一.

(1) $$\int |x^2-1|\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x + C, & x \le -1 \\ x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{4}{3} + C, & -1 \le x \le 1 \\ \dfrac{x^3}{3} - x + \dfrac{8}{3} + C, & x \ge 1 \end{cases}$$

(2) $$\int \sin x \sin 2x \,dx = \frac{2}{3}\sin^3 x + C$$

(3) $$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x\right) + C$$

从而 $$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}$$

(4) $$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx^2$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{2}$$

(5) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x |\sin t|\,dt}{x} = \frac{2}{\pi}.$$

(6) $$y = x\cdot e^{-x+1}.$$

二、(10分) 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上连续函数，且 $f(x)+x^3=\int_0^x f(x-t)t\,dt$，试求出 $f(x)$.

解：
$$f(x)+x^3=\int_0^x f(x-t)t\,dt$$
$$\overset{u=x-t}{=\!=}\ -\int_x^0 f(u)(x-u)\,du$$
$$=x\int_0^x f(u)\,du-\int_0^x f(u)u\,du \quad \cdots\cdots ①$$

$\cdots\cdots$ 3分

两边对 x 求导，得
$$f'(x)+3x^2=\int_0^x f(u)\,du \quad \cdots\cdots ②$$

再求导，得
$$f''(x)+6x=f(x)$$

$\cdots\cdots$ 6分

由二阶常系数方程通解公式，
$$f(x)=6x+c_1e^x+c_2e^{-x}.$$
再由 ① 知 $f(0)=0$，由 ② 知 $f'(0)=0$.

从而 $c_1+c_2=0$

$6+c_1-c_2=0$

解得 $c_1=-3$，$c_2=3$

由此，$f(x)=6x-3e^x+3e^{-x}$.

$\cdots\cdots$ 10分.

三、(12分). 设 $y=f(x)$ 为以下初值问题的解:

$$\begin{cases} y''+2y'+y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

求平面区域 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ 0\leq y\leq f(x)\}$ 的面积.

解: 由于 $y''+2y'+y=0$ 的特征方程为

$$\lambda^2+2\lambda+1 = (\lambda+1)^2.$$

知通解为 $y(x)= C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$.

由 $y(0)=0$, $y'(0)=1$ 知

$$y(x)= xe^{-x}$$

. . . . 6分

所求区域面积为:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$$

$$= \int_0^{+\infty}(-x)de^{-x}$$

$$\cancel{= \int_{+\infty}^{0} t\,d}$$

$$= -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}e^{-x}dx$$

$$= -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = e^{-x}\Big|_{+\infty}^{0} = 1.$$

. . . . . . 12分.

四.(10分). 设 $f(x)=\begin{cases}\int_0^x \cos(t+\frac{1}{t})dt, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

求 $f'(0)$.

解. $\int_0^x \cos(t+\frac{1}{t})dt$

$$=\int_0^x \cos t\cos\frac{1}{t}\,dt-\int_0^x \sin t\sin\frac{1}{t}\,dt$$

$$=\int_0^x \cos\frac{1}{t}dt+\int_0^x(\cos t-1)\cos\frac{1}{t}dt-\int_0^x \sin t\sin\frac{1}{t}dt$$

令 $\int_0^x \cos\frac{1}{t}dt=I_1$, $\int_0^x(\cos t-1)\cos\frac{1}{t}dt=I_2$, $\int_0^x \sin t\sin\frac{1}{t}dt=I_3$.

由洛必达法则,

$$\lim_{x\to 0}\frac{I_2}{x}=\lim_{x\to 0}(\cos x-1)\cos\frac{1}{x}=0 \quad \cdots\cdots 2分$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{I_3}{x}=\lim_{x\to 0}\sin x\sin\frac{1}{x}=0 \quad \cdots\cdots 2分$$

设 $x>0$, 则 $I_1=\int_0^x\cos\frac{1}{t}dt \overset{u=\frac{1}{t}}{=\!=} \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\cos u}{u^2}du$

$$=\frac{\sin u}{u^2}\Big|_{\frac{1}{x}}^{+\infty}+2\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\sin u}{u^3}du$$

$$=-x^2\sin\frac{1}{x}+2\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\sin u}{u^3}du$$

由洛必达法则 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\sin u}{u^3}du}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

从而 $\lim_{x\to 0^+}\frac{I_1}{x}=0$

综上知 $f'_+(0)=0$ $\cdots\cdots$ 9分

由 $f(x)$ 为奇函数知 $f'_-(0)=0$, 从而

$$f'(0)=0 \quad \cdots\cdots 10分.$$

五. ~~(12分)~~. (1)(6分) 求 $\int_0^{\lambda}\frac{dt}{\sqrt{t(\lambda-t)}}$, $\lambda>0$

(2)(6分) 求 $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\int_0^{\lambda}\frac{dt}{\sqrt{t(\lambda-t)(2-t)}}$.

解: (1) $\int_0^{\lambda}\frac{dt}{\sqrt{t(\lambda-t)}} \overset{t=\lambda x}{=} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ ······ 2分

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-x)^2}}$$

$$\overset{1-2x=\cos\theta}{=} \int_0^{\pi} d\theta = \pi$$ ······ 6分

(2) $\int_0^{\lambda}\frac{dt}{\sqrt{t(\lambda-t)(2-t)}}$

$$= \int_0^{\lambda}\frac{dt}{\sqrt{t(\lambda-t)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-t}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\lambda}\frac{dt}{\sqrt{t(\lambda-t)}} + \int_0^{\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{2-t}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{dt}{\sqrt{t(\lambda-t)}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \int_0^{\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{2-t}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{dt}{\sqrt{t(\lambda-t)}}$$ ······ 2分

由 $\frac{1}{\sqrt{2-t}}$ 在 $t=0$ 处连续.

$\forall\, \varepsilon>0$. 取 $\delta>0$. 使 $\forall\, 0\le t<\delta$, $\left|\frac{1}{\sqrt{2-t}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|<\varepsilon$.

则 当 $0<\lambda<\delta$ 时.

$$\left|\int_0^{\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{2-t}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{dt}{\sqrt{t(\lambda-t)}}\right|$$

$$\le \varepsilon\cdot\int_0^{\lambda}\frac{dt}{\sqrt{t(\lambda-t)}} = \varepsilon\cdot\pi.$$

从而由定义知 $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\int_0^{\lambda}\frac{dt}{\sqrt{t(\lambda-t)(2-t)}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. ······ 6分

六．求关于 k 的函数 $f(k)=\int_{-1}^{1}|x^2-kx-1|dx$ 的最小值．

解：先证 $f(k)$ 在 $k=0$ 处达到最小值．

设 $k>0$．我们要证 $f(k)\geq f(0)$．

设 $x^2-kx-1=(x-x_1)(x-x_2)$．　$x_1<x_2$

由于 $k>0$，知 $x_2>1$，$-1<x_1<0$

从而 $|x^2-kx-1|=\begin{cases} x^2-kx-1, & -1\leq x\leq x_1 \\ kx+1-x^2, & x_1\leq x\leq 1 \end{cases}$．

从而 $\int_{-1}^{1}|x^2-kx-1|dx=\int_{-1}^{x_1}(x^2-kx-1)dx+\int_{x_1}^{0}(kx+1-x^2)dx$

$+\int_{0}^{1}(kx+1-x^2)dx$

$\geq\int_{x_1}^{0}(kx+1-x^2)dx+\int_0^1 kx\,dx+\int_0^1(1-x^2)dx$

$=\int_{x_1}^{0}kx\,dx+\int_0^1 kx\,dx+\int_{x_1}^{0}(1-x^2)dx+\int_0^1(1-x^2)dx$

$=\int_{-x_1}^{1}kx\,dx+\int_{x_1}^{0}(1-x^2)dx+\int_0^1(1-x^2)dx$

（因为 $\int_{x_1}^{0}kx\,dx+\int_0^{-x_1}kx\,dx=0$）．　……3分

由于 $\int_{-x_1}^{1}kx\,dx=\int_{-1}^{x_1}-kx\,dx$

且在 $[-1,x_1]$ 中，$-kx\geq 1-x^2$，

从而 $\int_{-x_1}^{1}kx\,dx\geq\int_{-1}^{x_1}(1-x^2)dx$

从而 $\int_{-1}^{1}|x^2-kx-1|dx\geq\int_{-1}^{x_1}(1-x^2)dx+\int_{x_1}^{0}(1-x^2)dx+\int_0^1(1-x^2)dx$

$=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\int_{-1}^{1}|x^2-1|dx=f(0)$

同理知 $k<0$ 时也有 $f(k)\geq f(0)$　……6分．

（以上 $f(k)\geq f(0)$ 的证明若看图说明，给3分）．

由 $f(0)=\int_{-1}^{1}|x^2-1|dx=\frac{4}{3}$．　……10分

七、(1) (5分) 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 连续函数，则 $\forall \varepsilon>0$，存在阶梯函数 $\varphi(x)$，使 $\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx < \varepsilon$.

(2) (5分) 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上连续函数，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0$.

证：(1) 由于有界闭区间上连续函数必一致连续，知 $\forall \varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，就有 $|f(x_1)-f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

取 $[a,b]$ 的分割 $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_N = b$，使得

$$\max_{1\le i\le N} |x_i - x_{i-1}| \le \delta.$$

并令 $\lambda_i = f(x_i)$，$1\le i\le N$.

令阶梯函数 $\varphi(x) = \lambda_i$，当 $x\in[x_{i-1}, x_i)$，$1\le i\le N$. …… 3分

则易知 $\cancel{\int_a^b}$ $|f(x)-\varphi(x)| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$，$\forall x\in[a,b]$

从而 $\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx < \varepsilon$. …… 5分

(2) 设 $\varphi(x)=\lambda_i$，$\forall x\in[x_{i-1}, x_i)$，$1\le i\le N$ 为 $[a,b]$ 上阶梯函数，则

$$\int_a^b \varphi(x)\sin nx\,dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda_i \sin nx\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^N \lambda_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin nx\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{n}(\cos nx_{i-1} - \cos nx_i)$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \varphi(x)\sin nx\,dx = 0$ …… 3分

再由 (1)，$\forall \varepsilon>0$，取阶梯函数 $\varphi(x)$，使 $\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx < \varepsilon$

则 $\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = \int_a^b \varphi(x)\sin nx\,dx + \int_a^b (f(x)-\varphi(x))\sin nx\,dx$

从而 $\left|\int_a^b f(x)\sin nx\,dx - \int_a^b \varphi(x)\sin nx\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx \le \varepsilon$.

由此即得. …… 5分