2018 ～ 2019 学年第 2 学期多变量微积分期中考试答案

一、(本题8分)$L_{AB}: x=2,\ y=(1-t)2,\ z=0,\quad t\in[0,1]$, 则————2分

$$\int\limits_{L_{AB}}(x+y+z)ds=\int_0^1(2+2-2t)\sqrt{2^2}dt=6.----------4分$$

$$\int\limits_{L_{\widehat{BC}}}(x+y+z)ds=\int_0^{2\pi}(2\cos t+2\sin t+t)\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2+1}dt=2\sqrt{5}\pi^2.------7分$$

$$\int\limits_{L}(x+y+z)ds=\int\limits_{L_{AB}}(x+y+z)ds+\int\limits_{L_{\widehat{BC}}}(x+y+z)ds=6+2\sqrt{5}\pi^2.---------8分$$

二、 求下列各题（每小题8分，共16分）

1. 直线L的方向为$\mathbf{v_1}=(0,\frac{1}{2},1)$, 设$M$在直线$L$的垂足为$N=(1,\frac{1}{2}t-\frac{1}{2},t-\frac{1}{2})$, 则

$$\overline{MN}\perp\mathbf{v_1}\Longrightarrow(1,\frac{1}{2}t+\frac{1}{2},t-\frac{3}{2})\cdot(0,\frac{1}{2},1)=0\Longrightarrow t=1,$$

$N=(1,0,\frac{1}{2})$, 垂线l的方向$\mathbf{v_2}=(1,1,-\frac{1}{2})$, 从而垂线 l 的方程为

$\frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-\frac{1}{2}}$, 或 $x=y+1=2-2z$.————4分

平面 Π 的法向$\mathbf{n}=(1,1,-\frac{1}{2})\times(0,1,0)=(\frac{1}{2},0,1)$,

平面 Π 的方程$\frac{1}{2}x+z-1=0$或$x+2z-2=0$.————8分

2. 设此点为$M(x_0,y_0,z_0),(x_0,y_0,z_0>0)$, 则$M$处的法向为$\mathbf{n}=(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2})$, —-1分

在M处的切平面方程为$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0$或

$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z-1=0$, ————3分

切平面在三个坐标轴上的截距为$\frac{a^2}{x_0},\frac{b^2}{y_0},\frac{c^2}{z_0}$, 则四面体的体积为$\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$.——4分

求最小体积, 可以用**平均值不等式** $\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}\geq\frac{abc}{2}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2})^3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc.$

也可以用**拉格朗日乘数法**. 作辅助函数

$$F(x,y,z,\lambda)=\frac{1}{xyz}+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$$

$$\begin{cases}F'_x=-\dfrac{1}{x^2yz}+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0,\\ F'_y=-\dfrac{1}{xy^2z}+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0,\\ F'_z=-\dfrac{1}{xyz^2}+\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0,\\ F'_\lambda=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0,\end{cases}$$

解得$\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{1}{3}$或$x=\dfrac{a}{\sqrt{3}},y=\dfrac{b}{\sqrt{3}},z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$.——7分

即$M(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}})$四面体体积最小, 这个最小体积为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}abc$.———8分

三、(本题15分)

因为$|xy|\le\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, 且在$(0,0)$点邻域内$\sin(x^2+y^2)\le x^2+y^2$, 则

$$0\le\frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2)\le\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}(x^2+y^2)}(x^2+y^2)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}},$$

故$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$,即函数$f(x,y)$在$(0,0)$点连续.———5分

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\quad \lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{x}=0$$

即$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$,函数$f(x,y)$在$(0,0)$点偏导数存在.———10分

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

取$y=kx$,当$(x,y)\to(0,0)$时，上式极限为$\dfrac{\sqrt{|k|}}{1+k^2}$,则极限不存在, 故函数$f(x,y)$在$(0,0)$点不可微.———15分

四、(本题16分，第1小题10分,第2小题6分)

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2f+x^3y^2f'_1+x^3y\cos xyf'_2,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^4yf'_1+x^4\cos xyf'_2$————-6分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=8x^3yf'_1+x^3(4\cos xy-xy\sin xy)f'_2+2x^4y^3f''_{11}+3x^4y^2\cos xyf''_{12}+x^4y\cos^2 xyf''_{22}---10分$$

2. $\displaystyle\int_1^x dv\int_v^x e^{-u^2}du=\int_1^x e^{-u^2}du\int_1^u \mathrm{d}v=\int_1^x(u-1)e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$————-2分

$$\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}+(x-1)e^{-x^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x,--------4分$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x.--------6分$$

五、(本题 15分)

解：(1) 求D内驻点, 解驻点方程组

$$\begin{cases}f'_x=2x(1-y^2)=0,\\ f'_y=2y(2-x^2)=0,\end{cases}$$

结合$y>0, x^2+y^2<4$, 解得区域内驻点$M_1(\sqrt{2},1)$, $M_2(-\sqrt{2},1)$. ————3分

$$A=f''_{xx}=2-2y^2,\quad B=f''_{xy}=-4xy,\quad C=f''_{yy}=4-2x^2,$$

对于驻点M_1,M_2, $A=0,\Delta<0$, 由极值判别法知他们都不是函数在区域D的极值点, 函数在区域D内无极值点. $f(M_1)=f(M_2)=2$.————5分

(2) 在边界线$y=0$上, $f(x,0)=x^2$, $f'_x(x,0)=2x=0, f''_{xx}(x,0)=2>0$, 所以$M_3(0,0)$为函数在边界$y=0$上的极小值点, $f(M_3)=0$.————-7分

(3) 在边界线$x^2+y^2=4$上, $f(x,\sqrt{4-x^2})=x^4-5x^2+8$,

$$f'_x(x,\sqrt{4-x^2})=4x^3-10x=0\Longrightarrow x=0,x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\quad f''_{xx}(x,\sqrt{4-x^2})=12x^2-10,$$

$x=0$时, $y=2$, $f''_{xx}<0$, 则点$M_4(0,2)$为函数在边界线$x^2+y^2=4$上的极大值点, $f(M_4)=8$.————-10分

$x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$时, $y=\sqrt{\frac{3}{2}}$, $f''_{xx}>0$, 则点$M_5(\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}})$和点$M_6(\sqrt{-\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}})$为函数在边界线$x^2+y^2=4$上的极小值点, $f(M_5)=f(M_6)=\frac{7}{4}$.————-13分

(4) 因为有界闭区域上的连续函数一定有最大值和最小值. 所以函数在闭区域D上的最大值为$f(0,2)=8$, 最小值为$f(0,0)=0$.————15分

六、(本题10分) 因为

$$[1+x^2+y^2]=\begin{cases}1+[x^2+y^2]=1, & 0\leqslant x^2+y^2<1,\\ 2, & 1\leqslant x^2+y^2\leqslant\sqrt{2}.\end{cases}------3分$$

积分区域$D=D_1\cup D_2$, $D_1=\{0\leqslant x^2+y^2<1, x\le 0, y\le 0\}$,$D_2=\{1\leqslant x^2+y^2<\sqrt{2}, x\le 0, y\le 0\}$,采用极坐标变换得

$$\begin{aligned}\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]dxdy&=\iint\limits_{D_1}xydxdy+2\iint\limits_{D_2}xydxdy------5分\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^3\sin\theta\cos\theta dr+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^{\sqrt[4]{2}}r^3\sin\theta\cos\theta dr---9分\\&=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}.------10分\end{aligned}$$

七、(本题10分)

解：记$V_1=\{x^2+y^2+(z-2)^2\le 4\}$, $V_2=\{x^2+y^2+(z-1)^2\le 9\}$, 则$V=V_2\backslash V_1$, 在$V_1$上作变换:

$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z-2=r\cos\theta,\ (0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le r\le 2)$

$$\iiint\limits_{V_1}(x^2+y^2)dV=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^2 r^2\sin^2\theta.r^2\sin\theta dr=\frac{256}{15}\pi.-----4分$$

在V_2上作变换:

$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z-1=r\cos\theta,\ (0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le r\le 3)$

$$\iiint\limits_{V_2}(x^2+y^2)dV=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^3 r^2\sin^2\theta.r^2\sin\theta dr=\frac{1944}{15}\pi.------8分$$

$$\iiint\limits_{V}(x^2+y^2)dV=\iiint\limits_{V_2}(x^2+y^2)dV-\iiint\limits_{V_1}(x^2+y^2)dV=\frac{1688}{15}\pi.------10分$$

八、(本题10分)

(1) 设点$P(x,y,z)$, 在此点的法向$\mathbf{n}=(2x,2y-z,2z-y)$, 由题意知$\mathbf{n}\cdot(0,0,1)=0$, 得$y=2z$. 由于点$P$在椭球面上，将其代入椭球面方程，得点$P$的轨迹曲线$\Gamma$: $x^2+\frac{3}{4}y^2=1$.————4分

(2) Σ是椭球面S位于曲线Γ上方的部分, 其方程为$z=\frac{y}{2}+\sqrt{1-x^2-\frac{3}{4}y^2}$, 其在$xoy$平面上的投影为区域$D=\{x^2+\frac{3}{4}y^2\le 1\}$.

$$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-\frac{3}{4}y^2}}=-\frac{2x}{2z-y},\ z'_y=\frac{1}{2}-\frac{3y}{4\sqrt{1-x^2-\frac{3}{4}y^2}}=\frac{z-2y}{2z-y},------6分$$

$$\left(\textbf{或}\quad F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yz-1\Longrightarrow z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{2x}{2z-y},\quad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{z-2y}{2z-y},\right)$$

$$dS=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}dxdy=\frac{1}{|2z-y|}\sqrt{5z^2+5y^2+4x^2-8yz}dxdy\quad(\text{利用椭球面方程})$$

$$=\frac{1}{|2z-y|}\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}dxdy------8分$$

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS=\iint\limits_{D}(x+\sqrt{3})dxdy=\iint\limits_{D}\sqrt{3}dxdy=\sqrt{3}\pi\frac{2}{\sqrt{3}}=2\pi.------10分$$