数理逻辑思考题

by code-nowww小组

0.1~0.3

- 什么是“证明”？
- 什么是“计算”？
- “计算”与“证明”是什么关系？

> 证明是指在一个命题演算体系下，从公理，推理规则和前提集，进行推理，从而确定某个命题的正确性。
> 计算是指在给定符号，元素，计算规则的条件下，对一个“式子”的结果进行化简（或化繁），从而得到我们期望的结果。
> 计算和证明的关系：上述“式子”间通过逻辑关系（相等，大于小于等）可以连接成一个“命题”。因此“计算”可以用以"证明"; "证明"也可以用以"计算", 这是相互转换的。
> 以上思考(在讲过K_N之前的思考)在K_N中得到了某种程度上的证实:
> 通常而言，计算会由函数给出，而公式会由谓词之类的给出。而由于关系可表示和其特征函数可表示是等价的，又可计算的数论函数必然K_N可表示，因此“计算式”（对应计算）和“命题”（对应证明）之间可以相互转换（即前述相互印证，但应是数论函数层面而言）。
> 更进一步而言，设图灵机可计算函数集合TM，递归函数可计算集合REC，K_N可表示函数的集合为REP，有TM=REC=REP。这个定理也印证了可计算和可表示的等价关系。那么从这个角度而言，计算就能表示成公式以证明，证明也可以（通过哥德尔编码等）转化为计算。

0.4~0.8

- 0.4 例5中的天文观察结果是否证明了经典力学是假的，狭义相对论是真的？
- 0.5 如果在例5的基础上，还存在另一个命题q，使得$\Gamma_{\text{牛}}|-q,\Gamma_{\text{爱}}|-q$都成立，而科学实验的结果为：q是真的。这说明什么？
- 0.6 能否证明经典力学和狭义相对论的真假？其中，所谓的“证明”和“真假”是什么意思？
- 0.7 暴力法和训练法有没有“真假”？应该根据什么来评价它们？如何比较它们的优劣？

- 0.8 什么是常识？常识有什么应用？机器能具备并应用常识吗？

> 0.4 天文观察结果表明 |- ¬ p，而$\Gamma_{牛}|-p$, 因此由于归谬律，中$\Gamma_{牛}$一定会存在一个命题q为假。因此能说明经典力学是假的。但另一方面，却不能推出狭义相对论是真的，因为如果本身$\Gamma_{爱}$是矛盾公式集，由于平凡性原理，那么 $\Gamma_{爱}|-\neg q$是必然成立的，但从语义应用角度来看，这就没有任何意义了，因此不能认为狭义相对论为真。

> 0.5 由于紧致性原理，这能够说明$\Gamma_{牛}$和$\Gamma_{爱}$之间，存在相互可证的部分，而这个部分可以推导出q。在现实意义上来看，就是经典力学和狭义相对论体系一定程度上是互恰的。

> 0.6 从理论上来讲，在某个命题演算体系下，可以证明真假。例如，可能存在一个命题演算体系，包含了宇宙万物规律，那么就能够在这个体系下，去证明$\Gamma_{牛}$中的每一个命题都为真（或存在假命题），从而认为经典力学为真（或假）；狭义相对论体系同理。 这里的证明是指在某个命题演算体系下，根据这个体系的推理规则和公理集，能够推导出某个公式，那么就有了对这个公式的证明。而真假是语义层面上的含义，一般来说，如果从某个前提集Γ能够有Γ |- p（即得到p在Γ前提下的证明)，则可以判定其为真，否则为假（这是一种解释，当然也可以反过来认为，毕竟真假只是个符号）。

> 0.7 暴力法是有真假的。当进行暴力枚举后，就可以判定一个问题的真假。但训练法没有真假，比如神经网络的算法，是通过概率等方法来确定结果的，这个结果是有可能出错的。他们的优劣主要在于，暴力法可以准确回答问题，但是需要大量的前提知识和算力，效率极低；而训练法效率较高（虽然算力要求仍然不小），但结果不一定能得到保证（然而现实生活中，并不需要绝对完美的解答）。

> 0.8 常识就是类似内定理的东西。他们可以用于机器自动推理，因此机器也可以具备并应用常识

1.1

试用复合命题表达自然语言条件句“如果...则...”。

> "如果 p 则 q "可以表述为 p->q 即p蕴含q

1.2

同一律的证明是否必须使用(L1)？证明你的结论。

> 假设不必. 那么首先p->p并不是一个公理, 因此必然由MP规则和某些公理组合得到.
> 显然不会去使用L3而引入¬, 因此只会去考虑L2. 那么p->p只能是L2的后件的后件.
> 如果p->p是L2的后件的后件, 那么有(p->(q->p))->((p->q)->(p->p)), 因此需要证明⊢p->(q->p), 这就要用到L1了.

1.3

你以前理解的严格证明与命题演算L中的形式证明有何异同？L中的形式证明/推理有什么必要性？

> 异同总结如下：
>
> - 同：都是通过已知的一些公理，定理，及约定的推理方式，去从一个前提集或公理集推导出一些命题
> - 异：以前理解的严格证明仅仅是利用的所谓已知的定理范围极其广泛，甚至有很多是基于直觉得到的，并不能严格地像命题演算L这样形式化。
>   而命题演算L中，所有的定理都必须由给定公理和推理规则，一步一步地导出，不会存在类似“跳步”的操作。

> 必要性：
>
> 1. 就给定公理体系而言，L中的形式证明保证了所有结论都是在L下严格成立的，而不会像历史上出现的各种数学证明中，因为直觉等因素导致的错误，而这很多错误都在多年后才得以发现。
> 2. 就普遍情况而言，很多时候，基于直觉和经验，人们可能会把一个体系的公理前提限制死了，而L证明就是在告诉我们，一切证明都应该基于给定的公理和推理规则。这在历史上也是有的，比如曾经人们认为三角形内角和就一定是180°，然而这只是欧式几何下的情况，如果在非欧几何，这就截然不同，也因此衍生出其对应的科学学科，并促进各界发展。
>   3.L中的形式证明以合理的方式规范了证明语言的形式表达，是形式化公理系统能够完善存在的必要条件。以形式化的语言，通过有限长度的证明序列做出推理，有利于将推理工作在机器上运行。

1.4

演绎定理说明了什么？

> 直观上不严格地说，可以认为，如果一个命题作为前提给出，那么就可以拿它当作蕴含词的前件以得到后件的证明；反过来，如果有一个公式p->q, 那么只要p是一个前提，也能得出结论: 可以证明出q。
> 而这本质上其实需要涉及对公式的赋值。比方说，考虑这样一个语义推论：Γ∪{p} |= q 。它表明了只要p赋值为真，那么q也就赋值为真，而p赋值为假，那么q可真可假(平凡性)，从而知道Γ |= p->q。反过来也类似。而这正是表明了蕴含词必须解释为实质蕴含。
> 演绎定理的证明过程不需要 L3，故对于新的没有L3的命题演算系统，演绎定理仍然成立。

1.5

直接证明$\vdash (\neg p \to p) \to p$最少需要多少步？

> 19步

1.6

编程实现一个命题演算中形式推理$\Gamma \vdash p$的程序。

> Python实现用暴力搜索的方法从目标公式逆向推导。主要思路是构造一个证明二叉树（每一个公式要么是由MP规则的两个子公式推导出来的，要么是公理或者前提集中的公式（即作为叶子结点）。
>
> 程序代码见Github https://github.com/RabbitWhite1/InferenceEngine
>
> 使用方法是，
>
> 1. 运行程序: python main.py
> 2. 根据提示输入目标公式和前提集, 即可获得结果. 如下图所示，

1.7

语义后承与重言式有何关系？
下述论断是否成立？任给L(X)公式p和公式集Γ，存在公式q，使得$\Gamma \vDash p$当且仅当$\vDash q$。

> 第一个问题：
> 语义后承的定义是：任给L(X)公式p和公式集Γ，称p为Γ的一个语义后承/逻辑推论，记为

> Γ⊧p，如果对L的任何一个语义解释I，只要Γ中的所有公式q满足I(q)=t，则I(p)=t
> 重言式的定义是：若一个公式p只有成真指派，则称为重言式。
> 因此当公式集Γ=∅时，语义后承就变成了重言式。因此可以认为重言式是一种特殊的语义后承。

> 第二个问题：
> 若公式集Γ有限Γ = {q_1, q_2, ..., q_n}，可以考虑使用演绎定理。可以构造 q = (q_1 → (q_2 → (... → (q_n → p)))) (即递归地将Γ中公式结合进去)，这样使用n次演绎定理，就可以知道 Γ⊧p 当且仅当 ⊧q。
> 而若公式集Γ无限，由于紧致性，必然可以取到一个有限子集能够语义推出p，再由这个有限子集按照上述方法构造即可。
> 因此论断成立。

1.8

是否存在L公式p和公式集Γ，使得$\Gamma \vDash p$ 且 $\Gamma \vDash \neg p$？

> 只需要构造一个矛盾公式集Γ即可由平凡性推出。
>
> 或：Γ = {p, ¬p}

1.9

问题“$\Gamma \vdash p$”是不是可判定的

> 问题“$\Gamma \vdash p$”是半可判定的。按照老师给出的可判定定义： 存在一个能行方法A，对任何L 公 式p，当$\vdash p$成立时，A在有效时间内回答“是”；当$\vdash p$不成立 时，A在有效时间内回答“否”。
> 而由于有命题演算L的可靠性与完全性，$\Gamma \vdash p$ 的可判定性和 Γ |= p 的可判定性应是等价的.
> 而对于 Γ |= p , 当Γ有限的时候，由于公式p和Γ内的公式是 有限次 利用公式生成规则生成的，因此可以使用真值表，在有效时间内回答出 Γ |= p 成立与否，进而能够回答 $\Gamma \vdash p$ 成立与否，从而认为Γ有限时，$\Gamma \vdash p$ 是可判定的。
> 但Γ无限时，由紧致性定理，若预期判断 $\Gamma \vdash p$ 成立，则有有限子集$\Delta \subset \Gamma$,使得$\Delta \vdash p$,则由上面讨论可以判定 $\Gamma \vdash p$ 确实成立，但对于 $\Gamma \vdash p$ 预期不成立的情况则无法给出有限判断算法。

2.1

(K4)和(K5)中的约束条件有何意义？举例说明。

> (K4)中, 项t对p(x)中的x是自由的， 保证了从一般条件(∀xp(x))不会限制t的可选值, 从而完成了一般到特殊的转换. 举例来说, 取M=(N,V,{>}), 那么∀x∃yR(x, y)->∃yR(y, y)显然是不成立的.
> (K5)中, x不在p中自由出现, 保证了从特殊到一般的时候, 不会因为例外条件减少而失效. 举例来说有, 取p解释为x>5, q为x>6, 那么∀x(p->q)->(p->∀xq)的后件就表示x>5蕴含了对任意的x有x>6, 显然不正确.

2.2

下列判断是否成立？
若$\Gamma \vDash p$，则对一切解释I，如果对所有$q \in \Gamma$有$I(q) = t$，则$I(p) = t$。

> 不成立， 由语义推论的定义， 公式p 是公式集Γ 的语义推论，记作Γ ⊨ p， 指p 在Γ 的所有模型中都恒真。但在不是公式集Γ 模型的解释域中，Γ 的公式的真值是不确定的， 因此判断并不成立。
>
> e.g. 取D为正整数， 对于特定I,不能保证任意x>0(对应p）

2.3

“真”在一阶逻辑中有哪几个层次？

> 考虑在一阶逻辑中的话， 真主要有三个层次：M可满足， M有效， 逻辑有效
> I. M可满足关键在于“可”字， 即只要存在一个解释I=(M,V,v)， 使得I(p)=t即可。
> II. M有效则要求更高一点， 它要求对所有的V都能够有I(p)=t
> III. 逻辑有效是要求最高的， 它对于一切一阶结构M都要有p是M有效的

3.1

本节(3.1节)尝试给出的Γ = {(P1),(P2),(P3),(P4),(P5)}是否完全表达了自然数的Peano定义？

> 没有， 因为Γ中等词=并没有进行形式化定义， 根据非正规模型存在性定理， 不管如何扩

> 张，均存在非正规模型，使得等词“=”不解释为Peano中定义的相等，这就说明可以构造一个非正规模型M，使得在模型M中，Peano的定义不成立。
> 对照peano定义，(P4)没有将x，y取值限制在N范围内，应修改为∀x∀y(N(x)^N(y)->(x'=y'->x=y))，同理，

3.2

L是否“强迫”->解释为实质蕴涵?

> 这里强迫的意思，大概是要想让语法推理和语义推论变为相互充分必要的而必须做的事。
> 因而，如果要使L1, L2, L3能够成立(因为是公理), 就不得不如此解释.
> 具体而言, 解释的方法真值表总共有16种. 而要使三者都成立, 只能是解释为实质蕴含或解释为恒真.
> （根据思考题1.4，演绎定理要求了->需要被解释为实质蕴含而非恒真

3.3

Frege组合原则在一阶语义中的具体表现是什么？并举例说明你的看法。

> 张璐和赵曼的《逻辑语义学中的组合原》中提到，“令 A＝〈A， F〉和 B＝〈B，G〉，映射 h ：A →B是同态的，当且仅当，存在一个映射 h′：F→ G 使得对所有 f ∈ F和所有 a 1，… a n∈A都有： h （f （a 1，… a n））＝h′（f）（h （a 1），…， h （a n）） 令 A为句法代数， B为语义代数，则 h为满足 组合原则的意义指派。复合表达式 f （a 1，…， a n） 的意义 h （f （a 1，…， a n））就是其组成部分 h （a 1）， …， h （a n）与句法运算的意义 h′（f）所构成的函 项。”
>
> 从这个角度来看，Frege组合原则在一阶语义中，可以看做是 I=(M, V, v) 这个映射的作用。比如说I(P(a, b)) = P^M(I(a), I(b))， I(¬ b)) = ¬I(b) 等（其他的都类似).
>
> 下面举例：可以采用老师上课时用的例子， 考虑一阶语言K_0 (Y)和它的一个结构M=(N, ∅, {>})。考 虑K0 (Y)公式P(x, c)。由于c^M =0 (即c在M中解释为0)，P^M => (P 在M中解释为二元关系>)
>
> 那么这时, 若有一个个体常元a被解释为1, 那么I(P(a, c))就可以在Frege组合原则和相应解释的作用下，等价于P^M(I(a), I(b))，即1>0

> 如果根据Janssen在《组合性》中给出的定义："假设表达式E是由部分E1和E2依据某种句法规则生成的，组合原则要求E的语义M(E)可以通过E1和E2各自的语义M(E1)和M(E2)并根据某终于以规则对他们进行组合而得到。“可以认为在一阶语义中赋予了逻辑的扩展性：即通过各种连接词、否定词和量词在原有的命题上进行扩展，可以理解为是推理或者赋值的过程。
>
> 例如我们将p记作E_1，q记作E_2，取$p \to q$为E，M定义为某一赋值I，最终可以得到$I(p \to q)$的语义，则可以对应到该定义。