线性代数重要公式定理

更新与勘误：

version 1.0　2020年12月17日，第一版发布

一、行列式

低阶行列式：

- 二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- 三阶行列式：对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

性质：

- 行列式展开定理：

  - 代数余子式：a_{ij}的代数余子式是原行列式划掉第i行和第j列后的余子式乘以$(-1)^{i+j}$，即$A_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}$
  - 按行展开：

$$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=\begin{cases}D & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

- 按列展开：

$$a_{1j}A_{1i}+a_{2j}A_{2i}+\cdots+a_{nj}A_{ni}=\begin{cases}D & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

- 行列式变换：
  - 行列式转置后，其值不变
  - 互换两行或两列要变号
  - 某一行或某一列中的公因子可以提到行列式外
  - 某一行或某一列乘以常数k加到另一行或另一列，行列式值不变
    - 若某两行或某两列对应成比例，则行列式为零
    - 若有一个零行或零列，行列式值为零
  - 若行列式某行或某列是两个元素的和，则行列式可以拆分为两个行列式的和

重要行列式：

- 对角行列式：
  - 主对角线：

$$\begin{vmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n$$

- 斜对角线：

$$\begin{vmatrix} & & a_1\\ & a_2 & \\ \cdots & & \\ a_n & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$$

- 三角行列式：
  - 上三角行列式：

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

  - 下三角行列式：

$$\begin{vmatrix}a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

  - 上斜三角行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$$

- 下斜三角行列式：

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$$

- 累加行列式：所有行或列加到第一行或列，第一行化为1，再消去其余行列，转化为三角或对角行列式

$$\begin{vmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

- 范德蒙行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

二、矩阵

1、矩阵运算

矩阵分类：

- 方阵：行数等于列数的矩阵
  - 主对角线：所有$i=j$的元素
  - 斜对角线：所有$i+j=n+1$的元素
  - 三角矩阵：
    - 上三角阵：主对角线及其以上元素非零，其余元素都是零的矩阵
    - 下三角阵：主对角线及其以下元素非零，其余元素都是零的矩阵
  - 对角矩阵：只有对角线元素不为零，其余均为零的矩阵
    - 单位矩阵：主对角线元素都是1的对角矩阵
    - 数量矩阵：主对角线元素都是非零的k的对角矩阵
- 零矩阵：所有元素都是零的矩阵，记为$\mathbf{O}$
- 梯形阵：
  - 上梯形阵：非零行全在零行之上，非零行中第一个非零元素前的零随着行数增大而增多
  - 下梯形阵：非零行全在零行之下，非零行最后一个非零元素后的零随着行数增大而减少
  - 行最简型：非零行第一个元素都是1，且这个非零元所在的列其他元素都是零的上梯形阵称为行最简型

矩阵运算：

- 相等：若两矩阵行数、列数相等，且对应元素相等，则两矩阵相等
- 线性运算：
  - 加减：矩阵加减等于对应元素加减
    - 交换律：$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$
    - 结合律：$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$
    - 任何矩阵与零矩阵加减，都等于矩阵本身
  - 数乘：常数与矩阵的乘积等于矩阵每个元素乘以该常数
    - 结合律：$k(l\mathbf{A})=(kl)\mathbf{A}=l(k\mathbf{A})$
    - 分配律：
      - $k(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k\mathbf{A}+k\mathbf{B}$
      - $(k+l)\mathbf{A}=k\mathbf{A}+l\mathbf{A}$
- 乘法：
  - 条件：$\mathbf{A}$的列数等于$\mathbf{B}$的行数
  - 公式：$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$等于$\mathbf{A}$的每行乘以$\mathbf{B}$的每列并相加，即$c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$
  - 性质：
    - 不符合交换律、消去律
    - 存在非零的零因子
    - 结合律：
      - $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{ABC}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$
      - $k(\mathbf{AB})=(k\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(k\mathbf{B})$
    - 分配率：
      - $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$
      - $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$
    - 任何矩阵与单位阵的乘积等于矩阵本身
- 幂：
  - 条件：矩阵必须是方阵
  - 性质：
    - $\mathbf{A}^0=\mathbf{E}$
    - $\mathbf{E}^n=\mathbf{E}$
    - $\mathbf{A}^{k+l}=\mathbf{A}^k\mathbf{A}^l$
  - 对角矩阵的k次幂等于对角线上各元素的k次幂
- 转置：
  - 含义：把矩阵的行转化为列，把列转化为行
  - 性质：
    - 对角阵$\mathbf{\Lambda}^T=\mathbf{\Lambda}$
    - $(\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A}$
    - $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$
    - $(k\mathbf{A})^T=k\mathbf{A}^T$
    - $(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
  - 对称矩阵：
    - 含义：若矩阵满足$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$，则称之为对称矩阵
    - 性质：

            - 对称矩阵必为方阵
            - 若矩阵对称，则有$a_{ij} = a_{ji}, i \neq j$
    - 反对称阵：
        - 含义：若矩阵满足$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$，则称之为反对称矩阵
        - 性质：
            - 反对称矩阵也是方阵
            - 反对称矩阵主对角线元素是零，且$a_{ij} = -a_{ji}, i \neq j$
            - 任何一个方阵都可以表示为一个对称阵和一个反对称阵的和，$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T}{2} + \frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^T}{2}$
- 行列式：
    - 奇异矩阵：若矩阵的行列式为零，称矩阵是奇异矩阵，否则称之为非奇异矩阵
    - 性质：
        - $|k\mathbf{A}| = k^n|\mathbf{A}|$
        - $|\mathbf{A}\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \times |\mathbf{B}|$
        - $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$

伴随矩阵：

- 含义：方阵的伴随矩阵是方阵的代数余子式A_{ij}按列排列得到的矩阵，即：

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

- 性质：
    - 二阶方阵伴随矩阵是主对角线元素交换，斜对角线元素乘-1，即：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

    - $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$
    - $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$
    - 伴随矩阵的秩为：

$$r(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n & r(\mathbf{A}) = n \\ 1 & r(\mathbf{A}) = n-1 \\ 0 & r(\mathbf{A}) < n-1 \end{cases}$$

2、初等变换

初等变换：以下三种变换称为矩阵的初等变化

- 交换：交换矩阵i、j两行或两列，记为r_{ij}或c_{ij}
- 倍乘：用非零常数k乘以矩阵第i行或列，记为kr_i或kc_i
- 倍加：把第i行或列乘以常数k后加到第j行或列，记为$r_j + kr_i$或$c_j + kc_i$

初等矩阵：

- 含义：对单位阵进行一次初等变换得到的矩阵
    - 交换：$\mathbf{E}(i, j)$
    - 倍乘：$\mathbf{E}(i(k))$

- 倍加：$\mathbf{E}(j,i(k))$

- 性质：
  - 初等矩阵的转置仍然是初等矩阵
  - 初等矩阵行列式都不为零
  - 初等矩阵都可逆
  - 对矩阵进行行变换等于左乘初等矩阵，列变换等于右乘初等矩阵

运算	$\mathbf{E}(i,j)$	$\mathbf{E}(i(k))$	$\mathbf{E}(i,j(k))$
转置	$\mathbf{E}(i,j)$	$\mathbf{E}(i(k))$	$\mathbf{E}(j,i(k))$
行列式	-1	k	1
逆矩阵	$\mathbf{E}(i,j)$	$\mathbf{E}(i(\frac{1}{k}))$	$\mathbf{E}(i,j(-k))$

等价：

- 含义：若矩阵$\mathbf{A}$经过有限次初等变换得到矩阵$\mathbf{B}$，则两矩阵等价
- 条件：两矩阵等价的充要条件是存在满秩矩阵$\mathbf{P}$和$\mathbf{Q}$使$\mathbf{B}=\mathbf{PAQ}$或$r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B})$，等价必等秩，等秩必等价
- 性质：
  - 自反性：$\mathbf{A}\cong\mathbf{A}$
  - 对称性：若$\mathbf{A}\cong\mathbf{B}$，则$\mathbf{B}\cong\mathbf{A}$
  - 传递性：若$\mathbf{A}\cong\mathbf{B}$，$\mathbf{B}\cong\mathbf{C}$，则$\mathbf{A}\cong\mathbf{C}$
  - 任何矩阵都可以化为等价标准型即$\mathbf{A}\cong\mathbf{I}_r=\begin{pmatrix}\mathbf{E}_r & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{pmatrix}$

3、矩阵的秩

含义：

- 子式：矩阵任取k行k列，相交处的元素按照原有顺序组成的k阶行列式称为矩阵的k阶子式
- 秩：矩阵所有不为零的子式的最高阶数称为矩阵的秩

性质：

- 只有零矩阵的秩是0，非零矩阵秩大于等于1
- 若矩阵存在一个k阶子式不为零，则$r(\mathbf{A})\geqslant k$，若所有k阶子式均为零，则$r(\mathbf{A})<k$
- 梯形阵的秩等于非零行的个数
- $r(\mathbf{A}^T)=r(\mathbf{A})=r(\mathbf{AA}^T)=r(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$
- $r(k\mathbf{A})=r(\mathbf{A})$
- 若$r(\mathbf{A})<n$，则$|\mathbf{A}|=0$，若$r(\mathbf{A})=n$，则$|\mathbf{A}|\neq 0$
- 若$\mathbf{B}$满秩，则$r(\mathbf{AB})=r(\mathbf{A})$
- 秩的不等式：
  - $r(\mathbf{A}_{m\times n})\leqslant\min\{m,n\}$
  - $r(\mathbf{AB})\leqslant\min\{r(\mathbf{A}),r(\mathbf{B})\}$

- $r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leqslant r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$
- 若$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times s}=\mathbf{O}$，则$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B}) \leqslant n$

计算：

- 定义法：计算k阶子式的值，若k阶子式有一个非零，且$k+1$阶子式全部为零，则$r(\mathbf{A})=k$
- 初等变换法：初等变换不改变矩阵的秩
  - 把矩阵初等变换为梯形阵
  - 数梯形阵非零行个数

4、逆矩阵

含义：若存在n阶方阵$\mathbf{B}$使$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}$，称两矩阵互为逆矩阵，矩阵可逆

性质：

- 唯一性：可逆矩阵的逆矩阵有且只有一个
- 可逆的等价条件：下列所有命题都是等价的
  - $\mathbf{A}$可逆
  - 存在可逆矩阵$\mathbf{B}$使$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}$成立，则$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$互为逆矩阵
  - $r(\mathbf{A})=n$
  - $|\mathbf{A}| \neq 0$
  - $\mathbf{A} \cong \mathbf{E}$
  - $\mathbf{A}$可以表示为多个初等矩阵的乘积
  - 齐次方程组$\mathbf{A}\vec{x}=\vec{0}$有唯一零解
  - 非齐次方程组$\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}$有唯一非零解
  - $\mathbf{A}$的行向量或列向量线性无关
  - $\lambda=0$不是$\mathbf{A}$的特征值
- 若矩阵$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$可逆：
  - $|\mathbf{A}^{-1}|=\frac{1}{|\mathbf{A}|}$
  - $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{A}$
  - $(\mathbf{A}^{-1})^{T}=(\mathbf{A}^{T})^{-1}$
  - $(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
  - $(k\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}$
  - $(\mathbf{A}^{*})^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^{*}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}$

计算：

- 定义法：提取公因子，凑单位阵，找到矩阵$\mathbf{B}$满足$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}$
- 公式法：
  - $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^{*}$
  - 对于二阶矩阵，其逆矩阵为：

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- 初等变换法：若$\mathbf{A}$可逆，则$\mathbf{A}^{-1}$可逆并可以写为多个初等矩阵与单位阵的乘积为$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{P_1P_2\cdots P_nE}$，用相同的单位阵左乘$\mathbf{A}$得到$\mathbf{E}$，即可以对增广矩阵$(\mathbf{A}|\mathbf{E})$做行变换到$\mathbf{(E|A^{-1})}$即可得到逆矩阵

分块矩阵：

- 含义：把矩阵用若干纵横直线划分为多个小块，每个小块称为子矩阵，以子矩阵为元素构成的矩阵称为分块矩阵
- 运算：
  - 线性运算：同一般矩阵
  - 乘法：同一般矩阵乘法
  - 转置：大块小块一起转
- 特殊的分块矩阵：
  - 准对角阵：
    - 含义：主对角线元素是方阵，其余为零的方阵
    - 运算：

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_n\end{pmatrix}$$
$$(1)|\mathbf{A}|=|\mathbf{A_1}||\mathbf{A_2}|\cdots|\mathbf{A}|_n$$
$$(2)\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1^{-1} & & & \\ & \mathbf{A_2}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_n^{-1}\end{pmatrix}$$
$$(3)\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_n\mathbf{B}_n\end{pmatrix}$$
$$(4)r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}_1)+r(\mathbf{A}_2)+\cdots+r(\mathbf{A}_n)$$

  - 分块三角阵：
    - 分块上三角阵：主对角线及以上元素是非零矩阵，以下为零矩阵
    - 分块下三角阵：主对角线及以下元素是非零矩阵，以上为零矩阵
    - 性质：
      - $|\mathbf{A}|=|\mathbf{A}_{11}||\mathbf{A}_{22}|\cdots|\mathbf{A}_{nn}|$
      - $\mathbf{A}$可逆的充要条件是主对角线矩阵都可逆

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{O} & \mathbf{A_{22}}\end{pmatrix},\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{22}^{-1}\end{pmatrix}$$
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{O}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{pmatrix},\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{O}\\ -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{A}_{22}^{-1}\end{pmatrix}$$

  - 分块斜对角阵：
    - 含义：斜对角线元素是非零方阵，其余元素为零的方阵
    - 性质：

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{A}_1\\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{O}\end{pmatrix},\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{A}_2^{-1}\\ \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{O}\end{pmatrix}$$

5、矩阵方程

$\mathbf{AX}=\mathbf{B}$型：

- 逆矩阵法：求逆矩阵$\mathbf{A}^{-1}$，两边左乘逆矩阵得到$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$，计算$\mathbf{X}$
- 初等行变换法：令$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\cdots\mathbf{P}_m$，则对$\mathbf{A}$做行变换得到$\mathbf{E}$，对$\mathbf{B}$做相同行变换即可得到$\mathbf{X}$，对增广矩阵$(\mathbf{A}|\mathbf{B})$做行变换到$(\mathbf{E}|\mathbf{X})$可解

$\mathbf{XA}=\mathbf{B}$型：

- 逆矩阵法：求逆矩阵$\mathbf{A}^{-1}$，两边右乘逆矩阵得到$\mathbf{X}=\mathbf{BA}^{-1}$，计算$\mathbf{X}$
- 初等列变换法：对增广矩阵$\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}\right)$做列变换到$\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{X}}\right)$
- 初等行变换法：
  - 两边转置得$\mathbf{A}^T\mathbf{X}^T=\mathbf{B}^T$
  - 对增广矩阵$(\mathbf{A}^T|\mathbf{B}^T)$做行变换到$(\mathbf{E}|\mathbf{X}^T)$
  - 对$\mathbf{X}^T$转置得$\mathbf{X}$

$\mathbf{AXB}=\mathbf{C}$型：

- 逆矩阵法：求逆矩阵$\mathbf{A}^{-1}$和$\mathbf{B}^{-1}$，分别左乘、右乘，得到$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1}$
- 转化为初等行变换法：
  - 求逆矩阵$\mathbf{B}^{-1}$，右乘得到$\mathbf{AX}=\mathbf{CB}^{-1}$
  - 对增广矩阵$(\mathbf{A}|\mathbf{CB}^{-1})$做行变换到$(\mathbf{E}|\mathbf{X})$
- 转化为初等列变换法：
  - 求逆矩阵$\mathbf{A}^{-1}$，左乘得到$\mathbf{XB}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$
  - 对增广矩阵$\left(\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}}\right)$做列变换到$\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{X}}\right)$

其他形式：待定系数法

- 把矩阵每个元素设出来，解多个方程组
- 设行向量或列向量，解向量方程
- 设矩阵为分块矩阵，解每个子矩阵

三、向量

1、向量运算

相等：若两向量维数相等、每个分量都相等，则两向量相等

长度：向量长度为$||\vec{\alpha}||=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$

- 若向量长度为0，则向量是零向量

- 单位化：$\vec{\alpha}^0=\frac{\vec{\alpha}}{||\vec{\alpha}||}$

线性运算：

- 加减：对应分量相加减
  - 交换律：$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$
  - 结合律：$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$
- 数乘：每个分量乘以相同的非零常数
  - 分配率：
    - $(k+l)\vec{\alpha}=k\vec{\alpha}+l\vec{\alpha}$
    - $k(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=k\vec{\alpha}+k\vec{\beta}$
  - 结合律：$(kl)\vec{\alpha}=k(l\vec{\alpha})=l(k\vec{\alpha})$

线性组合：若存在一组常数使$\vec{\beta}=k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_n\vec{\alpha}_n$成立，称$\vec{\beta}$是向量$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$的线性组合

内积：

- 含义：向量$\vec{\alpha}=(a_1,\cdots,a_n)^T$，$\vec{\beta}=(b_1,\cdots,b_n)^T$，两向量内积为$(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\vec{\alpha}^T\vec{\beta}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$
- 性质：
  - 交换律：$(\vec{\alpha},\vec{\beta})=(\vec{\beta},\vec{\alpha})$
  - 分配率：$(\vec{\alpha}+\vec{\gamma},\vec{\beta})=(\vec{\alpha},\vec{\beta})+(\vec{\gamma},\vec{\beta})$
  - 数乘：$(\vec{\alpha},k\vec{\beta})=k(\vec{\alpha},\vec{\beta})$
  - 长度：$||\vec{\alpha}||^2=(\vec{\alpha},\vec{\alpha})$
- 夹角：$\cos\theta=\frac{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}{||\vec{\alpha}||\times||\vec{\beta}||}$

2、线性相关

含义：

- 线性相关：向量组$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$，若存在一组不全为零的常数$k$使得$k_1\vec{\alpha}_1+\cdots+k_n\vec{\alpha}_n=\vec{0}$成立，称该向量组线性相关
- 线性无关：若只存在常数$k_i=0$使得$k_1\vec{\alpha}_1+\cdots+k_n\vec{\alpha}_n=\vec{0}$成立，称向量组线性无关

性质：

- 一个向量：
  - 若$\vec{\alpha}=\vec{0}$，则自己与自己线性相关
  - 若$\vec{\alpha}\neq\vec{0}$，则自己与自己线性无关
- 两个向量：两向量$\vec{\alpha}=(a_1,\cdots,a_n)$与$\vec{\beta}=(b_1,\cdots,b_n)$线性相关的两个等价条件是：
  - $\vec{\alpha}=k\vec{\beta}$
  - 对应分量成比例：$\frac{a_1}{b_1}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=k$
- 若向量组含有零向量，则向量组线性相关

判定：

- 线性相关与线性组合关系定理：
    - 向量组线性相关的充要条件是一个向量可以由其他$n-1$个向量线性表示
    - 若$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$线性无关，$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n,\vec{\beta}$线性相关，则$\vec{\beta}$可以由$\vec{\alpha}_i$线性表示且表示法唯一
    - 部分向量线性相关，则整个向量组线性相关；整个向量组线性无关，则部分向量线性无关
- m个n维向量线性无关的充要条件是由$\vec{\alpha}$排成的矩阵的秩等于m，线性相关的充要条件是矩阵的秩小于m
    - 若$m>n$即向量个数多于维数，则向量组必线性相关
    - n个n维向量线性无关的充要条件是排成的矩阵满足$r(\mathbf{A})=n$或$|\mathbf{A}|\neq 0$，线性相关的充要条件是$r(\mathbf{A})<n$或$|\mathbf{A}|=0$
- 若m个n维向量线性无关，则增加k个分量后的m个$n+k$维向量组成的向量组也线性无关

3、向量组的秩

极大无关组：

- 含义：若向量组中的子集$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$满足以下条件，则称这部分向量是向量组的极大无关组
    - $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$线性无关
    - 原向量组中任何一个向量都可以由$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$线性表示
- 性质：
    - 若向量组线性无关，则极大无关组就是向量组本身
    - 向量组与其极大无关组等价
    - 一个向量组可以有多个极大无关组，且极大无关组之间是等价的
    - 若向量组$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$线性无关，并且可以被$\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_s$线性表示，则$r\leqslant s$
        - 若$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$可以被$\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_s$表示，且$r>s$，则$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$线性无关
        - 任何两个线性无关且等价的向量组所含有的向量个数相等
        - 极大无关组所含有的向量个数相等

秩：

- 含义：向量组的极大无关组所含有的向量个数称为向量组的秩
- 性质：
    - 向量组线性无关的充要条件是向量组的秩等于向量个数，线性相关的充要条件是秩小于向量个数
    - 若向量组$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$可以被向量组$\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_s$线性表示，则$r(\vec{\alpha})\leqslant r(\vec{\beta})$
    - 等价的向量组必等秩，等秩的向量组若一组可以被另一组表示，则等价
    - 向量组的秩等于向量组排成矩阵的秩，且矩阵行秩等于列秩
- 计算：
    - 列摆行变换：向量按列排成矩阵，做行变换化为梯形阵求矩阵的秩，矩阵的秩就是向量组的秩
    - 极大无关组：选取矩阵每个高度上左边的列代表的列向量，可以得到极大无关组

4、向量空间

含义：若n维向量的非空集合V满足两个封闭条件，称V是向量空间

- 对加法封闭：$\forall\vec{\alpha},\vec{\beta}\in V$，均有$\vec{\alpha}+\vec{\beta}\in V$
- 对数乘封闭：$\forall\vec{\alpha}\in V$，$k\vec{\alpha}\in V$

基：

- 含义：
  - 基：若n维向量空间中的向量组$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$满足以下条件，称为向量空间的一组基
    - $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$线性无关
    - V中的所有向量都能用$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$线性表示
  - 维数：基中向量的个数称为向量空间的维数
  - 坐标：设V的一组基是$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$，对于$\vec{\beta}\in V$均有$\vec{\beta}=k_1\vec{\alpha}_1+\cdots+k_r\vec{\alpha}_r$，称$(k_1,\cdots,k_r)$是向量$\vec{\beta}$在基$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$下的坐标
- 性质：
  - 向量空间$V=L(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n)$的维数是$r(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n)$，基是$\overrightarrow{\alpha_1},\cdots,\vec{\alpha}_n$的极大无关组
  - 任何向量在同一组基下的坐标是唯一的
  - 坐标变换公式：$\vec{\alpha}$在向量空间两组基$\overrightarrow{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon}_n$和$\vec{\eta}_1,\cdots,\vec{\eta}_n$下的坐标分别为$(x_1,\cdots,x_n)$和$(y_1,\cdots,y_n)$，基的过渡矩阵为$(\vec{\eta}_1,\cdots,\vec{\eta}_n)=(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)\mathbf{P}$，则$(y_1,\cdots,y_n)^T=\mathbf{P}^{-1}(x_1,\cdots,x_n)^T$

正交：

- 正交向量：
  - 含义：
    - 正交向量：若两向量内积为0，则两向量正交
    - 正交向量组：若m个n维向量$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m$两两正交，称向量组是正交向量组
  - 性质：正交向量必然线性无关
  - 施密特正交化：一组线性无关的向量组$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$，转化为正交向量组公式为：

$$
\begin{aligned}
\vec{\beta}_1 &= \vec{\alpha}_1 \\
\vec{\beta}_2 &= \vec{\alpha}_2-\frac{(\vec{\alpha}_2,\vec{\beta}_1)}{(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_1)}\vec{\beta}_1 \\
\vec{\beta}_3 &= \vec{\alpha}_3-\frac{(\overrightarrow{\alpha_3},\vec{\beta}_1)}{(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_1)}\vec{\beta}_1-\frac{(\vec{\alpha}_3,\vec{\beta}_2)}{(\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_2)}\vec{\beta}_2 \\
&\vdots \\
\vec{\beta}_m &= \vec{\alpha}_m-\sum_{i=1}^{m-1}\frac{(\vec{\alpha}_m,\vec{\beta}_i)}{(\vec{\beta}_i,\vec{\beta}_i)}\vec{\beta}_i
\end{aligned}
$$

- 正交矩阵：
  - 含义：若n阶方阵满足$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E}$，称之为正交矩阵
  - 性质：
    - 正交矩阵可逆，且$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T$
    - 若矩阵正交，则$|\mathbf{A}|=\pm1$
    - 若矩阵正交，则$\mathbf{A}^{-1}$、$\mathbf{A}^T$也正交

        - 若$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$正交，则$\mathbf{AB}$、$\mathbf{BA}$也正交
    - 判断：
        - 用定义判断$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E}$是否成立
        - 正交矩阵的充要条件是矩阵的行向量组或列向量组是单位正交向量组

四、线性方程组

1、齐次线性方程组

形式：

- 代数形式：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$$

- 矩阵形式：$\mathbf{A}\vec{x}=\vec{0}$
- 向量形式：$\overrightarrow{\alpha_1}x_1+\vec{\alpha}_2x_2+\cdots+\vec{\alpha}_nx_n=\vec{0}$

解空间：

- 含义：齐次方程组所有解得集合是一个向量空间，称为齐次方程组的解空间
- 基础解系：若方程组的一组解$\vec{\xi}_1,\cdots,\vec{\xi}_n$满足一下条件，称这一组解是方程组的基础解系
    - $\vec{\xi}_1,\cdots,\vec{\xi}_n$线性无关
    - 方程组任何一个解都可以由$\vec{\xi}_1,\cdots,\vec{\xi}_n$线性表示
- 性质：若n元齐次线性方程组的系数矩阵满足$r(\mathbf{A})=r<n$，则有基础解系，基础解系所含有的解向量个数为$n-r$
    - 若齐次方程组满足$r(\mathbf{A})=n$，则有唯一零解
    - 若齐次方程组满足$r(\mathbf{A})<n$，则有无穷多非零解，方程组的通解为$k_1\vec{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\vec{\xi}_{n-r}$

解法：

- 写出系数矩阵$\mathbf{A}$，初等行变换化为行最简型$\mathbf{I}$得到矩阵的秩，确定基础解系向量个数
- 确定自由未知量和真未知量，写出同解方程组$\mathbf{I}\vec{x}=\vec{0}$
- 对自由未知量赋值，求出基础解系

2、非齐次线性方程组

形式：

- 代数形式：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

- 矩阵形式：$\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}$

- 向量形式：$\vec{\alpha}_1 x_1+\vec{\alpha}_2 x_2+\cdots+\vec{\alpha}_n x_n=\vec{b}$

解的存在性：

- 条件：非齐次方程组有解，与以下条件等价，反之无解
  - $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$线性无关，$\vec{b}$可以由$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$线性表示且表示法唯一
  - 向量组$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$与向量组$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n,\vec{b}$等价，有相同的极大无关组
  - $r(\vec{\alpha})=r(\vec{\alpha},\vec{b})$
  - $r(\mathbf{A})=r(\bar{\mathbf{A}})=r(\mathbf{A}|\vec{b})$
- 性质：
  - 若$\vec{x}_1$、$\vec{x}_2$是非齐次方程组的解，则$\vec{x}_1-\vec{x}_2$是对应齐次方程组的解
  - 若$\vec{x}_1$是非齐次方正组的解，$\vec{x}_2$是齐次方程组的解，则$\vec{x}_1+\vec{x}_2$是非齐次方程组的解
- 通解的结构定理：设$\vec{\eta}^*$是非齐次方程组的特解，$\vec{\xi}_1,\cdots,\vec{\xi}_{n-r}$是对应齐次方程组的通解，则非齐次方程组通解是$\vec{\eta}^*+k_1\vec{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\vec{\xi}_{n-r}$
  - 若$r(\mathbf{A})=r(\bar{\mathbf{A}})=n$，则方程组有唯一一组解，对应齐次方程组只有零解
  - 若$r(\mathbf{A})=r(\bar{\mathbf{A}})<n$，则方程组有无穷多解，对应齐次方程组有无穷多非零解
  - 若$r(\mathbf{A})\neq r(\bar{\mathbf{A}})$，则方程组无解

求解：

- 写出增广矩阵，化为梯形阵判断是否有$r(\mathbf{A})=r(\bar{\mathbf{A}})$
- 化为行最简型，确定真未知量和自由未知量，写出同解方程组
- 令自由未知量为零得$\vec{\eta}^*$，再给自由未知量赋值得基础解系，写出通解

克拉默法则：

- 齐次方程组：
  - 系数矩阵是方阵且$|\mathbf{A}|\neq 0$的充要条件是齐次方程组有唯一零解
  - $|\mathbf{A}|=0$的充要条件是则齐次方程组有无穷多非零解
- 非齐次方程组：
  - $|\mathbf{A}|=0$的充要条件是非齐次方程组有无穷多解
  - $|\mathbf{A}|\neq 0$的充要条件是非齐次方程组有唯一解，且唯一解为$x_i=\frac{D_i}{D}$，其中D_i是用$\vec{b}$替换系数矩阵的第i列得到的行列式

五、相似对角型

1、特征值与特征向量

相似：

- 含义：n阶方阵$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$，若存在可逆矩阵$\mathbf{P}$使$\mathbf{B}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$成立，称两矩阵相似，$\mathbf{P}$是相似变换矩阵
- 性质：
  - 自反性：$\mathbf{A}\sim\mathbf{A}$
  - 对称性：若$\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$，则$\mathbf{B}\sim\mathbf{A}$
  - 传递性：若$\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$，$\mathbf{B}\sim\mathbf{C}$，则$\mathbf{A}\sim\mathbf{C}$

- 相似矩阵必然等价，反之不成立
- 若两矩阵相似，则：
  - $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$
  - $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$
  - 两矩阵可逆性相同，若都可逆，则$\mathbf{A}^{-1} \sim \mathbf{B}^{-1}$，相似变换矩阵仍为$\mathbf{P}$
  - $f(\mathbf{A}) \sim f(\mathbf{B})$，其中$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$，相似变换矩阵仍为$\mathbf{P}$

特征值与特征向量：

- 含义：n阶方阵$\mathbf{A}$，$\lambda \in R$，若存在非零向量$\vec{\alpha}$使$\mathbf{A}\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}$成立，称$\lambda$是矩阵的特征值，$\vec{\alpha}$是矩阵的特征向量
- 计算：
  - 移项得$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\vec{\alpha} = \vec{0}$，则$\vec{\alpha}$是齐次方程组$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\vec{x} = \vec{0}$的非零解，则有$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0$，解得特征值$\lambda$
  - 特征值代入齐次方程组，解方程组得到基础解系就是该特征值对应的的特征向量
- 性质：
  - 矩阵不满秩等价于有特征值$\lambda = 0$，矩阵满秩等价于不存在特征值$\lambda = 0$
  - 矩阵相异特征值对应的特征向量线性无关
  - 相似矩阵有相同的特征值
  - n阶矩阵必然有n个特征值
  - 若矩阵的特征值为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，则：
    - $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |\mathbf{A}|$
    - $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

矩阵	特征值	特征向量
$\mathbf{A}$	λ	$\vec{\alpha}$
$k\mathbf{A}$	$k\lambda$	$\vec{\alpha}$
$f(\mathbf{A})$	$f(\lambda)$	$\vec{\alpha}$
$\mathbf{A}^m$	λ^m	$\vec{\alpha}$
$\mathbf{A}^{-1}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\vec{\alpha}$
$\mathbf{A}^*$	$\frac{\|\mathbf{A}\|}{\lambda}$	$\vec{\alpha}$
$\mathbf{A}^T$	λ	$\vec{\alpha}$

2、相似对角化

一般矩阵相似对角化：

- 条件：n阶矩阵与对角阵相似的充要条件是$\mathbf{A}$有n个线性无关的特征向量
  - 若矩阵有n个互异的特征值，则必能与对角阵相似\
  - 若矩阵有重特征值，互异的特征值为$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$，对应的重数为$r_1, \cdots, r_m$，则矩阵与对角阵相似的充要条件是$r(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E}) = n - r_i$，即齐次方程组必须有$r_i$个线性无关的解

- 方法:
  - 用$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=0$求矩阵特征值，判断是否有$r(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})=n-r_i$
  - 回代λ求特征向量$\vec{\xi}_1,\cdots,\vec{\xi}_n$
  - 相似变换矩阵为$\mathbf{P}=(\vec{\xi}_1,\cdots,\vec{\xi}_n)$，对角阵为$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

实对阵矩阵相似对角化:

- 性质：实对称矩阵必然可以与对角阵相似
  - 实对称矩阵的相异特征值对应的特征向量必然正交
  - 实对称矩阵的k重特征值对应的线性无关特征向量恰好k个
  - 必然存在一个正交矩阵$\mathbf{Q}$使$\mathbf{\Lambda}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}$
- 方法:
  - 求特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$
  - 对没个特征值，求对应的r_i个线性无关向量
  - 先施密特正交化，再单位化，纵向排列为正交矩阵$\mathbf{Q}$

六、二次型

1、二次型

含义:

- 二次型：由n个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$组成的二次齐次多项式称为二次型
- 标准型：只含有平方项的二次型
- 规范型：平方项系数只有$\pm1,0$的标准型

表示：$f(x_1,\cdots,x_n)=\vec{x}^T\mathbf{A}\vec{x}$

- 二次型的秩就是矩阵$\mathbf{A}$的秩
- $\mathbf{A}$是n阶实对称矩阵

二次型化为标准型:

- 前提：任何二次型都可以通过可逆变换$\vec{x}=\mathbf{C}\vec{y}$化为标准型
- 正交变换法:
  - 写出二次型矩阵$\mathbf{A}$
  - 求$\mathbf{A}$的所有特征值和特征向量
  - 把重特征值对应的特征向量正交化
  - 所有特征向量单位化，按列排为正交变换矩阵$\mathbf{Q}$
  - 通过正交变换$\vec{x}=\mathbf{Q}\vec{y}$，二次型化为标准型为$f=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$
- 配方法:
  - 把所有含x_1的项放在一起，配完全平方
  - 重复上一步，对$x_2,x_3,\cdots,x_n$配方，直到全部化为平方项
  - 做可逆变换，令$\vec{y}=\mathbf{C}'\vec{x}$，反解$\vec{x}$或对矩阵求逆得变换$\vec{x}=\mathbf{C}\vec{y}$
  - 若不含有平方项，则令$x_1=z_1-z_2$。$x_2=z_1+z_2$，$x_3=z_3$等，展开后对平方项配方

2、合同

含义：若n阶方阵$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$满足$\mathbf{B} = \mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C}$，称两矩阵合同

性质：

- 自反性：$\mathbf{A} \simeq \mathbf{A}$
- 对称性：若$\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$，则$\mathbf{B} \simeq \mathbf{A}$
- 传递性：若$\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$，$\mathbf{B} \simeq \mathbf{C}$，则$\mathbf{A} \simeq \mathbf{C}$
- 惯性定理：二次型经过不同变换化为的标准型，正平方项数量p，负平方项数量q不变
  - 符号差：定义符号差为$p - q$，称p为正惯性指数，q为负惯性指数
  - $r(\mathbf{A}) = p + q$
  - $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$等价于$\vec{x}^T\mathbf{A}\vec{x}$和$\vec{x}^T\mathbf{B}\vec{x}$有相同的$p$、$q$且$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$
- 等价、相似、合同的关系
  - 若矩阵合同，则必然等价，反之不成立
  - 若矩阵相似，则必然等价，反之不成立
  - 对于实对称矩阵与对角阵，等价、相似、合同是同时成立的
- 二次型$\vec{x}^T\mathbf{A}\vec{x}$经过可逆线性变换$\vec{x} = \mathbf{C}\vec{y}$得到的二次型$\vec{y}^T\mathbf{B}\vec{y}$，则有：
  - $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$
  - 可逆变换不改变二次型的秩

3、正定

含义：二次型$f = \vec{x}^T\mathbf{A}\vec{x}$

- 正定：若二次型$f > 0$恒成立，称二次型是正定二次型，矩阵$\mathbf{A}$是正定矩阵
- 负定：若二次型$f < 0$恒成立，称二次型是负定二次型，矩阵$\mathbf{A}$是负定矩阵
- 准正定：若二次型$f \geqslant 0$恒成立，称二次型是准正定二次型，矩阵$\mathbf{A}$是准正定矩阵
- 准负定：若二次型$f \leqslant 0$恒成立，称二次型是准负定二次型，矩阵$\mathbf{A}$是准负定矩阵

正定的判别：

- 定义法：判断二次型$f = \vec{x}^T\mathbf{A}\vec{x} > 0$是否恒成立
- 特征值法：求矩阵特征值判断正负
  - 实标准型正定的充要条件是所有系数都大于零
  - 可逆线性变换不改变二次型的正定性
  - 二次型正定的充要条件是$\mathbf{A}$的特征值都大于零
- 顺序主子式法：二次型正定的充要条件是$\mathbf{A}$的所有顺序主子式都大于零

性质：若矩阵$\mathbf{A}$正定，则

- $|\mathbf{A}| > 0$
- $\mathbf{A} \simeq \mathbf{E}$，即存在可逆矩阵使$\mathbf{E} = \mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C}$
- 存在可逆矩阵使$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{P}$

    - 若$\mathbf{A}=\mathbf{P}^T\mathbf{P}$，当$\mathbf{P}$可逆时，$\mathbf{A}$正定
    - 若$\mathbf{A}=\mathbf{P}^T\mathbf{P}$，当$\mathbf{P}$不可逆时，$\mathbf{A}$准正定
- 矩阵主对角线的元素都为正
- $r(\mathbf{A})=n=p$
- $k\mathbf{A}$、$f(\mathbf{A})$、$\mathbf{A}^k$、$\mathbf{A}^T$、$\mathbf{A}^{-1}$、$\mathbf{A}^*$均正定