2019-2020 学年第一学期期末考试 A 卷

1.设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$\forall n\in\mathbb{Z}^+$，$a_{n+1}=\sin a_n$

（1）证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，并求出极限

（2）试计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{6}{a_n^2}}$

2.求曲线$y=\dfrac{\ln x}{x}$的拐点坐标

3.设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，求$f'(0)$

4.设 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, x>-1, x\neq 0\\ e \qquad\qquad\qquad , x=0\end{cases}$，令 $f(x)=M_0+\frac{M_1}{1!}x+\frac{M_2}{2!}x^2+\frac{M_3}{3!}x^3+o(x^3)\ (x\to 0)$，求 M_1, M_2, M_3 的值

5.设 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$，求极值点及极值

6.求 $f(x)=2e^{\frac{x}{2}}, x\in[\ln 3, 3\ln 2]$ 上的弧长

7.设可微函数$y=y(x)$由方程$3^{xy}=x+y$确定，试计算$dy\big|_{x=0}$

8.设函数$y=y(x)$满足$\begin{cases} x=t+e^{t} \\ y=\int_{0}^{t}\ln(1+e^{u})du \end{cases}$，试求$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}$

9.试计算反常积分$\int_{1}^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^{4}}}$的值

10.试求不定积分$\int\left(\frac{\arctan x}{x^{2}(1+x^{2})}+\frac{\ln x}{x}\right)dx$

11.设x_0,a是两个实数，f在x_0一个去心邻域$U^{\circ}(x_0)$上有定义，试用$\varepsilon-\delta$语言描述$f(x)$当x趋向于x_0时收敛于a

12.试计算定积分$\int_0^1\frac{\ln(1+2x+x^{2})}{1+x^{2}}dx$

13.设 f 在 $(-1,2)$ 上有连续的导函数，且满足 $f(0)=0, f(1)=1$，试证明 $\int_0^1 |f(x)-f'(x)|dx \geq \frac{1}{e}$

14.设 f 在 $[0,1]$ 上可导，且满足 $f'_+(0)<f'_-(1)$，又设 $\lambda \in (f'_+(0), f'_-(1))$，试证明：存在 $x_0 \in (0,1)$ 使得 $f'(x_0)=\lambda$

2019-2020 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

1.【解析】（1）先用数学归纳法证明：$0<a_n\leqslant 1\ \forall n\in N^+$ 成立

当$n=1$时，结论显然成立；当$n=k$时，假设$0<a_k\leqslant 1$，所以有$a_{k+1}=\sin a_k\in(0,1]$

于是结论得证，再根据不等式$x>\sin x\,(x>0)$有$a_{n+1}-a_n=\sin a_n-a_n<0$，所以$\{a_n\}$单调减少

根据单调有界原理知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，不放设之为$A$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_n\Longrightarrow A=\sin A$

其唯一解为$A=0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{6}{a_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin a_n}{a_n}\right)^{\frac{6}{a_n^2}}=\exp\left[\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6}{a_n^2}\ln\left(\dfrac{\sin a_n}{a_n}\right)\right]=\exp\left[\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6}{a_n^2}\dfrac{\sin a_n-a_n}{a_n}\right]$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{6(\sin a_n-a_n)}{a_n^3}\right]=\exp(-1)=e^{-1}$$

其中$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6(\sin x-x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\left(-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}{x^3}=-1$，利用归结原则得到$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6(\sin a_n-a_n)}{a_n^3}=-1$.

【考点延伸】《考试宝典》专题一【重要题型】题型 3：证明数列极限存在（单调有界定理的运用）

2.【解析】$y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2},y''=\dfrac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$

当$x\in\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right)$时，$y''<0$；当$x\in\left(e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$时，$y''>0$，凹凸性在$x=e^{\frac{3}{2}}$发生了改变

所以拐点为$\left(e^{\frac{3}{2}},\dfrac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$

【考点延伸】《考试宝典》专题三　1.3 凹凸性

3.【解析】$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{x^3}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二　1.1 可导性

4.【解析】当$x>-1$且$x\neq 0$时，有

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\cdot e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}=e\cdot e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)}=e\sum_{k=0}^{3}\frac{\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)^k}{k!}+o(x^3)$$

因为$\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)^2=x^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right)^2=\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

$$\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)^3=x^3\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right)^3=-\frac{x^3}{8}+o(x^3)$$

$$f(x)=e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{48}+o(x^3)\right)=e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11x^2}{24}-\frac{7}{16}x^3+o(x^3)\right)$$

所以$\frac{M_3}{3!}=\frac{-7}{16}e,\frac{M_2}{2!}=\frac{11e}{24},M_1=-\frac{e}{2}\Longrightarrow M_3=-\frac{21}{8}e,M_2=\frac{11e}{12},M_1=-\frac{e}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题三　3.4 泰勒中值定理

5.【解析】$f(x)=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$

$$f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+2x^3e^{-x^4}-2x^3e^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$$

首先有$f'(x)=f'(-x)$，所以只考虑$x\geq 0$的情形；当$x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调减少；当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调增加。由对称性可知：$x=-1$为极小值点，$x=0$为极大值点，$x=1$为极小值点。于是$f_{极小值1}=f(1)=0,f_{极小值2}=f(-1)=0$

$$f_{极大值}=f(0)=\int_1^0-te^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_1^0e^{-t^2}d(-t^2)=\left.\frac{e^{-t^2}}{2}\right|_1^0=\frac{1-e^{-1}}{2}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题三　1.1 极值点

6.【解析】$s=\int_{\ln 3}^{3\ln 2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_{\ln 3}^{3\ln 2}\sqrt{1+e^x}\,dx\xlongequal{t=\sqrt{1+e^x}}\int_2^3\frac{2t^2}{t^2-1}dt=\int_2^3\frac{2(t^2-1+1)}{t^2-1}dt$

$$=\int_2^3\left(2+\frac{2}{t^2-1}\right)dt=2+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3=2+\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

【考点延伸】《考试宝典》专题五　4.3 弧长

7.【解析】在方程$3^{xy}=x+y$中代入$x=0$，可得到$y(0)=1$

再在方程两边对x求导，有$3^{xy}\cdot\ln 3\cdot(xy'+y)=1+y'$

代入$x=0,y=1$，可以得到$\ln 3=1+y'(0)\Longrightarrow y'(0)=\ln 3-1\Longrightarrow dy\big|_{x=0}=(\ln 3-1)dx$

【考点延伸】《考试宝典》专题二　3.2 隐函数求导

8.【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{\ln(1+e^t)}{1+e^t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{\ln(1+e^t)}{1+e^t}\right)}{dt}\frac{1}{dx/dt}=\frac{\frac{e^t}{1+e^t}(1+e^t)-e^t\ln(1+e^t)}{(1+e^t)^2}\frac{1}{1+e^t}=\frac{e^t(1-\ln(1+e^t))}{(1+e^t)^3}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二　3.3 参数方程求导

9.【解析】$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}}\overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\int_1^0\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2}}=\int_0^1\frac{tdt}{\sqrt{1+t^4}}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt^2}{\sqrt{1+t^4}}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

【考点延伸】《考试宝典》专题五　3.1 反常积分的定义

10.【解析】$\displaystyle\int\left(\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}+\frac{\ln x}{x}\right)dx=\int\frac{\arctan x}{x^2}dx-\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx+\int\frac{\ln x}{x}dx$

$$=-\int\arctan x\,d\left(\frac{1}{x}\right)-\int\arctan x\,d(\arctan x)+\int\ln x\,d(\ln x)$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\int\frac{1}{x(1+x^2)}dx-\frac{(\arctan x)^2}{2}+\frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\frac{(\ln x)^2-(\arctan x)^2}{2}+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\frac{(\ln x)^2-(\arctan x)^2}{2}+\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

【考点延伸】《考试宝典》专题四　第三部分　分部积分法

11.【解析】$\forall\varepsilon>0$（无论ε有多小），总存在$\delta>0$，对任意的$x\in U^{\circ}(x_0,\delta)$，成立$|f(x)-a|<\varepsilon$

【考点延伸】《考试宝典》专题一　2.1 极限的定义和性质

12.【解析】$\int_0^1 \frac{\ln(1+2x+x^2)}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)^2}{1+x^2}dx = 2\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{1+x^2}dx$

$$\xlongequal{x=\tan t} 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\tan t+1)dt \xlongequal{def} I$$

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{2}{1+\tan t}dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2dt - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 - I$$

$\Longrightarrow I = \frac{\pi}{2}\ln 2 - I \Longrightarrow I = \frac{\pi}{4}\ln 2$，即 $\int_0^1 \frac{\ln(1+2x+x^2)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}\ln 2$

【考点延伸】《考试宝典》专题五　2.3 定积分的积分法则

13.【解析】由于 $e^{-x} \leqslant 1 \forall x \in [0,1]$ 成立，并且根据绝对值不等式有

$$\int_0^1 |f(x)-f'(x)|dx \geqslant \int_0^1 e^{-x}|f(x)-f'(x)|dx \geqslant \left|\int_0^1 e^{-x}(f'(x)-f(x))dx\right| = \left|e^{-x}f(x)\Big|_0^1\right| = \frac{1}{e}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题五　1.3 定积分的特殊性质

14.【解析】设 $F(x)=f(x)-\lambda x, x\in[0,1]$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，并且有

$$F'_+(0)=f'_+(0)-\lambda<0, F'_-(1)=f'_-(1)-\lambda>0$$

由于 $F'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}<0 \Longrightarrow$ 存在 $\delta_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使得 $x\in(0,\delta_1)$ 时，有 $F(x)<F(0)$

由 $F'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}>0 \Longrightarrow$ 存在 $\delta_2\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使得 $x\in(1-\delta_2,1)$ 时，有 $F(x)<F(1)$

根据 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上的连续性知，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 内必定可取得最小值，由上面的结果可以知道最小值一定不在端点处取得，不妨设 x_0 处取得最小值，那么 $x_0\in(0,1)$，根据 Fermat 引理知，必定有 $F'(x_0)=0$，即 $f'(x_0)=\lambda$.