第四章 应用

2015年11月25日　19:43

一、刚体

二、振动和波

一、刚体

2015年11月25日 19:44

1. 刚体Rigid Body
    a. 刚体为特殊的质点系$\{m_i\}$，任意两质点间距离不变，即：
    $$\forall m_i, m_j, \frac{\mathrm{d}\left|\vec{r_i}(t)-\vec{r_j}(t)\right|}{\mathrm{d}t}=0$$
    b. 实质：忽略了单位形变的抽象近似.
    c. 多个刚体为刚体系统
2. 刚体运动学
    a. 刚体运动研究
        i. 刚体的平动——即质心的平动
        ii. 刚体的转动
    b. 自由度数Degree of Freedom
        i. 描述刚体运动所需最少独立参数个数.
        ii. 自由刚体
            1) 平动成分
                a) 以质心C代表位置.
                b) (x_c, y_c, z_c)，为三个平动自由度.
            2) 转动成分
                a) 称为方位角.
                b) (α, β, γ)，为三个转动自由度.
            3) 共计六个自由度，为三维空间下最大值.
        iii. 受约束刚体
            1) 平动无转动：(x_c, y_c, z_c)，三个自由度.
            2) 平面平行滚动：(x_c, y_c)，转角θ，三个自由度.
            3) 定轴运动：转角θ，一个自由度.
            4) 定点转动（陀螺仪）：相当于三个方向的定州运

动，三个自由度.

3. 转动惯量

   a. 角动量与角速度有

   $$J=\sum_i \Delta m_i[(\vec{r_i}\cdot\vec{r_i})\vec{\omega}-(\vec{r_i}\cdot\vec{\omega})\vec{r_i}]$$

   b. 定义转动惯量为

   $$I=\sum_i m_i r_i^2$$

   c. 则和外力矩有

   $$M=I\cdot\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

   d. 角动量和角速度方向不同，但角动量分量有

   $$J_z=I_z\omega$$

   e. 对比平动与转动中的惯性：

      i. 平动：惯性质量，速度，动量

      ii. 转动：转动惯量，角速度，角动量

   f. 对于连续体，转动惯量I_z

   $$I_z=\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}(x^2+y^2)\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

4. 常见的均匀刚体的转动惯量

   a. 细棒关于中心：$I=\frac{1}{12}ml^2$

   b. 细棒关于端点：$I=\frac{1}{3}ml^2$

   c. 圆球关于直径：$I=\frac{2}{5}mR^2$

   d. 球壳关于直径：$I=\frac{2}{3}mR^2$

   e. 圆柱关于轴线：$I=\frac{1}{2}mR^2$

   f. 圆环关于轴线：$I=mR^2$

   g. 长方形薄板关于中心垂直轴：$I=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$

   h. 长方形薄板关于中心水平轴，

i. 平行于b：$I=\frac{1}{12}ma^2$
ii. 平行于a：$I=\frac{1}{12}mb^2$

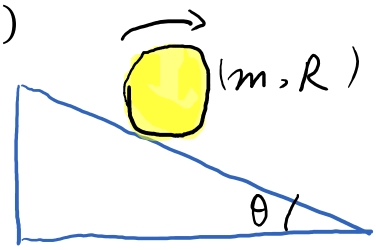
i. 平行轴定理

i. 刚体关于过质心转轴之转动惯动惯量为I_C，将该轴平移d，对应的转轴之转动惯量为I_D，有$I_D=I_C+md^2$.
ii. 说明过质心的轴在同方向上转动惯量最小.

j. 正交轴定理

i. 刚性薄板平面沿$x\circ y$，有$I_z=I_x+I_y$

5. 球坐标
   a. (r,θ,φ)
   b. $\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ \mathrm{y}=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$
   c. $\mathrm{d}V=r^2\sin\theta dr d\theta\,\mathrm{d}\varphi$
6. 角加速度β
   a. $M_{\parallel}=\frac{\mathrm{d}I_{\parallel}}{\mathrm{d}t}=I_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=I_z\beta$
   b. 微分形式：$M_{\parallel}\,\mathrm{d}t=I_z\,\mathrm{d}w$
   c. 积分形式：$\int_0^t M_{\parallel}\,\mathrm{d}t=I_z(\omega-\omega_0)$
7. 平面平行运动



   a. 即研究理想化的纯滚动的运动.
   b. $f_s=\frac{1}{3}mg\sin\theta$
   c. $a_c=\frac{2}{3}g\sin\theta$
   d. $\mu_s\geq\frac{1}{3}\tan\theta$
8. 刚体的能量
   a. 刚体的动能定理
      i. 刚体质心的平动能.
      ii. 刚体的转动能.

iii. $E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2$

b. 刚体动能的改变

i. 合外力做功为转动动能改变.

ii. $\int_{\varphi_0}^{\varphi} M_c \, \mathrm{d}\varphi = I \int_{\omega_0}^{\omega} \omega \, \mathrm{d}\omega$

二、振动与波

2015年12月3日 17:09

1. 振动
    a. 振动指周期性往复运动.
    b. 简谐振动
        i. 具有$F=-kx$.
        ii. 即受力总指向平衡位置.
        iii. 称为弹性恢复力.
    c. 简谐振动的运动学方程
        i. $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx$
        ii. $x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$
        iii. 其中三个参数(A,ω,φ_0)为振幅、圆频率、初相位
        iv. 相位$\varphi=\omega t+\varphi_0$
        v. $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}},\ddot{x}=-\omega^2x,w=\dfrac{2\pi}{T},T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$
        vi. 频率$\nu=\frac{1}{T}$
            1) 光子能量$E=h\nu=\frac{h\omega}{2\pi}\propto\omega$
            2) 单一圆频率振动系统——单色谐振子
    d. 振子能量
        i. 动能

$$E_k=\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega x+\varphi_0)$$

        ii. 弹性势能

$$V=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega x+\varphi_0)$$

        iii. 总能量

$$E=\frac{1}{2}kA^2$$

   iv. 在$\pm A$处，$\dot{x}=0$，阻挡振子（宏观物体）穿透
   v. 量子隧道效应
  e. 单摆
   i. $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\theta=0$
   ii. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{r^2+2(l+r)^2}{2g(l+r)}}$
2. 机械波与简谐波
  a. 波动传递信息和能量
   i. 各质元不能前进，只传播振动信息(A,ω,φ_0)
   ii. 各质元振动相位不同
   iii. 波动速率$v\ll c$
  b. 横波与纵波
   i. 横波：各质点振动方向与波的传播方向垂直
   ii. 纵波：振动与波动同向，又称为疏密波
  c. 弹性材料被施加作用力
   i. 大部分材料允许纵向形变
   ii. 小部分材料允许横向形变
   iii. 浅水能有横波，深水只有纵波
  d. 若所有质元均做简谐运动，称此波为简谐波
   i. 波速——相位信息传递速度，为常量
   ii. 相速度仅为波速的一种形式
   iii. $u(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\dfrac{x}{v_0}\right)+\varphi_0\right]$