微积分甲/乙 2015-2016 学年第一学期期中考试试卷

一、计算题

1、已知摆线的参数方程$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$ $(a>0)$，求参数为θ_0的一点处曲率k.（10 分）

2、计算数列极限$\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\ln\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{n^2+2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n^2+n}\right)\right]$.（10 分）

3、计算函数极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{\sin x-\tan x}$ （10 分）.

4、已知$y=\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)^{\frac{1}{x}}+(\arcsin 2x)^{\frac{1}{4}}$，求$\dfrac{dy}{dx}$的表达式（10 分）.

5、计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+3n}\right)}$ （10 分）.

6、设函数$y=y(x)$的反函数$x=x(y)$为，且满足$\dfrac{dx}{dy}\neq 0,\dfrac{dy}{dx}\neq 0$；试将$x=x(y)$的方程：

$\dfrac{d^2x}{dy^2}+y\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3+\dfrac{d^3x}{dy^3}=0$变换为$y=y(x)$的方程（即用$y'''$和$y''$和$y'$表示出

$\dfrac{d^2x}{dy^2}+y\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3+\dfrac{d^3x}{dy^3}=0$）（10 分）.

7、设$f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$，求$f^{2014}(0)$的值（$f^{(n)}(x)$为$f(x)$的$n$阶导数）（10 分）.

二、证明题：

8、奇函数$f(x)$在$[-1,1]$上有二阶导数，且$f(1)=k(k>0)$.

证明：（1）存在$\xi\in(0,1)$，使$f'(\xi)=k$；（5 分）

（2）存在$\eta\in(-1,1)$，使$f''(\eta)+f'(\eta)=k$.（5 分）

9、设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上二阶可导，且有$f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{x\in[0,1]} f(x)=-1$，证明存在$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)\geq 8$.

10、证明（10 分）：若（a）$y_{n+1}>y_n(n=1,2,\ldots)$，（b）$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$，（c）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$存在，

（1）则有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$；（5 分）

（2）求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 1^p+(n-1)\cdot 3^p+\ldots+1\cdot(2n-1)^p}{1^{p+1}+2^{p+1}+\ldots+n^{p+1}}(p>0)$.（5 分）

2015-2016 学年第一学期期中考试试卷参考答案

一、计算题：

1、【解析】$\dfrac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta),\dfrac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$ ；$\dfrac{d^2x}{d\theta^2}=a\sin\theta;\dfrac{d^2y}{d\theta^2}=a\cos\theta$，

$$k\Big|_{\theta=\theta_0}=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{4a\left|\sin\frac{\theta_0}{2}\right|}.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.3——参数方程求导.

2、【解析】：令$a_n=n\cdot\ln\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)^n\right]=\ln\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)^{n^2}\right]$，

$$令b_n=n\cdot\ln\left[\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)^n\right]=\ln\left[\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)^{n^2}\right],$$

$$b_n<n\cdot\ln\left[\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n^2+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)\right]<a_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}\ln\left[\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)^{n^2+n}\right]=1\cdot\ln e=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}\ln\left[\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+1}\right]=1\cdot\ln e=1，由夹逼定理，得原式=1.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 题型 2——n 项式子求和或求积的极限计算问题.

3、【解析】（洛必达）原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\frac{1}{1+x^2}}{\cos x-\sec^2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^2}{1+x^2}}{\frac{(\cos^3x-1)}{\cos^2x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x\cdot x^2}{(1+x^2)(\cos x-1)(\cos^2x+\cos x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+0}\cdot\frac{x^2}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算.

4、【解析】$y=e^{\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{x^2+2})}+(\arcsin 2x)^{\frac{1}{4}}$

$$\frac{dy}{dx}=e^{\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{x^2+2})}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}}-\frac{1}{x^2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right]+\frac{1}{2\sqrt{1-4x^2}}\cdot(\arcsin 2x)^{-\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{x}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}-\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}{x}\right]\cdot\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)^{\frac{1}{x}}+\frac{(\arcsin 2x)^{-\frac{3}{4}}}{2\sqrt{1-4x^2}}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.1——显函数求导

5、【解析】原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+3n}-\pi n\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sin^2\left(\pi\cdot\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}\right)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sin^2\left(\pi\cdot\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi\right)}=1$$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算.

6、【解析】$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$，$\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy}=\dfrac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{d\left(\frac{1}{y'}\right)}{dx}\cdot\dfrac{1}{y'}=-\dfrac{y''}{y'^3}$，

$\dfrac{d^3x}{dy^3}=-\dfrac{y'''}{y'^4}+3\dfrac{y''^2}{y'^5}$，所以 $-\dfrac{y''}{y'^3}+\dfrac{y}{y'^3}+3\dfrac{y''^2}{y'^5}-\dfrac{y'''}{y'^4}=0$.

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.5——求高阶导数.

7、【解析】令 $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$，$g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，$g''(x)=\dfrac{-x}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}}$

则 $(x^2+1)g''(x)=-xg'(x)$，左右求 n 阶导 $(n>0)$：

$(x^2+1)g^{(n+2)}(x)+2nxg^{(n+1)}(x)+n(n-1)g^{(n)}(x)=-g^{(n+1)}(x)-ng^{(n)}(x)$，

令 $x=0$，$g^{(n+2)}(0)=-n^2g^{(n)}(0)$，又 $f(x)=xg(x)$，$f^{2014}(x)=2014g^{(2013)}(x)+xg^{(2014)}(x)$，

所以 $f^{2014}(0)=2014g^{2013}(0)=2014(2011!!)^2$.

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.5——求高阶导数.

二、证明题.

8、【解析】(1) $\because f(0)=0, f(1)=k$，$\therefore \exists\xi\in(0,1)$，$f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=k$.

(2) $f(-1)=-f(1)=-k$，$\exists\xi'\in(-1,0)$，$f'(\xi)=\dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=k$

令 $g(x)=e^x(f'(x)-k)$，则 $g(\xi)=g(\xi')=0$.

$\therefore\exists\eta\in(\xi',\xi)\subset(0,1)$，使 $g'(\eta)=e^\eta(f''(\eta)+f'(\eta)-k)=0$

$\because e^\eta>0\quad\therefore f''(\eta)+f'(\eta)=k$

【考点延伸】《考试宝典》专题三 3.2——拉格朗日中值定理.

9、【解析】可设 $x_0\in[0,1]$，$f(x_0)=\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$，显然 $f'(x_0)=0$，

由泰勒定理知，$\exists\xi_1$，$\xi_2\in(0,1)$，使 $f(0)=f(x_0)+f'(x_0)x_0+f''(\xi_1)\cdot\dfrac{{x_0}^2}{2}$，

$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+f''(\xi_2)\cdot\dfrac{(1-x_0)^2}{2}$，即 $0=-1+f''(\xi_1)\cdot\dfrac{{x_0}^2}{2}$，

$\Rightarrow f''(\xi_1)=\dfrac{2}{x_0^2}>0$；　$0=-1+f''(\xi_2)\cdot\dfrac{(1-x_0)^2}{2}\Rightarrow f''(\xi_2)=\dfrac{2}{(1-x_0)^2}>0$，

$f''(\xi_1)f''(\xi_2)=\dfrac{4}{[x_0\cdot(1-x_0)]^2}\geqslant\dfrac{4}{\left[\frac{x_0+1-x_0}{2}\right]^4}=64$，

反证即得 $f''(\xi_1)\geqslant 8$ 或 $f''(\xi_1)\geqslant 8$. 即 $\exists\xi(0,1)$，使得 $f''(\xi)\geqslant 8$.

【考点延伸】《考试宝典》专题三 3.4——泰勒中值定理.

10、【解析】(1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=a$，对任意小量 $e>0$，必存在 N 使得对 $n\geqslant N$ 时有

$\left|\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}-a\right|\leqslant\dfrac{e}{2}$，

从 N 到 n 满足上式，即有

$\left|\dfrac{x_{N+1}-x_N}{y_{N+1}-y_N}-a\right|<\dfrac{e}{2}$，$\left|\dfrac{x_{N+2}-x_{N+1}}{y_{N+2}-y_{N+1}}-a\right|<\dfrac{e}{2}$，…，$\left|\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-a\right|<\dfrac{e}{2}$，

展开得：$a-\dfrac{e}{2}<\dfrac{x_{N+1}-x_N}{y_{N+1}-y_N}<a+\dfrac{e}{2}$，…，$a-\dfrac{e}{2}<\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}<a+\dfrac{e}{2}$，

由于$y_{n+1}-y_n$，故不等式两边同乘分母得，

$$\left(a-\frac{e}{2}\right)(y_{N+1}-y_N)<x_{N+1}-x_N<\left(a+\frac{e}{2}\right)(y_{N+1}-y_N),$$

$$\left(a-\frac{e}{2}\right)(y_{N+2}-y_{N+1})<x_{N+2}-x_{N+1}<\left(a+\frac{e}{2}\right)(y_{N+2}-y_{N+1}),$$

…

$$\left(a-\frac{e}{2}\right)(y_n-y_{n-1})<x_n-x_{n-1}<\left(a+\frac{e}{2}\right)(y_n-y_{n-1}),$$

累加得$\left(a-\frac{e}{2}\right)(y_n-y_N)<x_n-x_N<\left(a+\frac{e}{2}\right)(y_n-y_N)$，

即$\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-a\right|<\frac{e}{2}$，

由斯托尔茨公式得，$\frac{x_n}{y_n}-a=\frac{(x_N-ay_N)}{y_n}+\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)\left(\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-a\right)$

由于$y_n>y_N$，所以$1-\frac{y_N}{y_n}\leqslant 1$，于是可得$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|\leqslant\left|\frac{(x_N-ay_N)}{y_n}\right|+\left|\left(\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-a\right)\right|$，

当$n\geqslant N'>N$时，由于x_N-ay_N是固定的数，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，

故$\left|\frac{(x_N-ay_N)}{y_n}\right|\to 0$，有$\left|\frac{(x_N-ay_N)}{y_n}\right|<\frac{e}{2}$，

同时上面已证明当$n\geqslant N$时，$\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-a\right|<\frac{e}{2}$，故$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|<e$，即$\frac{x_n}{y_n}$的极限也是$a$.

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^p\cdot n^p}{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}-1\right]\cdot n^{p+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^p\cdot n^p}{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}-1}{\frac{1}{n}}\cdot n^p}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^p}{p+1}=\frac{2^p}{p+1}$$

由（1）知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+3^p+\dots+(2n-1)^p}{(n+1)^{p+1}}=\frac{2^p}{p+1}$，

且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+(1^p+3^p)+\dots+[1^p+3^p+\dots+(2n-1)^p]}{1^{p+1}+2^{p+1}+\dots+n^{p+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+3^p+\dots+(2n-1)^p}{(n+1)^{p+1}}=\frac{2^p}{p+1}$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot 1^p+(n-1)\cdot 3^p+\dots+1\cdot(2n-1)^p}{1^{p+1}+2^{p+1}+\dots+n^{p+1}}=\frac{2^p}{p+1}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 题型 3——证明数列极限存在（单调有界定理的运用）.