2013-2014 学年第一学期期末考试 A 卷

【注】：第 1~9,14 题，每题均为 6 分；第 10~13 题，每题均为 10 分.解题时写出必要的解答过程.

1、设$y=y(x)$是由方程$x^2+y=\tan(x-y)$所确定，且$y(0)=0$，求：$y'(0)$和$y''(0)$.

2、设函数$y=y(x)$是由参数方程$\begin{cases} x=\int_0^t 2e^{-s^2}ds \\ y=\int_0^t \cos s^2 ds \end{cases}$所确定，求：$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\pi}}$.

3、求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\cos 2x}{x^2}$.

4、求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x}-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

5、求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^{2}x}-\dfrac{1}{x^{2}}\right)$.

6、求积分：$\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{2}}dx$.

7、求积分：$\displaystyle\int_{-1}^{1}(2+x)^{2}(1-x^{2})^{\frac{3}{2}}dx$.

8、证明：当$0\leqslant x<+\infty$时，$\arctan 3x\leqslant \ln(1+4x)$，当且仅当$x=0$时等号成立.

9、求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n 4^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}$的收敛半径、收敛域，并计算其和函数.

10、设常数$a>0,f(x)=\dfrac{1}{3}ax^3-x$，试求$f(x)$在$\left[0,\dfrac{1}{a}\right]$上的最大值和最小值.

11、求曲线$y^2=x+2$与直线$y=x$所围区域绕直线$x=2$旋转一周的体积.

12、证明如下“$\dfrac{0}{0}$”型的洛必达($L'Hosptial$)法则：

设（1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$；

（2）$f(x)$、$g(x)$在去心邻域$U(x_0)$内可导，且$g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty)$，则：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

请举例说明当条件（3）不成立，但$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$存在，即不能使用洛必达($L'Hosptial$)法则.

13、设$f(x)=-\cos\pi x+(2x-3)^3+\dfrac{1}{2}(x-1)$. 试讨论并证明方程$f(x)=0$根的个数.

2013-2014 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

1、【解析】当$x=0$时，$y=0$

方程两边对x求导，有$2x+\dfrac{dy}{dx}=\left(1-\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\sec^2(x-y)$ ①

令$x=0,y=0$，求得$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$，即$y'(0)=\dfrac{1}{2}$

①式两边对x求导，有

$$2+\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{d^2y}{dx^2}\sec^2(x-y)+2\left(1-\frac{dy}{dx}\right)\cdot\sec^2(x-y)\tan(x-y)\quad②$$

将$x=0,y=0$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$代入②式，得$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=-1$，即$y''(0)=-1$.

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.2 隐函数的求导

2、【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{\cos t^2}{2e^{-t^2}}=\dfrac{1}{2}e^{t^2}\cdot\cos t^2$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=(te^{t^2}\cos t^2-te^{t^2}\sin t^2)\cdot\left(\frac{1}{2e^{-t^2}}\right)=\frac{1}{2}te^{2t^2}(\cos t^2-\sin t^2)$$

从而$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\pi}}=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{2\pi}\cdot(\cos\pi-\sin\pi)=-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{2\pi}$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.3 参数方程的求导

3、【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\cos2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{x^2}=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3 极限的计算

4、【解析】$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{e^x-1-x}{x}}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}}=e^{\frac{1}{2}}$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 {重要题型}题型 1.不定型极限的计算问题

5、【解析】

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x-x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^2\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin2x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{6x^2}=\frac{1}{3}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 {重要题型}题型 1.不定型极限的计算问题

6、【解析】$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2}dx=-\int_1^{+\infty}\ln(1+x)d\frac{1}{x}=-\frac{\ln(1+x)}{x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx$

$$=\ln 2+\ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}=2\ln 2$$

【考点延伸】《考试宝典》专题四.第三部分.分部积分法

7、【解析】$\int_{-1}^{1}(2+x^2)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\int_{-1}^{1}(4+x^2+4x)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=2\int_0^1(4+x^2)(1-x)^{\frac{3}{2}}dx$

令$x=\sin t,t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$2\int_0^1(4+x^2)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4+\sin^2 t)\cos^3 t\cdot\cos t dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(5-\cos^2 t)\cos^4 t dt=2\cdot\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}5\cos^4 t dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t dt\right]$$

$$=2\cdot\left(5\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{25\pi}{16}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题五 1.3 定积分的特殊性质

8、【解析】令$F(x)=\arctan 3x-\ln(1+4x),x\in[0,+\infty)$

$$F(0)=0\ ,F'(x)=\frac{3}{1+9x^2}-\frac{4}{1+4x}=\frac{-36x^2+12x-1}{(1+9x^2)(1+4x)}$$

$F'(x)=0$时，有$x=\frac{1}{6}$.

当$x\in\left[0,\frac{1}{6}\right)$时，$F'(x)<0$；当$x\in\left(\frac{1}{6},+\infty\right)$时，$F'(x)<0$

从而$F'(x)\leqslant 0$，$F(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减.$x>0$时，$F(x)<F(0)$,即

$\arctan 3x<\ln(1+4x)$

综上，当$x\in[0,+\infty)$时，$\arctan 3x\leqslant\ln(1+4x)$，当且仅当$x=0$时等号成立.得证

【考点延伸】《考试宝典》专题三 {重要题型}题型 5.证明仅以x为变量的不等式

9、【解析】令系数$a_n=\frac{(-1)^n4^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}4^{n+1}}{(2n+3)(2n+4)}}{\frac{(-1)^n4^n}{(2n+1)(2n+2)}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{4(2n+1)(2n+2)}{(2n+3)(2n+4)}=4$$

故收敛半径为$\frac{1}{2}$.

当$x=\pm\frac{1}{2}$时，$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n4^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4(2n+1)(2n+2)}$，由莱布尼兹判别法知，该级数收敛，从而$x$的收敛域为$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n4^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}=\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}dx=\int_0^x\left[\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(4x^2)^n dx\right]dx$$

$$=\int_0^x\left[\int_0^x\frac{1}{1+4x^2}dx\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^x\arctan 2x\ dx=\frac{1}{2}\left[x\arctan 2x-\int_0^x\frac{2x}{1+4x^2}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}x\arctan 2x-\frac{1}{8}\ln(1+4x^2),x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 3.3 幂级数的运算

10、【解析】$f(x)=\frac{1}{3}ax^3-x.\ f(0)=0,f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{3a^2}-\frac{1}{a}$

$f'(x)=ax^2-1$，当$f'(x)=0$时$x=\frac{1}{\sqrt{a}}$，$f\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=-\frac{2}{3\sqrt{a}}$

当$x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in\left(\frac{1}{\sqrt{a}},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

所以，当$a\in\left(0,\frac{1}{3}\right]$时，$f(x)$在$\left[0,\frac{1}{a}\right]$上的最大值是$\frac{1}{3a^2}-\frac{1}{a}$，最小值是$-\frac{2}{3\sqrt{a}}$

当$a\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$时，$f(x)$在$\left[0,\frac{1}{a}\right]$上的最大值是$0$，最小值是$-\frac{2}{3\sqrt{a}}$

【考点延伸】利用函数在区间内的单调性求最值

11、【解析】$y^2=x+2$与$y=x$的交点坐标为$(-1,-1),(2,2)$，体积

$$V=\int_{-1}^{2}(\pi\cdot[2-(y^2-2)]^2-\pi(2-y)^2)dy=\pi\int_{-1}^{2}(y^4-9y^2+4y+12)dy=\frac{108\pi}{5}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题五 4.2 体积

12、【解析】证明：补充定义$f(x_0)=g(x_0)=0$，则$f(x),g(x)$在$U(x_0)$内连续

由柯西中值定理可得，$\exists c$位于x,x_0之间使得$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

当$x\to x_0$时，$c\to x_0$，故$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\lim\limits_{c\to x_0}\frac{f'(c)}{g'(c)}=A$

即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A.$

举例：$f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\sin x$

满足条件（1）：$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0,\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$

满足条件（2）：$f(x),g(x)$ 在去心邻域 $U(0)$ 内可导，且 $g'(x)\neq 0$

不满足条件（3）：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)=0$，极限存在. 洛必达法则失效

【考点延伸】《考试宝典》专题二 2.3 极限的计算

13、【解析】方程 $(2x-3)^3+\dfrac{1}{2}(x-1)=\cos\pi x$ 的解就是 $f(x)=0$ 的根.

令 $g(x)=(2x-3)^3+\dfrac{1}{2}(x-1)$，有 $g'(x)=6(2x-3)^2+\dfrac{1}{2}>0$，从而 $g(x)$ 单调递增,

由于 $-1\leqslant\cos\pi x\leqslant 1,g(1)=-1,g(2)=\dfrac{3}{2}$，从而 $g(x)=\cos\pi x$ 解的范围为 $x\in[1,2]$

$f(x)=(2x-3)^3+\dfrac{1}{2}(x-1)-\cos\pi x$, $f(1)=0,f(2)=\dfrac{1}{2},f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$

$f'(x)=6(2x-3)^2+\dfrac{1}{2}+\pi\sin\pi x$, $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-\pi<0,f'(1)=f'(2)=\dfrac{13}{2}>0$

$f''(x)=24(2x-3)+\pi^2\cos\pi x$, $f''\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$

$f'''(x)=48-\pi^3\sin\pi x>0$, 从而 $f''(x)$ 在定义域内单调递增

当 $x\in\left[1,\dfrac{3}{2}\right)$ 时，$f''(x)<0$，$f'(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(\dfrac{3}{2},2\right]$ 时，$f''(x)>0$，$f'(x)$ 单调递增.

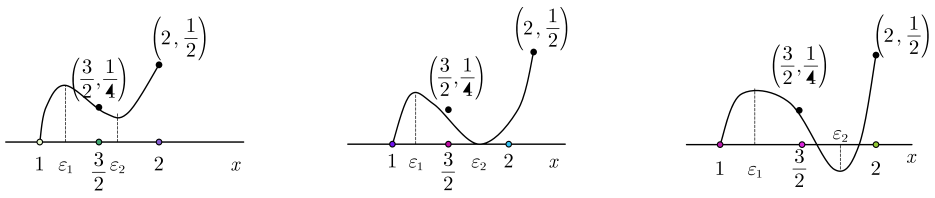
由于 $f'(1)>0,f'\left(\dfrac{3}{2}\right)<0$, $f'(x)$ 在区间 $\left[1,\dfrac{3}{2}\right)$ 上单调递减，所以 $f'(x)$ 在区间 $\left[1,\dfrac{3}{2}\right)$ 内，

有且仅有一点 ε_1，使得 $f'(\varepsilon_1)=0,f(x)$ 在 $\left[1,\dfrac{3}{2}\right]$ 上先增后减，增减性的分界为 $x=\varepsilon_1$；同理，由于

$f'\left(\dfrac{3}{2}\right)<0,f'(2)>0$, $f'(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{3}{2},2\right]$ 上单调递增，所以 $f'(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{3}{2},2\right]$ 内，有且

仅有一点ε_2，使得$f'(\varepsilon_2)=0$,$f(x)$在$\left[\frac{3}{2},\ 2\right]$上先减后增，增减性的分界为$x=\varepsilon_2$.

在$x\in[1,2]$区间内，由$f(x)$的增减性和$f(1)=0$，$f(2)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}$，可知$f(x)=0$的根可能有 1,2 或 3 个，情形如图所示：



① 1个根　　② 2个根　　③ 3个根

又因为$f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{27}+\frac{1}{3}-\cos\frac{5\pi}{3}=-\frac{7}{54}<0$，所以$f(x)$在区间$[1,2]$内如情形③所示，故$f(x)=0$的根的个数为 3.

【考点延伸】《考试宝典》专题三 第一部分 极值、最值和凹凸性