# 第一章 质点运动学

2015年9月19日 8:25

# 一、模型

2015年9月19日　　8:59

1. 对所研究的具体运动问题，如果不考虑物体的形变、自转，则可以将物体简化为一个几何点，并集中全部质量，称为质点.
2. 参考系
   a. 运动的相对性，依赖于观察者的位置，因此需要基准参考物.
   b. 固联在参考物上的坐标系$(x, y, z)$，校准好的时钟$(t)$.
   c. 时空坐标$(t, x, y, z)$.
   d. 位置矢量（displacement）$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.
      i. $\vec{r}(t)$给出质点轨迹.
      ii. $\vec{r}(t)$已知，则有$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$，称为运动学方程.
      iii. 若消去$t$，有$f(x, y, z) = 0$或$z = g(x, y)$，称为轨迹方程.
         1) 轨迹trajectory.
         2) 轨道orbit——是封闭的特殊轨迹.
3. 速度：质点运动改变的快慢.
   a. $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$
   b. 平均速率$\bar{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$.
   c. 瞬时速度（velocity）$\bar{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.
   d. 瞬时速率（speed）$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \left|(dr^{\to})/\, dt\right|$.
   e. 路程（distance）$s(t)$：质点沿轨迹运动过的距离
      i. 当$\Delta t \to 0, \Delta s = |\Delta\vec{r}|$，故$v = \frac{ds}{dt}$.
      ii. 运动轨迹的独立性方程：
         1) $v_x = \frac{dx}{dt}$
         2) $v_y = \frac{dy}{dt}$
         3) $v_z = \frac{dz}{dt}$
         4) $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

# 二、加速度

2015年9月21日　　17:11

1. 加速度的定义
    a. 平均加速度$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$
    b. 当$\Delta t \to 0$时，瞬时加速度（acceleration）$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$
    c. 加速度的分矢量
        i. $\overrightarrow{a_x} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2}$
        ii. $\overrightarrow{a_y} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{y}}{\mathrm{d}t^2}$
        iii. $\overrightarrow{a_z} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{z}}{\mathrm{d}t^2}$
2. 沿任意曲线轨迹运动质点的加速度
    a. $\Delta\vec{v} = \Delta\overrightarrow{v_\perp} + \Delta\overrightarrow{v_\parallel}$

       t: tangential

       n: normal
    b. $\vec{a} = \overrightarrow{a_\mathrm{n}} + \overrightarrow{a_t}$
        i. $\overrightarrow{a_t} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_{\vec{v}}}$
        ii. 当$\Delta t \to 0$时，轨迹近似于圆弧.
        iii. 定义曲率半径$R$，为密切圆半径.
            - 定义曲率$k = \frac{1}{R}$
        iv. 圆心角改变$\Delta\theta = \frac{v\Delta t}{R}$
        v. $\overrightarrow{a_\mathrm{n}} = \dfrac{\Delta\overrightarrow{v_\perp}}{\Delta t} = v \cdot \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} \cdot \overrightarrow{e_n} = \dfrac{v^2}{R} \cdot \overrightarrow{e_n}$
    c. 直线运动
        i. $R \to \infty, \overrightarrow{a_n} \to 0$
        ii. 曲率$k = 0$
    d. 匀速圆周运动
        i. $a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$
        ii. $\vec{a} = \overrightarrow{a_n} = -\dfrac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r}$
        iii. $\vec{a}$即被称呼为向心加速度.
    e. 曲线曲率：

i. $R(t)=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|}$

ii. $R(t)=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}}{[(\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y})^2+(\dot{z}\ddot{y}-\ddot{z}\dot{y})^z+(\dot{x}\ddot{z}-\ddot{x}\dot{z})^2]^{\frac{3}{2}}}$

iii. 曲率半径通常记为$\rho$.

# 三、坐标系

2015年9月23日　　20:56

1. 自然坐标系（动态坐标系）
    a. $\left(\hat{e}_1(t),\hat{e}_2(t),\hat{e}_3(t)\right)$
        i. $\hat{e}_1(t)=\hat{e}_{\vec{v}}$（切向）
        ii. $\hat{e}_2(t)=\hat{n}$（主法线方向）
        iii. $\hat{e}_3(t)=\hat{e}_1\times\hat{e}_2$（次法线方向）
    b. 加速度$\vec{a}(t)=a_t\hat{e}_1(t)+a_n\hat{e}_2(t)$
2. 角速度与圆周运动
    a. 定义角速度$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
        i. 方向：垂直于运动平面，右手螺旋.
        ii. 转速$n=\frac{\omega}{2\pi}$
        iii. 角加速度$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$
    b. $\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}\times\vec{r}$，方向沿切向（展开即可证明）.
    c. $\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{\omega}\times\vec{r})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$
    $=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$
        i. 若$\beta=0$，$\vec{a}=\overrightarrow{a_n}=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$，$|\vec{a}|=\omega^2|\vec{r}|\sin\alpha=\omega^2R$
        ii. 若$\beta\neq 0$，$|\overrightarrow{a_n}|=\omega^2R$，$\overrightarrow{a_t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}=\vec{\beta}\times\vec{r}$，$|\overrightarrow{a_t}|=\beta R$
3. 平面极坐标$(r,\theta)$
    a. 变换
        i. $x=r\cos\theta$
        ii. $\mathrm{y}=r\sin\theta$
        iii. $x^2+y^2=r^2$
    b. 正交曲线坐标系的动态基矢量：
        i. 径向基矢量$\hat{r}$.
        ii. 横向基矢量$\hat{\theta}$.
        iii. 注意基矢量随时间变化.
    c. 基本结论：
        i. $\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta}=-\hat{r}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{r}$

ii. $\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta}=\hat{\theta}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\theta}$

d. 平面极坐标下，速度、加速度的表达式

i. $\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(r\hat{r})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r}+r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r}+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\theta}$

1) 径向速度$\overrightarrow{v_r}=\dot{r}\hat{r}$.

2) 横向速度$\overrightarrow{v_\theta}=r\dot{\theta}\hat{\theta}$

ii. $\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{dt}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r}+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\theta}\right)}{\mathrm{d}t}$

$=\left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right)\hat{r}+\left(\frac{2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t^2}+r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right)\hat{\theta}$

1) 径向加速度$\overrightarrow{a_r}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\hat{r}$.

2) 横向加速度$\overrightarrow{a_\theta}=\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}\hat{r}$.

3) 径向加速度只改变径向速度，横向加速度只改变横向速度.

iii. 以轨迹$r=r(\varphi)$运动的质点各点上的曲率半径

1) $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$

2) $v=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right|\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+r^2}$

3) $\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\varphi^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$

4) $a_r=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2$

$=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\varphi^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2$

5) $a_\varphi=r\cdot\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{r\,\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2$

6) $$2v\cdot a_t=2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}$$

$$=2\left(\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\varphi^2}+r\frac{r}{\mathrm{d}\varphi}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^3\right.$$

$$\left.+\left(\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+r^2\right)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right)$$

7) $$a_n=\sqrt{a_r^2+a\varphi^2-a_t^2}$$

$$=\pm\frac{\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+r^2}}\left|r^2+2\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2-r\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\varphi^2}\right|$$

8) $$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{\left(r'(\varphi)^2+r^2(\varphi)\right)^{\frac{3}{2}}}{|r^2(\varphi)+2r'(\varphi)^2+r(\varphi)r''(\varphi)|}$$