2012-2013 学年第一学期期末考试 A 卷

1、设$y=(\sin 2x)^{x}+(\arcsin 2x)^{4}$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

2、设函数$f(u)$可导，$y=y(x)$是由方程$y=3f(xy)+\ln(1+\sin x)$所确定的可导函数，求$\dfrac{dy}{dx}$.

3、设$y=y(x)$是由参数方程$\begin{cases} x=3t^{2}+2t+3 \\ y=\displaystyle\int_{0}^{t}(3u+1)\sin u^{2}du \end{cases}$所确定，求$\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}\Big|_{t=\sqrt{\pi}}$.

4、计算定积分$\int_{-1}^{1}\dfrac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx$.

5、计算反常积分$\int_{1}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$.

6、求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+\sin x)}+\dfrac{1}{\ln(1-\sin x)}\right)$.

7、求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{1-\sqrt{1-x^3}}$.

8、求$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\cos^2 x}}$.

9、求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n3^n}$的收敛半径，收敛区间及收敛域.

10、将函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$展开成x的幂级数，并写出成立的开区间.

11、求不定积分$\displaystyle\int\frac{1+x^2+x^4}{x^3(1+x^2)}\ln(1+x^2)dx$.

12、设$f(x)\in C[0,1]$且恒正.试证明：

（1）存在$\xi\in(0,1)$使得以曲线$y=f(x)$为顶在区间$[0,\xi]$上的曲边梯形面积等于以$f(\xi)$为高，以区间$[\xi,1]$为底的矩形面积；

（2）若增设$f(x)$可导且$f'(x)<0$，则（1）中的ξ是唯一的.

13、设$f(x)$在区间$(0,+\infty)$内可导且$f'(x)<0$，$F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{1} xf(u)du+\int_{1}^{\frac{1}{x}}\frac{f(u)}{u^2}du$

（1）求$F''(x)$ （当$x>0$）；

（2）讨论曲线$y=F(x)$在区间$(0,+\infty)$内的凹凸性并求其拐点坐标.

14、设$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$，$n\geqslant 2$，

（1）计算a_n+a_{n+2}，并证明$\frac{1}{2(n+1)}<a_n<\frac{1}{2(n-1)}$，（当$n\geqslant 2$）；

（2）证明级数$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n$条件收敛.

2012-2013 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

1、【解析】$\frac{dy}{dx}=(\sin 2x)^{x}\cdot\left(\ln\sin 2x+\frac{2x\cos 2x}{\sin 2x}\right)+\frac{8(\arcsin 2x)^{3}}{\sqrt{1-4x^{2}}},x\in\left(k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right),$

k 为任意整数

【考点延伸】《考试宝典》专题二，3.1 显函数求导

2、【解析】方程两端对 x 求导，有 $\frac{dy}{dx}=3\left(y+x\cdot\frac{dy}{dx}\right)f'(xy)+\frac{\cos x}{1+\sin x}$

解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{3yf'(xy)+\frac{\cos x}{1+\sin x}}{1-3xf'(xy)}$

【考点延伸】《考试宝典》专题二，2.4 复合函数求导法则

3、【解析】由参数方程，知$x'(t)=6t+2,y'(t)=(3t+1)\sin t^{2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{(3t+1)\sin t^{2}}{6t+2}=\frac{1}{2}\sin t^{2},\quad \frac{d^{2}y}{dx^{2}}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{t\cos t^{2}}{6t+2}$$

于是，$\left.\frac{d^{2}y}{dx^{2}}\right|_{t=\sqrt{\pi}}=\frac{-\sqrt{\pi}}{6\sqrt{\pi}+2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题二，3.3 参数方程求导

4、【解析】$\int_{-1}^{1}\frac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x^{2}}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^{2}}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x^{2}}}dx=2\int_{0}^{1}\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^{2}}}dx,$

令$x=\tan^{3}t$，有$\int_{0}^{1}\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^{2}}}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^{2}t}.3\tan^{2}t\cdot\sec^{2}tdt$

$$=3\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2}tdt=3\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\sec^{2}t-1)dt==3\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

从而$\int_{-1}^{1}\frac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x^{2}}}dx=2\int_{0}^{1}\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^{2}}}dx=6\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

【考点延伸】《考试宝典》专题五，1.3 定积分的特殊性质

5、【解析】$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{2}\sqrt{x^{2}-1}}dx=\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{3}\sqrt{1-\frac{1}{x^{2}}}}dx$

$$=-\frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^{2}}}}d\frac{1}{x^{2}}=\left.\sqrt{1-\frac{1}{x^{2}}}\right|_{1}^{+\infty}=1$$

【考点延伸】《考试宝典》专题四 第三部分 换元积分法

6、【解析】原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-\sin x)+\ln(1+\sin x)}{\ln(1-\sin x)\cdot\ln(1+\sin x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-\sin^2x)}{\ln(1-\sin x)\cdot\ln(1+\sin x)}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2x}{-\sin^2x}=1$$

【考点延伸】《考试宝典》专题一{重要题型}题型 1. 不定型极限的计算问题

7、【解析】原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{\sqrt{1-x^3}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{-\frac{1}{2}x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sec^2x}{-\frac{3}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos^2x-1}{-\frac{3}{2}x^2}=\dfrac{2}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》专题一{重要题型}题型 1. 不定型极限的计算问题

8、【解析】原式$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\frac{1}{\cos^2x}\ln\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos^2x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-2\cos x\cdot\sin x}}=e^{-\frac{1}{2}}$

【考点延伸】《考试宝典》专题一{重要题型}题型 1. 不定型极限的计算问题

9、【解析】幂级数的系数$a_n=\dfrac{1}{n3^n}$，

由于$\lim\limits_{n\to0}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}}\right|=\dfrac{1}{3}$，于是幂级数$\lim\limits_{n=1}\dfrac{(x-2)^n}{n3^n}$的收敛半径$R=3$，

收敛区间为$x-2\in(-3,3)$，即$x\in(-1,5)$.

当$x=-1$时，幂级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，由莱布尼兹审敛法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$收敛,

当$x=5$时，幂级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，发散

故幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n3^n}$的收敛域为$[-1,5)$.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 3.2 幂级数及其收敛性.

10、【解析】$f(x)=\dfrac{1}{(x-3)(x+1)}=-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}x}+\dfrac{1}{1+x}\right)=-\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{3}x\right)^n+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\right]$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+(-1)^n\right]x^n,x\in(-1,1)$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 4.1 函数展开成幂级数

11、【解析】原式$=\displaystyle\int\frac{1}{x^3}\ln(1+x^2)dx+\int\frac{x}{1+x^2}\ln(1+x^2)dx$

$$=-\int \frac{1}{x}\ln(1+x^2)d\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\ln(1+x^2)dx^2$$

$$=-\frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)d\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)d\ln(1+x^2)$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}-\int \frac{1}{x^2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx\right]+\frac{1}{4}[\ln(1+x^2)]^2$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}-\int \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx^2\right]+\frac{1}{4}[\ln(1+x^2)]^2$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}-\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right]+\frac{1}{4}[\ln(1+x^2)]^2+C$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln x^2+\frac{1}{4}[\ln(1+x^2)]^2+C$$

【考点延伸】《考试宝典》专题四 {重要题型}题型 3 分部积分法

12、【解析】（1）由题意知，欲证结论为，存在$\xi\in(0,1)$,使得$\int_0^{\xi} f(x)dx=(1-\xi)\cdot f(\xi)$，

令$F(x)=\int_0^x f(t)dt-(1-x)\cdot f(x),\ x\in[0,1]$

$F(0)=-f(0)<0,F(1)=\int_0^1 f(x)dx>0$

由零点定理知，至少存在一点$\xi\in(0,1)$,使得$\int_0^{\xi} f(x)dx-(1-\xi)\cdot f(\xi)=0$，

即$\int_0^{\xi} f(x)dx=(1-\xi)\cdot f(\xi)=0$，得证.

（2）$F'(x)=f(x)+f(x)-(1-x)\cdot f'(x)=2f(x)+(x-1)f'(x)>0$.

所以$F(x)$在$[0,1]$区间内单调递增，故有且仅有一点$\xi\in(0,1)$,使得

$\int_0^{\xi} f(x)dx=(1-\xi)\cdot f(\xi)$，得证.

【考点延伸】《考试宝典》专题三 第三部分 中值定理

13、【解析】（1）$F(x)=x\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(u)du+\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{f(u)}{u^2}du$

$$F'(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(u)du+\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(u)du+\left(\frac{1}{x}-1\right)f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$F''(x)=\frac{x-1}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right)\quad(x>0)$$

（2）$F''(x)=0$时，$x=1$，当$x\in(0,1)$时，$F''(x)>0$，$F(x)$在$(0,1)$区间上是凹的，

当$x\in(1,+\infty)$时，$F''(x)<0$，$F(x)$在$(1,+\infty)$区间上是凸的，$(1,0)$为$F(x)$的拐点

【考点延伸】《考试宝典》专题三 1.3 凹凸性

14、【解析】（1）$a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^n x+\tan^{n+2}x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\cdot\sec^2 x\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,d\tan x=\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}\quad(n\geqslant 2)$$

$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时，$\tan x\in[0,1]$，所以当$n\geqslant 2$时，$\tan^n x\geqslant\tan^{n+1}x$,

于是有，$a_{n-2}+a_n>2a_n>a_n+a_{n+2}$，即$\frac{1}{n-1}>2a_n>\frac{1}{n+1}$，化简为

$\frac{1}{2(n+1)}<a_n<\frac{1}{2(n-1)}$,$(n\geqslant 2)$，得证

（2）$\sum_{n=2}^{\infty}|(-1)^n a_n|=\sum_{n=2}^{\infty}a_n>\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)}$，由于$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)}$发散，所以$\sum_{n=2}^{\infty}|(-1)^n a_n|$发散.

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n=a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7+\cdots$$

$$=(a_2+a_4+a_6+\cdots)-(a_3+a_5+a_7+\cdots)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n+2+1}-\frac{1}{4n+3+1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n+4)}<\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)^2}$$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)^2}$收敛，由正项级数比较判别法知$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n+4)}$收敛，

即$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛，所以$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n$条件收敛.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 2.2 绝对收敛与条件收敛