1 第一章

1.1 事件及其运算, 概率及其性质

- 样本空间: 所有样本点的集合. 通常用Ω或S表示
- 样本点: 通常用ω表示

- 事件: 是样本空间的子集. 大写字母表示.
- 必然事件: Ω
- 不可能事件: $\varnothing$

- 子事件: $A \subset B$, 表示A发生则B一定发生
- 事件相等: $A \subset B \wedge B \subset A$, 则$A = B$.
- 事件和: $A \cup B$, 表示A和B至少有一个发生.
- 事件积: $A \cap B$, 表示A和B同时发生.
- 事件互斥: $A \cap B = \varnothing$.
- 事件差: $A - B$或AB^c, A发生而B不发生.

- 分配律: $A(B+C) = AB + AC$, $A - (B+C) = A - B - C$
- 摩根律: $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$, $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

1.2 概率的定义及其性质

- 概率的定义
  - 古典概型
    计算一个事件包含的基本事件个数, 由此得出概率.

    1. (有限性)实验结果只有有限个.
    2. (等可能性)每个基本事件发生的可能性相同.

    Bernouli试验. 概率=事件发生次数/总试验次数.

- 性质
  1. 单调性.$A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$
  2. $P(\hat{A}) = 1 - P(A)$
  3. (加法定理)

$$P(\sum_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1\le i\le j\le n}^{n} P(A_iA_j) + \sum_{1\le i\le j\le k\le n}^{n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n+1}P(A_1\cdots A_n)$$

  4. 次可加性 $P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$
  5. 下连续性
  6. 上连续性
- 例题
  1. 求证对任意n个事件$A_1, \cdots, A_n$有,

$$P(\prod_{k=1}^{n} A_k) \ge \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - n + 1$$

解: $P(A_n \prod_{k=1}^{n-1} A_k) \ge P(A_n) + P(\prod_{k=1}^{n-1} A_k) - 1$

1.3 古典概型和几何概率

1.3.1 计数原理

- 乘法原理
- 加法原理
- 排列组合
  - 从n个不同元素, 有放回地取r个形成组合, 有$\begin{pmatrix} n+r-1 \\ r \end{pmatrix}$种.
  - 多组组合模式(对应多项分布). 不尽相异元素的排列模式.

多组组合模式： 有 n 个不同元素, 要把它们分为 k 个不同的组, 使得各组依次有 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 个元素, 其中 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$, 则一共有

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$$

种不同分法.

不尽相异元素的排列模式 有 n 个元素, 属于 k 个不同的类, 同类元素之间不可辨认, 各类元素分别有 n_1, n_2, $\cdots$, n_k 个, 其中 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$, 要把它们排成一列, 则一共有

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!}$$

种不同排法.

1.3.2 古典概型

- 例题

1. n男m女排圈, 女不邻. 问排法.

   解: 找一个男生为队首, 插入女生在前n个空位(插入到最后和最前是一样的), 再绕成圈.
   这时有$|A|=(n-1)!\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}m!$种.
   再除以$|\Omega|=\frac{(n+m)!}{(m+n)}$即可.
   最后答案: $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} n+m-1 \\ m \end{pmatrix}$

2. 火柴盒问题. 2个火柴盒, 每个有n根. 每次随机拿一个盒的一根, 某次发现空了. 求此时另一盒中有m根的概率.

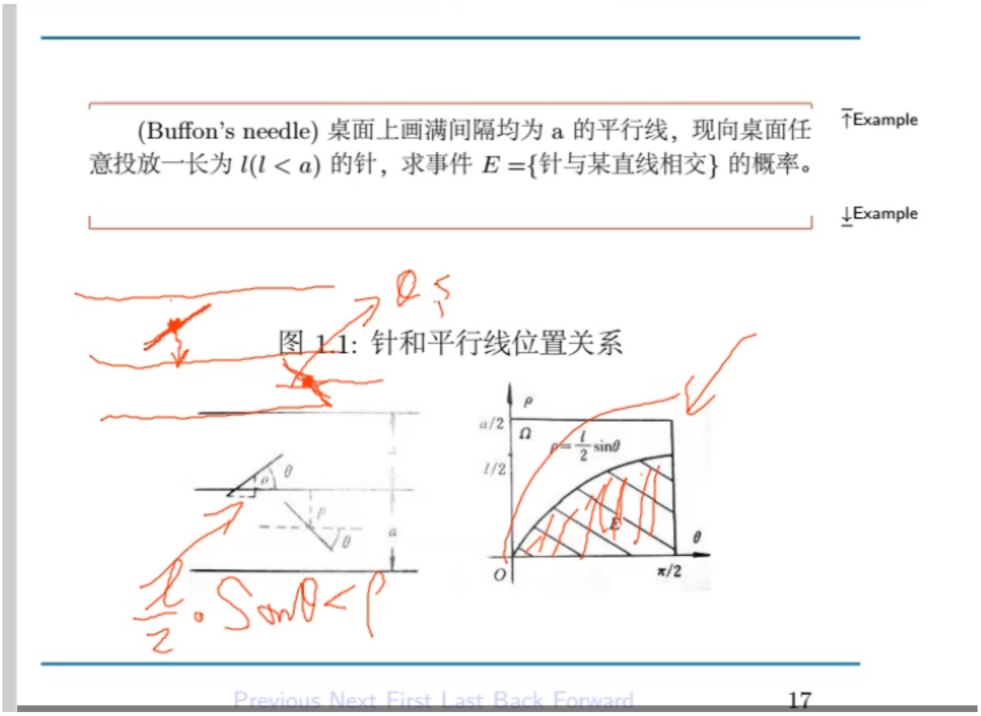
   解: $|\Omega|=2^{2n-m+1}, |A|=2\cdot\begin{pmatrix} 2n-m \\ n \end{pmatrix}$

3. 21本书分给17人. 6人0本, 5人1本, 2人2本, 4人3本.

   $|A|=\frac{17!}{6!5!2!4!}\frac{21!}{(0!)^6(1!)^5(2!)^2(3!)^4}$
   $|\Omega|=17^21$

1.3.3 几何概型

$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}$



1.4 条件概率

1.4.1 乘法定理

$P(AB)=P(A|B)P(B)$ $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$

1.4.2 全概率公式

互不相容的事件$B_1,B_2,\cdots B_n$，其中$B_i\cap B_j=\varnothing,\prod\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，则$B_1,B_2,\cdots B_n$为样本空间的一个分割.

全概率公式+

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$

证明:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i) &= \sum_{i=1}^{n} P(AB_i) \\ &= P(\sum_{i=1}^{n} AB_i) = P(A\sum_{i=1}^{n} B_i) \\ &= P(A\cdot\Omega) = P(A)\end{aligned}$$

- (Polya罐子模型)罐子中有a个白球b个黑球, 每次摸出一个后连同c个同色球放回. 证明第n次取球, 取出白球概率为$\frac{a}{a+b}$

  假设第$n=k-1$次取, 概率为$\frac{a}{a+b}$,
  则有$P(A_k|A_2)=\frac{(a+c)}{(a+c)+b}$, $\quad P(A_k|\overline{A_2})=\frac{(a)}{a+(b+c)}$,
  因此$P(A_k)=P(A_2)P(A_k|A_2)+P(\overline{A_2})P(A_k|\overline{A_2})=\frac{a}{a+b}$

1.4.3 贝叶斯公式

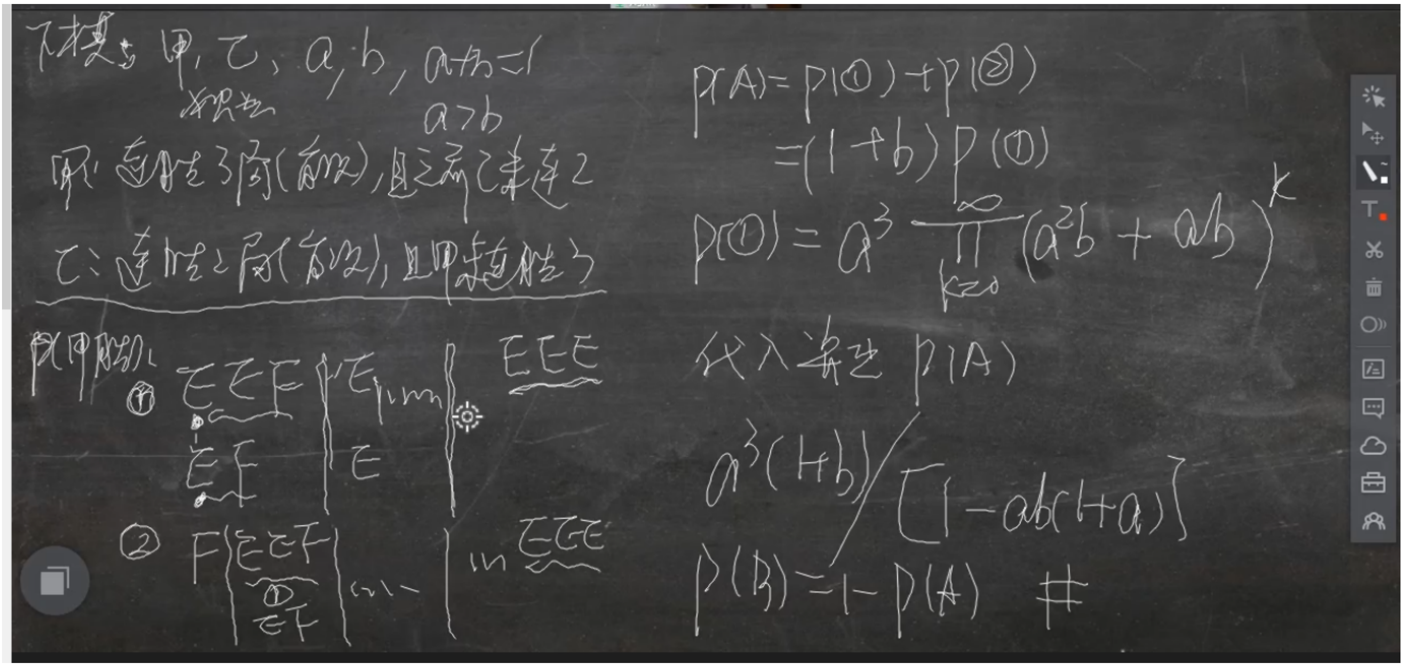
1.4.4 事件的独立性

- 研究什么情况下$P(AB)=P(A)P(B)$,即$P(A|B)=P(A)$,B对A发生的概率没有影响,这个和A对B发生概率没有影响是同时的.即A和B应该说是**相互**独立的.
  要证明A和B相互独立,只需要证明$P(\tilde{A}\tilde{B})=P(\tilde{A})P(\tilde{B})$四个式子中的一个.

- 推广到n个事件.(以下两个定义是等价的)
  定义1: 只要证明$P(\tilde{A}_1\tilde{A}_2\cdots P(\tilde{A}_n)=P(\tilde{A}_1)P(\tilde{A}_2)\cdots P(\tilde{A}_n)$这$2^n$个等式都要成立.
  定义2: 对$A_1,\cdots A_n$中任意k个事件$A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}$有

  $$P(\tilde{A}_{i_1}\tilde{A}_{i_2}\cdots P(\tilde{A}_{i_n})=P(\tilde{A}_{i_1})P(\tilde{A}_{i_2})\cdots P(\tilde{A}_{i_n})$$

  若$A_1,\cdots A_n$任意两个事件相互独立,则称为两两独立.(即k=2)



1.5　本章小结

- 古典概型/几何概型/事件运算, 排列组合
- 独立性, 相互/两两; 应用
- 全概率(based on 条件概率)
- Bayes公式

2　第二章

2.1　随机变量的概念

- 一维: 离散,连续
- 多维: 联合分布, 边缘分布, 条件分布密度

2.2　离散型随机变量

- 概率(质量)函数: $p_i = P(X = a_i),\ i = 1, 2, \cdots$

- 分布函数:$F(x) = P(X \le x) = \sum\limits_{i:p_i \le x} P(X = a_i) = \sum\limits_{i:p_i \le x} p_i$

- 概率函数和分布函数是一一对应的:
  $P(x = a_i) = P(a_{i-1} < X \le a_i) = F(a_i) - F(a_{i-1})$

- 分布表

- Bernoulli试验, 将一个可能结果为A和$\overline{A}$的Bernoulli试验独立地重复n次, 使得事件A每次出现的概率相同

2.2.1 0-1分布

随机变量X只能取$0, 1$两个值, 且有

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$$

则称X服从0-1分布或Bernoulli分布.

2.2.2 二项分布

二项分布为:

$$P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \cdots, n$$

称X服从二项分布, 记为$X \sim B(n, p)$ 如果$np_n \to \lambda > 0$,因此$p_n \to 0$, 从而

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} (np_n)^k (1-p_n)^n (1-p_n)^{-k} \to \frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda}$$

2.2.3 几何分布(Geometric distribution)

- 在n重贝努里试验中, 当$n \to \infty$, 称为**可列重贝努里试验**

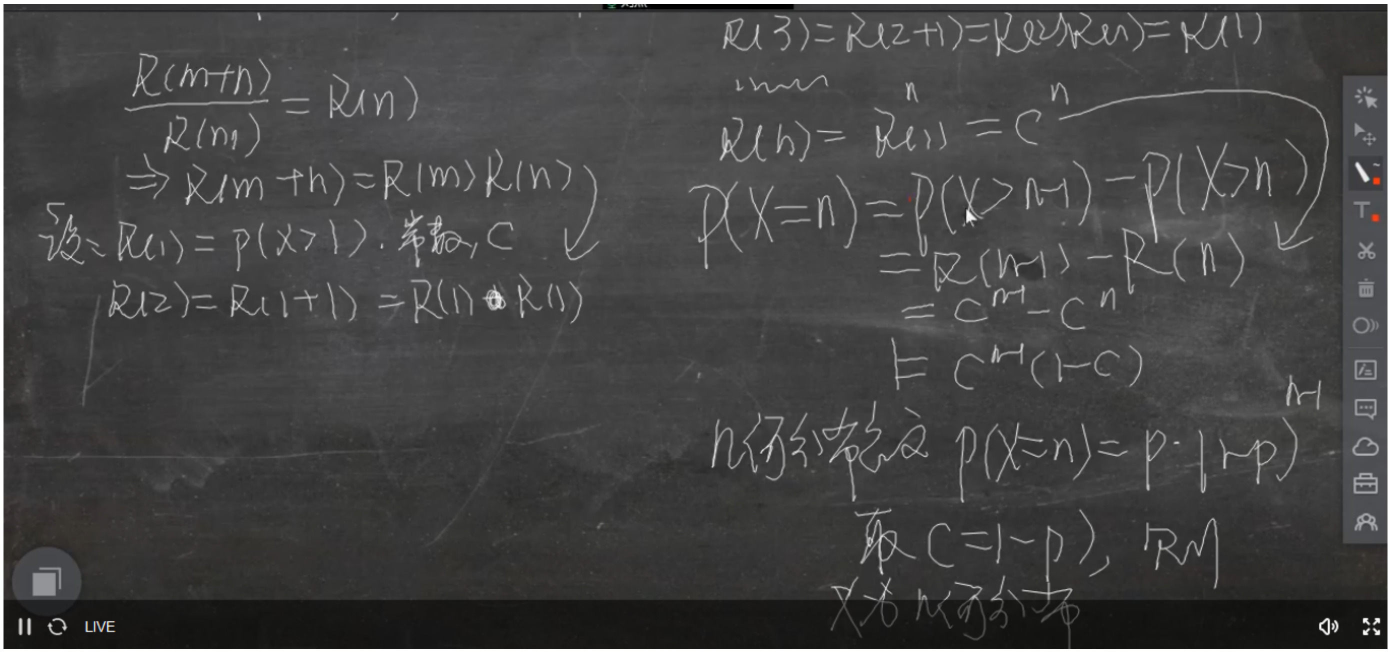
- 几何分布描述首次出现成功:
  $$P(X = k) q^{k-1} p,\ k = 1, 2, \cdots$$
  记为$X \sim G(p)$

- 无记忆性!

- ξ服从几何分布$G(p)$当且仅当对任何正整数m,n,有

$$P(\xi > m+n|\xi > m) = P(\xi > n)$$

这个性质成为几何分布的**无记忆性**(memoryless property)



2.2.4 Pascal分布(负二项分布)(这玩意知道就行)

可列重贝努里试验中, 以X_r表示第r次成功发生时的试验次数, 则X_r的分布律为

$$P(X_r = k) = \begin{pmatrix} r-1 \\ k-1 \end{pmatrix} p^{r-1}q^{k-r}p$$
$$= \begin{pmatrix} r-1 \\ k-1 \end{pmatrix} p^{r-1}q^{k}$$

称此概率分布为Pascal分布/负二项分布.

且有

$$\sum_{k=r}^{\infty} p_k = p^r \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} r-1 \\ r+k-1 \end{pmatrix} q^k = p^r(1-q)^{-r} = 1$$

2.2.5 Poisson分布

满足

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2,\cdots,\lambda>0$$

则称X服从参数为λ的Poisson分布, 并记为$X\sim P(\lambda)$或$X\sim P_{oi}(\lambda)$

1. 发射粒子数满足泊松分布, 接收到一个的概率为p. 最后仍然满足泊松分布$X\sim P_{oi}(p\lambda)$

2.2.6 离散的均匀分布

随机变量X取值$a_1,a_2\cdots,a_n$

$$P(X=a_i)=\frac{1}{n}$$

2.3 连续型随机变量

2.3.1 正态分布

概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

记为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

标准正态分布的分布函数记为$\Phi(x)$

2.3.2 指数分布

概率密度函数如下

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x},\ x>0,\\ 0,\ x\le 0\end{cases}$$

其中$\lambda>0$ 分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x},\ x>0\\ 0,\ x\le 0\end{cases}$$

失效率:

$$h(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\le X\le x+\Delta x|X>x)}{\Delta x}$$

所以失效率最终为$h(x)\equiv\lambda,\ 0<x<+\infty$. 无记忆性.

2.3.3 均匀分布

设$-\infty < a < b < +\infty$, 密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, \ a \le x \le b \\ 0, \ otherwise \end{cases}$$

分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, \ a < x \le b \\ 1, \ x > b \end{cases}$$

2.4 多维分布与边际分布

2.4.1 多维分布

- 多项分布. X_i表示A_i出现次数, 总共N次.

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \cdots, X_n = k_n) = \frac{N!}{k_1! \cdots k_n!} p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$$

  记为$M(N; p_1, \cdots, p_n)$

2.4.2 多维连续型随机变量

- 均匀分布

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1/[(b-a_(d-c)], \ a \le x_1 \le b, c \le x_2 \le d \\ 0, \ otherwise \end{cases}$$

- 单位圆上均匀分布 TODO
- 二元正态分布

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-a)(x-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)$$

2.4.3 边缘分布

2.4.4 条件分布和随机变量的独立性

2.4.5 连续型随机变量的条件分布

有

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

2.5 随机变量的函数的概率分布

$y=g(x)$严格单调连续, 反函数唯一为$x=h(y)$, 且$h'(y)$存在且连续, 则$Y=g(x)$也是连续型随机变量, 有

$$p(y)=f(h(y))|h'(y)|$$

3 大数定律和中心极限定理

3.1 中心极限定理

设X_n为$i.i.d.$的随机变量序列, 具有公共的数学期望μ和方差σ^2, 则$X_1+\cdots+X_n$的标准化形式$\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}(X_1+\cdots+X_n-n\mu)$满足中心极限定理, 即对任意$x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\Phi(x)$$

其中$F_n(x)$是$\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}(X_1+\cdots+X_n-n\mu)$的分布函数

4 参数估计

4.1 区间估计

4.1.1 枢轴变量法

1. 单正态总体. $X_1,X_2,\cdots,X_n i.i.d. N(\mu,\sigma^2)$

   - 估计μ, 未知σ
   $$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t_{n-1}$$
   - 估计σ, 未知μ
   $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}$$
   - 估计σ, 已知$\mu=\mu_0$.
   $$\sum_{i=0}^{n}\frac{(X_i-\mu_0)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_n$$
   - 估计μ, 已知$\sigma=\sigma_0$ 由$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{1}{n}\sigma_0^2)$ 有
   $$\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{n}\sigma_0^2}}\sim N(0,1)$$

2. 二正态总体. $X_1, X_2, \cdots, X_m i.i.d. N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n i.i.d. N(\mu_2, \sigma_2^2)$

- 估计$\mu_1 - \mu_2$, 未知σ_1, σ_2.
  根据$(\overline{X} - \overline{Y}) \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{1}{n}\sigma_1^2 + \frac{1}{m}\sigma_2^2)$有

$$\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_\omega \sqrt{\frac{m+n}{mn}}} \sim t_{n+m-2}$$

  这里$S_\omega = \frac{1}{m+n-2}(\sum_{i=0}^{m}(X_i - \overline{X}) + \sum_{i=0}^{n}(Y_i - \overline{Y}))$

- 估计$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, 未知$\mu_1, \mu_2$.
  根据$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi_{n-1}^2$

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{n-1,m-1}$$

  这里计算时注意$F_{n-1,m-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) = 1/F_{m-1,n-1}(\frac{\alpha}{2})$

- 估计$\mu_1 - \mu_2$, 已知$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$. 根据$(\overline{X} - \overline{Y}) \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{1}{n}\sigma_1^2 + \frac{1}{m}\sigma_2^2)$有

$$\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_0 \sqrt{\frac{m+n}{mn}}} \sim N(0, 1)$$

- 估计$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, 已知$\mu_1, \mu_2$.
  根据$\sum_{i=0}^{n}\frac{(X_i - \mu_0)^2}{\sigma_1^2} \sim \chi_n^2$及$\sum_{i=0}^{m}\frac{(Y_i - \mu_0)^2}{\sigma_2^2} \sim \chi_m^2$有

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m}(Y_i - \mu_0)^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{n,m}$$

  这里计算时注意$F_{n,m}(1 - \frac{\alpha}{2}) = 1/F_{m,n}(\frac{\alpha}{2})$

4.1.2 大样本法

利用中心极限定理即可

5 假设检验

表 7.2.1: 一样本正态总体$N(\mu,\sigma^2)$.

检验对象	检验统计量	分布	拒绝域†
μ (σ^2已知)	$Z=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/\sigma$	$N(0,1)$	$\begin{cases} \lvert Z\rvert > u_{\alpha/2} \\ Z > u_\alpha \\ Z < -u_\alpha \end{cases}$
μ (σ^2 未知)	$T=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/S$	t_{n-1}	$\begin{cases} \lvert T\rvert > t_{n-1}(\alpha/2) \\ T > t_{n-1}(\alpha) \\ T < -t_{n-1}(\alpha) \end{cases}$
σ^2 (μ 已知)	$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2$	χ_n^2	$\begin{cases} \chi^2 > \chi_n^2(\alpha/2)\text{或者}\chi^2 < \chi_n^2(1-\alpha/2) \\ \chi^2 > \chi_n^2(\alpha) \\ \chi^2 < \chi_n^2(1-\alpha) \end{cases}$
σ^2 (μ 未知)	$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2$	χ_{n-1}^2	$\begin{cases} \chi^2 > \chi_{n-1}^2(\alpha/2)\text{或者}\chi^2 < \chi_{n-1}^2(1-\alpha/2) \\ \chi^2 > \chi_{n-1}^2(\alpha) \\ \chi^2 < \chi_{n-1}^2(1-\alpha) \end{cases}$

†有关均值的检验: 对立假设分别为$\mu \neq \mu_0$, $\mu > \mu_0$ 和$\mu < \mu_0$. 有关方差的检验: 对立假设分别为$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$, $\sigma^2 > \sigma_0^2$ 和$\sigma^2 < \sigma_0^2$.

表 7.2.2: 两样本正态总体的假设检验

检验对象	检验统计量	分布	拒绝域[†]
均值(方差已知)	$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}$	$N(0,1)$	$\begin{cases} \|Z\|>u(\alpha/2) \\ Z>u(\alpha) \\ Z<-u(\alpha) \end{cases}$
均值(方差未知)[‡]	$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$	t_{m+n-2}	$\begin{cases} \|T\|>t_{m+n-2}(\alpha/2) \\ T>t_{m+n-2}(\alpha) \\ T<-t_{m+n-2}(\alpha) \end{cases}$
方差(均值已知)	$F=\frac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2/m}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_2)^2/n}$	$F_{m,n}$	$\begin{cases} F>F_{m,n}(\alpha/2)\text{或}F<\frac{1}{F_{n,m}(\alpha/2)} \\ F>F_{m,n}(\alpha) \\ F<\frac{1}{F_{n,m}(\alpha)} \end{cases}$
方差(均值未知)	$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F_{m-1,n-1}$	$\begin{cases} F>F_{m-1,n-1}(\alpha/2)\text{或}F<\frac{1}{F_{n-1,m-1}(\alpha/2)} \\ F>F_{m-1,n-1}(\alpha) \\ F<\frac{1}{F_{n-1,m-1}(\alpha)} \end{cases}$

†有关均值的检验: 对立假设分别为$\mu_1\neq\mu_2$, $\mu_1>\mu_2$ 和$\mu_1<\mu_2$. 有关方差的检验: 对立假设分别为$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$, $\sigma_1^2>\sigma_2^2$ 和$\sigma_1^2<\sigma_2^2$.
‡假定方差相等