《微积分（甲、乙）Ⅰ》

微积分甲/乙 2021-2022 学年第一学期期中考试 A 卷

以下 1 至 10 题每题 7 分，11 至 13 题每题 10 分，答题时应该写出必要的解答过程.

1.已知：$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$，求常数$a$，$b$.

2.求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin x\arctan x}{\left(\sqrt{\cos x}-1\right)\ln(1+x)}$

3.设a，b，c为正数，求下列极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$

4.求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)$

5.定义函数$f(x)$在$x=0$处的值，使其在$x=0$处连续，并讨论在$x=0$处是否可导，其中：

$f(x)=\left(1+\sin^2\frac{1}{x}\right)^x$.

6.设$y=\frac{x^3}{2(x-1)^2}$，求y'，y''.

7.设函数$y=y(x)$由方程$\sin(xy)+\ln(y-x)=x$确定，求$y'(0)$，$y''(0)$.

8.设参数方程：$x=\ln(1+t^2)$，$y=t-\arctan t$，求$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$.

9.求极限：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，其中$f(x)=\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{\cos x+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}$.

10.设 $f(x)=x\ln(1+x)$，求 $f^{(100)}(x)$.

11.设函数 $f(x)=e^{\frac{x}{x-1}}-1$，求函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 的间断点，并判断它们的类型.

12.设数列 $\{x_n\}$ 满足：$0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$，$n=1$，$2$，$\cdots$，试证：此数列极限存在，并求极限.

13.设函数 $f(x)$，$g(x)$ 定义在 $\boldsymbol{R}$ 上，且有(1) $f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$；(2) $f(x)$，$g(x)$ 在 $x=0$ 处可导；(3) $f(0)=0$，$g(0)=1$，$f'(0)=1$，$g'(0)=0$.

证明：$f(x)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上可导，且 $f'(x)=g(x)$.

2021-2022 学年第一学期期中考试 A 卷参考答案

以下 1 至 10 题每题 7 分，11 至 13 题每题 10 分，答题时应该写出必要的解答过程.

1.【解析】$I=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(1-a^2)x-(1+2ab)+\frac{1-b^2}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{b}{x}}=0$，因此得到$1-a^2=0$，此时$I=\dfrac{1+2ab}{-1+a}=0$，那么得

到$\begin{cases}1-a^2=0\\1+2ab=0\\-1+a\neq 0\end{cases}\Rightarrow a=-1$，$b=\dfrac{1}{2}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 函数、极限、连续性 第二部分 极限

2.【解析】$\lim\limits_{\to 0}\dfrac{x\arcsin x\arctan x}{\left(\sqrt{\cos x}-1\right)\ln(1+x)}=\lim\limits_{\to 0}\dfrac{x^3}{x\cdot\frac{1}{2}(\cos x-1)}=-2\lim\limits_{\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=-4$.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 函数、极限、连续性 第二部分 极限

3.【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right)}{x}\right\}$

$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a(a^x-1)+b(b^x-1)+c(c^x-1)}{(a+b+c)x}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x+1}\ln a+b^{x+1}\ln b+c^{x+1}\ln c}{a+b+c}\right\}$

$=e^{\frac{\ln a^ab^bc^c}{a+b+c}}=(a^ab^bc^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 函数、极限、连续性 第二部分 极限

4.【解析】$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}+1}-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt[3]{1+x+x^3}-\sqrt{1+x+x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{1+x+x^2}\cdot\dfrac{\frac{\sqrt[3]{1+x+x^3}}{\sqrt{1+x+x^2}}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{3}\ln(1+x+x^3)-\frac{1}{2}\ln(1+x+x^2)}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{3}\ln(1+x+x^3)-\frac{1}{2}\ln(1+x+x^2)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{3}(x+x^3)-\frac{1}{2}(x+x^2)}{x}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{6}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 函数、极限、连续性 第二部分 极限

5.【解析】$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\sin^2\frac{1}{x}\right)^x=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0}x\ln\left(1+\sin^2\frac{1}{x}\right)\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\sin^2x)}{x}\right\}$

$=e^0=1$，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(0)=1$.下面讨论可导性：

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1+\sin^2\frac{1}{x}\right)^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln\left(1+\sin^2\frac{1}{x}\right)}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln\left(1+\sin^2\frac{1}{x}\right)}{x}$$

$=\lim\limits_{x\to0}\ln\left(1+\sin^2\frac{1}{x}\right)$，取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}\to0(n\to\infty)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\sin^2 2n\pi)=0$，取 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\to0$

$(n\to\infty)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\sin^2\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\ln2$，说明极限不存在，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 函数、极限、连续性 第二部分 极限 专题二 导数、微分

6.【解析】显然 $x\neq1$，则有 $x^3=2y(x-1)^2$，两边关于 x 求导得到

$$3x^2=2y'(x-1)^2+4y(x-1)\Rightarrow y'=\frac{3x^2-4y(x-1)}{2(x-1)^2}$$

即 $y'=\frac{3x^2}{2(x-1)^2}-\frac{x^3}{(x-1)^3}$.

继续对等式 $3x^2=2y'(x-1)^2+4y(x-1)$ 两边关于 x 求导得到

$$6x=2y''(x-1)^2+4y'(x-1)+4y'(x-1)+4y\Rightarrow y''=\frac{6x-8y'(x-1)-4y}{2(x-1)^2}$$

即 $y''=\frac{3x}{(x-1)^2}-\frac{6x^2}{(x-1)^3}+\frac{3x^3}{(x-1)^4}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题二 导数、微分 第一部分 基本概念

7.【解析】令 $x=0$，带入方程得到 $y=1$，对方程两边关于 x 求导得到

$$(y+xy')\cos(xy)+\frac{y'-1}{y-x}=1$$

带入 $x=0$，$y=1$ 得到 $y'(0)=1$.对上述等式继续求导得到

$$(y'+y'+xy'')\cos(xy)-(y+xy')^2\sin(xy)+\frac{y''(y-x)-(y'-1)^2}{(y-x)^2}=0$$

带入 $x=0$，$y=1$，$y'(0)=1$ 得到 $y''(0)=-2$.

【考点延伸】《考试宝典》专题二 导数、微分 第三部分 求导类型 3.2、隐函数求导

8.【解析】$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{1+t^2}\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=1-\dfrac{1}{1+t^2}=\dfrac{t^2}{1+t^2}\end{cases}$，因此 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2}$；$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\Big/\dfrac{dx}{dt}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1+t^2}{4t}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题二 导数、微分 第三部分 求导类型 3.3、参数方程求导

9.【解析】先考虑 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{\cos x+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$，此时 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$，而

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{\cos x+e^{\frac{2}{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+e^x}{\cos\frac{1}{x}+e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{e^x}+1}{\frac{\cos\frac{1}{x}}{e^x}+e^x}=0$，则 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0+1=1$；再考虑

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{\cos x+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$，此时 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0^-}-\dfrac{\sin x}{x}=-1$，而 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{\cos x+e^{\frac{2}{x}}}=$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{\cos x+e^{\frac{2}{x}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+e^x}{\cos\frac{1}{x}+e^{2x}}=2$，因此 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=2-1=1$，由于 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，因此 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 函数、极限、连续性 第二部分 极限

10.【解析】有 $[\ln(1+x)]^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$，$n\geqslant1$，利用莱布尼茨公式得到

$f^{(100)}(x)=x[\ln(1+x)]^{(100)}+C_{100}^1[\ln(1+x)]^{(99)}=x\cdot\dfrac{(-1)^{100-1}(100-1)!}{(1+x)^{100}}+\dfrac{100\cdot(-1)^{99-1}(99-1)!}{(1+x)^{99}}$

$=-\dfrac{99!x}{(1+x)^{100}}+\dfrac{100\cdot98!}{(1+x)^{99}}=\dfrac{98!(100+x)}{(1+x)^{100}}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题二 导数、微分 第二部分 求导法则

11.【解析】$f(x)$的定义域为$x\neq1$，$g(x)=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$的定义域为$x\neq1$，$x\neq0$，那么可能的间断点为$x=1$，$x=0$.对于$x=0$：$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=\infty$，因此$x=0$是第二类间断点；对

于$x=1$：当$\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}-1}=0$，$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}-1}$

$=-1$，左极限不等于右极限，但是左右极限均存在，因此是第一类间断点.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 函数、极限、连续性 题型 4：判断函数连续性和间断点

12.【解析】先证$0<x_n\leqslant\dfrac{3}{2}$，$n\geqslant 2$：显然有$x_n>0$，那么利用基本不等式得到$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\leqslant$

$\dfrac{x_n+3-x_n}{2}=\dfrac{3}{2}$，因此当$n\geqslant 2$时，有$0<x_n\leqslant\dfrac{3}{2}$.

另一方面$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\dfrac{3x_n-2x_n^2}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}=\dfrac{x_n(3-2x_n)}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}\geqslant 0$，即$x_{n+1}\geqslant x_n$，

说明数列$\{x_n\}$单调增加有上界，因此极限存在，不妨设为A，对等式$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$两边求极

限得到$A=\sqrt{A(3-A)}\Rightarrow A=\dfrac{3}{2}$ $(A=0$舍$)$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3}{2}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 函数、极限、连续性 题型 3：证明数列极限存在（单调有界定理的运用）

13.【解析】对$\forall x\in \boldsymbol{R}$，$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)g(\Delta x)+f(\Delta x)g(x)-f(x)}{\Delta x}$

结合条件(2)(3)可得$g'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(\Delta x)-1}{\Delta x}=0$，$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=1$，因此

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)g(\Delta x)+f(\Delta x)g(x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x)\cdot\frac{g(\Delta x)-1}{\Delta x}+g(x)\cdot\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\right]$$

$$=f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(\Delta x)-1}{\Delta x}+g(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=f(x)\cdot g'(0)+g(x)\cdot f'(0)=g(x)$$

即$f(x)$在$\boldsymbol{R}$上可导，且$f'(x)=g(x)$.

【考点延伸】《考试宝典》专题二 导数、微分 第一部分 基本概念 1.1、可导性