微积分乙 2018-2019 学年第一学期期中考试试卷

一、填空题(24 分)

1．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!\cdot(4n)!}{(2n)!\cdot(3n)!}=$__________.

2．曲线 $\begin{cases}x=3t^2-5t-1\\ y=\ln(t-1)+3\end{cases}$ 在 $x=1$ 处的切线方程____________.

3．若 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan 2x-xf(x)}{x^3}\right)=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2-f(x)}{x^2}\right)=$___________.

4．函数 $y=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$ 的间断点及其类型为________________.

5．设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x^5+7x^4+3\right)^a-x\right]=b\neq0$, 则常数 a=_______，b=________.

6．设 $y=y(x)$ 是由方程 $y=x+\arctan y$ 确定的函数，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$__________.

二、求下列极限(10 分)

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(e^{x^2}+\ln(1+x^2)\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$；

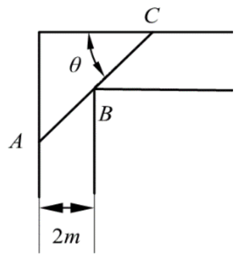
(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$

三、(10 分)设 $X_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{i}{n^2}}-1\right)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n$

四、(10 分）设 $a_1=2, a_2=2+\dfrac{1}{a_1}$,L ，$a_n=2+\dfrac{1}{a_{n-1}}$,L ，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求其值。

五、（**12 分**）设$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$，求$f^{(n)}(x)$.

六、（**12 分**）宽为 2 米的走廊与另一走廊垂直相交，要使长为 16 米的细杆能水平的移动通过走廊拐角，问另一走廊宽度 b 至少是几米？



七、**(12 分)**设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微，且 $f''(0)$ 存在， $f(0)=0$，

(1)函数 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, x\neq 0\\ f'(0), x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处是否连续？是否可导？并说明理由;

(2)求出 $g(x)$ 的导函数表达式。

八、（**10 分**）设 $f_n(x)=1-(1-\cos x)^n, n=1,2,3,.......$，求证：

(1)对任意正整数 n，方程 $f_n(x)=\dfrac{1}{2}$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$中仅有一根，

(2)若有 $x_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,满足$f_n(x_n)=\dfrac{1}{2}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\pi}{2}$.

2018-2019 学年第一学期期中考试试卷参考答案

一、填空题(24 分)

1、【正解】$+\infty$

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!\cdot(4n)!}{(2n)!\cdot(3n)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n)!}{(3n)!}\cdot\dfrac{n!}{(2n)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n)\cdot\cdots\cdot(3n+1)}{(2n)\cdot\cdots\cdot(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\cdot\cdots\cdot\left(3+\frac{1}{n}\right)}{2\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

$=+\infty.$

【考点延伸】专题一 函数、极限、连续性 第二部分 极限 2.3、极限的计算

2、【正解】$y=\dfrac{1}{7}x+\dfrac{20}{7}$

【解析】容易得到$\begin{cases}x'(t)=6t-5\\ y'(t)=\dfrac{1}{t-1}\end{cases}$，$x=1$时，得到$t_1=2$，$t_2=-\dfrac{1}{3}$， 由于$y=\ln(t-1)+3$中要求

$t>1$，则$t=2$，则$y=3$，故$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{1}{7}$，因此切线方程$y-3=\dfrac{1}{7}(x-1)\Rightarrow y=\dfrac{1}{7}x+\dfrac{20}{7}.$

【考点延伸】专题二 导数、微分 第三部分 求导类型 3.3、参数方程求导

3、【正解】$-\dfrac{8}{3}$

【解析】当$x\to0$时，有$\tan2x\backsim2x+\dfrac{8}{3}x^3+o(8x^3)$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan2x-xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2x+\frac{8}{3}x^3+o(8x^3)-xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2-f(x)}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\frac{8}{3}x^3+o(8x^3)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2-f(x)}{x^2}+\frac{8}{3}=0\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{2-f(x)}{x^2}=-\frac{8}{3}.$$

【考点延伸】专题一 函数、极限、连续性 第二部分 极限 2.3、极限的计算

4、【正解】$x=0$为无穷间断点，$x=1$为跳跃间断点

【解析】间断点：$x=1$，$x=0$，由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}=\infty$，因此$x=0$为无穷间断点；有$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}=$

$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{1-e^{\frac{t+1}{t}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1-e^{1+x}}=-\dfrac{1}{e}$，$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}=\lim\limits_{t\to0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{1-e^{\frac{t+1}{t}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1-e^{1+x}}=0$，因此

$x=1$为跳跃间断点。

【考点延伸】专题一 函数、极限、连续性 【重要题型】题型 4：判断函数连续性和间断点

5、【正解】 $\frac{1}{5}$；$\frac{7}{5}$

【解析】 $\lim\limits_{x\to\infty}[(x^5+7x^4+3)^a-x]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{x^5}+\frac{7}{x^4}+3\right)^a-\frac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3x^5+7x+1)^a-x^{5a-1}}{x^{5a}}$

该极限存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}[(3x^5+7x+1)^a-x^{5a-1}]=0\Rightarrow a=\frac{1}{5}$，带入得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{5}(3x^5+7x)}{x}=\frac{7}{5}=b$.

【考点延伸】专题一 函数、极限、连续性 【重要题型】题型 5：求极限表达式中的未知参数

6、【正解】 $-\frac{2(y^2+1)}{y^5}$

【解析】对等式两端关于 x 求导：$\frac{dy}{dx}=1+\frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=1+\frac{1}{y^2}$，再求导得到：$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2}{y^3}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{y^3}\cdot\frac{y^2+1}{y^2}=-\frac{2(y^2+1)}{y^5}.$$

【考点延伸】专题二 导数、微分 第三部分 求导类型 3.5、求高阶导数

二、求下列极限(10 分)

【解析】1、$\lim\limits_{x\to 0}(e^{x^2}+\ln(1+x^2))^{\frac{1}{1-\cos x}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^{x^2}+\ln(1+x^2))}{1-\cos x}\right\}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^{x^2}+\ln(1+x^2))}{1-\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^{x^2}+\ln(1+x^2))}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\ln\left(1+\frac{\ln(1+x^2)}{e^{x^2}}\right)}{\frac{x^2}{2}}=2+\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x^2)}{x^2e^{x^2}}=2+\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2e^{x^2}}$$

$=4$，因此 $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x^2}+\ln(1+x^2))^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^4$.

2、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\cdot\frac{\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}-1}{x}=e\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2\ln(1+x)-\ln(1+2x)}{2x}}-1}{x}$

$=e\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)-\ln(1+2x)}{2x^2}$，当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\backsim x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$，

$\ln(1+2x)\backsim 2x-2x^2+o(4x^2)$，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)-\ln(1+2x)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x-x^2+o(x^2))-(2x-2x^2+o(4x^2))}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}=\frac{e}{2}$.

【考点延伸】专题一 函数、极限、连续性 第二部分 极限 2.3、极限的计算

三、【解析】利用拉格朗日中值定理 $\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}-1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\theta\frac{i}{n^2}}}\cdot\frac{i}{n^2}$，$\theta\in(0,1)$，可以得到

$1\leqslant\sqrt{1+\theta\frac{i}{n^2}}\leqslant\sqrt{1+\frac{1}{n}}$，因此 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\cdot\frac{i}{n^2}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}-1\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{i}{n^2}$，由于

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\cdot\frac{i}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\int_0^1 xdx=\frac{1}{4}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{i}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^1 xdx$

$=\frac{1}{4}$，由夹逼准则可以得到 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=\frac{1}{4}$.

【考点延伸】专题三 导数的应用、中值定理 第三部分 中值定理 3.2、拉格朗日中值定理

专题一 函数、极限、连续性 第二部分 极限 2.3、极限的计算

四、【解析】容易得到 $a_n>2$，有 $|a_{n+1}-a_n|=\left|2+\frac{1}{a_n}-2-\frac{1}{a_{n-1}}\right|=\frac{|a_n-a_{n-1}|}{a_na_{n-1}}<\frac{|a_n-a_{n-1}|}{4}$，说明 $\{a_n\}$ 是压缩数列，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则由 $a_n=2+\frac{1}{a_{n-1}}$ 得到 $A=2+\frac{1}{A}$，求解得到 $A=1\pm\sqrt{2}$，而 $a_n>2$，则 $A=1+\sqrt{2}$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1+\sqrt{2}$.

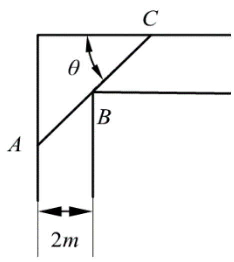
【考点延伸】专题一 函数、极限、连续性 【重要题型】题型 3：证明数列极限存在

五、【解析】令 $u(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$，$v(x)=x$，有 $\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(k)}=(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^k}\frac{1}{(1+x)^{\frac{2k+1}{2}}}$，利用莱布尼茨公式可以得到 $f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'=$

$(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n}\frac{x}{(1+x)^{\frac{2n+1}{2}}}+(-1)^{n-1}\frac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}}\frac{1}{(1+x)^{\frac{2n-1}{2}}}$.

【考点延伸】专题二 导数、微分 【重要题型】题型 3：求高阶导数

六、【解析】设细杆与另一端走廊的夹角为 $\theta\,(0<\theta<2\pi)$，则 $AB=\frac{2}{\cos\theta}$，$BC=16-\frac{2}{\cos\theta}$，依题意 $b(\theta)=BC\sin\theta=16\sin\theta-2\tan\theta$ 要最小，有 $b'(\theta)=16\cos\theta-2\sec^2\theta=0$ 求解得到 $\cos^3\theta=\frac{1}{8}\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$，因为 $b(\theta)$ 只有一个极值，则必定为极小值，因此另一侧的走廊宽度至少为 $b_{\min}=6\sqrt{3}$.



【考点延伸】专题三 导数的应用、中值定理 第一部分 极值、最值和凹凸性 1.2、最值

七、【解析】1、连续性：$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)=g(0)$，因此$g(x)$在$x=0$处连

续；是否可导：$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-xf'(0)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{f''(0)}{2}$存在，因此$g(x)$在$x=0$处可导。

2、当$x\neq 0$时，$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，由第 1 小问知当$x=0$时，$g'(0)=\dfrac{f''(0)}{2}$，由于

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf''(x)}{2x}=\dfrac{f''(0)}{2}$，则$g'(x)$在点$x=0$是连续的，因此

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{f''(0)}{2}, & x=0\end{cases}.$$

【考点延伸】专题一 函数、极限、连续性 【重要题型】 题型 4：判断函数连续性和间断点
专题二 导数、微分 第一部分 基本概念 1.1、可导性

八、【解析】1、令$g_n(x)=f_n(x)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-(1-\cos x)^n$，有$g_n(0)=\dfrac{1}{2}-(1-\cos 0)^n=\dfrac{1}{2}>0$，

$g_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-\left(1-\cos\dfrac{\pi}{2}\right)^n=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}<0$，由零点存在定理可知，$g_n(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上至少

有一个根，下面证明唯一性：有$g_n'(x)=-n(1-\cos x)^{n-1}\sin x<0$对$\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$均成立，因此

$g_n(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上严格单调减少，因此$g_n(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上有且仅有一个根.

2、有$f_n(x_n)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow(1-\cos x_n)^n=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x_n=\arccos\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)$，有$x_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\arccos\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)=\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}$.

【考点延伸】专题一 函数、极限、连续性 第二部分 极限 2.3、极限的计算