一、

$$y=\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2} \qquad (2分)$$

$$\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-1-1}=-\sum_{n=0}^{+\infty}(x-1)^n, \qquad |x-1|<1 \qquad (5分)$$

$$\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x-1-2}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(x-1)^n, \qquad |x-1|<2 \qquad (8分)$$

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-1)^n \qquad (9分)$$

收敛域为 $(0,2)$ (10分)

二、

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nx\,dx=0, \qquad (2分)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx,$$ 2

$$a_0=\pi, \qquad a_n=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1] \ \ (n>0) \qquad (6分)$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]\cos nx=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{-4}{(2k+1)^2\pi}\cos(2k+1)x \qquad (8分)$$

$x=0$ 时, $0=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{-4}{(2k+1)^2\pi}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8} \qquad (10分)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \qquad (11分)$$

由巴塞瓦尔等式得 $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2dx$ 12

1页

$$\frac{\pi^2}{2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{16}{(2k+1)^4\pi^2}=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90} \qquad (14分)$$

三、

(1) 原式 $=\int_C (2y+2xy)dx+(x^2+2x+y^2)dy+\int_{\overline{BA}}(2y+2xy)dx+(x^2+2x+y^2)dy$

$-\int_C ydx-\int_{\overline{BA}}(2y+2xy)dx-(x^2+2x+y^2)dy$

$=\iint_D 0\ dxdy-\int_C ydx-0$ (5分)

在 C 上可设 $x=2+x\cos\theta,\quad y=\sin\theta,\qquad \theta\in[0,\pi]$

$-\int_C ydx=4\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\ d\theta=2\pi$ (9分)

(2) $\int_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}ds=\int_{\partial D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta\right)ds$

$=\int_{\partial D}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy=\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy$ (5分)

$\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy=\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 e^{-r^2}rdr=\pi(1-e^{-1})$ (9分)

四、

$$\iint_S (x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy=3\iiint_V dxdydz \quad (3分)$$

设 $u=x-y+z,\ \ v=y-z+x,\ \ w=z-x+y$ (5分)

V'： $|u|+|v|+|w|=1,$ (7分)

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=4, \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=\frac{1}{4} \quad (9分)$$

所以 上式 $=3\iiint_V dxdydz=3\iiint_{V'}\frac{1}{4}dudvdw=\frac{3}{4}\cdot 8\cdot\frac{1}{6}=1$ (12分)

五、

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left|\ln\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right]\right|}{\dfrac{1}{n^p}}=1$

$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left|\ln\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right]\right|$ 与 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 同敛散.

当 $p>1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\ln\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right]$ 绝对收敛.

$p\le 1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left|\ln\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right]\right|$ 发散.

当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$

$n\to+\infty$，$\ln\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right]=\dfrac{(-1)^n}{n^p}-\dfrac{1}{2n^{2p}}+o\left(\dfrac{1}{n^{2p}}\right)$

当 $0<p\le\dfrac{1}{2}$ 时原级数发散，$\dfrac{1}{2}<p\le 1$ 原级数条件收敛.

六、

(1) 一致收敛　　　(2分)

$\forall A > 1$, $\left|\int_1^A \sin x dx\right| \leq 2$

对每一个 $\alpha \in [\alpha_0, +\infty)$, $\dfrac{1}{x^\alpha}$ 对 x 单调减, 且关于$\alpha \in [\alpha_0, +\infty)$ 一致趋于0,

由狄利克雷判别法知在 $[\alpha_0, +\infty)$, 上是一致收敛的.　　　(4分)

(2) 非一致收敛.　　　(6分)

反证法: 若 $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^\alpha} dx$ 在 $\alpha \in (0, +\infty)$ 上的一致收敛,

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, B(\varepsilon) > 0$, 当 $b_1, b_2 > B$ 时, $\left|\int_{b_1}^{b_2} \dfrac{\sin x}{x^\alpha} dx\right| < \varepsilon$

令 $\alpha \to 0$, 得 $\left|\int_{b_1}^{b_2} \sin x\, dx\right| \leq \varepsilon$, 此与 $\int_1^{+\infty} \sin x\, dx$ 发散 矛盾.　　　(8分)

七、

(1) 设 $x=3y$，则 $\int_0^{+\infty}\frac{x^4}{(9+x^2)^5}dx=\frac{1}{3^5}\int_0^{+\infty}\frac{y^4}{(1+y^2)^5}dy$

再设 $z=y^2$，则 $\frac{1}{3^5}\int_0^{+\infty}\frac{y^4}{(1+y^2)^5}dy=\frac{1}{3^5}\int_0^{+\infty}\frac{y^4}{(1+y^2)^5}dz$

$$=\frac{1}{2\cdot 3^5}\int_0^{+\infty}\frac{z^{\frac{3}{2}}}{(1+z)^5}dz=\frac{1}{2\cdot 3^5}B\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2\cdot 3^5}\frac{\Gamma^2(\frac{5}{2})}{\Gamma(5)}\quad=\frac{\pi}{2^5\cdot 3^3\cdot 4!}\quad=\frac{\pi}{20736}$$

(2) $I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}dx\qquad(a>0)$

$\int_0^{+\infty}\frac{2ax^2}{(1+a^2x^2)(1+x^2)}dx$ 在 $a>0$ 上内闭一致收敛.

$$I'(a)=\int_0^{+\infty}\frac{2ax^2}{(1+a^2x^2)(1+x^2)}dx$$

当 $a=1$ 时，上式 $=\int_0^{+\infty}\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}dx=-\int_0^{+\infty}x\,d\frac{1}{1+x^2}$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$$

当 $a\neq 1$ 时，上式 $=\int_0^{+\infty}\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}dx=\frac{2a}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+a^2x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$$=\frac{\pi}{1+a}$$

综合得 $I'(a)=\int_0^{+\infty}\frac{2ax^2}{(1+a^2x^2)(1+x^2)}dx\ =\frac{\pi}{1+a}$

则 $I(a)=\pi\ln(1+a)+C$,

当 $0\leq\ \alpha\leq\ \alpha_1$, 时, $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+a_1^2x^2)}{1+x^2}dx$ 收敛.

$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}dx$ 在 $[0,\alpha_1]$ 上一致收敛.

$I(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 处连续，$I(0)=0 \Rightarrow C=0$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}dx = \pi\ln(1+a)$$

八、

(1) 由 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+b_n \Rightarrow \frac{na_n}{(n+1)a_{n+1}}=1+\frac{n}{n+1}b_n$,

设 $c_n=\frac{n}{n+1}b_n$，由 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 是绝对收敛级数,

可知 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ 也是绝对收敛级数 .

$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+c_n)$ 收敛，设其和为 c_1

$$\frac{1\ a_1}{(n+1)a_{n+1}}=\prod_{k=1}^{n}(1+c_k) \to e^{c_1}=C$$

$$a_n \sim \frac{C'}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}a_n \text{ 发散.}$$

(2) 设 $p>0$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!n^p}$ 的敛散性.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!n^p}}{\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)(p+n)}{(n+1)!(n+1)^p}}=\frac{n+1}{p+n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p$$

$$=\frac{n+1}{p+n}[1+\frac{p}{n}+O(\frac{1}{n^2})]=1+\frac{1}{n}+\underline{\frac{n+1}{p+n}O(\frac{1}{n^2})}$$

符合(1)的条件，所以 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!n^p}$ 发散.