第三章 守恒定律

2015年11月16日　　20:18

一、动量守恒

二、能量守恒

三、角动量守恒

一、动量守恒

2015年10月19日　　16:56

1. 动量守恒
    a. 守恒条件：孤立质点系.
        i. 离其他粒子很远：星系.
        ii. 内力远大于外力：爆炸的炸弹.
    b. $\dfrac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=0$
        i. $\vec{P}$为总动量.
        ii. 对总动量成立时，对分动量也成立.
    c. 冲量（impulse）
        i. 元冲量$\vec{J}=\vec{F}\,\mathrm{d}t$
        ii. $\overrightarrow{p_{(t)}}-\overrightarrow{p_{(t_0)}}=\int_{t_0}^{t}\vec{F}\,\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}j=J$
2. 质点系的动量定理
    a. 质点系存在一个特殊的平均点C，即质心（Center of Mass, CM）.
        i. 可以代表其整体的平动和各质点间相对运动.
    b. 质心运动定理
        i. $\overrightarrow{r_c}=\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{m_i}{m}\right)\overrightarrow{r_i}$
        ii. 其中$\dfrac{m_i}{m}$为无单位质量权重因子.
        iii. 若外力之和$\overrightarrow{F_{ex}}=0$，则$\vec{a}_c=0$，质心运动状态不变.
    c. 连续体的积分.
        i. $\vec{r}_c=\dfrac{\int\vec{r}\,\mathrm{d}m}{\int\mathrm{d}m}$
        ii. 面元微分公式
            1) $\mathrm{d}A=\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y$
            2) $\mathrm{d}A=\mathrm{d}r\cdot r\,\mathrm{d}\theta$
        iii. 例：半径为a的均匀（面密度为σ）半圆薄板，求质心C.
            1) 由对称性，$x_c=0$

2) $y_c=\frac{\iint y\,\mathrm{d}m}{\iint \mathrm{d}m}=\frac{\int_0^\pi\int_0^a y\cdot\sigma r\,dr\,d\theta}{\frac{1}{2}\sigma\pi a^2}$

3) 带入$y=r\sin\theta$，得

4) $y_c=\frac{2\int_0^\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\,\mathrm{d}r}{\pi a^2}=\frac{4a}{3\pi}$

3. 变质量体的动力学
   a. 特殊质点系$m=m(t)$.
   b. 定义质量变化率：$\dot{m}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$.
   c. 变质量体的运动方程：
      i. $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=(\vec{u}-\vec{v})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}+\vec{F}$
      ii. 含义：左边为主体的质量乘以加速度，右边为真实外力加上相对运动动量随时间的变化率.
   d. 齐奥尔科夫斯基公式和多级运载火箭

二、能量守恒

2015年11月2日 19:56

1. 重力势能与机械能
    a. 重力势能的推导：
        i. $\mathrm{d}y = \mathrm{d}s \sin\theta$
        ii. $m\overrightarrow{a_t} = \frac{m\,\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg\sin\theta$
        iii. $\mathrm{d}v = -g\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\cdot\mathrm{d}t = -g\frac{\mathrm{d}y}{v}$
        iv. $m\int_v^0 v\,\mathrm{d}v = -m\int_0^h g\,\mathrm{d}y$
        v. $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$
    b. 上式左边为初态，右边为末态.
    c. 质点拥有动能kinetic energy $E_k = \frac{1}{2}mv^2$
    d. 质点拥有重力势能potential energy $E_p = mgh$
    e. 机械能$E_{总} = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$
2. 改变物体的动能
    a. 微分形式
        i. $\mathrm{d}E_k = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = m\vec{v}\,\mathrm{d}\vec{v} = \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s}$
        ii. 仅切向加速度$\overrightarrow{a_t}$改变v的大小，$\overrightarrow{a_t}$由$\overrightarrow{F_t}$引起.
    b. 积分形式
        i. $\Delta E_k = W = \int_{s_0}^{s} F\cos\theta\,\mathrm{d}s$
        ii. 动能的增量等于外力总功.
    c. 功率P，外力单位时间做功.
3. 质点系的动能定理
    a. 内力不会改变总动量，会改变总动能.
4. 势能
    a. 有心力：若空间存在中心点O，受力$\vec{f}$总沿$\overline{OP}$方向，并且$\left|\vec{f}\right|$为$r = \overline{OP}$单值函数，则称收到有心力作用.
        i. 举例：万有引力，库伦静电力.
    b. 有心力做功的表示：

i. $\mathrm{d}A = \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{s} = f(r)\,\mathrm{d}r$

ii. $A_{QP} = \int_{r_Q}^{r_P} f(r)\,\mathrm{d}r$

iii. 由上式可说明，有心力做功的大小与路径无关.

c. 保守力

i. 满足$\oint \overrightarrow{f(r)}\,\mathrm{d}\vec{r} = 0$的力称为保守力.

ii. 若质点受保守力$\vec{f}$作用，缓慢由$Q \to P$沿任意路径运动，定义$U(P) - U(Q) = -\int_Q^P \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{s}$，即保守力做功（负值）为势能增量.

iii. 势能来自于两体保守力作用，势能属于两体体系。

iv. 体系机械能是否守恒，主要取决于是否有耗散性非保守力做功.

5. 柯尼希定理

a. 相对于惯性系K以$\vec{v}$运动的K'下，质点系$\{m_i\}$的动能：

i. $E_k' = E_k + \frac{1}{2}mv^2 + \vec{P} \times \vec{v}$

ii. 若取K'系为质心系，则总动量$\vec{P} = 0$，$E_k' = E_k + \frac{1}{2}mv^2$

b. 所以质心系下，惯性力做功为0，可按照惯性系求解能量问题.

c. 大型粒子对撞机提高能量利用率.

6. 两体碰撞

a. 定义恢复系数$\mathrm{e} = \left|\frac{\vec{u}}{\overrightarrow{u_0}}\right|$

b. $\overrightarrow{v_1} = \frac{(m_1 - \mathrm{e}m_2)\overrightarrow{v_{1(0)}} + (1+e)m_2\overrightarrow{v_{2(0)}}}{m_1 + m_2}$

c. 完全弹性时，$\mathrm{e} = 1$

$$\overrightarrow{v_1} = \frac{(m_1 - m_2)\overrightarrow{v_{1(0)}} + 2m_2\overrightarrow{v_{2(0)}}}{m_1 + m_2}$$

d. 完全非弹性时，$\mathrm{e} = 0$

$$\overrightarrow{v_1} = \frac{m_1\overrightarrow{v_{1(0)}} + m_2\overrightarrow{v_{2(0)}}}{m_1 + m_2}$$

m_1, m_2, m_c一起运动

三、角动量守恒

2015年11月11日 20:03

1. 掠面速度
    a. 定义掠面速度S为单位时间内$\vec{r}$扫过的面积.
    b. $\vec{S}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}$
    c. 开普勒第二定律（提出定律时不是充要条件，但是牛顿补充为充要条件）
        i. 质点m沿任意轨迹移动，受到且仅受到有心力$\vec{F_r}=F_r\vec{e_r}$运动，等价于其掠面速度为常数，即
        ii. $\dfrac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t}=0$
2. 两孤立质点体系
    a. $\dfrac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}(S_1+S_2)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\vec{r_1}\times\vec{f}}{2m_1}-\dfrac{\vec{r_2}\times\vec{f}}{2m_2}$
    b. 当$m_1=m_2=m$时，$\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2m}(\vec{r_1}-\vec{r_2})\times\vec{f}=0$，除此之外，$\vec{S}$不守恒.
    c. 定义两质点系统的角动量$\vec{L}=2m_1\vec{S_1}+2m_2\vec{S_2}=\vec{r_1}\times m\vec{v_1}+\vec{r_2}\times m\vec{v_2}$
    d. $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}(\vec{r_1}-\vec{r_2})\times\vec{f}=0$
3. 角动量，即动量矩
    a. 对单个质点，其角动量$\vec{l}=\vec{r}\times m\vec{v}=\vec{r}\times\vec{p}$
    b. 约定称呼$\vec{r}\times\vec{A}$为$\vec{A}$的矩，所以角动量又成为动量矩.
    c. 外力对角动量的改变.
        i. $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\overrightarrow{M_{外}}=\sum\vec{r_j}\times\vec{F_i}$
        ii. 在外力矩之和为零的时候，体系角动量守恒.
    d. 质心系下的角动量定理

i. $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{M_{外}}$

ii. 与惯性系下结论不变，类似于柯尼希定理.