微积分乙 2019-2020 学年第一学期期中考试试卷

一、计算题（50 分）

1、求 $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

2、求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \tan x}{\left(\sqrt{\cos x}-1\right)\ln(1+x)}$

3、求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

4、求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$

5、求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^3}\left(\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right)$

6、$y=(x\sin x+\arctan x+3^x)^2$，求 y'

7、$x^3+y^3+3xy=1$，求 $y'(1),y''(1)$

8、 $\begin{cases} x=\cos t+\cos^2 t \\ y=1+\sin t \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$

9、求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{x}{|x|}\right)$

10、 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$，**求** $f^{(100)}(x)$

11、 已知 $f(x),C[0,2],D(0,2),f(2)=5f(0)$， 证明 $\exists c\in(0,2),(1+c^2)f'(c)=2cf(c)$

12、 $\{x_n\}:x_0=2,x_{n+1}=\sqrt{7+x_n},n=1,2,\ldots$ 证明极限存在并求极限.

13、 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(\pi+2x)}{2\cos x},x\leqslant 0\\ \sin\dfrac{1}{x^2-1},x>0\end{cases}$，求间断点及类型.

2019-2020 学年第一学期期中考试试卷参考答案

一、计算题

1、【解析】原式$=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x\right)$

$$=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

2、【解析】原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)}{\left[\sqrt{\cos x}-1\right]x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\frac{1}{\cos x}}{\sqrt{\cos x}-1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\frac{1+\sqrt{\cos x}}{\cos x}=2$$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

3、【解析】因为$\left(\dfrac{e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\ldots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant(e^{nx})^{\frac{1}{x}}=e^n$

$$\left(\frac{e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=e^n\cdot n^{-\frac{1}{x}}\to e^n$$

所以原式$=e^n$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

4、【解析】原式$\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sqrt[3]{1+t^2+t^3}-\sqrt{1+t^2}}{t}$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[3]{1+t^2+t^3}-1}{t}+\lim_{t\to0^+}\frac{1-\sqrt{1+t^2}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{3}(t^2+t^3)}{t}+\lim_{t\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{t}=0$$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

5、【解析】原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\cdot x\ln\frac{2+\cos x}{3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\cos x-1}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

6、【解析】$y'=2(x\sin x+\arctan x+3^x)\left(\sin x+x\cos x+\frac{1}{1+x^2}+3^x\ln 3\right)$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 2.4——复合函数求导法则

7、【解析】两边求导$3x^2+3y^2\cdot y'+3y+3xy'=0$（*）

$x=1$时，$y=0$代入（*）$y'(1)=-1$

对（*）两边求导：

$2x+2y(y')^2+y^2\cdot y''+2y'+xy''=0$

将$x=1$，$y=0,y'(1)=-1$带入得$y''(1)=0$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.2——隐函数求导

8、【解析】$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=-\frac{\cos t}{\sin t(1+\cos t)}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{-d\left(\frac{\cos t}{\sin t(1+\cos t)}\right)}{d(\cos t+\cos^2 t)}=-\frac{1+2\cos^3 t}{\sin^3 t(1+2\cos t)^3}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.3——参数方程求导

9、【解析】$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+1=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}+2e^{-\frac{2}{x}}}{e^{-\frac{2}{x}}+1}+1=1$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}-1=2-1=1$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

10、【解析】$f(x)=\frac{2+x-1}{\sqrt{1-x}}=2(1-x)^{-\frac{1}{2}}-(1-x)^{\frac{1}{2}}$

$$f^{(n)}(x)=\left[2(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(n)}-\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]^{(n)}$$

$$=2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)(1-x)^{-\frac{1}{2}-n}(-1)^{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)(1-x)^{\frac{1}{2}-n}\cdot(-1)^{n}$$

$$=2\frac{(-1)^{n}(2n-1)!!}{2^{n}}(-1)^{n}(1-x)^{-\frac{1}{2}-n}-\frac{(-1)^{n}(2n-3)!!}{2^{n}}(-1)^{n}(1-x)^{\frac{1}{2}-n}$$

$$f^{(100)}(x)=\frac{199!!}{2^{99}}(1-x)^{-\frac{201}{2}}+\frac{197!!}{2^{100}}(1-x)^{-\frac{199}{2}}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^{100}}\left(\frac{199!!}{2^{99}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\frac{197!!}{2^{100}}\sqrt{1-x}\right)$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.1——显函数求导

11、【解析】$(1+c^{2})f'(c)-2cf(c)=0$

$$(1+x^{2})f'(x)-2xf(x)\Big|_{x=c}=0$$

构造$F(x)=\dfrac{f(x)}{1+x^{2}}$　$F'(x)=\dfrac{(1+x^{2})f'(x)-2xf(x)}{(1+x^{2})^{2}}=0$，$F(x)$在$C[0,2]D(0,2)$

$$F(0)=F(2)=f(0)=\frac{f(2)}{5}$$

由罗尔定理$\exists c\in(0,2)$，

$$F'(c)=0=\frac{(1+c^{2})f'(c)-2cf(c)}{(1+c^{2})^{2}}\Rightarrow(1+c^{2})f(c)=2cf(c)$$

【考点延伸】《考试宝典》专题三 3.1——罗尔定理

12、【解析】设 b 为方程$x^{2}-x-7=0$的正根，$b=\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$且$b^{2}=b+7$

$$x_{1}=\sqrt{7+2}=3>x_{0}$$

因为$x_{n+1}-x_{n}=\sqrt{7+x_{n}}-\sqrt{7+x_{n-1}}=\dfrac{x_{n}-x_{n-1}}{\sqrt{7+x_{n}}+\sqrt{7+x_{n-1}}}$

归纳法易得$\{x_{n}\}$单调递增

又$x_{0}=2<b$，若$x_{n}\leqslant b$　$x_{n+1}=\sqrt{7+x_{n}}\leqslant\sqrt{7+b}=b$

由单调有界定理知原数列有极限，$c=\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 题型 3 证明数列极限存在

13、【解析】间断点为$x=0,x=1,x=-\frac{\pi}{2}-k\pi(k=0,1,\ldots)$

①$x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x(\pi+2x)}{2\cos x}=0$ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x^2-1}=-\sin 1\neq 0$

为第一类跳跃间断点

②$x=1$时$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\sin\frac{1}{x^2-1}$不存在，为第二类间断点

③$x=-\frac{\pi}{2}$时，$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{x(\pi+2x)}{2\cos x}=-\frac{\pi}{2}$为第一类可去间断点

④$x_k=-\frac{\pi}{2}-k\pi(k=1,2,\ldots)$

$\lim\limits_{x\to x_k}f(x)=\lim\limits_{x\to x_k}\frac{x(\pi+2x)}{2\cos x}=\infty$为第二类间断点.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 题型 4——判断函数的连续性和间断点