2018-2019 学年第一学期期末考试 A 卷

1、对$\forall n\in\mathbb{Z}^+$,设$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$,$b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$,且已知数列$\{a_n\}$严格单调递增,数列$\{b_n\}$严格单调递减. 试用$e$的定义证明不等式:$\forall n\in\mathbb{Z}^+$，有$\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$.

2、求极限:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+2x)^x-3^x}{\arcsin(x^2)}$.

3、设$f(x)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}x^2}$,求$f^{(2019)}(0)$.

4、设有函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0.\end{cases}$，令$f(x)=B_0+\dfrac{B_1}{1!}x+\dfrac{B_2}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{B_n}{n!}+o(x^n),x\to 0$

(其中n为某个大于等于三的正整数).试计算B_0,B_1,B_2的值.

5、设$f(x)=x^{\frac{1}{x}},x>0$,求$f(x)$在$(0,+\infty)$上的最大值.

6、设函数$y=y(x)$在$x=0$的某个邻域内二阶可导，且满足$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{y(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e$，求$y(0),y'(0),y''(0)$.

7、设可微函数$y=y(x)$满足方程$x^3+y^3+3xy=1$,求$dy|_{x=1}$.

8、求不定积分$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$.

9、已知反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，试求反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{(\sin x)^2}{x^2}dx$.

10、求参数曲线γ: $\begin{cases} x = t - \sin t, & t \in [0,1]; \\ y = 1 - \cos t, & t \in [0,1]. \end{cases}$ 的弧长.

11、设$\{a_n\}$是一个实数列,a是一个实数,(1)试用$\varepsilon - N$语言描述$\{a_n\}$收敛于a;(2)试用$\varepsilon - N$语言描述$\{a_n\}$不收敛于a.

12、设f在开区间$(0,1)$上有定义,且满足对于$(0,1)$中的任意三点$x_1 < x_2 < x_3$成立不等式

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

现任取$(0,1)$中一点x_0，试证明f在点x_0处右连续.

13、设f在$[0,+\infty)$上具有连续的导函数，且严格单调增加,$f(0)=0$,又设$a>0,b>0$为两个实常数,试证明下述不等式成立:$\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b f^{-1}(y)\,dy\geq ab$.

14、对$\forall n\in\mathbb{Z}^+$，设$a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{n\sqrt{n+\frac{1}{i}}}$，试证明:$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\frac{2}{3}$.

2018-2019 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

1、【解析】首先$e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.又因为$b_n=a_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$.所以

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=e$. 由于$\{a_n\}\nearrow$,$\{b_n\}\searrow$,则有$\forall n\in\mathbb{N}^{+}$, s.t. $a_n<e<b_n$成立.两边取对数,则有

$\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}<\ln e<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$($\because y=\ln x\nearrow$),即$n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<1<(n+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

从而$\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$,□.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 第二部分 2.1 极限的定义和性质

2、【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+2x)^{x}-3^{x}}{\arcsin(x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln 3}\left(e^{x\ln\left(1+\frac{2x}{3}\right)}-1\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln\left(1+\dfrac{2x}{3}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2x^2}{3}}{x^2}=\dfrac{2}{3}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 第二部分 2.3 极限的计算

3、【解析】$f(x)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)^{n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{-1}{2}\right)^{n}x^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}$.所以有如下:

$\left(\dfrac{-1}{2}\right)^{n}x^{2n}=\dfrac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n}\therefore f^{(2n)}(0)=(2n)!\left(\dfrac{-1}{2}\right)^{n}$,$f^{(2n+1)}(0)=0$. 即$f^{(2019)}(0)=0$.

【考点延伸】《考试宝典》专题三 第三部分 3.4 泰勒中值定理

4、【解析】易知$B_0=f(0)=1$,$B_1=f'(0)$,$B_2=f''(0)$. 而

$$B_1=f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(e^x-1)}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

故$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{(1-x)e^{x}-1}{(e^{x}-1)^{2}}, & x\neq 0\\ -\dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$,故而有如下:

$$B_2=f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1-x)e^{x}-1}{(e^{x}-1)^{2}}+\frac{1}{2}}{x}=\frac{1}{6}.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 第二部分 2.3 极限的计算

5、【解析】不妨对$f(x)$取对数,则有$g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$,$x>0$. 即求$g(x)$的最大值.令$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$,

则有$x=e$. 且$g''(e)<0$.又因为$x=e$是唯一驻点.所以$\max\limits_{x>0} g(x)=g(e)=\dfrac{1}{e}$,$\max\limits_{x>0} f(x)=f(e)=e^{\frac{1}{e}}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题三 第一部分 1.2 最值

6、【解析】

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{y(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{x^2}\right\}\therefore \lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{x^2}=1=\lim_{x\to 0}\frac{y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}$$

所以有$y(0)=y'(0)=0$,$y''(0)=2$.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 【重要题型】题型 5: 求极限表达式中的未知参数

7、【解析】$x^3+y^3+3xy=1\Rightarrow 3x^2+3y^2y'+3y+3xy'=0\because y(1)=0\therefore y'(1)=-1$. 故有如下:

$$\mathrm{d}y|_{x=1}=-\mathrm{d}x.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 第三部分 3.2 隐函数求导

8、【解析】$\displaystyle\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{-1}{1+x^2}\right)=\frac{-\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$,其中$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$

$\displaystyle=\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\ln\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}+C$. 所以原式即为如下:

$$\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{-\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题四 第三部分 分部积分法

9、【解析】$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\sin x)^2}{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}(\sin x)^2\mathrm{d}\left(\frac{-1}{x}\right)=\frac{-(\sin x)^2}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x$,其中有如下:

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$. 所以原式$\displaystyle=\int_0^{+\infty}\frac{(\sin x)^2}{x^2}\mathrm{d}x=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题五 【重要题型】题型 5：反常积分计算

10、【解析】根据曲线弧长公式可知有如下:

$$\begin{aligned}L&=\int_0^1\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=8\sin^2\left(\frac{1}{4}\right).\end{aligned}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题五 第四部分 4.3 弧长

11、【解析】(1)显然:$a_n\to a(as\ n\to\infty)\Leftrightarrow\forall\epsilon>0,\exists N=N(\epsilon)>0,\forall n\geq N,\ \text{s.t.}\ |a_n-a|\leq\epsilon$.

(2)运用命题的否定(口诀:改量词,否结论)可知:

$$a_n \not\to a(as\ n\to\infty) \Leftrightarrow \exists\,\epsilon_0>0,\forall N>0,\ \exists\, n_0\geq N,\ \text{s.t.}\ |a_{n_0}-a|\geq\epsilon_0.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 第二部分 2.1 极限的定义和性质

12、【解析】由数分中的**凸函数等价定义**和不等式 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\leq\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

可知：$f(x)$ 为 $(0,1)$ 上的凸函数. 令 $h_1:=x_2-x_1,h_2:=x_3-x_1$，于是 $h_1<h_2$. 如下定义新的函数

$F(h):=\dfrac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$，根据题中不等式可知：$F(h_1)\leq F(h_2)$. 由此可知 $F(h)$ 是单调递增函数.

又根据题中不等式可知：$F(h)$ 存在上界，**i.e.** $\lim\limits_{a\to1^-}F(a-x_1)$.

因此根据单调有界定理可知：极限 $\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$ 存在.即 $f(x)$ 的右导数存在，

从而 $\lim\limits_{h\to0^+}(f(x_1+h)-f(x_1))=0$，即 $\lim\limits_{h\to0^+}f(x_1+h)=f(x_1)$，

由 x_1 的任意性可知，f 在 $(0,1)$ 内右连续. 故对 $\forall x_0\in(0,1)$，f 在 x_0 处右连续.

所以 $\forall x_0\in(0,1)$，$f(x)$ 在点 x_0 处右连续(显然易见).

【考点延伸】《考试宝典》专题三 第一部分 1.3 凹凸性

13、【解析】根据反函数存在定理以及题中条件可知；$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在反函数 f^{-1}，且

$f^{-1}(0)=0$. 根据换元公式可知不等式左边为如下：

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{f^{-1}(b)}x\,\mathrm{d}f(x)=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+xf(x)\Big|_0^{f^{-1}(b)}-\int_0^{f^{-1}(b)}f(x)\mathrm{d}x=bf^{-1}(b)+\int_{f^{-1}(b)}^a f(x)\mathrm{d}x.$$

若 $a=f^{-1}(b)$，**i.e.** $b=f(a)$. 此时不等式等号成立；

若 $a<f^{-1}(b)\because f(x)\nearrow\therefore\forall x\in[a,f^{-1}(b)]$, s.t. $f(x)<f(f^{-1}(b))=b$. 从而有不等式左边 $>bf^{-1}(b)-[f^{-1}(b)-a]b=ab$，此时不等式成立；

若 $a>f^{-1}(b)\because f(x)\nearrow\therefore\forall x\in[f^{-1}(b),a]$, s.t. $f(x)>f(f^{-1}(b))=b$. 从而有不等式左边 $>bf^{-1}(b)+[a-f^{-1}(b)]b=ab$，此时不等式成立.

综上所述.证毕，□.

【考点延伸】《考试宝典》专题四 第三部分 分部积分法

14、【解析】易知: $\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{i}{n}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\leq\frac{\sqrt{i}}{n\sqrt{n+\frac{1}{i}}}=\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{i}{n}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{in}}}\leq\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{i}{n}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$

所以有: $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{i}{n}}\leq a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{n\sqrt{n+\frac{1}{i}}}\leq\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{i}{n}}$.

然而有如下:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{i}{n}}=1\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{i}{n}}=1\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

故根据夹逼准则可知: $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{n\sqrt{n+\frac{1}{i}}}=\frac{2}{3}$,□.

【考点延伸】《考试宝典》专题五 第一部分 1.1 定积分的定义