单变量微积分期末复习

中国科学技术大学 数学科学学院

December 28, 2018

原函数定义说明

原函数定义说明

1. 若函数$f(x)$ 存在原函数，则其原函数不是唯一的。

原函数定义说明

1. 若函数$f(x)$ 存在原函数，则其原函数不是唯一的。
2. 若$f(x)$ 在区间I 上连续，则$f(x)$ 在I 上存在原函数.

原函数定义说明

1. 若函数$f(x)$ 存在原函数，则其原函数不是唯一的。
2. 若$f(x)$ 在区间I 上连续，则$f(x)$ 在I 上存在原函数.

   ◇连续是存在原函数的充分条件，并非必要条件。

原函数定义说明

1. 若函数$f(x)$ 存在原函数，则其原函数不是唯一的。
2. 若$f(x)$ 在区间I 上连续，则$f(x)$ 在I 上存在原函数.

   ◇连续是存在原函数的充分条件，并非必要条件。

   ◇初等函数在其定义域内必存在原函数（但其原函数不一定仍是初等函数）

原函数定义说明

1. 若函数$f(x)$ 存在原函数，则其原函数不是唯一的。
2. 若$f(x)$ 在区间I 上连续，则$f(x)$ 在I 上存在原函数.

   ◇连续是存在原函数的充分条件，并非必要条件。

   ◇初等函数在其定义域内必存在原函数（但其原函数不一定仍是初等函数）
3. 如果$F(x)$是$f(x)$ 在区间I的一个原函数，则$f(x)$是$F(x)$的导函数，由导函数的性质可知，$f(x)$在包含跳跃点，无穷间断点的区间内没有原函数.

原函数定义说明

1. 若函数$f(x)$ 存在原函数，则其原函数不是唯一的。
2. 若$f(x)$ 在区间I 上连续，则$f(x)$ 在I 上存在原函数.

   ◇连续是存在原函数的充分条件，并非必要条件。

   ◇初等函数在其定义域内必存在原函数（但其原函数不一定仍是初等函数）
3. 如果$F(x)$是$f(x)$ 在区间I的一个原函数，则$f(x)$是$F(x)$的导函数，由导函数的性质可知，$f(x)$在包含跳跃点，无穷间断点的区间内没有原函数.
4. 如果$F(x)$是$f(x)$ 在区间I的一个原函数, 则$F(x)$在I上可导，从而$F(x)$在区间I连续

Definition

设$F(x)$是函数$f(x)$在区间I上的一个原函数，函数$f(x)$ 在区间I上的原函数的全体称$\{F(x)+C\}$为$f(x)$在I 上的不定积分。

Definition

设$F(x)$是函数$f(x)$在区间I上的一个原函数，函数$f(x)$ 在区间I上的原函数的全体称$\{F(x)+C\}$为$f(x)$在I 上的不定积分。

不定积分定义说明

1. $f(x)$ 的不定积分是一个函数族$\{F(x)+C\}$，而不是一个函数，其中C是任意常数，写结果时必须写上.
2. 因为同一个函数的原函数之间相差一个常数，所以一个函数的不定积分用不同方法计算的结果可能不同，它们只差一个常数.
3. 原函数与不定积分必须指明函数的定义区间.

定积分定义说明

1. 定积分的定义是构造性的，分为四个步骤：分割–近似–求和–取极限。
2. 求和的结果称为黎曼和，黎曼和与分割方式及取点方式有关，但极限值只与被积函数和积分区间有关，与分割，取点方法无关。
3. 如果对于特殊分割方式和取点方法，黎曼和极限存在，不能说明定积分存在。但如果定积分存在可以利用特殊方法来计算积分得值。

定积分定义说明

1. 定积分的定义是构造性的，分为四个步骤：分割–近似–求和–取极限。
2. 求和的结果称为黎曼和，黎曼和与分割方式及取点方式有关，但极限值只与被积函数和积分区间有关，与分割，取点方法无关。
3. 如果对于特殊分割方式和取点方法，黎曼和极限存在，不能说明定积分存在。但如果定积分存在可以利用特殊方法来计算积分得值。

可积函数类

区间$[a,b]$上的连续函数；

区间$[a,b]$上只有有限个间断点的有界函数；

区间$[a,b]$上的单调函数.

1.下列命题正确的是(　　)

A 若函数黎曼可积, 则其必有原函数.

B 即使有限闭区间上的函数$f(x)$为某一函数的导数，

但$f(x)$不一定黎曼可积.

C 若函数$f(x)$在有界闭区间$[a,b]$上黎曼可积，则存在$\xi\in(a,b)$，

使得$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

D 若函数$f(x)$在有界闭区间$[a,b]$上有定义，且只有

有限个间断点，则$f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积.

2. 下列命题正确的是(　　)

A 若f^2在$[a,b]$可积, 则f在$[a,b]$可积.

B $[a,b]$上的单调有界函数必可积.

C 若函数$f(x)$在有界闭区间$[a,b]$上存在原函数，则f在$[a,b]$可积.

D 若$f(x)$在$[a,b]$可积，则f在$[a,b]$必存在原函数.

2. 下列命题正确的是(　　)

A 若f^2在$[a,b]$可积, 则f在$[a,b]$可积.

B $[a,b]$上的单调有界函数必可积.

C 若函数$f(x)$在有界闭区间$[a,b]$上存在原函数，则f在$[a,b]$可积.

D 若$f(x)$在$[a,b]$可积，则f在$[a,b]$必存在原函数.

3.下列等式正确的是(　　)

A $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(x)$.　　B $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$.

C $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a)$.　　D $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)$.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$, p是正常数.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k^2}$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n+1}+\dfrac{\ln(1+\frac{2}{n})}{n+2}+\cdots+\dfrac{\ln(1+\frac{n}{n})}{n+n}\right)$.

5. 已知$f(x)=e^{x^3}$, 求$\lim\limits_{n\to+\infty}\big(f(1)f(2)\cdots f(n)\big)^{\frac{1}{n^4}}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$.

不定积分计算

换元法

第一换元法	第二换元法
$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$ $=\int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x)$ $=\int f(u)\mathrm{d}u$ $=F(u)+C$ $=F(\varphi(x))+C.$	$\int f(u)\mathrm{d}u$ $=\int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x)$ $=\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$ $=F(x)+C$ $=F(\varphi^{-1}(u))+C.$

分部积分法

$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 或

$\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x)$

有理函数的积分

1.部分分式分解。

$$\frac{\alpha}{x+a},\qquad \frac{\alpha}{(x+a)^k},\qquad \frac{mx+n}{x^2+bx+c},\qquad \frac{mx+n}{(x^2+bx+c)^k}$$

2.简单分式的积分。

三角函数有理式的积分

令$t=\tan\dfrac{x}{2}$，则

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$\int R(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

含简单根式的有理式的积分

第一类：$\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x, \quad (ad-bc\neq 0).$

第二类：$\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x, \quad (a\neq 0,\ b^2-4ac\neq 0).$

含简单根式的有理式的积分

第一类：$\displaystyle\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x,\quad (ad-bc\neq 0).$

第二类：$\displaystyle\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x,\quad (a\neq 0,\ b^2-4ac\neq 0).$

小结

由基本积分公式 $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x \to F(x)+C$

通过恒等变换(三角、代数) $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x \to \int g(x)\mathrm{d}x$

第一换元法: $u=u(x)\to\int f(u(x))\mathrm{d}u(x)=F(u)+C$

第二换元法: $x=\varphi(t)\to\int f(x)\mathrm{d}x=\int g(t)\mathrm{d}t=G(t)+C.$

分部积分法: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x).$

定积分的计算

1. 牛顿-莱布尼兹公式
   设$f(x)$在区间$[a,b]$上黎曼可积，$F(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数,
   $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.
2. 换元积分法
   函数$f(x)$ 在$[c,d]$ 上连续，$x=\varphi(t)$ 在$[\alpha,\beta]$上有连续导数，$\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$,则有定积分的换元积分公式：
   $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.
3. 分部积分法
   $u(x), v(x)$在$[a,b]$上有连续的导数，则有定积分的分部积分公式：
   $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\mathrm{d}(v(x)) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)$

$$1.\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{f(x)是奇函数} \\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{f(x)是偶函数} \end{cases}$$

$$1.\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{f(x)是奇函数} \\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{f(x)是偶函数} \end{cases}$$

$$2.\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x) + f(-x)\mathrm{d}x$$

$$1. \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{f(x)是奇函数} \\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{f(x)是偶函数} \end{cases}$$

$$2. \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x) + f(-x)\mathrm{d}x$$

$$3. \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f(x) + f(a+b-x)\mathrm{d}x$$

$$1.\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{f(x)是奇函数} \\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{f(x)是偶函数} \end{cases}$$

$$2.\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x) + f(-x)\mathrm{d}x$$

$$3.\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f(x) + f(a+b-x)\mathrm{d}x$$

4.$f(x)$是以T为周期的可积函数，则

$$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$$

$$1.\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{f(x)是奇函数} \\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{f(x)是偶函数} \end{cases}$$

$$2.\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x) + f(-x)\mathrm{d}x$$

$$3.\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f(x) + f(a+b-x)\mathrm{d}x$$

4.$f(x)$是以T为周期的可积函数，则

$$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$$

5.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!}, & n\text{是奇数} \\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{是偶数} \end{cases}$$

1.计算下列不定积分。

(1) $\int x^2e^x\mathrm{d}x$

(2) $\int \dfrac{1}{\sqrt{e^x+1}}\mathrm{d}x$

(3) $\int \dfrac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x$

(4) $\int x(x-1)^n\mathrm{d}x\ (n>0)$

(5) $\int \sin\sqrt{x}\mathrm{d}x$

(6) $\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x$

(7) $\int \dfrac{1}{1-x^4}\mathrm{d}x$

(8) $\int \dfrac{x^3-x}{1+x^4}\mathrm{d}x$

(9) $\int \max\{x^2,x^4\}\mathrm{d}x$

(10) $\int x^2\arctan x\, dx$

(11) $\int \dfrac{1}{x(1+x^4)}\, dx$

(12) $\int \sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x$

2.计算下列定积分或广义积分。

(1) $\int_0^2 |x^3-1|\mathrm{d}x$

(2) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^1 x^2\arcsin x\mathrm{d}x$

(4) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$

(5) $\int_0^1 \frac{1+3x}{(x^2+1)(x+1)}\mathrm{d}x$

(6) $\int_0^{2\pi} \sqrt{|\cos x|}\sin^5 x\mathrm{d}x$

(7) $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(8) $\int_0^1 \left(\int_x^1 \arctan(t^2)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{1+\sqrt{\tan x}}\mathrm{d}x$

(10) $\int_0^1 \frac{(1-x)^2e^x}{(1+x^2)^2}\,dx$

(11) $\int_{-1}^1 \frac{1}{a^x+1}\,dx$

(12) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\,dx$

(13) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$

(14) $\int_0^1 \ln^n x\mathrm{d}x$

3.$x>0$时，$f(\ln x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, 求$\displaystyle\int_{-2}^{2}xf'(x)\mathrm{d}x$.

4 设$f(x)$在区间$[0,1]$连续，且$\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)=2$, 求$\displaystyle\int_{0}^{2\pi}f(|\cos x|)$.

5. 已知$f''(x)$连续，$f'(x)\neq 0$,求$\displaystyle\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3}\right]\mathrm{d}x$.

- 线性性质: $\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- 区间可加性： $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$
- 保序性： 如果在$[a,b]$上有$f(x)\geqslant g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

- 保号性： 如果在$[a,b]$上有$f(x)\geqslant 0$, 则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$,
特别地，$f(x)$是非负连续函数，只要有一点$f(x_0)\neq 0$,
则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$

- 估值公式： 如果在$[a,b]$上有$m \leqslant f(x) \leqslant M$, 则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

- $f(x)$在$[a,b]$上可积, 则$|f(x)|$也在$[a,b]$上可积，并且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

- $f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，则至少存在一点$\xi \in (a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

- $f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，$g(x)$在$[a,b]$可积且不变号，则至少存在一点$\xi \in (a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

$f(x)$在$[a,b]$黎曼可积

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \qquad \Psi(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t \qquad x\in[a,b]$$

$f(x)$在$[a,b]$黎曼可积

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\qquad \Psi(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\qquad x\in[a,b]$$

1. 若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，则$\Phi(x)$ 在$[a,b]$ 上连续.

$f(x)$在$[a,b]$黎曼可积

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\qquad \Psi(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\qquad x\in[a,b]$$

1. 若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，则$\Phi(x)$ 在$[a,b]$ 上连续.

2. 若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积,在$x_0\in(a,b)$连续，则$\Phi(x)$ 在点x_0可导,且$\Phi'(x_0)=f(x_0)$.

$f(x)$在$[a,b]$黎曼可积

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\qquad \Psi(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\qquad x\in[a,b]$$

1. 若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，则$\Phi(x)$ 在$[a,b]$ 上连续.

2. 若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积,在$x_0\in(a,b)$连续，则$\Phi(x)$ 在点x_0可导,且$\Phi'(x_0)=f(x_0)$.

3.$f(x)$在$[a,b]$连续，$\varphi(x),\psi(x)$在(α,β)可导，且$\varphi(x),\psi(x)\in[a,b]$, 则$F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t$在$(\alpha,\beta)$可导,且

$$F'(x)=f(\psi(x))\psi'(x)-f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

$$1.\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^3 \mathrm{d}t}{\ln(1+x^4)}$$

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^3\mathrm{d}t}{\ln(1+x^4)}$

2. 设函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$连续且$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$,

求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-2x}\int_0^x e^{2t}f(t)\mathrm{d}t}{f(x)}$

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^3 \mathrm{d}t}{\ln(1+x^4)}$

2. 设函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$连续且$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$,

求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-2x}\int_0^x e^{2t}f(t)\mathrm{d}t}{f(x)}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4+|\sin x|}\displaystyle\int_0^{x^2}\dfrac{t^3}{1+t^2}\mathrm{d}t$

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^3 \mathrm{d}t}{\ln(1+x^4)}$

2. 设函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$连续且$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$,

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-2x}\int_0^x e^{2t}f(t)\mathrm{d}t}{f(x)}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4+|\sin x|}\displaystyle\int_0^{x^2}\frac{t^3}{1+t^2}\mathrm{d}t$

4. 已知$f'(x)$连续, $f(0)=0, f'(0)\neq 0$, 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^1 f(x^2t)\mathrm{d}t}{x\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t}$.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^3 \mathrm{d}t}{\ln(1+x^4)}$

2. 设函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$连续且$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$,

求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-2x}\int_0^x e^{2t}f(t)\mathrm{d}t}{f(x)}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4+|\sin x|}\displaystyle\int_0^{x^2}\frac{t^3}{1+t^2}\mathrm{d}t$

4. 已知$f'(x)$连续, $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$, 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^1 f(x^2t)\mathrm{d}t}{x\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t}$.

5. $f(x)$是区间$[0,1]$上的可微函数，且满足$f(1)=\displaystyle\int_0^1 e^{x-1}f(x)\mathrm{d}x$,
证明存在$\xi\in(0,1)$满足$f(\xi)+f'(\xi)=0$.

6.设$f(x)$在区间$[a,b]$有连续导数，

$$a_n=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k),n\in\mathbb{N},$$

其中$x_k=a+\dfrac{k(b-a)}{n},(k=1,2,\cdots,n)$,

证明：$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}na_n=\frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)].$

7.设$f(x)$是$(0,1)$上的可微函数，且满足$f(0)=0$和$f'(x)>0$，对于$0<\alpha<\beta<1$,求证

$$\int_\alpha^1 f(x)\mathrm{d}x>\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x.$$

8.设$f(x)$是$[0,1]$上连续函数，且满足$\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$,

$\displaystyle\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\alpha,\int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\alpha^2$, 其中$\alpha$是常数.

证明存在$[0,1]$中的点x_0, 使得$f(x_0)=0$.

9.设$f(x)$是$[0,1]$上非负连续函数，且满足$f^2(x)\leqslant 1+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，证明$f(x)\leqslant 1+x$.

10.设$f(x)$ 在$\mathbb{R}$ 上连续, 且满足方程$f(x+a)=-f(x)$. 求证:

$$\int_0^{2a} xf(x)\,dx=-a\int_0^a f(t)\,dt.$$

11. 设$f(x)$ 在$[0,1]$ 上连续, 且$0\le f(x)\le 1$. 求证:

$$2\int_0^1 xf(x)\,dx\ge\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2,$$

并求使上式成为等式的连续函数.

12.设$f''(x)$在$[a,b]$黎曼可积，$f(a)=f(b)=0$，且$f(x)$不恒为0，证明: $\frac{4}{b-a}|f(x)|<\int_a^b|f''(x)|\mathrm{d}x.$

13. 设$f(x)$是$[0,+\infty)$上的非负且单调递减函数，

$$a_n=\int_0^n f(x)\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^{n} f(i),$$

判断$\{a_n\}$是否收敛，并说明原因.

14. 设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上连续，而$f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$为$\mathbb{R}$上单调递减函数. 证明：$f(x)$必为常值函数.

15. 设$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$,其中$f(x)$是已知的连续函数，

且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A\,(A$为常数).

(1)求$\varphi'(x)$;

(2)讨论$\varphi'(x)$在$x=0$处的连续性.

16. 设$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$是连续正值函数,且$f(-t)=f(t)$, 设$g(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)\mathrm{d}t,\ -a\le x\le a,,\ a>0.$

1. 求证$g'(x)$是严格单调递增的;
2. 求出$g(x)$的最小值点;
3. 当$g(x)$的最小值等于$f(a)-a^2-1$时，求$f(t)$.

平面图形的面积

1. 若图形由连续曲线$y=f(x),y=g(x)$以及$x=a,x=b(a<b)$围成，则面积公式是

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$$

若图形由连续曲线$x=\varphi(y),x=\psi(y)$以及$y=c,y=d(c<d)$围成，则面积公式是

$$A=\int_c^d |\varphi(y)-\psi(y)|\mathrm{d}y$$

平面图形的面积

1. 若图形由连续曲线$y = f(x), y = g(x)$以及$x = a, x = b(a < b)$围成，则面积公式是

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x$$

若图形由连续曲线$x = \varphi(y), x = \psi(y)$以及$y = c, y = d(c < d)$围成，则面积公式是

$$A = \int_c^d |\varphi(y) - \psi(y)| \mathrm{d}y$$

2. 若图形由连续曲线$r = r_1(\theta), r = r_2(\theta), r_1(\theta) \leqslant r_2(\theta)$
   以及$\theta = \alpha, \theta = \beta(\alpha < \beta)$围成，则面积公式是

$$A = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta) \mathrm{d}\theta$$

3.(1)曲线L : $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$,

3.(1)曲线L : $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, 若$\varphi'(t) \neq 0$,则曲线曲线L与$x$轴，$x = \varphi(\alpha), x = \varphi(\beta)$围城图形的面积是

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)\psi(t)| \mathrm{d}t.$$

3.(1)曲线L : $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$，若$\varphi'(t) \neq 0$,则曲线曲线L与$x$轴，$x=\varphi(\alpha), x=\varphi(\beta)$围城图形的面积是

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}|\varphi'(t)\psi(t)|\mathrm{d}t.$$

若$\psi'(t) \neq 0$,则曲线曲线L与y轴，$x=\psi(\alpha), x=\psi(\beta)$围城图形的面积是

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}|\varphi(t)\psi'(t)|\mathrm{d}t.$$

3.(1)曲线L : $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$，若$\varphi'(t) \neq 0$,则曲线曲线L与$x$轴，$x = \varphi(\alpha), x = \varphi(\beta)$围城图形的面积是

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)\psi(t)|\mathrm{d}t.$$

若$\psi'(t) \neq 0$,则曲线曲线L与y轴，$x = \psi(\alpha), x = \psi(\beta)$围城图形的面积是

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(t)\psi'(t)|\mathrm{d}t.$$

(2)由简单封闭曲线L : $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$围成，

$$A = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)\mathrm{d}t.$$

L是逆时针时$\varepsilon = 1$,L是顺时针时$\varepsilon = -1$.

平面曲线的弧长

$1. L: y = y(x), a \leqslant x \leqslant b$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} \mathrm{d}x.$$

平面曲线的弧长

$1.L: y=y(x), a \leqslant x \leqslant b$

$$l=\int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

$$2.L: \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

$$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\mathrm{d}t.$$

平面曲线的弧长

$1.L: y=y(x), a\leqslant x\leqslant b$

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

$$2.L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\mathrm{d}t.$$

$3.L: r=r(\theta), (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{f^2(\theta)+(f'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta$$

旋转体体积

1.$L: y=y(x), a \leqslant x \leqslant b$ 绕x轴旋转一周

$$V=\int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x$$

2.曲线$L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),\ \varphi'(t) \neq 0$,绕$x$轴旋转.

$$V=\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

1. 曲线$y=\sqrt{x}$和$y=x^2$围城xOy平面上的一个封闭区域，计算这个区域的周长；面积和该区域绕x轴旋转一周所得旋转体的体积.

1. 曲线$y=\sqrt{x}$和$y=x^2$围城xOy平面上的一个封闭区域，计算这个区域的周长；面积和该区域绕x轴旋转一周所得旋转体的体积.

2. 求由圆盘$x^2+(y-R)^2\leqslant r^2(0<r<R)$,绕$x$轴旋转一周所得旋转体的体积

1. 曲线$y=\sqrt{x}$和$y=x^2$围城xOy平面上的一个封闭区域，计算这个区域的周长；面积和该区域绕x轴旋转一周所得旋转体的体积.

2. 求由圆盘$x^2+(y-R)^2\leqslant r^2(0<r<R)$,绕$x$轴旋转一周所得旋转体的体积

3.设u是正常数，求曲边梯形$D:0\leqslant y\leqslant \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,$0\leqslant x\leqslant u$绕$x$轴旋转一种所得旋转体的体积

1. 曲线$y=\sqrt{x}$和$y=x^2$围城xOy平面上的一个封闭区域，计算这个区域的周长；面积和该区域绕x轴旋转一周所得旋转体的体积.

2. 求由圆盘$x^2+(y-R)^2\leqslant r^2(0<r<R)$,绕$x$轴旋转一周所得旋转体的体积

3.设u是正常数，求曲边梯形$D:0\leqslant y\leqslant \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,$0\leqslant x\leqslant u$绕$x$轴旋转一种所得旋转体的体积

4.写出由方程$|\ln x|+|\ln y|=1$所表示的四条平面曲线；求这四条平面曲线所围图形的面积

1. 曲线$y=\sqrt{x}$和$y=x^2$围城xOy平面上的一个封闭区域，计算这个区域的周长；面积和该区域绕x轴旋转一周所得旋转体的体积.

2. 求由圆盘$x^2+(y-R)^2\leqslant r^2(0<r<R)$,绕$x$轴旋转一周所得旋转体的体积

3.设u是正常数，求曲边梯形$D:0\leqslant y\leqslant \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,$0\leqslant x\leqslant u$绕$x$轴旋转一种所得旋转体的体积

4.写出由方程$|\ln x|+|\ln y|=1$所表示的四条平面曲线；求这四条平面曲线所围图形的面积

5.设曲线$y=a\sqrt{x}(a>0)$与$y=\ln\sqrt{x}$在(x_0,y_0)处有公共切线，求这两条曲线与x轴围城的平面图形绕x轴旋转而成的旋转体的体积.

本学期需要掌握的微分方程类型：

1.分离变量型$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$.

$$g(y)\neq 0\text{时，}\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C.$$

2.可化为分离变量的类型。

(a)齐次方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(\dfrac{y}{x})$

$$\text{令}y=ux,\text{ 则}y'=\frac{\mathrm{d}(ux)}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$$

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)-u$$

(b)分式线性方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

① $c_1 = c_2 = 0$, 方程是齐次方程。作变量代换$y = ux$求解

② $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_1} = \lambda$, c_1, c_2不全为0.

令$z = a_1x + b_1y$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a_1 + b_1\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可以得到分离变量型方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a_1 + b_1 f\left(\frac{z + c_1}{\lambda z + c_2}\right)$$

③ $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 有唯一解，$x = k, y = h$, 于是有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1(x+k) + b_1(y+h)}{a_2(x+k) + b_2(y+h)}\right)$$

用变量代换$u = x + k, v = y + h$, 则$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x, \mathrm{d}v = \mathrm{d}y$, 方程可化为齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right).$$

3. 一阶线性微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$.

$$y(x)=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

求解方法：积分因子法，常数变易法，公式法。

4.伯努利方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n,(n\neq 0,1)$

作变量代换$u=y^{1-n}$, 可以得到关于u的一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)u=(1-n)Q(x)$$

5.可降阶的二阶微分方程

(a)不显含未知函数的二阶微分方程$F(x,y',y'')=0$
令$z(x)=y'(x)$,则$y''(x)=z'(x)$, 方程改写为$F(x,z,z')=0$.

(b)不显含自变量的二阶微分方程$F(y,y',y'')=0$
作变量代换$z=y'(x)$, 将y看做自变量，方程变为

$$F(y,z,z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y})=0$$

二阶线性微分方程解的结构

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (1)$$
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (2)$$

方程(2)的通解为

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

其中C_1, C_2是任意的常数,$y_1(x), y_2(x)$是方程(2)的两个线性无关的特解.

若已知$y_1(x)$,则

$$y_2(x) = \frac{1}{y_1(x)} \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \mathrm{d}x.$$

方程(1)的通解是

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \tilde{y}(x)$$

$y_1(x), y_2(x)$是方程(2)两个线性无关的解,

$\tilde{y}(x)$是方程（1）的一个特解。

可以用常数变易法求解$\tilde{y}(x)$,
设$\tilde{y}(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$, 其中$c_1(x), c_2(x)$满足

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

6.常系数二阶齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$

对应的特征方程是 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

(1)方程有两个不同的实根λ_1, λ_2时，通解为

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(2)方程有两个相同的实根$\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{p}{2}$时，通解为

$$y = c_1 e^{-\frac{p}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{p}{2}x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(3)方程有一对共轭复根$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$，通解是

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

7.常系数二阶非齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = f(x)$

(a)$f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

(I)$\lambda = 0$不是特征根，特解为$\tilde{y}(x) = Q_n(x)$是n多项式。

(II)$\lambda = 0$是一重特征根，特解为$\tilde{y}(x) = xQ_n(x)$

(III)$\lambda = 0$是二重特征根，特解为$\tilde{y}(x) = x^2 Q_n(x)$

(b)$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$.

(I)$\lambda = \alpha$不是特征根，特解应是$\tilde{y}(x) = e^{\alpha x}Q_n(x)$

(II)$\lambda = \alpha$是1重特征根，特解是$\tilde{y}(x) = xe^{\alpha x}Q_n(x)$

(III)$\lambda = \alpha$是2重特征根，特解是$\tilde{y}(x) = x^2 e^{\alpha x}Q_n(x)$

(c)$f(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x P_n(x)$ 或$f(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x P_n(x)$

引入辅助方程$y''+py'+qy=e^{(\alpha+\beta i)x}P_n(x)$ (3)

(I)$\lambda=\alpha+i\beta$不是特征根，

方程（3）特解应是$\tilde{y}(x)=e^{(\alpha+i\beta)x}Q_n(x)$

(II)$\lambda=\alpha+i\beta$是特征根，

方程（3）特解是$\tilde{y}(x)=xe^{(\alpha+i\beta)x}Q_n(x)$.

特解$\tilde{y}$的实部是方程$y''+py'+qy=e^{\alpha x}\cos\beta x P_n(x)$的特解；

特解$\tilde{y}$的虚部是方程$y''+py'+qy=e^{\alpha x}\sin\beta x P_n(x)$的特解.

8.Euler方程 $x^2y''+pxy'+qy=f(x)$ p,q是常数，

$$令x=e^t,(x>0)或x=-e^t,(x<0)\ ,\ \mathrm{d}x=\pm e^t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}t$$

$$y'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$y''(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(p-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+qy=f(\pm e^t)$$

1. 求解初值问题$2yy''=1+(y')^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$. 要求将解$y(x)$表示为x的显函数.

2. 求定解问题$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2012^{x+y}\\ y(0)=1\end{cases}$ 的解

3. 求定解问题$y''+(y')^2=y', y(0)=y'(0)=1$的解.

4. 求$y''+a^2y=8\cos bx$的通解，其中$a>0, b>0$为相同或不同的常数.

5. 求微分方程$y''-3y'+2y=2x-3$的通解.

6. 求微分方程$y''+y=e^{2x}$的通解.

7. 求$y''-2y'+y=xe^x$的通解.

8. 求$y''+y=\cos^2 x$的通解.

9. 求$(\sin x)y''-(\cos x)y'=\sin^2 x+1$的通解。