2020-2021 学年第一学期期末考试 A 卷

1、(8 分) 试求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2-\dfrac{1}{\sin^2\frac{1}{n}}\right)$.

2、(7 分) 试求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{(x+1)^2}\sin x-x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(1+x)}$.

3、(10 分) 试求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

4、(第一小题 6 分，第二小题 4 分，共 10 分)

(1) 设$a_1,\cdots,a_m$是m个正实数，试求极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(a_1)^n+\cdots+(a_m)^n}$;

(2) 试求极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_1^2 e^{-nt^2}dt\right)^{\frac{1}{n}}$.

5、(10 分) 设曲线γ由极坐标方程$r=1+\cos\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$确定，试求曲线γ的弧长$l(\gamma)$.

6、(10 分) 试求反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx$的值.

7、(10 分) 求椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$上一点$(x_0,y_0)$使得它到直线$3x+5y=15$的距离最短.

8、(10 分) 设函数$y=y(x)$满足：$\begin{cases}x=t-\sin t,\ t\in(0,2\pi)\\ y=1-\cos t,\ t\in(0,2\pi)\end{cases}$，试求$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$，并求出函数$y=y(x)$的极值.

9、(每小题 3 分，共 9 分) 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上连续且以$T(>0)$为周期,

(1) 试证明函数$F(x)=\int_0^x f(t)dt-\frac{x}{T}\int_0^T f(u)du$以$T$为周期;

(2) 试证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(u)du$;

(3) 试求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\sin t|dt}{x}$.

10、(6 分) 设函数f在$[0,1]$上连续且取值恒正，试证明存在唯一的$c\in(0,1)$，使得

$$\int_0^c f(x)dx=\int_c^1\frac{dt}{f(t)}.$$

11、(5 分) 设函数f在$(0,1)$上连续且满足$\forall x_1\in(0,1)$, $x_2\in(0,1)$, $x_3\in(0,1)$, 且$x_1<x_2<x_3$都有$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$. 若设$a<b$, 且$[a,b]\subset(0,1)$，试证明：$\exists L>0$使得$\forall t_1,t_2\in[a,b]$, 有$|f(t_2)-f(t_1)|\leqslant L|t_2-t_1|$.

12、(5 分) 设f在$[0,1]$上二阶可导，且满足$f(0)=0=f(1)$, $\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$, 试证明：$\exists x_0\in(0,1)$使得$f''(x_0)\geqslant 8$.

2020-2021 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

1、【解析】令 $\dfrac{1}{n}=x$ 得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2-\dfrac{1}{\sin^2\frac{1}{n}}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2x}\right)$，通分利用洛必达法则和等价代换计算可得 $\lim\limits_{t\to0^+}\left(\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{\sin^2t}\right)=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sin^2t-t^2}{t^4}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\cos2t-1}{6t^2}=-\dfrac{1}{3}$，利用归结原理可得原极限为 $-\dfrac{1}{3}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3 极限的计算.

2、【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{(x+1)^2}\sin x+x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[e^{(x+1)^2}\dfrac{\sin x}{x}\right]+\lim\limits_{x\to0}\left[x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=e+0=e$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3 极限的计算.

3、【解析】原式 $=\displaystyle\int\arctan\sqrt{x}\,d\left(2\sqrt{x}\right)=2\int\arctan t\,dt\quad\left(t=\sqrt{x}\right)$

$$=2t\arctan t-2\int\frac{t}{1+t^2}dt$$
$$=2t\arctan t-\ln(1+t^2)+C$$
$$=2\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}-\ln(1+x)+C$$

【考点延伸】《高数考试宝典》专题四 第二部分 换元积分法.

4、【解析】(1) 利用不等式 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}a_k\leqslant\sqrt[n]{(a_1)^n+\cdots+(a_m)^n}\leqslant\sqrt[n]{n}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}a_k$，以及夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(a_1)^n+\cdots+(a_m)^n}=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}a_k$.

(2) 因为 $\forall e^{-1}>\varepsilon>0$，$\exists 1>\delta>0$，$s.t.$ $\forall t\in[1,1+\delta]$，$e^{-t^2}\geqslant e^{-1}-\varepsilon$，所以有不等式 $\forall n\in\mathbb{Z}^+$，$\sqrt[n]{\delta}\,(e^{-1}-\varepsilon)\leqslant\left(\displaystyle\int_1^{1+\delta}e^{-nt^2}dt\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(\displaystyle\int_1^2e^{-nt^2}dt\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant e^{-1}$，再利用夹逼准则和 ε 可以任意小可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\int_1^2e^{-nt^2}dt\right)^{\frac{1}{n}}=e^{-1}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3 极限的计算.

5、【解析】由弧长的计算公式可得

$$l(\gamma)=\int_0^{2\pi}\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta=2\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=8$$

【考点延伸】《考试宝典》专题五 4.3 弧长.

6、【解析】$\int \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx = \int xd\left(-\frac{1}{1+e^x}\right) = -\frac{x}{1+e^x} + \int \frac{1}{1+e^x}dx = -\frac{x}{1+e^x} + \ln\frac{e^x}{1+e^x} + C$

故由反常积分的定义有

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{x}{1+e^x} + \ln\frac{e^x}{1+e^x}\right]\Bigg|_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b}{1+e^b} + \ln\frac{e^b}{1+e^b} + \ln 2\right) = \ln 2$$

【考点延伸】《考试宝典》专题五 3.1 反常积分的定义.

7、【解析】由题可得椭圆的参数方程为$x=3\cos t$, $y=2\sin t$, $t\in[0,2\pi]$，且椭圆上一点$(x(t),y(t))$

到直线$3x+5y=15$的距离$d=\frac{|9\cos t+10\sin t-15|}{\sqrt{34}}$，故可令$f(t)=(9\cos t+10\sin t-15)^2$,

求得其驻点为$t_1=\arctan\frac{10}{9}$, $t_2=\pi+\arctan\frac{10}{9}$, 代入距离$d$得$\frac{15-\sqrt{181}}{\sqrt{34}}=d(t_1)<d(t_2)$,

又$d(t_1)<d(0)=d(2\pi)$，于是所求点的坐标为$\left(\frac{27}{\sqrt{181}},\frac{20}{\sqrt{181}}\right)$.

【考点延伸】《考试宝典》专题三 1.2 最值.

8、【解析】$\forall t\in(0,2\pi)$, $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{(1-\cos t)^2}$;

由题意知函数$y=y(x)$的唯一驻点为$x=\pi$，此时对应的$t=\pi$，于是$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=\pi}=-\frac{1}{4}<0$

于是函数$y=y(x)$有唯一的极大值$1-\cos\pi=2$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.3 参数方程求导; 专题三 1.1 极值点.

9、【解析】(1) $\forall x\in\mathbb{R}$, 有

$$F(x+T)=\int_0^{x+T}f(t)dt-\frac{x+T}{T}\int_0^T f(u)du$$
$$=\int_0^x f(t)dt+\int_x^{x+T}f(t)dt-\frac{x}{T}\int_0^T f(u)du-\int_0^T f(u)du$$
$$=\int_0^x f(t)dt-\frac{x}{T}\int_0^T f(u)du=F(x)$$

故$F(x)=\int_0^x f(t)dt-\frac{x}{T}\int_0^T f(u)du$以$T$为周期.

(2) 由$F(x)=\int_0^x f(t)dt-\frac{x}{T}\int_0^T f(u)du$，两边除以$x\neq 0$，可得

$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(u)du+\frac{F(x)}{x}$，又由于$F(x)$以$T$为周期且在$\mathbb{R}$上连续，故$F(x)$有界，

于是有$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0$，因此$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(u)du$.

(3) 由(2)可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\sin t|dt}{x}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin u|du=\frac{2}{\pi}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题五 【重要题型】题型 7：定积分的证明题.

10、【解析】令$F(x)=\int_0^x f(t)dt-\int_x^1\frac{du}{f(u)}$，$x\in[0,1]$，则$F(x)$在$[0,1]$上连续且可导又满足

$F(0)=-\int_0^1\frac{du}{f(u)}<0$，$F(1)=\int_0^1 f(t)dt>0$，由连续函数的介值定理可得$\exists c\in(0,1)$，使

得$F(c)=0$，即$\int_0^c f(t)dt=\int_c^1\frac{du}{f(u)}$. 又因为$\forall x\in(0,1)$，$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}>0$，即

$F(x)$在$[0,1]$上严格单调增加，故c是唯一的(否则可由罗尔定理得到矛盾).

【考点延伸】《考试宝典》专题五 【重要题型】题型 7：定积分的证明题.

11、【解析】如果$f(x)$是$[a,b]$上的常值函数，则结论成立；下面设$f(x)$不是$[a,b]$上的常值函数. 因为$[a,b]$是$(0,1)$的闭子区间，所以存在$\delta>0$，使得$[a-\delta,b+\delta]\subset(0,1)$. 又因为$f$在$(0,1)$上连续，故在$[a-\delta,b+\delta]$上也连续，于是由连续函数的最值定理，存在$M,m\in\mathbb{R}$，$M>m$使得$M=\max\limits_{x\in[a-\delta,b+\delta]}f(x)$，$m=\min\limits_{x\in[a-\delta,b+\delta]}f(x)$，于是对$\forall t_1,t_2\in[a,b]$，若$t_1<t_2$，令$x_1=t_1,x_2=t_2$，$x_3=t_2+\delta$，则由题意有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\leqslant\frac{M-m}{\delta}\Rightarrow f(t_2)-f(t_1)\leqslant\frac{M-m}{\delta}|t_2-t_1|$$

若$t_1>t_2$，令$x_1=t_2-\delta$，$x_2=t_2$，$x_3=t_1$，则由题意有

$$\frac{f(t_2)-f(t_2-\delta)}{\delta}\leqslant\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}\Rightarrow\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_1-t_2}\leqslant\frac{f(t_2-\delta)-f(t_2)}{\delta}\leqslant\frac{M-m}{\delta}$$

即有$f(t_2)-f(t_1)\leqslant\frac{M-m}{\delta}|t_2-t_1|$.

若$t_1=t_2$，则必有$f(t_2)-f(t_1)\leqslant\dfrac{M-m}{\delta}|t_2-t_1|$.

于是对$\forall t_1,t_2\in[a,b]$，都有$f(t_2)-f(t_1)\leqslant\dfrac{M-m}{\delta}|t_2-t_1|$，因此此不等式当$t_1$与$t_2$交换位置时

也成立，故若取$L=\dfrac{M-m}{\delta}>0$，则有对$\forall t_1,t_2\in[a,b]$，$|f(t_2)-f(t_1)|\leqslant L|t_2-t_1|$.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 3.2 闭区间上连续函数的性质.

12、【解析】由于$f(0)=f(1)=0\neq-1=\min\limits_{x\in[0,1]}$，故$f$在$[0,1]$上的最小值必在$(0,1)$内取到. 即存在$x^*\in(0,1)$，$s.t.\ f(x^*)=\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)$，从而$x^*$是$f(x)$的极值点，故有$f'(x^*)=0$. 于是$f$在$x^*$处的带拉格朗日余项的泰勒公式为

$$\forall x\in[0,1],\ \exists\xi\text{介于}x\text{与}x^*\text{之间，使得}f(x)=f(x^*)+f'(x^*)(x-x^*)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x^*)^2$$

$$=-1+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x^*)^2.$$

特别地，取$x=0$代入得$\exists\xi_0\in(0,x^*)$，$s.t.\ 0=f(0)=-1+\dfrac{f''(\xi_0)}{2}(x^*)^2$......(1);

取$x=1$代入得$\exists\xi_1\in(x^*,1)$，$s.t.\ 0=f(1)=-1+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}(1-x^*)^2$......(2).

若$x^*\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,则由(1)式得$f''(\xi_0)=\dfrac{2}{(x^*)^2}>\dfrac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=8$;

若$x^*\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$，则由(2)式得$f''(\xi_1)=\dfrac{2}{(1-x^*)^2}\geqslant\dfrac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=8$.

总之，若$x^*\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，则取$x_0=\xi_0$，若$x^*\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$，则取$x_0=\xi_1$，

于是$\exists x_0\in(0,1)$使得$f''(x_0)\geqslant8$.

【考点延伸】《考试宝典》专题三 3.4 泰勒中值定理.