2016-2017 学年第一学期期末考试 A 卷

一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1、设 $f(x)=x^2e^x$，则 $f^{(10)}(0)=$__________.

2、$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=$__________.

3、设 $\begin{cases}x=\cos 2t\\ y=(1-\cos t)^2\end{cases}$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$__________.

4、$f(x)=\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$，$x\in(-\infty,+\infty)$，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点（变凹点）是__________.

5、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=$__________.

6、设 $f(x)$ 为连续函数且 $f(x+2)-f(x)=x$，$\int_0^2 f(x)dx=1$，则 $\int_1^3 f(x)dx=$__________.

二、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x)^{\frac{1}{x}}-1}{x}$.

2、求不定积分 $\int\frac{x^5}{\sqrt[4]{x^3+1}}dx$.

3、求广义积分$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{4}}$.

4、已知函数$y=y(x)$由方程$xe^{x}-y+\frac{1}{2}\sin y=0$确定，求$y'|_{x=0}$和$y''|_{x=0}$的值.

5、求曲线$y=e^{x}$，$0\leqslant x\leqslant\ln\sqrt{3}$的弧长.

三、已知函数$f(x)=ax^2+bx$满足$f(x)\geqslant 0$，$x\in[0,1]$.设平面有界区域D由$y=f(x)$与直线$x=1$及x轴围成.

（1）求D绕x轴旋转所成旋转体的体积V_0；

（2）当D的面积等于$\frac{1}{3}$时，求a,b的值使得体积V_0取到最小值.

四、求函数$F(t)=\int_0^{\pi}|\sin x-t|dx$的最小值.

五、按定义证明$\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$.

六、证明对，$\forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\tan x > x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{x^7}{63}$.

2016-2017 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题

1、**【正解】** 90

【解析】$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$,故可得

$$f(x)=x^2e^x=x^2+x^3+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^5}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-2)!}+\frac{x^{n+1}}{(n-1)!}+\frac{x^{n+2}}{n!}+\cdots$$

而$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)x}{1!}+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+\cdots$

可得$\frac{x^{10}}{8!}=\frac{f^{(10)}(0)x^{10}}{10!}$,故$f^{(10)}(0)=90$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.5——求高阶导数.

2、**【正解】** 2

【解析】$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}dx$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)dx=2\left(-\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\sin x}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$

【考点延伸】《考试宝典》专题五 1.3——定积分的特殊性质.

3、**【正解】** $\frac{1}{8\cos^3 t}$

【解析】$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{2(1-\cos t)\cdot\sin t}{-2\sin 2t}=\frac{(\cos t-1)\sin t}{2\sin t\cos t}=\frac{\cos t-1}{2\cos t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{-\sin t(2\cos t)+2\sin t(\cos t-1)}{4\cos^2 t}\cdot\frac{1}{-4\sin t\cos t}=\frac{1}{8\cos^3 t}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.3——参数方程求导.

4、**【正解】** $(0,0)$

【解析】$f(x)=\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$， $f'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$,$f''(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$,由于$e^{-\frac{x^2}{2}}>0$,故点$(0,0)$为拐点

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.1——显函数求导.

5、**【正解】** $\ln 2$

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}+\dfrac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\dfrac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算.

6、**【正解】** $\dfrac{3}{2}$

【解析】$\displaystyle\int_1^3 f(x)dx\underline{\underline{t=x-2}}\int_{-1}^1 f(t+2)dt=\int_{-1}^1 f(t)+t\,dt=\int_{-1}^1 f(t)dt$

$$\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_{-1}^0 f(t)dt$$

而$\displaystyle\int_{-1}^0 f(t)dt=\int_{-1}^0 f(t+2)-t\,dt=\int_{-1}^0 f(t+2)dt+\frac{1}{2}=\int_1^2 f(t)dt+\frac{1}{2}$

故原式$\displaystyle=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 f(t)dt+\frac{1}{2}=\int_0^2 f(t)dt+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题四 2.1——第一类换元积分法.

二、计算题

1、**【解析】** 原式$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(1+\cos x-1)^{\frac{1}{x}}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{\cos x-1}{x}}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos x-1}{x}}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-(1-\cos x)}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

2、**【解析】** 原式$\displaystyle=\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt[4]{x^3+1}}dx^3\overset{x^3=t}{=}\frac{1}{3}\int\frac{t+1-1}{\sqrt[4]{t+1}}dt=\frac{1}{3}\int(t+1)^{\frac{3}{4}}dt-\frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt[4]{t+1}}dt$

$$=\frac{4}{21}(t+1)^{\frac{7}{4}}-\frac{4}{9}(t+1)^{\frac{3}{4}}+C=\frac{4}{21}(x^3+1)^{\frac{7}{4}}-\frac{4}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{4}}+C$$

【考点延伸】《考试宝典》专题四 2.2——第二类换元积分法

3、**【解析】**

原式$\displaystyle=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2-2x^2}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}dx$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\int_0^{+\infty}\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{2}-x}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\left[\int_0^{+\infty}\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\int_0^{+\infty}\frac{-(2x-\sqrt{2})}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+2\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)+2\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)\right]\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}(2\pi-0)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

【考点延伸】《考试宝典》专题五 2.3——定积分的积分法则

4、【解析】$e^x+xe^x-\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}\cos y\frac{dy}{dx}=0$，$x=0$时，$y=0$

$y'|_{x=0}=2$，$e^x+(x+1)e^x-y''+\frac{1}{2}(-\sin y)(y')^2+\frac{1}{2}\cos y y''=0$

$y''|_{x=0}=4$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.2——隐函数求导

5、【解析】$\int_0^{\ln\sqrt{3}}\sqrt{1+e^{2x}}dx\overset{1+e^{2x}=t^2}{=}\int_{\sqrt{2}}^{2}t\cdot\frac{t}{t^2-1}dt=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt$

$$=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}=2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{3}-\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

【考点延伸】《考试宝典》专题四 2.2——第二类换元积分法

三、【解析】（1）$V_0=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2dx$

$$=\pi\int_0^1(a^2x^4+2abx^3+b^2x^2)dx$$

$$=\pi\left(\frac{a^2}{5}x^5+\frac{ab}{2}x^4+\frac{b^2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{3}\right)$$

（2）$S_0=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(ax^2+bx)dx=\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}$

$2a+3b=2$，$b=\frac{1}{3}(2-2a)$

$$V_0=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-a)+\frac{4}{27}(1-a)^2\right)$$

$$=\frac{\pi}{135}(2a^2+5a+20)$$

故 $a=-\frac{5}{4},b=\frac{3}{2},V_0$ 取得最小值

【考点延伸】《考试宝典》专题五 4.1——面积

四、【解析】$F(t)=\int_0^{\pi}|\sin x-t|dx$

当 $t\leqslant 0$ 时

$$F(t)=\int_0^{\pi}\sin x-t\,dx=2-\pi t\ ，\ F(t)_{\min}=2$$

$0<t<1$ 时

$$F(t)=2\left[\int_0^{\arcsin t}(t-\sin x)dx+\int_{\arcsin t}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-t)dx\right]$$

$$F(t)=2\left(t\int_0^{\arcsin t}dx-\int_0^{\arcsin t}\sin x dx+\int_{\arcsin t}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx-t\int_{\arcsin t}^{\frac{\pi}{2}}dx\right),$$

$$\text{故}F'(t)=2\left(\int_0^{\arcsin t}dx+\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}-\int_{\arcsin t}^{\frac{\pi}{2}}dx+\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

$$=4\arcsin t-\pi$$

故当 $0<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 $F'(t)<0$，$F(t)$ 递减，当 $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant t<1$ 时 $F'(t)>0$，$F(t)$ 递增

故 $0<t<1$ 时

$$F(t)_{\min}=F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x\right)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dx\right]=2\sqrt{2}-2$$

$t\geqslant 1$ 时

$$F(t)=\int_0^{\pi}t-\sin t\,dt=t\pi-2$$

$$F(t)_{\min}=\pi-2$$

因此函数 $F(t)=\int_0^{\pi}|\sin x-t|dx$ 的最小值为 $2\sqrt{2}-2$

【考点延伸】《考试宝典》专题四 2.3——定积分的积分法则

五、【解析】限 $|x-1|<1$

则 $|x+1|<2+|x-1|<3$

对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\mu=\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{3}\right)>0$

当 $|x-1|<\mu$，有

$|x^2-1|=|x-1||x+1|<3|x-1|\leqslant\varepsilon$

根据极限定义，任意 $\lim\limits_{x\to1}x^2=1$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.1——极限的定义和性质

六、【解析】首先证明 $\tan x>x+\dfrac{x^3}{3}$

令 $f(x)=\tan x-x-\dfrac{x^3}{3}, f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1-x^2=\tan^2 x-x^2>0$

故 $f(x)>f(0)=0\Rightarrow\tan x>x+\dfrac{x^3}{3}$

$g(x)=\tan x-x-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2x^5}{15}-\dfrac{x^7}{63}$

$g'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1-x^2-\dfrac{2x^4}{3}-\dfrac{x^6}{9}=\tan^2 x-x^2-\dfrac{2x^4}{3}-\dfrac{x^6}{9}$

从而 $g'(x)>\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)^2-x^2-\dfrac{2x^4}{3}-\dfrac{x^6}{9}=0$

因此 $g(x)>g(0)=0$

故得证 $\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$， $\tan x>x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+\dfrac{x^7}{63}$

【考点延伸】《考试宝典》专题三 3.1——极值