微积分甲/乙 2017-1018 学年第一学期期中考试试卷

一、填空题(20 分，每题 4 分，共 5 题)

1、函数$y=\arcsin x$的定义域是________ 值域______.

2、三角函数差化积$\sin x-\sin y=$________.

3、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}=$________.

4、设$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax+b+\sqrt{x^2+2x+3}\right)=2017$，则$a=$______，$b=$______

5、设$f(x)=\begin{cases}x^3 & x\leq 1\\ ax+b & x>1\end{cases}$在$x=1$处可导，则$a=$______，$b=$______。

二、数列极限(18 分，每题 6 分，共 3 题)

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}$

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2n)(3+4n)}{(n+1)(n+2)}$

3、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots\dfrac{n}{n^2+n}\right)$

三、函数极限（本题满分 18 分，每小题 6 分.

1、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$；2、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+2x}}{x}$.；3、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^x$

四、导数（18 分，每题 6 分）

1.设$y=\tan x+\arctan x$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

2.设$y=y(x)$是由参数方程$\begin{cases}x=\ln(1+2t)\\ y=t+t^2\end{cases}$所决定，求$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

3.设$y=x^2 2^x$,求$\dfrac{d^n y}{dx^n}$

五、微分（本题满分 12 分，每小题 6 分）

1.设$y(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$，求dy

2.设$y=y(x)$是由函数$x^2+xy+y^2=7$所决定，求$dy\big|_{(1,2)}$

六、证明题（本题满分 14 分，每小题 7 分）

1.用函数极限的定义证明$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x}=2$；2.设$a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$，证明数列$\{a_n\}$无界

2017-2018 学年第一学期期中考试试卷参考答案

一、填空题(20 分，每题 4 分，共 5 题)

1、【正解】$[-1,1]$, $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

【解析】由于$\sin x$的值域为$[-1,1]$因此$y=\arcsin x$的定义域和值域为$[-1,1]$, $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 1.2——函数的基本性质

2、【正解】$2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

【解析】和差化积公式$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 1.2——函数的基本性质

3、【正解】5

【解析】夹逼准测 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3\cdot 5^n}$，因此原式$=5$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

4、【正解】$a=-1,b=2016$

【解析】

$$\lim_{x\to+\infty}\left(ax+b+\sqrt{x^2+2x+3}\right)=\lim_{t\to0^+}\left(a\frac{1}{t}+b+\sqrt{\frac{1}{t^2}+2\frac{1}{t}+3}\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{a+bt+\sqrt{1+2t+3t^2}}{t}$$

由于原式等于 2017，因此$a=-1$，$\lim\limits_{t\to0^+}\frac{a+bt+\sqrt{1+2t+3t^2}}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{bt-1+\sqrt{1+2t+3t^2}}{t}=$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{b+\frac{1}{2}\cdot\frac{2+6t}{\sqrt{1+2t+3t^2}}}{1}=\lim_{t\to0^+}\left(b+\frac{1+3t}{\sqrt{1+2t+3t^2}}\right)=b+1=2017\text{，因此}b=2016$$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

5、【正解】$a=3,b=-2$

【解析】$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=a+b=f(1)=1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}=f'_-(1)=3$，$a=3,b=-2$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 1.3——可导.可微与连续的关系

二、数列极限(18 分，每题 6 分，共 3 题)

1、【解析】 当n充分大时,$0<\ln n<\sqrt{n}$,故由夹逼准则知,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

2、【解析】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+2n)(3+4n)}{(n+1)(n+2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}+2\right)\left(\frac{3}{n}+4\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}=8$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

3、【解析】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots\frac{n}{n^2+n}\right)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(1+n)}{n(1+n)}=\frac{1}{2},\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(1+n)}{n^2}=\frac{1}{2}$$

所以原式 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

三、函数极限（18 分）

1、【解析】$\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=1$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

2、【解析】$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+2x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}-\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

3、【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right)^x=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot2}}=\frac{e}{e^2}=\frac{1}{e}$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

四．导数（18 分）

1.【解析】$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{1+x^2}$【考点延伸】《考试宝典》专题二 2.1——初等函数的导数

2.【解析】$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1+2t}{\frac{2}{1+2t}}=\frac{1}{2}(1+2t)^2$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2(1+2t)}{\frac{2}{1+2t}}=(1+2t)^2$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.4——参数方程求导

3.【解析】$\frac{d^ny}{dx^n}=C_n^0x^2(2^x)^{(n)}+C_n^1(x^2)^{(1)}(2^x)^{(n-1)}+C_n^2(x^2)^{(2)}(2^x)^{(n-2)}$

$=(\ln2)^nx^22^x+2nx(\ln2)^{n-1}\cdot2^x+(\ln2)^{n-2}n(n-1)\cdot2^x$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.5——求高阶导数

五．微分（12 分）

1.【解析】$dy=d\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=de^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}d\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$

$=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)\cdot dx$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 2.4——复合函数求导法则

2.【解析】$2xdx+xdy+ydx+2ydy=0$ 将 $x=1,y=2$ 带入得 $4dx+5dy=0$，进而 $dy\big|_{(1,2)}=\frac{-4}{5}dx$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.2——隐函数求导

六．证明题（14 分）

1.【解析】先取 $\xi_1=\frac{1}{4}$，当 $0<\left|x-\frac{1}{2}\right|<\xi_1$ 时，有 $\left|\frac{1}{x}-2\right|=\frac{2\left|x-\frac{1}{2}\right|}{|x|}\leqslant\frac{2\left|x-\frac{1}{2}\right|}{\frac{1}{4}}=8\left|x-\frac{1}{2}\right|$

对于任何的 $\varepsilon>0$ 取 $\xi=\min\left\{\frac{1}{4},\frac{\varepsilon}{8}\right\}$，当 $0<\left|x-\frac{1}{2}\right|<\xi$ 时，有 $\left|\frac{1}{x}-2\right|\leqslant8\left|x-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$，

故 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{x}=2$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.1——极限的定义和性质

2.【解析】由于$a_{2n}-a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\frac{1}{2n}\geqslant\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$

因此$a_{2^n}=(a_{2^n}-a_{2^{n-1}})+(a_{2^{n-1}}-a_{2^{n-2}})+\cdots+(a_{2^2}-a_2)+a_2\geqslant\frac{n}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算