



专题一 投影

【专题概要】

学习投影首先要明白什么是投影，彻底理解点投影的特征，然后由浅入深学习线和平面的投影。掌握点的投影原则，熟悉一些特殊线或面的投影特性，遇到不同题型，均可有效解决。本章要求：

1. 掌握点、直线、平面的三面投影的作图方法；
2. 掌握特殊位置直线、平面的投影特性及作图方法；
3. 掌握求直线与平面交点、平面与平面的交线的作图方法。

【知识清单】

1、投影

1.1 投影法

中心投影法：投影线汇交于一点的投影法。中心投影不能反映空间物体的真实形状，比实形大。如图 1-1。

平行投影法：分斜投影和正投影两种。投影线垂直于投影面的投影为**正投影**；投影线倾斜于投影面的投影为**斜投影**。

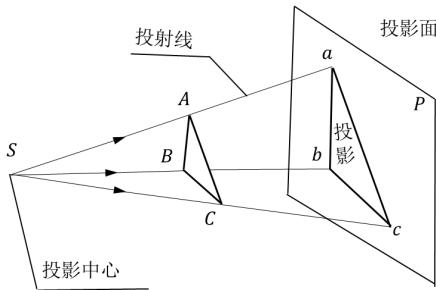


图 1-1 中心投影法

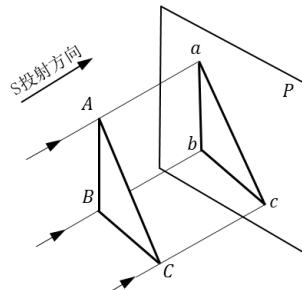


图 1-2 正投影

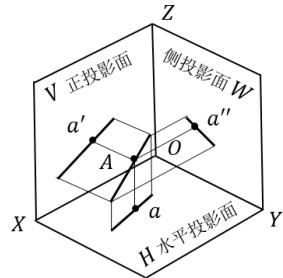
机械图样中一般都采用正投影，如图 1-2 所示，反映空间形体的真实形状。本书没有特别说明的投影指正投影。表 1-1 列举了正投影的基本性质，先做基本了解，后面习题用到相关性质时要及时回顾，反复融会贯通。

表 1-1 正投影的基本性质

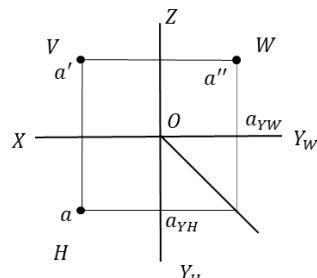
不变性	当直线、曲线或平面平行于投影面时，其投影反映直线的实长或曲线、平面的实形； 空间平行的两线段，其投影仍然平行
从属性	点在直线上，点的投影必在直线的投影上； 直线或曲线在平面内，则直线或曲线的投影必在平面的投影内
等比性	直线上点分割线段之比等于其投影长度之比； 两平行线段之比等于其投影长度之比
积聚性	直线垂直于投影面，其投影 积聚为一点 ； 平面垂直于投影面，其投影 积聚为一直线
相似性	直线倾斜于投影面，直线长度缩短，仍为直线； 平面倾斜于投影面，投影是类似形，面积缩小

1.2 投影面

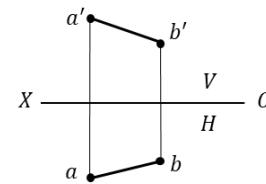
设置两个或三个互相垂直的平面作为投影面，一般称为**正投影面（V面）**、**水平投影面（H面）**和**侧投影面（W面）**，投影面间的交线为**轴**，轴的交点为**原点**（见图 1-3 (a)）。



(a) 三投影面系的立体图



(b) 三投影面展开图

(c) 两投影面展开图
图 1-3 投影面系

为了画图方便，一般将投影面展开在一个平面上，图 1-3 (b) 是点在三投影面系的投影展开图，Y轴用 Y_H 和 Y_W 表示，画投影线借助 45° 线，使 $a_{YW} = a_{YH}$ 。在投影题中，常常只用正面和水平两投影面，如图 1-3 (c) 所示。

2、视图

用正投影法绘制出物体的投影图，称为视图。

主视图：从物体正前方投影，反映物体的长度和高度。

俯视图：从物体正上方投影，反映物体的长度和宽度。在主视图下方，与主视图保持长对正。

左视图：从物体正左方投影，反映物体的宽度和高度。在主视图的正右方，与主视图保持高平齐，与俯视图保持宽相等（借助 45° 线）。

总结：三视图的投影规律为：**长对正、高平齐、宽相等**。图 1-4 为三视图之间的度量对应关系，图 1-5 为去掉辅助线后的三视图。

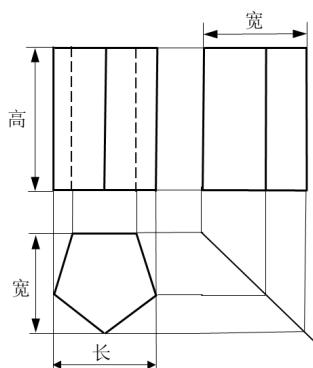


图 1-4 三视图之间的度量对应关系

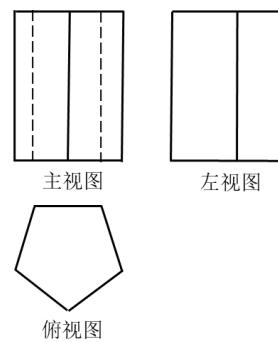


图 1-5 三视图

3、点、直线和平面的投影

3.1 点的投影

如图 1-6 所示，空间直线上有一点 A，过点 A 分别向三个投影面引投射线（垂直线），与投影面相交，其垂足 a 、 a' 、 a'' 即为空间点 A 的三面投影。通常规定空间点用大写字母表示，如 A、B、C …，对应的水平投影用 a、b、c … 表示，正面投影用 a' 、 b' 、 c' … 表示，侧面投影用 a'' 、 b'' 、 c'' … 表示。

点的三面投影特性：

1、点的正面投影和水平投影的连线垂直于 X 轴，正面投影和侧面投影连线垂直于 Z 轴。如图 1-7 所示，所有的投影线都是垂直于投影轴的。

2、点的投影到投影轴的距离，反映空间点到投影轴为界的另一投影面的距离。如图 1-6 所示，点 $A(12, 8, 10)$ ，表示 A 点到 W 面距离是 12，到 V 面距离是 8，到 H 面距离是 10。点的投影到各个轴的距离如图 1-7 所示。

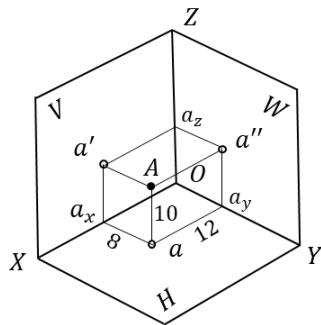


图 1-6 点的三面投影直观图

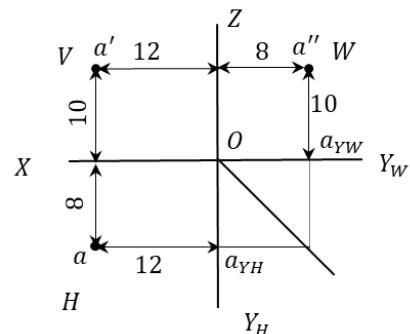


图 1-7 点的投影展开图

3.2 直线的投影

两点确定一条直线，所以直线的投影可由直线上任意两点的投影确定。如图 1-3 (c) 所示，先作出直线 AB 端点的投影 a 、 b 、 a' 和 b' ，再将端点的同面投影连接起来， ab 、 $a' b'$ 就是直线 AB 的投影。

空间两直线的相对位置包括平行、相交和交叉三种情况。

相交：空间相交两直线必有一交点，交点符合点的投影特性。如图 1-8 所示，直线 AB 和 CD ，交点 O 的投影依旧在投影的交点上，即 $o o'$ 的连线与 X 轴垂直。

平行：空间平行两直线同面投影相互平行（投影的不变性，见表 1-1）。如 AB 和 EF ，投影面上的投影依旧互相平行，即 $ab//ef$, $a' b' // e' f'$ 。

交叉：既不相交也不平行则为交叉关系。如 CD 和 EF 。

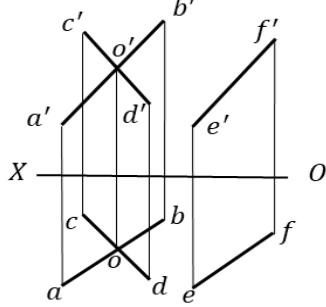


图 1-8 两直线的相对位置示意图

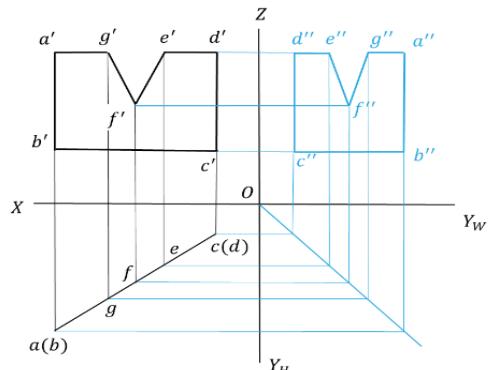


图 1-9 平面的投影

3.3 平面的投影

平面可由这些元素表示：**三个不共线的点、直线和直线外一点、平行两直线、相交两直线、任意平面图形（三角形、四边形等）**。图 1-9 表示由平面的正面和水平投影求平面的侧面投影，先作出平面的顶点的投影，连线即得平面的投影。

4、特殊位置的直线和平面的投影

当直线或平面与投影面平行或垂直时，其投影会有一些特殊性质。图 1-10 举例了四种特殊位置直线或平面的投影示意图。题目中可能出现这些特殊的直线和平面，解题时常用到这些特殊的性质。表 1-2 给出了特殊位置的直线和平面的投影的特性，结合投影立体图与展开图，去理解这些特性。

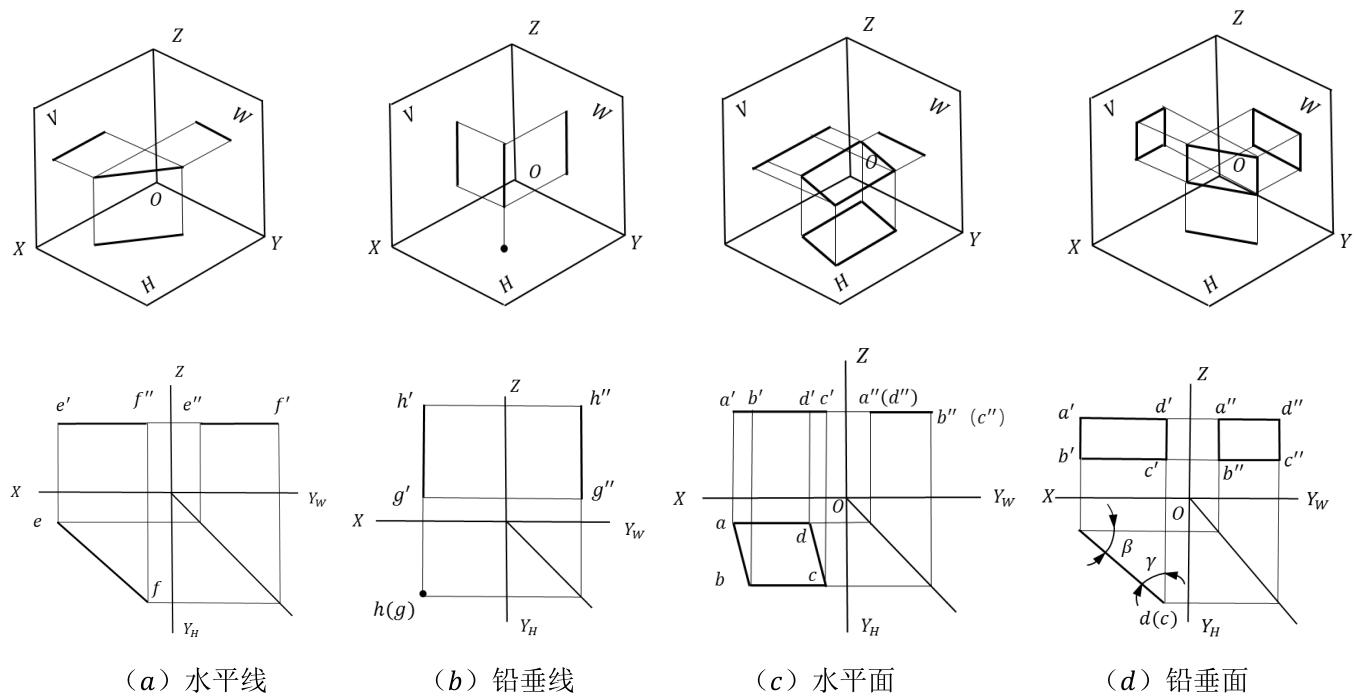


图 1-10 特殊直线和平面示例

表 1-2 特殊直线或平面的在各个投影面的投影特性

名称		水平线（平行于H面）	正平线（平行于V面）	侧平线（平行于W面）
特性	水平投影	等长直线	不等长, 平行于X轴	不等长, 垂直于X轴
	正面投影	不等长, 平行于X轴	等长直线	不等长, 垂直于X轴
	侧面投影	不等长, 平行于Y轴	不等长, 平行于Z轴	等长直线
名称		铅垂线（垂直于H面）	正垂线（垂直于V面）	侧垂线（垂直于W面）
特性	水平投影	积聚成一点	等长, 垂直于X轴	等长, 平行于X轴
	正面投影	等长, 垂直于X轴	积聚成一点	等长, 平行于X轴
	侧面投影	等长, 垂直于Y轴	等长, 垂直于Z轴	积聚成一点
名称		水平面（平行于H面）	正平面（平行于V面）	侧平面（平行于W面）
特性	水平投影	反应实形	积聚成一条直线, 平行X轴	积聚成一条直线, 垂直X轴
	正面投影	积聚成一条直线, 平行X轴	反应实形	积聚成一条直线, 垂直X轴
	侧面投影	积聚成一条直线, 平行Y轴	积聚成一条直线, 平行Z轴	反应实形
名称		铅垂面（垂直于H面）	正垂面（垂直于V面）	侧垂面（垂直于W面）
特性	水平投影	积聚成一条直线	边数相同的类似形	边数相同的类似形
	正面投影	边数相同的类似形	积聚成一条直线	边数相同的类似形
	侧面投影	边数相同的类似形	边数相同的类似形	积聚成一条直线

【重要题型】

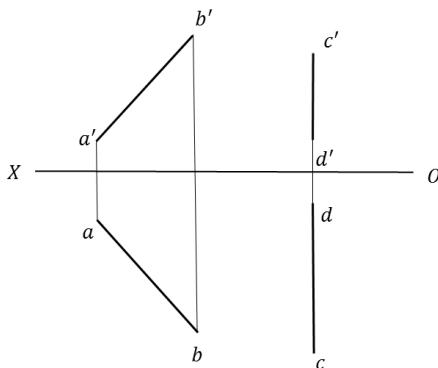
题型 1：直线和直线上的点的投影

例 1-1 作正平线 EF 距 V 面 $15mm$, 分别与直线 AB 、 CD 相交于点 E 、 F 。(见图 1-11 (a))

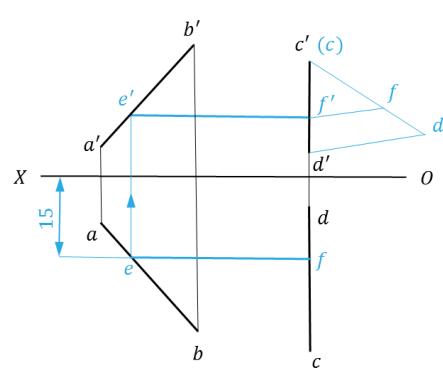
解题思路： 正平线在水平面的投影积聚成一条平行于 X 轴的直线, V 面在水平面上的投影与 X 轴重合。直线上点的投影用等比性求。

作图步骤：

- (1) 在 H 面画一条距 X 轴 $15 mm$ 的平行线, 分别交 ab 、 cd 于点 e 、 f ;
- (2) 过 e 点作 X 轴的垂线, 交 a' 、 b' 于点 e' ;
- (3) 根据等比性 $c' f' : c f = c' d' : c d$, 找到 f' 点 (画三角形 $c' f' f$ 相似于三角形 $c' d' d$, 即 $f' f \parallel d' d$);
- (4) 连接 e' 、 f' 。



(a) 已知



(b) 题解

图 1-11 例 1

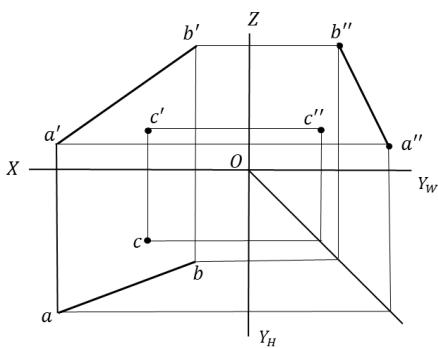
题型 2：点和直线的投影

例 1-2 过点 C 作一直线 CD 与直线 AB 和 OX 轴都相交 (见图 1-12 (a))

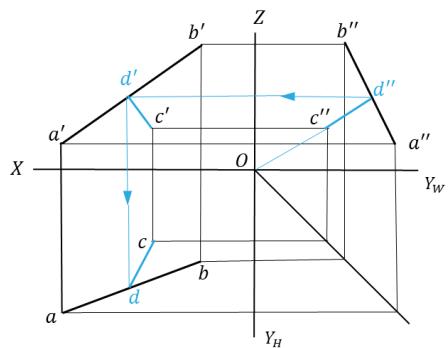
解题思路： 这道题的突破口在于 OX 轴上的点在 W 面的投影为原点, 所作直线的侧面投影为 Oc'' 连线。

作图步骤：

- (1) 连接 Oc'' 交 $a'' b''$ 于点 d'' ;
- (2) 过 d'' 点作 Z 轴的垂线交直线 $a' b'$ 于点 d' ;
- (3) 过 d' 点作 X 轴的垂线交直线 ab 于点 d ;
- (4) 连接 cd 、 $c' d'$ 、 $c'' d''$ 为所求直线的三面投影。



(a) 已知



(b) 题解

图 1-12 例 2

题型 3：平面内的点和直线的投影

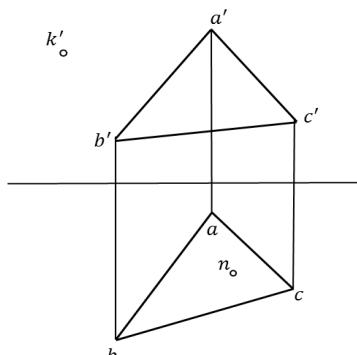
解决平面内点和直线作图问题依据的几何条件：

- 1、点在平面内时，该点必在平面内一条已知直线上；
- 2、直线在平面内时，必通过平面内的已知两点，或通过平面内的一点，且平行于平面内的一条直线。

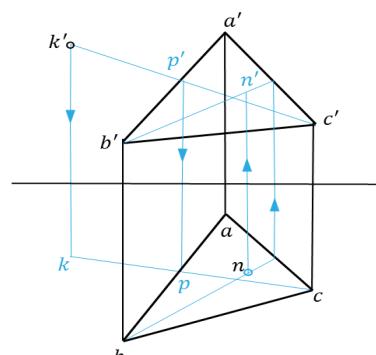
例 1-3 求平面ABC上点K与点N的另一投影（见图 1-13 (a)）

解题步骤：

- (1) 连接 $c' k'$ ，与 $a' b'$ 相交于点 p' ；
 - (2) 过点 p' 作X轴的垂线，交 ab 于点 p ；
 - (3) 连接 cp 并延长，与过点 k' 的X轴的垂线的交点即为 k 点；
- 同理可求得 n' 点。



(a) 已知

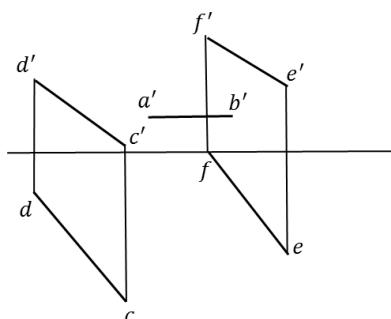


(b) 题解

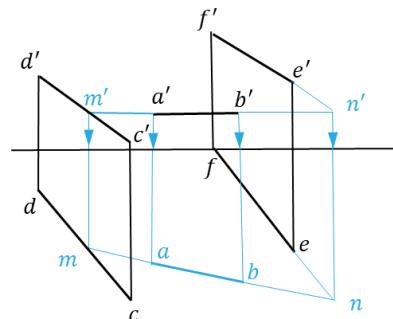
图 1-13 例 3

例 1-4 已知直线AB在两平行直线CD、EF所确定的平面上，求作AB的水平投影（见图 1-14 (a)）

解题思路： 直线AB与两平行直线CD、EF共面，但不与之不平行，则直线AB必定与直线CD、EF相交。找到交点 m' 、 n' 及其水平投影 m 、 n ，水平投影 ab 在 mn 上。



(a) 已知



(b) 题解

图 1-14 例 4

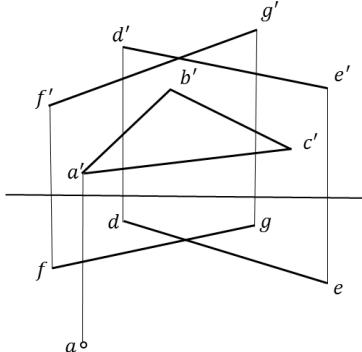
题型 4：平面的投影

例 1-5 $\triangle ABC$ 平行于直线DE和FG，补全 $\triangle ABC$ 的水平投影（见图 1-15 (a)）

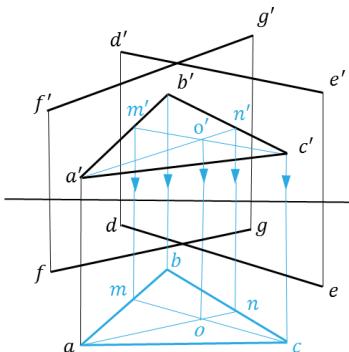
解题思路： 在平面ABC找到两直线MC和AN分别平行于DE和FG。借助点M和点N的投影求 $\triangle ABC$ 的水平投影。
作图步骤：

- (1) 作 $c' m'$ 平行于 $d' e'$ ， $a' n'$ 平行于 $f' g'$ ， $c' m'$ 与 $a' n'$ 相交于点 o ；
- (2) 过点 $b' c' m' n' o'$ 作X轴的垂线；
- (3) 过点 a 作 fg 的平行线，分别交投影线于点 o 和点 n ；
- (4) 过点 o 作 de 的平行线，分别交投影线于点 c 和点 m ；

(5) 连接 am 和 cn 并延长，交于点 b ，连接 ac 。



(a) 已知



(b) 题解

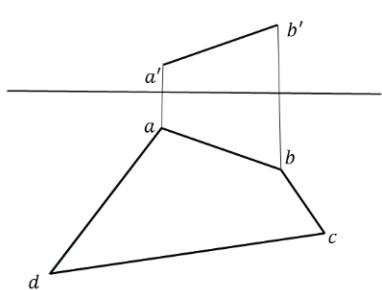
图 1-15 例 5

例 1-6 已知 CD 为水平线，完成平面 $ABCD$ 的正面投影（见图 1-16 (a)）

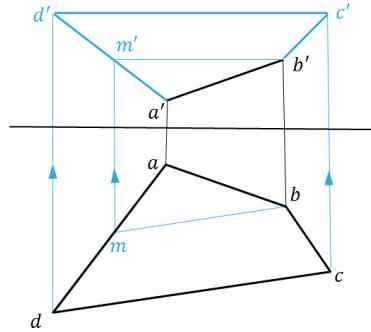
解题思路： CD 为水平线，所以 CD 的正面投影 $c'd'$ 平行于 X 轴。由于 AB 与 CD 并不直接相交，所以借助 CD 的平行线 BM 来求其正面投影， BM 的正面投影 $b'm'$ 同样平行于 X 轴。

作图步骤：

- (1) 过点 b 作 cd 的平行线 bm 交 ad 于点 m ；
- (2) 过点 m 作 X 轴的垂线，过点 b' 作 X 轴的平行线，相交于点 m' ；
- (3) 连接 $a'm'$ 并延长，与点 d 的投影线相交于点 d' 。过点 d' 作 X 轴的平行线，与点 c 的投影线相交于点 c' 。连接 $b'c'$ 。



(a) 已知

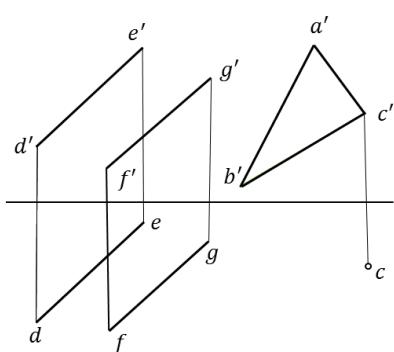


(b) 题解

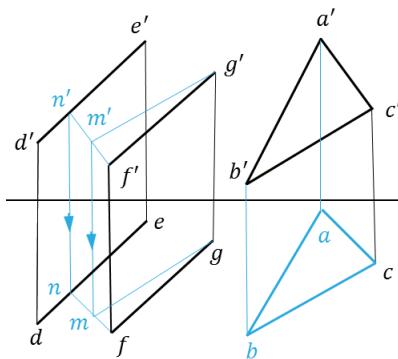
图 1-16 例 6

例 1-7 已知平面 ABC 与平面 $DEFG$ 相互平行，完成平面 ABC 的水平投影（见图 1-17 (a)）

解题思路： 两平面相互平行，则有平面内两相交直线互相平行。在平面 $DEFG$ 找到两直线 NF 和 MG 分别与 AC 和 BC 平行，根据平行线的投影特性可求得 AC 与 BC 的水平投影 ac 和 bc ，最后连接 ab ，即得平面 ABC 的水平投影。



(a) 已知



(b) 题解

图 1-17 例 7

作图步骤：

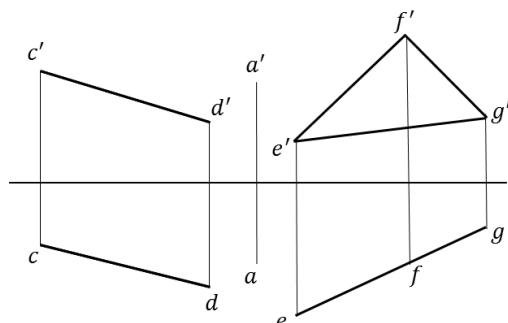
- (1) 作直线 $f' n'$ 、 $g' m'$ 分别平行于 $c' a'$ 、 $c' b'$ ；
- (2) 过点 n' 作 X 轴垂线，交 ed 于点 n ，连接 fn ；
- (3) 过点 m' 作 X 轴垂线，交 fn 于点 m ，连接 gm ；
- (4) 过点 c 作 fn 和 gm 的平行线，与点 a' 、 b' 的投影线分别相交于点 a 和点 b 。连接 ca 、 cb 和 ab 。

题型 5：求直线与平面的交点

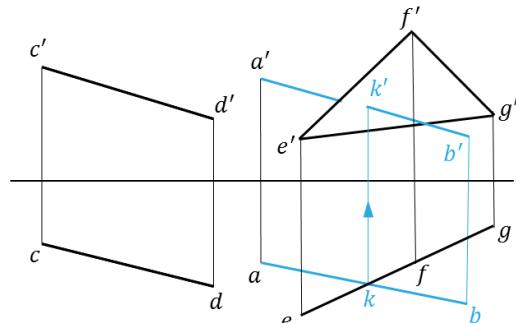
例 1-8 过点 A 作直线 AB 与直线 CD 平行并与 $\triangle EFG$ 相交，求出交点 K ，并判别可见性（见图 1-18 (a)）

作图步骤：

- (1) 过点 a 作 cd 平行线 ab ，交 eg 于点 k (b 点位置不限定)；
- (2) 过点 k 和点 b 作 X 轴的垂线，过点 a' 作 $c' d'$ 平行线，交垂线分别于点 k' 和点 b' ；
- (3) 由水平投影可以看出， k 点左边，平面 efg 在直线 ab 前面， k 点右边直线 ab 在前面，所以 k 点右边直线可见， k 点左边直线会被平面遮挡。



(a) 已知



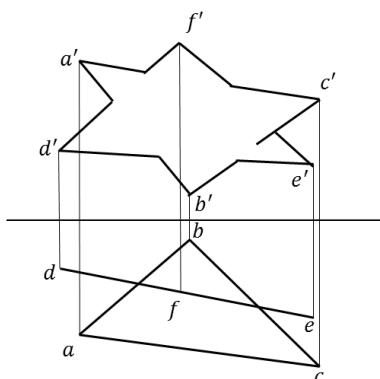
(b) 题解

图 1-18 例 8

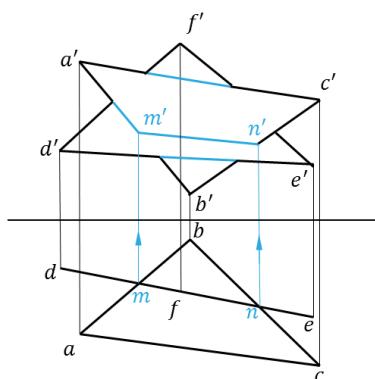
题型 6：求平面与平面的交线

例 1-9 求两平面的交线 MN 并判别可见性（见图 1-19 (a)）

解题思路：两平面相交可转化为两相交直线与另一平面相交的问题。所以该题等价于求直线 AB 和 CB 与平面 DEF 的交点 M 、 N 。根据俯视图可知，平面 ABC 的 B 点在平面 DEF 的后面，所以正面投影 B 点附近会被遮挡； AC 在平面 DEF 的前面，所以平面 ABC 的正面投影在 AC 附近是可见的。



(a) 已知



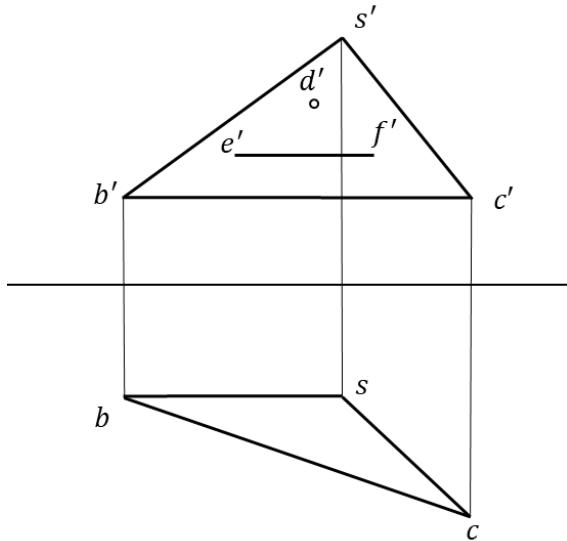
(b) 题解

图 1-19 例 9

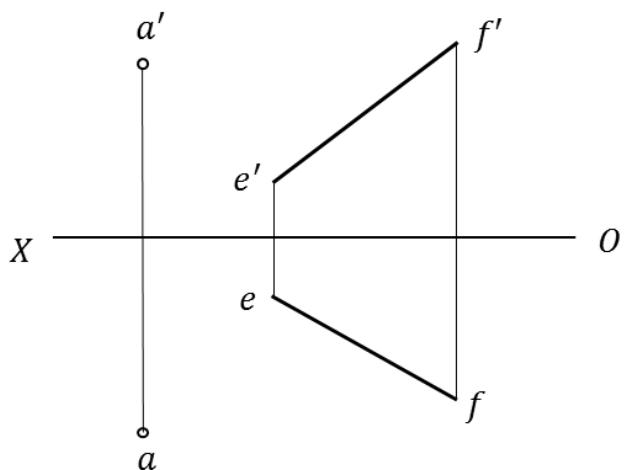
【精选习题】

基础篇

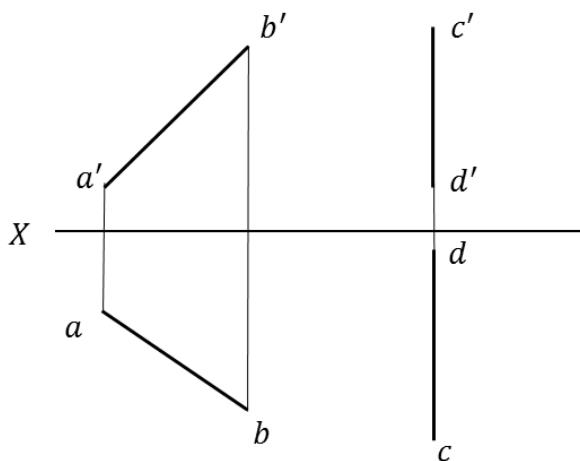
1. 作出 E, D, F 点的 H 面投影。



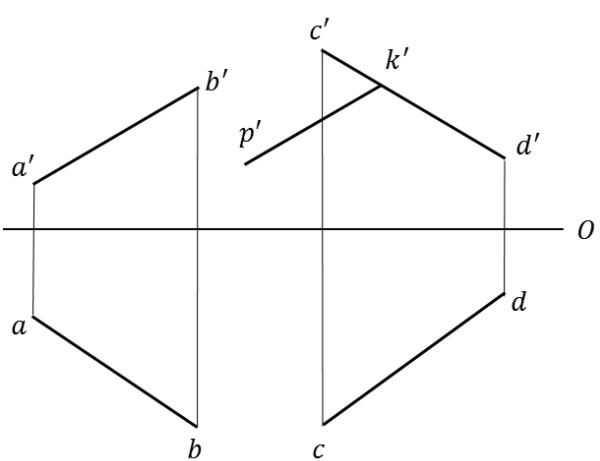
2. 过已知 A 点作直线与直线 EF 相交, 交点 B 距 V 面 $15mm$ 。



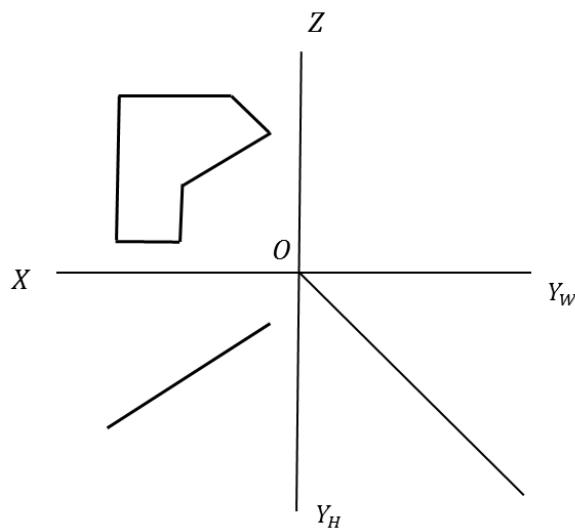
3. 做正平线 KL 与已知直线 AB 和 CD 相交, 并与 V 面相距 $20mm$ 。



4. 已知线段 $PK//AB$, 且交 CD 于点 K , 求作线段 PK 的两投影。

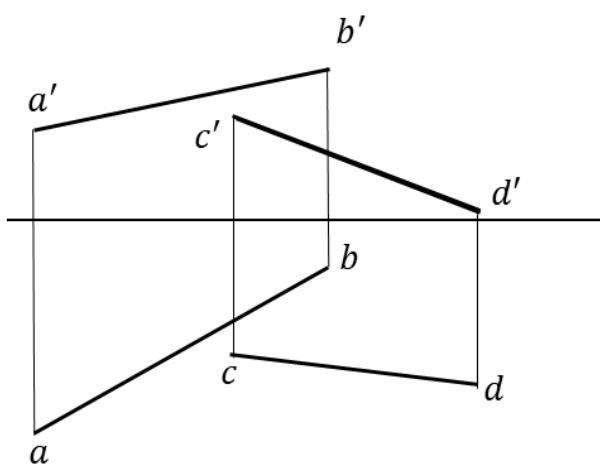


5. 完成平面的第三投影，并填空

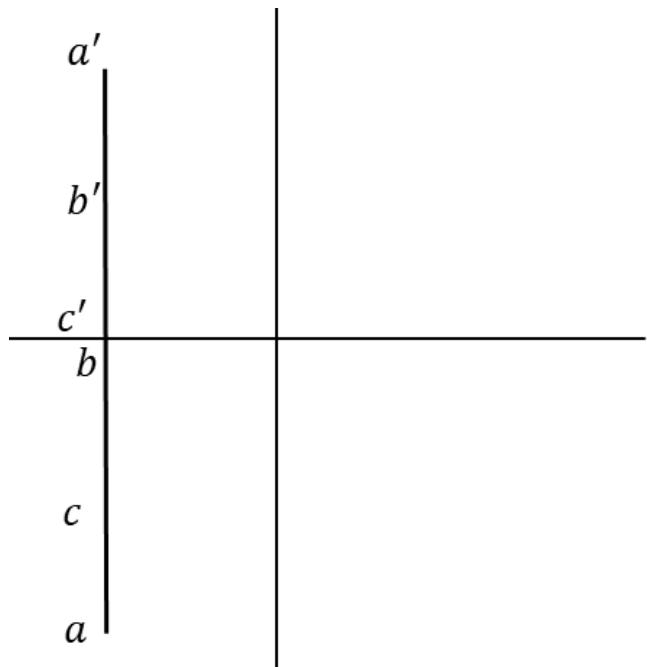


该平面是_____。

7. 作一正垂线使同时与AB、CD相交

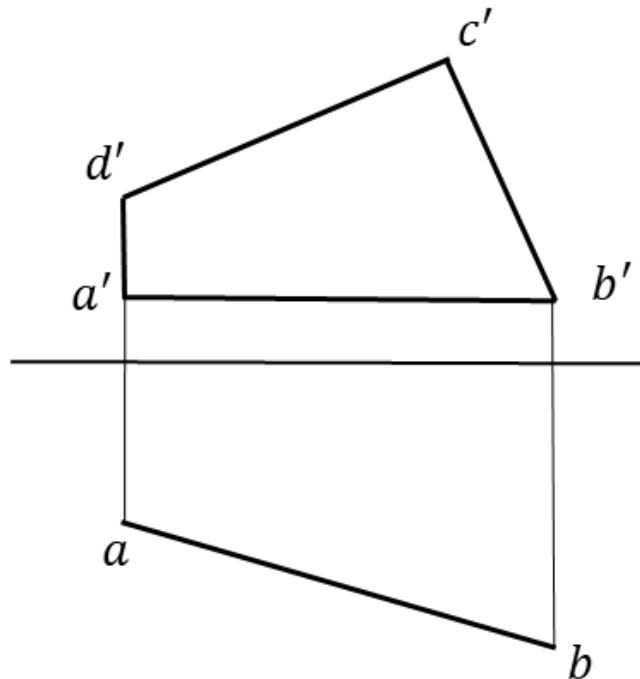


6. 求△平面ABC的侧面投影并判断平面的空间位置



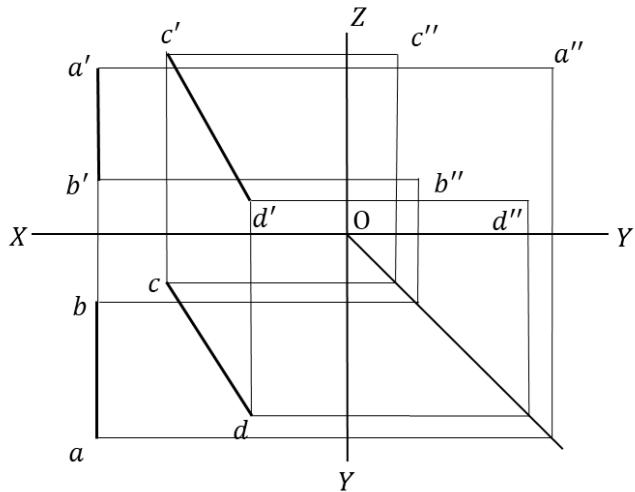
$\triangle ABC$ 是_____。

8. 作平面ABCD的水平投影，已知AB为水平线，CD为正平线。

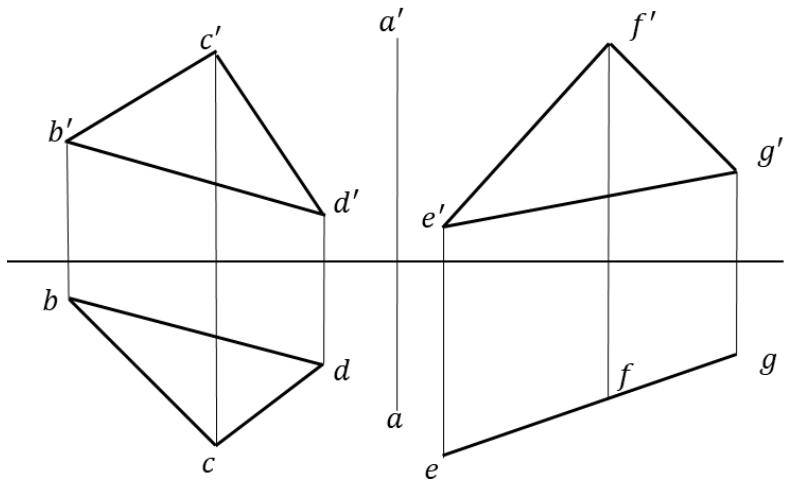


提高篇

9. 作直线EF与直线AB、CD相交并与OX轴平行



10. 过点A作正平线AM与 $\triangle BCD$ 平行并与 $\triangle EFG$ 相交, 求出交点K, 并判别可见性。



11. 求平面与平面的交线, 并判别可见性。

