2017-2018 学年第一学期期末考试 A 卷

1.（8 分）设a，b为实常数，已知函数$f(x)=\begin{cases}(2017+x)^{x}+b, & x\geqslant 0\\ a(1-x)^{\frac{1}{x}}, & x<0\end{cases}$,在$x=0$处可导，试求$a$，$b$的值.

2.（7 分）计算极限值：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^{3}+x^{2}+1}-\sqrt[4]{x^{4}+1}\right)$.

3.（5 分）设$f(x)=\arctan x$，试求$f^{(2018)}(0)$的值.

4.（5 分）用$\varepsilon-N$语言证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2+1}{3n^2+4}=\dfrac{2}{3}$.

5.（5 分）设$f(t)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{t}\ ,t\neq 0\\ 1\ ，\ t=0\end{cases}$，又设$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$，试求$F'(0)$的值.

6.（10 分）设可导函数$y=y(x)$满足方程$x^y+y^x=2$，试求$dy\big|_{x=1}$.

7.（10 分）设$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=t-\sin t, t\in(0,1) \\ y=1-\cos t, t\in(0,1) \end{cases}$决定，试求$y'(x)$，$y''(x)$.

8.（7 分）求不定积分$\int \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx, x\in(-1,1)$.

9.（8 分）求函数$y=x^3-3|x|+1$的极值.

10.（8 分）计算反常积分$\int_{1}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$的值.

11.（7 分）从半径为$r>0$的圆形铁皮中剪去一个顶点在圆心的扇形，使卷起所得的漏斗具有最大的容积，问此时应剪去的扇形的中心角为多少？

12.（5 分）设$c<d$是两个实数，f是开区间(c,d)上的二阶可导数，且$\forall x \in (c,d), f''(x)>0$，试证明：$\forall x_1, x_2 \in (c,d)$，且$x_1<x_2$有$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

13.（7 分）（1）证明：$\forall n\in N,\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n dx$；

（2）$\forall n\in N$,记$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx$，证明：$\forall n\in N$，$n\geqslant 2$，有$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$；

（3）证明：$\forall n\in N^+$，$I_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2},\forall n\in N,I_{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$；

（4）证明*Wallis* 公式：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}$.

14.（8 分）（1）$\forall n\in Z^+$，令$a_n=\frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$，试证明正数数列$\{a_n\}$单调递减.从而由单调有界数列必有极限得数列$\{a_n\}$收敛，记其极限为$\alpha$；

（2）$\forall n\in Z^+$，令$b_n=a_n e^{-\frac{1}{4n}}$，试证明数列$\{b_n\}$单调递增.又$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\alpha$，由此可得$\alpha>0$；

（3）利用*Wallis* 公式证明$\alpha=\sqrt{2\pi}$；

（4）证明最简形式的*Stirling* 公式：$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n(n\to\infty)$.

2017-2018 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

1、【解析】因为 f 在 $x=0$ 处可导，所以 f 在 $x=0$ 处连续.利用连续性可得：$1+b=\dfrac{a}{e}$.

由左右导数的定义可得：

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{(2017+x)^{x}-1}{x}=\ln(2017), f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{a(1-x)^{\frac{1}{x}}-\frac{a}{e}}{x}=-\frac{a}{2e}.$$

再由 f 在 $x=0$ 处可导得：$\ln(2017)=-\dfrac{a}{2e}$，于是 $a=-2e\ln(2017)$，从而

$$b=\frac{a}{e}-1=-2\ln(2017)-1$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 1.1 可导性

2、【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^{3}}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{x^{4}}}\right)=\lim\limits_{t\to 0^{+}}\dfrac{\left(\sqrt[3]{1+t+t^{3}}-\sqrt[4]{1+t^{4}}\right)}{t}=\dfrac{1}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3 极限的计算

3、【解析】因为 $f'(x)=\dfrac{1}{x^{2}+1}$，所以有 $(1+x^{2})f'(x)=1$，两边求 $n(n\geq 2,n\in\mathbb{N})$ 阶导数得

$$(1+x^{2})f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0$$，令 $x=0$ 得：

$f^{(n+1)}(0)=-n(n-1)f^{(n-1)}(0)$.又 $f(0)=0,f'(0)=1$，

且 $f^{(2n)}(0)=-(2n-1)(2n-2)f^{(2n-2)}(0)$，于是 $f^{(2018)}(0)=0$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.5 求高阶导数

4、【解析】证明：$\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则 $\forall n>N$,有 $\left|\dfrac{2n^{2}+1}{3n^{2}+4}-\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{\frac{5}{3}}{3n^{2}+4}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$.

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^{2}+1}{3n^{2}+4}=\dfrac{2}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.1 极限的定义和性质

5、【解析】由题意知 $F(0)=0$,$x\neq 0$ 时,$F(x)=\lim\limits_{\epsilon\to 0^{+}}\displaystyle\int_{\varepsilon}^{x}\sin\frac{1}{t}dt=\lim\limits_{\epsilon\to 0^{+}}\int_{\varepsilon}^{x}t^{2}d\left(\cos\frac{1}{t}\right)$

$$=\lim_{\epsilon\to 0^{+}}\left[t^{2}\cos\frac{1}{t}\Big|_{\varepsilon}^{x}-\int_{\varepsilon}^{x}\cos\frac{1}{t}d(t^{2})\right]=x^{2}\cos\frac{1}{x}-\int_{0}^{x}g(t)dt,$$

其中 $g(t)=\begin{cases}2t\cos\dfrac{1}{t},t\neq 0;\\0\qquad\quad ,t=0\end{cases}$.于是由导数的定义有：

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}-\int_0^x g(t)dt}{x}=\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}-\lim_{x\to 0}2x\cos\frac{1}{x}=0$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 1.1 可导性

6、【解析】由$x^y+y^x=2$得$y(1)=1$，由$x^{y(x)}+[y(x)]^x=2$两边关于x求导得

$$y'(x)=-\frac{x^{y-1}y+y^x\ln y}{x^y\ln x+xy^{x-1}},\ 令x=1得y'(1)=-1，于是dy\big|_{x=1}=-dx$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.2 隐函数求导.

7、【解析】$y'(x)$由参数方程$\begin{cases}x=t-\sin t,t\in(0,1)\\ y'=\dfrac{\sin t}{1-\cos t},t\in(0,1)\end{cases}$决定.

$y''(x)$由参数方程$\begin{cases}x=t-\sin t,t\in(0,1)\\ y''=\dfrac{-1}{(1-\cos t)^2},t\in(0,1)\end{cases}$决定

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.3 参数方程求导

8、【解析】原式$=x\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=x\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}-\dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2}+c$

【考点延伸】《考试宝典》专题四 1.2 不定积分的基本性质

9、【解析】$y=f(x)=\begin{cases}x^3-3x+1,x\geqslant 0\\ x^3+3x+1,x<0\end{cases}$，$x=0$为不可导点，又$0<x<1$，

$f'(x)=3x^2-3<0;x<0,f'(x)=3x^2+3>0$，于是$x=0$为极大值点，即$y(0)=1$为极大值.$x=1$为唯一驻点.又$f''(1)=6>0$，于是$x=1$为极小值点，即$y(1)=-1$为极小值.

【考点延伸】《考试宝典》专题三 1.1 极值点

10、【解析】$x>0$，$\displaystyle\int\frac{\arctan x}{x^2}dx=-\frac{\arctan x}{x}+\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+c$，于是原式

$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\arctan x}{x^2}dx$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\arctan b}{b}+\frac{1}{2}\ln\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

【考点延伸】《考试宝典》专题五 3.1 反常积分的定义

11、【解析】设剪去的中心角为θ，则卷起的漏斗的体积为$V=\frac{1}{3}\pi r^3\sqrt{1-\left(1-\frac{\theta}{2\pi}\right)^2}\left(1-\frac{\theta}{2\pi}\right)^2$，

为了计算方便，令$x=1-\frac{\theta}{2\pi}$,$f(x)=\frac{1}{3}\pi r^3\sqrt{1-x^2}x^2,x\in[0,1]$，求$f$在区间

$[0,1]$上的最大值，可得：$x=\sqrt{\frac{2}{3}}$时f最大.于是此时$\theta=2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

【考点延伸】《考试宝典》专题三 导数的应用

12、【解析】$\frac{1}{2}(x_1+x_2)$是x_1和x_2的中点，也是$(\forall\lambda\in[0,1])x_1+\lambda(x_2-x_1)$与

$x_2-\lambda(x_2-x_1)$的中点.又 $\forall x\in(c,d),f''(x)>0$，所以$f$为$(c,d)$上的凹函数.

于是有不等式$\frac{1}{2}[f(x_1+\lambda(x_2-x_1))+f(x_2-\lambda(x_2-x_1))]\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

上式两边对λ从 0 到 1 积分得：$\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

另一方面，由于f为(c,d)上的凹函数，又可得：

$$\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt=\int_0^1 f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)d\lambda\leqslant\int_0^1[\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1)]d\lambda$$
$$=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题三 1.3 凹凸性

13、【解析】(1) 令$x=\frac{\pi}{2}-t$代入等式左边得，

$$\text{左边}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)^n d\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^n dt=\text{右边}.$$

（2）分部积分得

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{n-1}d(-\cos x)=-(\sin x)^{n-1}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x d(\sin x)^{n-1}$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{n-2}(\cos x)^2dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

于是有$\forall n\in N$，$n\geqslant2$，有$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

（3）$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2},I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=1$；

$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}I_{2n-2}=\cdots=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}I_0=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$;

$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}I_{2n-1}=\cdots=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}I_1=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

（4）因为$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时有$0<\sin x<1$.于是此时有

$(\sin x)^{2n+2}<(\sin x)^{2n+1}<(\sin x)^{n}$，从而有$\frac{2n+1}{2n+2}I_{2n}=I_{2n+2}<I_{2n+1}<I_{2n}$，

又$I_{2n}>0$，两边除以I_{2n}即得$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=1$

将（3）中的结果代入得$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{2}{\pi}=1$整理即得*Wallis* 公式.

【考点延伸】《考试宝典》专题五 定积分

14、【解析】（1）令$C_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$，利用$f(x)=\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$为凹函数，

在 12 题中，令$x_1=n,x_2=n+1$代入得$\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$.

整理得 $0\leqslant\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$.

于是有$1\leqslant e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}=\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}$.

从而有正数数列$\{a_n\}$单调递减

（2）又从（1）式的右边不等式有数列$\{b_n\}$单调递增；于是有$\alpha\geqslant a_1e^{-\frac{1}{4}}=e^{\frac{3}{4}}>0$.

（3）由$a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$得$n!=a_n\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$，代入*Wallis* 公式得

$\sqrt{\pi}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(a_n)^2}{a_{2n}\sqrt{2}}=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$，从而有$\alpha=\sqrt{2\pi}$.

（4）由（3）得：$n!=a_n\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$，且$a_n\to\sqrt{2\pi}\,(n\to\infty)$，故

$$\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = a_n \to \sqrt{2\pi}\,(n \to \infty),$$

即 $$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \to 1(n \to \infty)$$

【考点延伸】《考试宝典》专题一【重要题型】证明数列极限存在