x>0\\ a, & x=0\\ (1+\sin bx)^{\cot x}, & x<0\end{cases}$在$x=0$处连续，求常数$a,b$.

6. (7 分)求函数 $f(x)=\left(e^{\frac{x}{x-1}}-1\right)^{-1}$ 的间断点及间断点类型(需说明理由).

7. (7 分)设 $f(x)=e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}-\arccos e^{x}$,求导数 $\frac{dy}{dx}$、$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}$.

8. (7 分)函数 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\frac{1}{x}, & x<0 \\ a, & x=0 \\ x^{2}+bx+c, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导,求常数 a、b 及 c.

9. (7 分)由方程 $e^{xy}+x+y=2$ 确定隐函数 $y=f(x)$,求 $f'(0)$、$f''(0)$ 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)$.

10. (7 分)由参数方程 $\begin{cases} x=\arctan\sqrt{1+t^{2}} \\ y=\ln\left(t+\sqrt{1+t^{2}}\right) \end{cases}$ 确定函数 $y=y(x)$,试求 $\frac{dy}{dx}$、$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}$.

11. (7 分)已知函数 $f(x)$ 在 $x=4$ 处有二阶导数, $f(4)=1, f'(4)=2, f''(4)=3, y=f(x^x)$,求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}$、$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=2}$.

12.(6 分)函数 $f(x)=\ln\sqrt{1+x^2}$,求 $f^{(n)}(0)$.

13.(6 分)函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x\cos x}+\frac{f(x)}{x}\right]=2$,求 $f(0)$ 及 $f'(0)$.

14.(6 分)函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,3]$ 上连续、在开区间 $(0,3)$ 内可导,且 $f(0)f(3)>0$、$f(0)f(2)<0$.求证:对任意给定实数 μ,至少存在 $\xi\in(0,3)$ 满足 $f'(\xi)=\mu f(\xi)$.

15.(5 分)函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有二阶导数, $f(2^{-n})=0\,(n=1,2,\cdots)$,求证: $f''(0)=0$.

2020-2021 学年第一学期期中考试 A 卷参考答案

1、【解析】$\varepsilon-\delta$ 定义:对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时满足 $0<|f(x)-a|<\varepsilon$,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$.

对任意 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{4}\right\}$,当 $0<|x-1|<\delta$ 时有 $|x-2|>\frac{1}{2}$ 及 $0<|x-1|<\frac{\varepsilon}{4}$,从而

$$\left|\frac{x}{x-2}-(-1)\right|=\left|\frac{2(x-1)}{x-2}\right|\leqslant 4|x-1|<\varepsilon,$$

由 $\varepsilon-\delta$ 定义得: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x-2}=-1$.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.1 极限的定义和性质.

2、【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sin(x^2)}-1}{x\ln(1+2\tan x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\sin(x^2)}{x\cdot 2\tan x}=-\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x\cdot x}=-\frac{1}{4}$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3 极限的计算.

3、【解析】取 $t=\frac{1}{x}$, $y=\left(\sin\frac{3}{x}+\cos\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^x$,则

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln\left(\sin 3t+\cos 2\sqrt{t}\right)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin 3t+\cos 2\sqrt{t}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin 3t}{t}+\lim_{t\to 0^+}\frac{\cos 2\sqrt{t}-1}{t}=3+\lim_{t\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}\left(2\sqrt{t}\right)^2}{t}=1,$$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{3}{x}+\cos\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^x=\lim\limits_{t\to 0^+}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{t\to 0^+}\ln y}=e$.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3 极限的计算.

4、【解析】由 $x_1\geqslant 0$ 及递推公式易得:$x_n>1(n=2,3,\cdots)$.如果数列有极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,由递推公式

$x_{n+1}=\frac{4+x_n}{1+x_n}$ 得:$A=\frac{4+A}{1+A}$ 且 $A\geqslant 1$,解得 $A=2$ 或 $A=-2$(舍去).

当 $n\geqslant 3$ 时,$|x_n-2|=\left|\frac{4+x_{n-1}}{1+x_{n-1}}-2\right|=\left|\frac{x_{n-1}-2}{1+x_{n-1}}\right|\leqslant\frac{1}{2}|x_{n-1}-2|$.

从而,当 $n\geqslant 3$ 时,$-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1-2|\leqslant x_n-2\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1-2|$,

由夹逼准则及 $\lim\limits_{n\to\infty}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1-2|=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1-2|=0$

知:数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 存在极限、并且极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 【重要题型】题型 3:证明数列极限存在(单调有界定理的运用)

5、【解析】$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1+\sin bx)^{\cot x}=\lim_{x\to 0^-}\left[(1+\sin bx)^{\frac{1}{\sin bx}}\right]^{\sin bx\cot x}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin bx\cos x}{\sin x}}=e^b(\text{当}b\neq 0\text{时}),\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}1=1(\text{当}b=0\text{时}).$$

由函数$f(x)$在$x=0$处连续知: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$,从而$a=\dfrac{\pi}{2}$、$b=\ln\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 3.1 基本概念.

6、【解析】$f(x)$是初等函数，在$x=0$及$x=1$无定义，$x=0$及$x=1$是间断点；

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(e^{\frac{x}{x-1}}-1\right)^{-1}=\infty,x=0\text{是第二类(或无穷型)间断点；}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(e^{\frac{x}{x-1}}-1\right)^{-1}=-1,\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(e^{\frac{x}{x-1}}-1\right)^{-1}=0,$$

$x=1$是第一类(或跳跃型)间断点.

【考点延伸】《考试宝典》专题一【重要题型】题型 4：判断函数连续性和间断点.

7、【解析】$\dfrac{dy}{dx}=2e^x\sqrt{1-e^{2x}}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2e^x(1-2e^{2x})}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题二 2.4 复合函数求导法则.

8、【解析】由函数$f(x)$在$x=0$处可导知:函数$f(x)$在$x=0$处连续,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0),\text{得}c=a=0.$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2},$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+bx}{x}=b,$$

由函数$f(x)$在$x=0$处可导知$f'_-(0)=f'_+(0)$,得$b=-\dfrac{\pi}{2}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题二 1.1 可导性.

9、【解析】由$x=0$得$y=f(0)=1$.两边关于x求导得$e^{xy}(y+xy')+1+y'=0$,取$x=0$,$y=1$得$f'(0)=y'(0)=-2$.两边关于x求导得$e^{xy}(y+xy')^2+e^{xy}(2y'+xy'')+y''=0$取$x=0$,$y=1$,$y'(0)=-2$得$f''(0)=y''(0)=3$，$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}=f'(0)=-2$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.2 隐函数求导.

10、【解析】$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}\left(1+\dfrac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+(1+t^2)}\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}=\frac{t}{(2+t^2)\sqrt{1+t^2}},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2+t^2}{t}=t+\frac{2}{t},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{2}{t^2}}{\frac{t}{(2+t^2)\sqrt{1+t^2}}}=\frac{(t^4-4)\sqrt{1+t^2}}{t^3}.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.3 参数方程求导.

11、【解析】$\dfrac{dy}{dx}=f'(x^x)\cdot x^x(1+\ln x)$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=2}=8(1+\ln 2)$;

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x^x)\cdot[x^x(1+\ln x)]^2+f'(x^x)\cdot x^x(1+\ln x)^2+f'(x^x)\cdot x^{x-1},$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=2}=4+56(1+\ln 2)^2.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 2.4 复合函数求导法则.

12、【解析】$f'(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$,得$(1+x^2)f'(x)=x$.两边同时关于x求n阶导数$(n\geqslant 2)$,

$(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0$,取$x=0$得递推公式

$f^{(n+1)}(0)=-n(n-1)f^{(n-1)}(0)$，$n\geqslant 2$，由$f'(0)=0$,$f''(0)=1$及递推公式得

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n\text{是奇数时}\\(-1)^{\frac{n-2}{2}}(n-1)!, & n\text{是偶数时}\end{cases}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.5 求高阶导数.

13、【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1+f(x)\cos x-2x\cos x}{x\cos x}\right]=0$得当$x\to 0$时,$1+f(x)\cos x-2x\cos x=o(x)$.

从而，当$x\to 0$时$f(x)=\dfrac{2x\cos x-1+o(x)}{\cos x}$.

函数$f(x)$在$x=0$处可导得：函数$f(x)$在$x=0$处连续，

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x\cos x-1+o(x)}{\cos x}\right)=-1$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x-1+\cos x+o(x)}{x\cos x}=2.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 1.1 可导性.

14、【解析】函数$f(x)$在$[0,2]$上连续、$f(0)f(2)<0$,由零点定理存在$x_1\in(0,2)$满足$f(x_1)=0$;

函数$f(x)$在$[2,3]$上连续、$f(2)f(3)<0$,由零点定理存在$x_2\in(2,3)$满足$f(x_2)=0$;

取 $F(x)=e^{-\mu x}f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续、在开区间 (x_1,x_2) 内可导,且 $F(x_1)=F(x_2)=0$.由罗尔定理:存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,3)$ 满足 $F'(\xi)=0$,即满足 $f'(\xi)=\mu f(\xi)$.

【考点延伸】《考试宝典》专题三 3.1 罗尔定理.

15、【解析】由函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有二阶导数知：存在 $\delta>0$，函数 $f(x)$ 在区间 $[-\delta，\delta]$ 上可导、连续、导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 取 N 使得 $2^{-N}\leqslant\delta$,当 $n\geqslant N$ 时函数 $f(x)$ 在区间 $[2^{-(n+1)}，2^{-n}]$ 上连续、在开区间 $(2^{-(n+1)},2^{-n})$ 内可导,且 $f(2^{-(n+1)})=f(2^{-n})=0$,由罗尔中值定理:存在 $x_n\in(2^{-(n+1)},2^{-n})$ 满足 $f'(x_n)=0(n\geqslant N)$. 由导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续及 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 可知:

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f'(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$.由函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有 2 阶导数及 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，

$$f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{f'(x_n)-f'(0)}{x_n-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{0}{x_n}=0.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题三 3.1 罗尔定理.