

中国科学技术大学 2010–2011 学年第 1 学期

《单变量微积分》期末考试试卷

一、计算题 (请给出必要的计算步骤, 每题 5 分, 共 30 分)

1 $\int x^2 e^x dx$

2 $\int_0^2 |x^3 - 1| dx$

3 $\int \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx$

4 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (根据瑕积分定义计算)

5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^3 dt}{\ln(1+x^4)}$

6 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$, p 是正常数.

二、(本题 15 分) 曲线 $y = \sqrt{x}$ 和 $y = x^2$ 围成 xOy 平面上的一个封闭区域,

1 计算这个区域的周长;

2 计算这个区域的面积;

3 求该区域绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

三、(本题 18 分)

1 求解初值问题 $2yy'' = 1 + (y')^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. 要求将解 $y(x)$ 表示为 x 的显函数.

2 求微分方程 $y'' + y = e^{2x}$ 的通解.

四、(本题 5 分) $f(x)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的可微函数, 且满足 $f(1) = \int_0^1 e^{x-1} f(x) dx$, 证明存在 $\xi \in (0, 1)$ 满足 $f(\xi) + f'(\xi) = 0$.

五、填空题 (每题 4 分, 共 16 分)

1 积分 $\int_0^\pi \sin^6 x dx$ 的值是_____;

2 积分 $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx$ 的值是_____;

3 已知方程 $xy'' - y = x^2$ 的解为多项式, 其通解为_____;

4 由曲线 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) 绕 x 轴一周得到的旋转面面积公式是_____.

六、单项选择题 (每题 4 分, 共 16 分)

1. 下列命题正确的是

()

- (A) 若函数黎曼可积, 则其必有原函数.
- (B) 即使有限闭区间上的函数 $f(x)$ 为某一函数的导数, 但 $f(x)$ 不一定黎曼可积.
- (C) 若函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a, b]$ 上黎曼可积, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.
- (D) 若函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a, b]$ 上有定义, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上黎曼可积.

2. 下列命题正确的是

()

- (A) 二阶齐次线性微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 不一定存在两个线性无关的解, 其中 $p(x), q(x)$ 为实轴上的连续函数.
 - (B) 微分方程 $x dx + y dy = 0$ 满足 $y(1) = 1$ 的特解在 $x = 2$ 有定义.
 - (C) 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 收敛.
 - (D) 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 存在当且仅当 $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ 和 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 都存在.
3. 对于定义在实轴上的函数 $f(x) = \int_0^x (t-1)(t+2)^2 dt$, 关于其极大值点、极小值点和拐点描述正确的是
- ()
- (A) 极大值点: 无; 极小值点: 1; 拐点: -2和1.
 - (B) 极大值点: -2; 极小值点: 无; 拐点: 0和1.
 - (C) 极大值点: 无; 极小值点: 1; 拐点: -2和0.
 - (D) 极大值点: -2; 极小值点: 无; 拐点: -2和1.

4. 在计算有理函数的不定积分过程中, 下述四类函数中不可能遇到的是 ()

- (A) 反正弦函数
- (B) 反正切函数
- (C) 对数函数
- (D) 幂函数

中国科学技术大学 2011–2012 学年第 1 学期

《单变量微积分》期末考试试卷

一、计算题 (请给出必要的计算步骤, 每题 8 分, 共 40 分)

1 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

2 $x > 0$ 时, $f(\ln x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 求 $\int_{-2}^2 xf'(x)dx$.

3 曲线 $L \begin{cases} x(t) = 2(\cos t + t \sin t) \\ y(t) = 2(\sin t - t \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$, 求 L 的弧长.

4 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 连续, 且 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|) = 2$, 求 $\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)$.

5 求定解问题 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2012^{x+y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 的解.

二、求极限 (每题 6 分, 共 12 分)

1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 连续且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x} \int_0^x e^{2t} f(t)}{f(x)}$.

2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1) \cdots (2n-1)}$.

三、(本题 15 分) 求 $y'' + a^2y = 8 \cos bx$ 的通解, 其中 $a > 0, b > 0$ 为相同或不同的常数.

四、(本题 15 分) 求由圆盘 $x^2 + (y - R)^2 \leq r^2$ ($0 < r < R$), 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

五、(本题 6 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 有连续导数, $a_n = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k), n \in \mathbb{N}$, 其中 $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, (k = 1, 2, \cdots, n)$, 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = \frac{b-a}{2}[f(a) - f(b)]$.

六、单项选择题 (每题 3 分, 共 12 分)

1. 下列命题正确的是 ()

(A) 若 f^2 在 $[a, b]$ 可积, 则 f 在 $[a, b]$ 可积.

(B) $[a, b]$ 上的单调有界函数必可积.

(C) 若函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a, b]$ 上存在原函数, 则 f 在 $[a, b]$ 可积.

(D) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 则 f 在 $[a, b]$ 必存在原函数.

2. $f(x) = \begin{cases} x \ln^2 x, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则 $I = \int_0^1 f(x) dx$ 是 ()

(A) 黎曼积分且积分值为 $\frac{1}{4}$. (B) 广义积分且发散.

(C) 黎曼积分且积分值为 $\frac{1}{3}$. (D) 广义积分且积分值为 $\frac{1}{2}$.

3. 函数 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 线性无关, 且都是二阶线性非齐次微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解, 其中 $p(x), q(x), f(x)$ 均为连续函数, C_1, C_2 是任意实数, 则该方程的通解是 ()

(A) $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$. (B) $C_1y_1 + C_2y_2 - (C_1 + C_2)y_3$.

(C) $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$. (D) $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$.

4. 函数 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$ ()

(A) 恒为零. (B) 为正数. (C) 为负数. (D) 不是常数.

中国科学技术大学 2012–2013 学年第 1 学期
《单变量微积分》期末考试试卷

一、求下列不定积分 (请给出必要的计算步骤, 每题 5 分, 共 20 分)

1. $\int x(x-1)^n dx \ (n > 0)$
2. $\int \sin 2x \cos^2 x dx.$
3. $\int \sin \sqrt{x} dx.$
4. $\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx.$

二、计算下列积分 (每题 5 分, 共 20 分)

1. $\int_0^1 x^2 \arcsin x dx \ (n > 0)$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx.$
3. $\int_0^1 \frac{1+3x}{(x^2+1)(x+1)} dx.$
4. $\int_0^{2\pi} \sqrt{|\cos x|} \sin^5 x dx.$

三、(本题 14 分) 求下列极限

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4 + |\sin x|} \int_0^{x^2} \frac{t^3}{1+t^2} dt$
- (b) $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}.$

四、(本题 20 分) 求下面微分方程的通解或初值问题.

- (a) $y' - 3y' + 2y = 2x - 3$
- (b) $y'' + (y')^2 = y', y(0) = y'(0) = 1.$

五、(本题 10 分)

设 u 是正常数, 求曲边梯形 $D: 0 \leq y \leq \frac{e^x + e^{-x}}{2}, 0 \leq x \leq u$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和侧面积.

六、(本题 6 分) 设 $f(x)$ 是 $(0, 1)$ 上的可微函数, 且满足 $f(0) = 0$ 和 $f'(x) > 0$, 对于 $0 < \alpha < \beta < 1$, 求证

$$\int_0^1 f(x) dx > \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha} \int_\alpha^\beta f(x) dx.$$

七、(本题 10 分)

(a) 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, 令

$$g(x, y) = \int_0^x (f(t+y) - f(t)) dt.$$

求证: $g(x, y) = g(y, x).$

(b) 求在 \mathbb{R} 上连续且满足方程 $f(x+y) - f(x) - f(y) = xy$ 及条件 $f(1) = \frac{1}{2}$ 的函数 $f(x)$.

中国科学技术大学 2013–2014 学年第 1 学期
《单变量微积分》期末考试试卷

一、计算题 (请给出必要的计算步骤, 每题 8 分, 共 40 分)

1. $\int \frac{1}{1-x^4} dx$

2. $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx.$

3. $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx.$

4. $\int \max\{x^2, x^4\} dx.$

5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n+1} + \frac{\ln(1+\frac{2}{n})}{n+2} + \cdots + \frac{\ln(1+\frac{n}{n})}{n+n} \right).$

二、(本题 10 分) 求 $y'' - 2y' + y = xe^x$ 的通解.

三、(本题 10 分) 设函数 $f(x)$ 可微, 且 $\int x^3 f'(x) dx = x^2 \cos x - 4x \sin x - 6 \cos x + C$, 求 $f(x)$.

四、(本题 10 分) 计算定积分 $I = \int_0^1 \left(\int_x^1 \arctan(t^2) dt \right) dx.$

五、(本题 10 分)

1. 写出由方程 $|\ln x| + |\ln y| = 1$ 所表示的四条平面曲线;

2. 求这四条平面曲线所围图形的面积.

六、(本题 10 分) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的可微函数, 且有反函数, 已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int f^{-1}(x) dx.$

七、(本题 6 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上连续函数, 且满足 $\int_0^1 f(x) dx = 1, \int_0^1 xf(x) dx = \alpha, \int_0^1 x^2 f(x) dx = \alpha^2$, 其中 α 是常数. 证明存在 $[0, 1]$ 中的点 x_0 , 使得 $f(x_0) = 0$.

八、单项选择题 (每题 4 分, 共 16 分)

1. 下列等式正确的是 ()

(A) $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx = f(x).$ (B) $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x).$

$$(C) \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) - f(a). \quad (D) \int f'(x) dx = f(x).$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 黎曼可积, 则 ()

- (A) $\int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上不一定连续. (B) $\int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上可微.
 (C) $\int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上不一定存在. (D) $\int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上不一定可微.

3. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则 ()

- (A) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 黎曼可积. (B) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 不一定黎曼可积.
 (C) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可微. (D) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 不可微.

4. 函数 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 是二阶线性非齐次微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的三个不同的解, 其中 $p(x), q(x), f(x)$ 均为连续函数, c_1, c_2 是任意实数, 则 ()

- (A) $c_1(y_2(x) - y_1(x)) + c_2(y_3(x) - y_1(x)) + y_1(x)$ 是该方程的通解.
 (B) $c_1(y_2(x) - y_1(x)) + c_2(y_3(x) - y_1(x)) + y_1(x)$ 不是该方程的通解.
 (C) $c_1(y_2(x) - y_1(x)) + c_2(y_3(x) - y_1(x)) + y_1(x)$ 是该方程的解.
 (D) $c_1(y_2(x) - y_1(x)) + c_2(y_3(x) - y_1(x)) + y_1(x)$ 不是该方程的解.

中国科学技术大学 2014–2015 学年第 1 学期

《单变量微积分》期末考试试卷

一、计算题 (请给出必要的计算步骤, 每题 8 分, 共 40 分)

1. $\int \frac{x^3 - x}{1 + x^4} dx$

2. $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx.$

3. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx.$

4. $\int \ln |x| dx.$

5. 已知 $f(x) = e^{x^3}$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(1)f(2) \cdots f(n))^{\frac{1}{n^4}}.$

二、(本题 10 分) 求 $y'' + y = \cos^2 x$ 的通解.

三、(本题 10 分) 设曲线 $y = a\sqrt{x} (a > 0)$ 与 $y = \ln \sqrt{x}$ 在 (x_0, y_0) 处有公共切线, 求这两条曲线与 x 轴围城的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

四、(本题 10 分) 已知 $f''(x)$ 连续, $f'(x) \neq 0$, 求 $\int \left[\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3} \right] dx.$

五、(本题 10 分) 已知 $f'(x)$ 连续, $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 f(x^2 t) dt}{x \int_0^1 f(xt) dt}.$

六、(本题 10 分) 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1 + \sqrt{\tan x}} dx.$

七、(本题 6 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上非负连续函数, 且满足 $f^2(x) \leq 1 + 2 \int_0^x f(t) dt$, 证明 $f(x) \leq 1 + x$.

八、单项选择题 (每题 4 分, 共 12 分)

1. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上的一个原函数, 则 $f(x) + F(x)$ 在 (a, b) 上 ()

(A) 可微. (B) 连续. (C) 有原函数. (D) 是初等函数.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上非负是 $\int_0^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上单调增加的 ()

(A) 充分非必要条件. (B) 必要非充分条件.
(C) 充要条件. (D) 即非充分又非必要条件.

3. 函数 $f(x)$ 有下列4条性质: (1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, (2) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, (3) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有原函数, (4) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导.若用 $P \iff Q$ 表示由性质 P 可以推出性质 Q , 则有 ()

- (A) $(1) \iff (2) \iff (3)$. (B) $(1) \iff (3) \iff (4)$.
 (C) $(4) \iff (3) \iff (1)$. (D) $(4) \iff (1) \iff (2)$.

4. 下列命题正确的是 ()

- (A) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且为偶函数, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上全体原函数为奇函数.
 (B) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且为奇函数, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上全体原函数为偶函数.
 (C) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且为周期函数, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上全体原函数为周期函数.
 (D) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且为偶函数, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$.

中国科学技术大学 2015–2016 学年第 1 学期

《单变量微积分》期末考试试卷

一、(本题 10 分, 每小题 5 分) 求不定积分.

(1) $\int x^2 \arctan x dx$

(2) $\int \frac{1}{x(1+x^4)} dx$

二、(本题 20 分, 每小题 5 分) 求积分.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx$

(2) $\int_0^1 \frac{(1-x)^2 e^x}{(1+x^2)^2} dx$

(3) $\int_{-1}^1 \frac{1}{a^x + 1} dx \quad (a > 0)$

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3 + 1} dx$

三、(本题 10 分, 每小题 5 分) 求极限.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n+k}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin t dt}{\ln(1+x^4)}$

四、(本题 20 分) 求在 $[0, +\infty)$ 上的连续可微函数 $f(x)$, $f(0) = 1$, 使得对任意 $t > 0$, 曲线段 $L: y = f(x)$, $x \in [0, t]$ 的弧长恰好等于 L 与两个坐标轴及垂直线 $x = t$ 所围成的区域的面积. 并求 L 绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

五、(本题 20 分, 每小题 10 分) 求微分方程的通解

(1) $(\sin x)y'' - (\cos x)y' = \sin^2 x + 1.$

六、(本题 10 分) 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, 且满足方程

$f(x+a) = -f(x).$ 求证: $\int_0^{2a} xf(x)dx = -a \int_0^a f(t)dt.$

七、(本题 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $0 \leq f(x) \leq 1.$

求证: $2 \int_0^1 xf(x)dx \geq \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2$, 并求使上式成为等式的连续函数.

中国科学技术大学 2016–2017 学年第 1 学期

《单变量微积分》期末考试试卷

一、计算题（每题 6 分，共 24 分）

1. $\int x^2 \arctan x \, dx.$ 2. $\int \max\{x^2, x^5\} dx.$
3. $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$ 4. $\int_0^1 \ln^n x dx.$

二、求下列极限（每题 9 分，共 18 分）

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}.$ 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^4 + x} \int_0^{x^2} t \arctan t dt. \right)$

三、（每题 8 分，共 16 分）

1. 求旋轮线一拱 $L: x(t) = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi]$, 常数 $a > 0$ 与 x 轴所围图形的面积;

2. 求曲线 L 与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

四、(12 分) 求解微分方程 $y' + \cot xy = x^2 \csc x.$

五、(12 分) 设函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $y'' - 3y' + 2y = (3 - 4x)e^x$, 且其图像在点 $(0, 1)$ 与曲线 $y = x^2 + 3x + 1$ 相切. 求函数 $y = y(x).$

六、(10 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的非负且单调递减函数, $a_n = \int_0^n f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(i),$

判断 a_n 是否收敛, 并说明原因.

七、(8 分) 设函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, 而 $f(x) \int_0^x f(t) dt$ 为 \mathbb{R} 上单调递减函数. 证明: $f(x)$ 必为常值函数.

中国科学技术大学 2017-2018 学年第 1 学期

《单变量微积分》期末考试试卷

一、求下列各题 (每小题 6 分, 共 30 分)

1. 计算积分 $\int \max\{1, x^2\}dx$.
2. 求不定积分 $I = \int \sqrt{a^2 + x^2}dx$.
3. 求不定积分 $I = \int \frac{dx}{1+x^3}$.
4. 求解方程 $y'' + 2y' + y = e^{-x}$.
5. 试求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = a^2$ 以及 y 轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积 ($0 \leq x \leq a$).

二、(本题 10 分) 设 $y(x)$ 是由 $x - \int_1^{x+y} e^{-t^2} dt = 0$ 确定的函数. 试求导数值 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

三、(本题 12 分) 设对任意正数 θ , 积分 $\int_{\theta}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛, 其中 $f(x)$ 为连续函数, $f(0) = A$. 试证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = A \ln \frac{\beta}{\alpha}, \quad (\alpha, \beta > 0).$$

四、(本题 12 分) 计算定积分 $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx$.

五、(本题 12 分) 求初值问题.
$$\begin{cases} yy'' - (y')^2 = y^4, \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

六、(本题 12 分) 设 $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 其中 $f(x)$ 是已知的连续函数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ (A 为常数).

1. (8分) 求 $\varphi'(x)$;
2. (4分) 讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

七、(本题 12 分) 设 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是连续正值函数, 且 $f(-t) = f(t)$, 设 $g(x) = \int_{-a}^a |x - t| f(t) dt$, $-a \leq x \leq a$, $a > 0$.

1. (4分) 求证 $g'(x)$ 是严格单调递增的;
2. (4分) 求出 $g(x)$ 的最小值点;
3. (4分) 当 $g(x)$ 的最小值等于 $f(a) - a^2 - 1$ 时, 求 $f(t)$.