2015-2016 学年第一学期期末考试 A 卷

1. 设$y=\dfrac{x^3}{3}\arccos x-\dfrac{1}{9}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}+\ln 5$，求$dy$.

2. 设$y=y(x)$是由参数方程$\begin{cases} x(t)=\sqrt{1+t^2} \\ y(t)=\displaystyle\int_1^{t^2}\frac{3^u}{\sqrt{1+u}}du \end{cases}$所确定，求$\dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

3. 设$y=y(x)$是由方程$y^3+xy^2+x^2y-3=0$所确定，求曲线$y=y(x)$在点$(1,1)$处的曲率.

4. 求积分$\int_0^2 x^2\sqrt{2x-x^2}\,dx$.

5. 求广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}dx$.

6. 已知$f(x)=\int_1^x\frac{\ln(1+t)}{t}dt$，计算$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$.

7. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(e^x+1)\ln(1+x)}$.

8. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sqrt{1-x^3}-1}$.

9. 设数列$a_n=\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\dots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}$, $n=1,2,\dots$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

10. 已知$f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}\,dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}\,dt$，求$f(x)$零点的个数.

11. 将$f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$展开成$x$的幂级数，并写出成立的区间.

12. 设数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$满足$0<a_n<\dfrac{\pi}{2}$，$0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$，$\cos a_n-a_n=\cos b_n$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

（1）证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；

（2）证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$收敛.

13. 设l_1为曲线$y=x^2$在点$A(a,a^2)\ (a>0)$处的切线，l_2为曲线$y=x^2$的另一条切线，且与切线l_1垂直.

（1）求l_1和l_2的交点坐标；

（2）求曲线$y=x^2$与切线l_1和l_2所围成的平面图形的面积，并问a为何值时，该面积最小？

14. 设奇函数$f(x)$在$[-1,1]$上具有 2 阶导数，且$f(1)=1$，证明：

（1）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=1$；

（2）存在$\eta\in(-1,1)$，使得$\eta f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

2015-2016 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

1、【解析】$y'=x^2\arccos x+\frac{x^3}{3}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2x}{9}\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2+2}{9}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+0=x^2\arccos x$

$$dy=x^2\arccos x dx$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.1——显函数求导

2、【解析】$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{3^{t^2}\cdot 2t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}=2\cdot 3^{t^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d(2\cdot 3^{t^2})/dt}{d\left(\sqrt{1+t^2}\right)/dt}=\frac{2\cdot 3^{t^2}\cdot\ln 3\cdot 2t}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}=4\ln 3\cdot 3^{t^2}\sqrt{1+t^2}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.3——参数方程求导

3、【解析】两边关于x求导数：$3y^2y'+2xyy'+y^2+2xy+x^2y'=0$

代入$x=1$，$y=1$得$y'|_{(1,1)}=-\frac{1}{2}$

再关于x求导：

$$6y(y')^2+3y^2y''+2yy'+2x(y')^2+2xyy''+2yy'+2y+2xy'+2xy'+x^2y''=0$$

代入$x=1$，$y=1$，$y'=-\frac{1}{2}$得$6y''=0$　　$\therefore$ 曲率$=0$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.2——隐函数求导

4、【解析】原式$=\int_0^2 x^2\sqrt{1-(1-x)^2}\,dx\xlongequal{x-1=t}\int_{-1}^1(1+t)^2\sqrt{1-t^2}\,dt$

$$=\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\,dt+\int_{-1}^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{2}+2\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$=\frac{\pi}{2}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2u\cos^2u\,du=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5}{8}\pi$$

【考点延伸】《考试宝典》专题四 2.2——第二类换元积分法

5、【解析】原式$\xlongequal{\arctan x=t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\frac{1}{\cos^3t}}\frac{1}{\cos^2t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t\,dt=t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=\frac{\pi}{2}-1$

【考点延伸】《考试宝典》专题四 2.2——第二类换元积分法

6、【解析】$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 f(x)d(2\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}f(x)\big|_0^1 - 2\int_0^1 \sqrt{x}\,d(f(x))$

$$= 0 - 2\int_0^1 \sqrt{x}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}dx$$

$$= -2\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx$$

$$= -2\left[2\sqrt{x}\ln(1+x)\big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx\right]$$

$$= -4\ln 2 + 4\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$$

$$= -4\ln 2 + 8\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt \quad (x = t^2)$$

$$= -4\ln 2 + 8[t - \arctan t]\big|_0^1$$

$$= 8 - 2\pi - 4\ln 2$$

【考点延伸】《考试宝典》专题四第三部分——分部积分法

7、【解析】原式$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{2}(2+0) = 1$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

8、【解析】原式$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x(e^{\sin x - x}-1)}{-\frac{1}{2}x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{-\frac{1}{2}x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{1}{3!}(x^3 + o(x^3)) - x}{-\frac{1}{2}x^3} = \frac{1}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

9、【解析】$a_n \leqslant \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \dots + \sin\pi\right) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 \sin x\pi\, dx$

$$a_n \geqslant \frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \dots + \sin\pi\right)$$

$$= \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \dots + \sin\pi\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1\cdot\int_0^1 \sin x\pi\, dx$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \sin\pi x\, dx = \frac{1}{\pi}(-\cos\pi x)\big|_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

10、【解析】$f'(x)=-\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2}\cdot 2x=\sqrt{1+x^2}(2x-1)$

$\therefore x>\frac{1}{2}, f(x)$递增　　$x<\frac{1}{2}$，$f(x)$递减

$$f(x)=\int_1^x \sqrt{1+t^2}\,(2t-1)dt$$

$$\therefore f(2)=\int_1^2 \sqrt{1+t^2}\,(2t-1)dt>0 \qquad f\left(\frac{1}{2}\right)=\int_1^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+t^2}\,(2t-1)dt<0$$

$$f(-1)=\int_1^{-1} \sqrt{1+t^2}\,(2t-1)dt=\int_1^{-1} -\sqrt{1+t^2}\,dt>0$$

$\therefore$在$\left(-1,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},2\right)$内各有一零点，零点个数为 2

【考点延伸】《考试宝典》专题三 3.1——罗尔定理

11、【解析】$f'(x)=\arctan x=\int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx \qquad |x|<1$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad |x|<1$$

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} \qquad |x|<1$$

当$x=\pm 1$时，此级数收敛，故和函数在$\begin{cases} x=-1 & \text{右连续} \\ x=1 & \text{左连续} \end{cases}$

故上式成立范围为$[-1,1]$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 1.2——收敛级数的基本性质

12、【解析】（1）$\because \sum b_n$收敛　$\therefore b_n\to 0 \quad \cos b_n\to 1(n\to\infty)$

$$0<a_n=\cos a_n-\cos b_n\leqslant 1-\cos b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} a_n=0$$

$$（2）\ 0<\frac{a_n}{b_n}\Big/ b_n=\frac{a_n}{{b_n}^2}\leqslant\frac{1-\cos b_n}{{b_n}^2}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{2}$$

$\therefore \frac{a_n}{b_n}$与$b_n$为同阶无穷小　　$\therefore \sum \frac{a_n}{b_n}$收敛

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 1.2——收敛级数的基本性质

13、【解析】（1）$l_1: y=a^2+2a(x-a)$

设l_2的切点为$B(b,b^2)$，$l_2: y=b^2+2b(x-b)$

$l_1 \perp l_2 \quad \therefore b=-\dfrac{1}{4a} \qquad$ 求得交点$\left(\dfrac{a+b}{2}, ab\right)$

（2）$S(a)=\int_b^{\frac{a+b}{2}}(x^2-2bx+b^2)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{a}(x^2-2ax+a^2)dx=\dfrac{1}{12}\left(a+\dfrac{1}{4a}\right)^3$

$S'(a)=\dfrac{1}{4}\left(a+\dfrac{1}{4a}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{4a^2}\right)=0 \qquad$ 得$a=\dfrac{1}{2}$时，面积最小

【考点延伸】《考试宝典》专题五 4.1——面积

14、【解析】（1）$f(0)=0 \quad f(1)=1$，$f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶导数

由拉格朗日定理知$\exists \xi \in (0,1)$使得$f'(\xi)=1$

（2）$f(-1)=-1 \quad f(0)=0 \quad f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶导数

由拉格朗日中值定理知：$\exists \xi_1 \in (-1,0)$使得$f'(\xi_1)=1$

令$F(x)=x[f'(x)-1]$则F在$[-1,1]$可导，$F'(x)=xf''(x)+f'(x)-1$

$F(\xi)=0 \quad F(\xi_1)=0$

$\therefore \exists \eta \in (\xi_1,\xi) \subseteq (-1,1)$使$F'(\eta)=0$即$\eta f''(\eta)+f'(\eta)=1$

【考点延伸】《考试宝典》专题三 3.2——拉格朗日中值定理