微积分甲/乙 2016-2017 学年第一学期期中考试 A 卷

一、函数极限与连续（每题 6 分，共 36 分）

1.求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x}$.

2.求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\left(1-\cos\sqrt{x}\right)}$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)$.

4.试确定常数 k,c,使得当 x→+∞时，$\arcsin\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x}}-x\right)\sim\dfrac{c}{x^k}$.

5.求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型。

6.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\ldots+a_m^n}$，其中 a_1，a_2，…，a_m 均为正常数。

二、导数（每题 6 分，共 48 分）

1.设 $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$，求 y'.

2.设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x^2}, x\neq 0,\\ 0, x=0.\end{cases}$ 讨论 $f'(x)$ 的连续性.

3.设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\ldots+a_n\sin nx$,其中 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 均为实数，又 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$,证明 $|a_1+2a_2+\ldots+na_n|\leqslant 1$.

4.设 $y=f(x+y)$,其中 f 具有二阶导数，且其一阶导数不等于 1.求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

5.设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ 2y-ty^2+e^t=5\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

6.设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$,则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为何值.

7.设 $y=x^{x^x}$,求 y'.

8.例设 $x=g(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，试由 $f'(x),f''(x),f'''(x)$ 计算 $g''(y),g'''(y)$.

三、证明题（每题 8 分，共 16 分）

1.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微, $\forall x\in[0,1], 0<f(x)<1$ 且 $f'(x)\neq 1$, 证明在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x,使 $f(x)=x$.

2.叙述拉格朗日定理，并证明拉格朗日定理.

2016-2017 学年第一学期期中考试 A 卷参考答案

一、函数极限与连续（每题 6 分，共 36 分）

1.【解析】原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{e^x}\cos x}{1+\frac{1}{e^x}\sin x}=\dfrac{1+0}{1+0}=1.$

【考点延伸】《考试宝典》专题一【知识清单】2.3 极限的计算

2.【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\left(1-\cos\sqrt{x}\right)}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{x\left(1-\cos\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}$,

$$\text{由}x\to0\text{时，}1+\sqrt{\cos x}\sim2,1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^2=\frac{x}{2},1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\text{得}\frac{\frac{x^2}{2}}{x\cdot\frac{x}{2}\cdot2}=\frac{1}{2}.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题一【知识清单】2.3 极限的计算

3.【解析】原式$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100}{-\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}-1}=\dfrac{100}{-2}=-50$

【考点延伸】《考试宝典》专题一【知识清单】2.3 极限的计算

4.【解析】由题意知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arcsin\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x}}-x\right)}{\frac{c}{x^k}}=1.$

$$\text{由于}\arcsin\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x}}-x\right)=\arcsin\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x}}+x}\sim\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x}}+x}$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}+1}\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\ (x\to+\infty).$$

$$\text{所以}\lim_{x\to+\infty}\frac{\arcsin\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x}}-x\right)}{\frac{c}{x^k}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}{\frac{c}{x^k}}=\frac{1}{2c}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{x^{\frac{1}{2}}}=1,$$

必有$k=\dfrac{1}{2}$,此时，$\dfrac{1}{2c}=1$，因此$c=\dfrac{1}{2},k=\dfrac{1}{2}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题一【知识清单】2.2 无穷小的定义和性质

5.【解析】$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left\{\left[1+\dfrac{\sin t}{\sin x}-1\right]^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}}\right\}^{\frac{x}{\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}}$,

由于$f(x)$在 x=kπ 处没有定义，而在 kπ 两侧有定义，故 x=kπ 是间断点。

又$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e$,所以 x=0 是函数$f(x)$的第一类（可去）间断点。

注意到$f(x)=f(-x)$，所以只考虑$x>0$的间断点

对任意的$k\in\{2,4,6,\ldots\ldots\}$，$\lim\limits_{x\to k\pi^+}f(x)=\lim\limits_{x\to k\pi^+}e^{\frac{x}{\sin x}}=+\infty$　　$\lim\limits_{x\to k\pi^-}f(x)=\lim\limits_{x\to k\pi^-}e^{\frac{x}{\sin x}}=0$

对任意的$k\in\{1,3,5\ldots\ldots\}$，$\lim\limits_{x\to k\pi^+}f(x)=\lim\limits_{x\to k\pi^+}e^{\frac{x}{\sin x}}=0$　　$\lim\limits_{x\to k\pi^-}f(x)=\lim\limits_{x\to k\pi^-}e^{\frac{x}{\sin x}}=+\infty$

所以对任意的$k\in\{1,2,3,4\ldots\ldots\}$，$x=k\pi$都是第二类间断点，再结合偶函数的性质，知：x=kπ($k=\pm1,\pm2,\ldots$)是$f(x)$的第二类(无穷)间断点。

【考点延伸】《考试宝典》专题一【重要题型】题型 4：判断函数连续性和间断点

6.【解析】记$a=\max\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$，$a\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\dots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{m\cdot a^n}=a\sqrt[n]{m}$，

且$\lim\limits_{x\to\infty}a=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}a\sqrt[n]{m}=a$, 由夹逼定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_1^n+a_2^n+\dots+a_m^n}=a=\max\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题一【知识清单】2.3 极限的计算

二、导数（每题 6 分，共 48 分）

1.【解析】$y=\frac{1}{4}[\ln(x^2-1)-\ln(x^2+1)]$,

$$y'=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{x^2-1}\cdot(x^2-1)'-\frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)'\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{x^2-1}\cdot(x^2)'-\frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2)'\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x-\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x\right]=\frac{x}{x^4-1}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二【知识清单】3.1 显函数求导

2.【解析】由$x\neq 0$时，$f'(x)=\arctan\frac{1}{x^2}+x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^4}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)=\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}$,

$$x=0\text{时，}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\arctan\frac{1}{x^2}}{x}=\frac{\pi}{2}=f'(0),\text{知}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4},x\neq 0\\ \frac{\pi}{2},x=0\end{cases}$$

当$x\neq 0$时，$f'(x)$显然连续，当$x=0$时，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}\right)=\frac{\pi}{2}=f'(0)$.

知$f'(x)$在$x=0$处连续，故$f'(x)$在R上连续.

【考点延伸】《考试宝典》专题二【知识清单】3.4 分段函数求导

3.【解析】证法一 由

$f'(x)=a_1\cos x+2a_2\cos 2x+\dots+na_n\cos nx$,得$f'(0)=a_1+2a_2+\dots+na_n$.

$$\text{而}|f'(0)|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=1$$

故$|a_1+2a_2+\dots+na_n|\leqslant 1$.

证法二 由条件

$|f(x)|\leqslant|\sin x|$,有$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant 1(x\neq 0)$,得$\left|a_1\frac{\sin x}{x}+a_2\frac{\sin 2x}{x}+\dots+a_n\frac{\sin nx}{x}\right|\leqslant 1$.

当$x\to 0$时，上式两边取极限，得$|a_1+2a_2+\dots+na_n|\leqslant 1$

【考点延伸】《考试宝典》专题二【知识清单】3.1 显函数求导

4.【解析】由题意知$y=y(x)$，等式两边同时对 x 求导数得

$$y'=f'(x+y)(1+y')\Rightarrow y'=\frac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}$$

$$y''=\frac{f''(x+y)(1+y')(1-f'(x+y))+f'(x+y)f''(x+y)(1+y')}{[1-f'(x+y)]^2}$$

$$=\frac{f''(x+y)(1+y')}{[1-f'(x+y)]^2}=\frac{f''(x+y)\left[1+\frac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}\right]}{[1-f'(x+y)]^2}=\frac{f''(x+y)}{[1-f'(x+y)]^3}.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二【知识清单】3.2 隐函数求导

5.【解析】$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+t^2}$,方程$2y-ty^2+e^t=5$确定$y=y(t)$,方程两边同时对$t$求导，得

$$2\frac{dy}{dt}-y^2-2ty\cdot\frac{dy}{dt}+e^t=0,\text{解得}\frac{dy}{dt}=\frac{y^2-e^t}{2-2ty},$$

$$\text{因而}\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-e^t}{2(1-ty)}\Big/\frac{1}{1+t^2}=\frac{(1+t^2)(y^2-e^t)}{2(1-ty)}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二【知识清单】3.3 参数方程求导

6.【解析】由

$$f(x)=\begin{cases}4x^3,x\geqslant 0,\\2x^3,x<0,\end{cases}f''(x)=\begin{cases}24x,x>0,\\12x,x<0.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-}f''(x)=\lim_{x\to 0^-}12x=0=f''_-(0),\lim_{x\to 0^+}f''(x)=\lim_{x\to 0^+}24x=0=f''_+(0),\text{知}f''(0)=0.$$

$$f'''(x)=\begin{cases}24,x>0,\\12,x<0,\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-}f'''(x)=\lim_{x\to 0^-}12=12=f'''_-(0),\lim_{x\to 0^+}f'''(x)=\lim_{x\to 0^+}24=24=f'''_+(0),\text{知}f'''(0)\text{不存在},$$

$$\text{故使}f^{(n)}(0)\text{存在的最高阶数}n=2.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二【知识清单】3.4 分段函数求导

7.【解析】$\ln y=\ln x^{x^x}=x^x\ln x\Rightarrow\ln\ln y=\ln x^x+\ln\ln x=x\ln x+\ln\ln x$,

$$\text{方程两边同时对}x\text{求导得}\ \frac{1}{\ln y}\cdot\frac{1}{y}\cdot y'=\ln x+1+\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}.$$

$$\text{故}y'=\frac{1+x\ln x+x\ln^2x}{x\ln x}y\ln y=\left(\frac{1+x\ln x+x\ln^2x}{x\ln x}\right)x^{x^x+x}\cdot\ln x=(1+x\ln x+x\ln^2x)x^{x^x+x-1}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二【知识清单】3.1 显函数求导

8.【解析】$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$且$x=g(y)$,因此$g''(y)$看成是通过中间变量 x 是 y 的复合函数，于是

$$g''(y)=\frac{-f''(x)}{[f'(x)]^2}\cdot\frac{dx}{dy}=\frac{-f''(x)}{[f'(x)]^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3},$$

$$g'''(y)=-\frac{f'''(x)[f'(x)]^3-3[f'(x)]^2f''(x)f''(x)}{[f'(x)]^6}\cdot\frac{1}{f'(x)}$$

$$=\frac{3[f''(x)]^2-f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二【知识清单】2.3 反函数求导法则

三、证明题（每题 8 分，共 16 分）

1. 【解析】令

$F(x)=f(x)-x$,由$F(x)$在$[0,1]$上连续，$F(0)=f(0)-0=f(0)>0$,

$F(1)=f(1)-1<0$,知$F(0)F(1)<0$,由根的存在定理知，至少存在一点

$\xi\in(0,1)$,使得$f(\xi)=\xi$，下面证唯一性。

假设存在$x_1,x_2\in(0,1)$,且$x_1<x_2$,$f(x_1)=x_1$,$f(x_2)=x_2$,知$F(x_1)=F(x_2)=0$,对$F(x)$

在$[x_1,x_2]$上应用罗尔定理知，至少存在一点$\xi_1\in(0,1)$,使得$F'(\xi)=0$

由$F'(x)=f'(x)-1$,得$f'(\xi_1)-1=0$,即$f'(\xi_1)=1$与$x\in[0,1]$,$f'(x)\neq1$相矛盾，

故在$(0,1)$内有且仅有一个x,使$f(x)=x$.

【考点延伸】《考试宝典》专题三【知识清单】3.1 罗尔定理

2. 【解析】拉格朗日定理：设$f(x)$在$[a,b]$上连续,(a,b)上可导,则存在$\xi\in(a,b)$,使得

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(b-a)\text{或}f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

令$F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$,因为函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导，

所以$F(x)$在$[a,b]$上连续，在（a,b）内可导，

又$F(a)=f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}a=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$,

$F(b)=f(b)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}b=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$,则$F(a)=F(b)$,从而对$F(x)$应用罗尔定理，

则存在$\xi\in(a,b)$,使得$F'(\xi)=0$,即$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$,得证

【考点延伸】《考试宝典》专题三【知识清单】3.2 拉格朗日中值定理