

中国科学技术大学

2016—2017学年第一学期考试试卷

考试科目 概率论与数理统计(B) 得分 _____

所在系 _____ 姓名 _____ 学号 _____

考试时间: 2017年1月3日上午8:30—10:30; 使用简单计算器

一. (30分, 每小题均3分) 填空题或单选题, 答案可以直接写在试卷上.

1. 设 A 和 B 为随机事件, $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$, $P(A|B) = 0.4$, 则().
(A) A 与 B 相互独立 (B) A 与 B 互斥
(C) $A \supset B$ (D) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
2. 甲乙二人进行网球比赛, 每回合胜者得1分, 且每回合甲胜的概率为 $p(0 < p < 1)$, 乙胜的概率为 $1 - p$, 比赛进行到有一人比另外一个人多2分就终止, 多2分者最终获胜, 则甲最终获胜的概率为_____.
3. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的Poisson分布, 且已知 $P(X = 1) = P(X = 2)$, 则 X 取值为3的概率为_____.
4. 设随机变量 X 和 Y 均服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, 且已知 $P(X \leq 2, Y \leq -2) = 0.25$, 则 $P(X > 2, Y > -2) =$ _____.
5. 设 X 和 Y 相互独立且分别服从均值为1和 $1/4$ 的指数分布, 则 $P(X < Y) =$ _____.
6. 设随机变量 X_1 和 X_2 相互独立, 方差均存在, 且概率密度函数分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$. 若 Y_1 的概率密度函数为 $[f_1(y) + f_2(y)]/2$, 而 $Y_2 = (X_1 + X_2)/2$, 则().
(A) $E[Y_1] > E[Y_2]$, $\text{Var}[Y_1] > \text{Var}[Y_2]$ (B) $E[Y_1] = E[Y_2]$, $\text{Var}[Y_1] = \text{Var}[Y_2]$
(C) $E[Y_1] = E[Y_2]$, $\text{Var}[Y_1] < \text{Var}[Y_2]$ (D) $E[Y_1] = E[Y_2]$, $\text{Var}[Y_1] > \text{Var}[Y_2]$
7. 在假设检验中, 下列关于拒绝域和接受域说法错误的是().
(A) 与显著性水平 α 有关 (B) 与所构造的统计量的分布有关
(C) 随样本观测值的不同而改变 (D) 互不相交
8. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体 $N(1, \sigma^2)$ 的一组简单随机样本, 则 $T = \frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_3 + X_4 - 2)^2}$ 的分布为().
(A) t_1 (B) $F_{1,1}$ (C) $F_{2,2}$ (D) 以上皆不正确.
9. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自二项总体 $B(n, p)$ 的一组简单随机样本, 且记 \bar{X} 和 S^2 为样本均值和样本方差. 若 $\bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的一个无偏估计, 则常数 $k =$ _____.
10. 设正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中参数 μ 和 σ^2 均未知. 若样本容量 n 和置信系数 $1 - \alpha$ 均保持不变, 对于不同的样本观测值, 则总体均值 μ 的置信区间长度().
(A) 始终保持不变 (B) 与 μ 的真值有关
(C) 与样本均值有关 (D) 不固定.

二. (11分) 设二维随机向量 (X, Y) 的概率密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} Ax^2, & 0 < |x| < y < 1; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

试求常数 A 的值及条件概率 $P(X \leq 0.25|Y = 0.5)$.

三. (16分) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 X 的概率分布为 $P(X = 0) = P(X = 2) = 0.5$, Y 的概率密度函数为 $f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

1. 求 $P(Y \leq EY)$;

2. 求 $Z = X + Y$ 的概率密度函数.

四. (15分) 某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体进行 n 次测量, 该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量结果 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立且服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu|$, $i = 1, 2, \dots, n$. 现利用这些绝对误差来估计标准差 σ .

1. 求 Z_i 的概率密度函数;

2. 利用一阶矩求 σ 的矩估计量;

3. 求 σ 的极大似然估计量.

五. (18分) 在质量管理中, 产品的优良性和稳定性可以分别用均值和方差来体现. 要比较甲乙两厂所生产的电视机的质量是否有差异, 对两厂所生产的各 10 台产品的使用情况进行追踪调查, 得到这 20 台电视机的寿命(单位: 年)数据如下:

甲	8	7	9	5	12	10	9	10	8	7
乙	10	8	5	7	8	7	11	4	5	6

设电视机的寿命服从正态分布, 利用假设检验的知识判断两厂所生产电视机的寿命是否有显著差异(显著性水平取 $\alpha = 0.05$).

六. (10分) 对截止目前为止一共 44 位美国总统(含候任总统Trump)的星座进行分析, 发现十二星座中天蝎座和水瓶座各有 5 人, 双子座和射手座各有 3 人, 处女座和白羊座各有两人, 而其余星座均有 4 人. 于是有人宣称有些星座擅长当美国总统, 而有些星座则不擅长. 结合你所学的知识, 说明该说法是否有统计学上的依据?(显著性水平取 $\alpha = 0.05$)

附录: 上分位数表

$$F_{10,10}(0.025) = 3.72, F_{9,9}(0.025) = 4.03, F_{10,10}(0.05) = 2.98, F_{9,9}(0.05) = 3.18, \\ t_{20}(0.025) = 2.086, t_{19}(0.025) = 2.093, t_{18}(0.025) = 2.101, \chi_{11}^2(0.05) = 24.725.$$

参考答案

一. 每小题3分

1. A 2. $p^2/[p^2 + (1-p)^2]$ 或 $p^2/(1-2p+2p^2)$ 3. $\frac{4}{3}e^{-2}$ 或 0.18 4. 0.25 或 $1/4$
5. 0.2 或 $1/5$ 6. D 7. C 8. B 9. -1 10. D

二. 常数 $A = 6$. (5分)

由 $f_Y(y) = 4y^3, 0 < y < 1$ 及 $f_{X|Y}(x|y) = \frac{3x^2}{2y^3}, -y < x < y$, 可知 $f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) = 12x^2, -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. 故

$$P(X \leq 1/4 | Y = 1/2) = \int_{-1/2}^{1/4} 12x^2 dx = \frac{9}{16}. \quad (6分)$$

三. 1. 由 $EY = \frac{2}{3}$, 知 $P(Y \leq EY) = \int_0^{2/3} 2y dy = 4/9$. (6分)

2. 对任意 $0 < z < 3$, 由全概率公式可知

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= \frac{1}{2}P(Y \leq z) + \frac{1}{2}P(Y \leq z-2) \\ &= \begin{cases} z^2/2, & 0 \leq z < 1; \\ 1/2, & 1 \leq z < 2; \\ ((z-2)^2 + 1)/2, & 2 \leq z < 3. \end{cases} \quad (5分) \end{aligned}$$

从而 Z 的概率密度函数为

$$l(z) = \begin{cases} z, & 0 \leq z < 1; \\ z-2, & 2 \leq z < 3; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \quad (5分)$$

四. 1. 概率密度函数为 $f(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{z^2}{2\sigma^2}\}$, $z > 0$. (5分)

2. 由于 $E[Z_i] = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$, 故 σ 的矩估计量为 $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \bar{Z}$, 其中 $\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$. (5分)

3. 由对数似然函数为 $l(\sigma) = c - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2$, 其中 c 为一与 σ 无关的常数, 令 $\frac{dl(\sigma)}{d\sigma} = 0$, 可知 σ 的极大似然估计量为 $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2}$.

五. 由样本观测值得 $\bar{x} = 8.5, s_1^2 = 3.83, n_1 = 10; \bar{y} = 7.1, s_2^2 = 4.99, n_2 = 10$. (4分)

先检验两总体的方差是否相等. 此时 $F = \frac{3.83}{4.99} = 0.768$, 而由附表可得 $F_{9,9}(0.025) = 4.03, F_{9,9}(0.975) = 1/4.03 = 0.248$. 因为 $0.248 < F < 4.03$, 我们可以认为两总体方差相等. (7分)

再检验两总体均值是否相等. 此时 $s_w^2 = 4.411$, 而统计量 $t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} = -1.235$. 故由 $|t| < t_{18}(0.025) = 2.101$, 我们也可认为两总体均值相等. 综上可知, 我们可以认为两厂所生产电视机的寿命没有显著性差异. (7分)

六. 首先建立假设 H_0 : 每个星座当上美国总统的可能性是一样的. 计算 χ^2 统计量的值为 $2.91 < \chi_{11}^2(0.05) = 24.725$. 接受 H_0 , 故我们可以认为该说法没有统计学上的依据.