第 4 章 定积分习题课

一、求定积分

(1) 定积分的计算方法:

$$\begin{cases} 1.\text{定积分的换元法}, \\ 2.\text{定积分的分部积分法}, \\ 3.\text{关于区域的对称性及被积函数的奇偶性;关于周期性}, \\ 4.\text{分段函数} \end{cases}$$

(2) 常用变量代换

1. $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \overset{x=a-t}{=\!=\!=} \int_0^a f(a-t)\mathrm{d}t$
2. $\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x \overset{x=-t}{=\!=\!=} \int_0^a f(-t)\mathrm{d}t$
3. $\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x \overset{x=\pi-t}{=\!=\!=} \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin t)\mathrm{d}t = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\mathrm{d}t.$
4. 倒代换
5. 三角代换、双曲代换

1. (17) (12分)计算定积分$I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x.$
2. (16) (6分) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx.$
3. (15) (5分)$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x dx.$
4. (15) (5分)$\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^2e^x}{(1+x^2)^2}dx.$
5. (15) (5分)$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{a^x+1}dx\ (a>0).$
6. (14) (8分)$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{1+\sqrt{\tan x}}dx.$
7. (14) (6分)$\displaystyle\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx.$
8. (13) (6分)$\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx.$

9. (13) (10分)计算定积分$I=\int_0^1\left(\int_x^1 \arctan(t^2)dt\right)dx.$

10. (12) (5分)$\int_0^1 x^2\arcsin x dx$

11. (12) (5分)$\int_0^1 \frac{1+3x}{(x^2+1)(x+1)}dx$

12. (12) (5分)$\int_0^{2\pi}\sqrt{|\cos x|}\sin^5 x dx$

13. (11) (8分)$x>0$时,$f(\ln x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$,求$\int_{-2}^2 xf'(x)dx.$

14. (11) (8分)设$f(x)\in C[0,1]$,且$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx=2$,求$\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx.$

15. (10) (5分)求$\int_0^2 |x^3-1|dx.$

16. (10)(4分)求$\int_0^{\pi}\sin^6 x dx.$

17. (10) (4分)$\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}dx$

18. (09) (4分)求$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx.$

19. (09) (4分)求$\int_{-2}^2 \min\{\frac{1}{|x|},x^2\}dx.$

20. (08) (7分)设$f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2} & x\geq 0 \\ \dfrac{1}{1+\cos x} & -1<x<0. \end{cases}$ 求$\int_1^4 f(x-2)dx.$

21. (07) (4分)求$\int_{-1}^1\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{\sin x}{\sin^2 x+1}\right)dx.$

22. (06) (9分)求$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\sqrt{1-x^2}+\sin(\tan x))dx$

23. (05) (6分)求$\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}.$

24. (05) (6分)求$\int_0^1 x\arctan x dx.$

25. (04) (6分)求$\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}dx$.

26. (04) (6分)求$\int_{1}^{4} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

27. (03) (5分)求$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos x}dx$.

28. (03)(5分)求$\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$.

29. (02) (8分)求$\int_{0}^{4} f(x-2)dx$,其中$f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

以上是历年的期末考试题.求定积分主要涉及到换元、奇偶性、分部积分法.周期性.

再给几题

计算以下定积分值

1. $\int_{-1}^{1} x^3\cos x dx$.

2. $\int_{-2}^{2} \frac{x+|x|}{1+x^2}dx$.

3. $\int_{0}^{n\pi} \sqrt{1-\sin 2x}dx,\ n\in \mathbf{Z}^+$.

4. $\int_{x}^{x+2\pi} (1+e^{\sin t}-e^{-\sin t})dt$.

5. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+a^{-x}}dx,\ (a>1)$.

6. $\int_{0}^{1} x\arcsin x dx$.

7. $\int_{0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$.

8. $\int_{1}^{4} \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}dx$.

9. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}dx$.

10. $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx.$

11. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}}dx.$

12. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\sin x}dx$

13. 设$f(x)=\begin{cases} 1+x^2 & x\leq 0 \\ e^{-x} & x>0. \end{cases}$ 求$\int_1^3 f(x-2)dx.$

14. 设$f'(x)=\arcsin(x-1)^2, f(0)=0$,求$\int_0^1 f(x)dx.$

15. 设$F(x)=\int_0^1 t|e^t-x|dt$,(1) 求$F(x)$的分段表达式, (2) 求$\int_0^{2e} F(x)dx.$

16. 设$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin xdx=5, f(\pi)=2$,求$f(0)$.

二. 与积分有关的极限题

与积分有关的极限题主要就是两类：1. 和式的极限.要求能正确的将和式的极限表达成一个定积分.2. 含有变限积分的未定式的极限.要求在求导的时候,对藏在定积分内部的x一定要正确的处理好.

1. (16) (9分) 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}.$

2. (16) (9分) 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^4+x}\int_0^{x^2} t\arctan(t)\,dt\right).$

3. (15) (5分)求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n+k}$

4. (15) (5分)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin tdt}{\ln(1+x^4)}.$

5. (14) (10分) 已知$f'(x)$连续,$f(0)=0, f'(0)\neq 0$,求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^1 f(x^2t)dt}{x\int_0^1 f(xt)dt}.$

6. (14) (6分) 已知$f(x)=e^{x^3}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}[f(1)f(2)\cdots f(n)]^{\frac{1}{4}}.$

7. (13) (6分) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n+1}+\frac{\ln(1+\frac{2}{n})}{n+2}+\cdots+\frac{\ln(1+\frac{n}{n})}{n+n}\right)$

8. (12) (7分) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4+|\sin x|}\displaystyle\int_0^{x^2}\frac{t^3}{1+t^2}dt$

9. (12) (7分) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k^2}$

10. (11, 07) (6分)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$.

11. (11) (6分)设$f(x)\in C[0,+\infty)$,且$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$,求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-2x}\displaystyle\int_0^x e^{2t}f(t)dt}{f(x)}$.

12. (10) (5分)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$, p是正常数.

13. (10) (5分)求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x\sin t^3dt}{\ln(1+x^4)}$.

14. (08) (5分)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\dfrac{n+1}{n^4}}+\sqrt[3]{\dfrac{n+2}{n^4}}+\cdots+\sqrt[3]{\dfrac{n+n}{n^4}}\right)$.

15. (08) (8分)计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left((1-3x)^{\frac{4}{x}}+6\dfrac{\sin(x^3)}{(\sin x)^3}-2\dfrac{\displaystyle\int_0^x(\tan x)^3dt}{(\arctan x)^3}\right)$

16. (07补考卷) (7分)求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}dt$.

17. (05) (6分)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{k^3+n^3}$.

18. (05) (6分)求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x(\tan t-\sin t)dt}{\displaystyle\int_0^{x^2}\arcsin t\,dt}$.

19. (04) (7分)求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x(t-\sin t)dt}{\displaystyle\int_0^{x^2}\arcsin t\,dt}$.

20. (03) (5分)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^{p+1}+2^{p+1}+\cdots+n^{p+1}}{n(1^p+2^p+\cdots+n^p)}$, $p>0$.

21. (03) (5分)求$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\displaystyle\int_0^{x^3}\sqrt{\sin t}dt}{x^3}$

22. (02) (7分)求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^{x}\arcsin t^2dt}{x-\sin x}$

以上是历年的期末考试题,再给几题

1. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+i^2}}$.

2. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{(1+\frac{1}{n})^1(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^n}$.

3. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{(n+i-1)(n+i)}}$.

4. 设$f(x)$在$x=0$的某邻域内连续,$f(0)\neq 0$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x(x-t)f(t)dt}{x\displaystyle\int_0^x f(x-t)dt}$.

5. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{n}\left(\cos\dfrac{\pi}{4n}+\cos\dfrac{3\pi}{4n}+\cdots+\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{4n}\right)$.

三. 关于变限积分

只要题中出现变限定积分,一般都牵涉求导,例如求单调区间、极值、凹凸性、拐点、间接给出函数所满足的方程等.要求一定熟练掌握变限积分的求导. 特别注意上限或下限是关于x的函数及变限积分的被积函数中还含有x的情形的求导.

1. (17) (10分)设$y(x)$ 是由$x-\displaystyle\int_1^{x+y}e^{-t^2}\mathrm{d}t=0$ 确定的函数. 试求导数值$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

2. (17) 设$\varphi(x)=\displaystyle\int_0^1 f(xt)dt$,其中$f(x)$是已知的连续函数，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$ (A为常数).

   (1)(8分)求$\varphi'(x)$;
   (2)(4分)讨论$\varphi'(x)$在$x=0$处的连续性.

3. (17) 设$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$是连续正值函数,且$f(-t)=f(t)$, 设$g(x)=\displaystyle\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)dt$, $-a\leqslant x\leqslant a$, $a>0$.

(1)(4分) 求证$g'(x)$是严格单调递增的;

(2) (4分) 求出$g(x)$的最小值点;

(3) (4分) 当$g(x)$的最小值等于$f(a)-a^2-1$时，求$f(t)$.

4. (10) (4分)对于定义在整个实轴上的函数$f(x)=\int_0^x (t-1)(t+2)^2dt$关于其极大值点、极小值点和拐点描述正确的是(　　)

   (A) 极大值点：无；极小值点：1；拐点：$-2,1$

   (B) 极大值点：-2；极小值点：无；拐点：$0,1$

   (C) 极大值点：无；极小值点：1；拐点：$-2,0$

   (D) 极大值点：-2；极小值点：无；拐点：$-2,1$

5. (09) (4分)设$f''(x)$连续,$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f''(t)dt$,当$x\to 0$时,$F(x)$的导数$F'(x)$与$x^2$为等价无穷小量,则$f''(0)=$__________.

6. (08) (8分)设$\varphi(x)=2+\cos x,\ x\in[1,2]$，$\Phi(x)=\int_1^x \varphi(t)dt+\int_2^x \frac{1}{\varphi(t)}dt,\ x\in[1,2]$,证：(1) $\Phi(x)$在$(1,2)$内严格单调递增；(2) 方程$\Phi(x)=0$在$(1,2)$内有且仅有一根.

以下再给几题练习

1. 设$x\geq -1$,求$\int_{-1}^x (1-|t|)dt$.

2. 求$f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$的最大值与最小值.

3. 设$f(x)$是奇函数,除$x=0$外处处连续,$x=0$是其第一类间断点,则$\int_0^x f(t)dt$是(　　)

   (A) 连续的奇函数　　　　(B) 连续的偶函数

   (C) 在$x=0$间断的奇函数　　(D) 在$x=0$间断的偶函数

四. 关于概念与性质

1. (13) (4分) 下列等式正确的是(　　)

   (A) $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx=f(x)$　　(B) $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$

   (C) $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)-f(a)$　　(D) $\int f'(x)dx=f(x)$

2. (13) (4分) 设$f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积,则(　　)

    (A) $\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上不一定连续　　(B) $\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上可微

    (C) $\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上不一定存在　　(D) $\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上不一定可微

3. (13) (4分) 设$F(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数,则(　　)

    (A) $f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积　　(B) $f(x)$在$[a,b]$上不一定黎曼可积

    (C) $f(x)$在$[a,b]$上可微　　(D) $f(x)$在$[a,b]$上不可微

4. (11) (3分)下列陈述正确的是(　　)

    (A) 若$f^2(x)$在$[a,b]$上可积,则$f(x)$在$[a,b]$上可积

    (B) $[a,b]$上的单调有界函数必可积

    (C) 若$f(x)$在$[a,b]$上存在原函数,则$f(x)$在$[a,b]$上必可积

    (D) 若$f(x)$在$[a,b]$上可积,则$f(x)$在$[a,b]$上必存在原函数

5. (11) (3分)$f(x)=\begin{cases} x\ln^2 x, & x\in(0,1] \\ 0. & x=0 \end{cases}$ 则$I=\int_0^1 f(x)dx$是(　　)

    (A) Riemann积分且值为$\frac{1}{4}$　　(B) 广义积分且发散

    (C) Riemann积分且值为$\frac{1}{3}$　　(B) 广义积分且值为$\frac{1}{2}$

6. (11) (3分)函数$F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t dt$(　　)

    (A) 恒为零　　(B)为负数　　(C) 为正数　　(D) 不是常数

7. (10) (4分)下列命题正确的是(　　)

    (A) 若函数Riemann可积,则其必有原函数

    (B) 即使有限闭区间上的函数$f(x)$为某一函数的导函数,但$f(x)$也不一定Riemann可积

    (C) 若函数$f(x)$在有限闭区间$[a,b]$上Riemann可积,则在开区间(a,b)内至少存在一点ξ,使得$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

    (D) 函数$f(x)$在有限闭区间$[a,b]$上有定义,且只有有限个间断点,那么其在$[a,b]$上Riemann可积

8. (10) (4分)下列命题正确的是(　　)

(A) 齐次二阶线性微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$不一定存在两个线性无关的解,其中$p(x),q(x)$是实轴上的连续函数

(B) 微分方程$xdx+ydy=0$,满足$y(1)=1$的解在$x=2$处有定义

(C) 积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$是收敛的

(D) 积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$存在,当且仅当$\int_{-\infty}^{0}f(x)dx$和$\int_0^{+\infty}f(x)dx$均存在

9. (10) (4分)在计算有理函数的不定积分过程中,下述四类函数中除(　　)除外

(A) 反正弦函数　(B) 反正切函数　(C) 对数函数　(D) 幂函数

10. (09) (4分)下列命题正确的是(　　)

(A) 若$f(x)$在$[a,b]$上可积,则$F(x)=\int_a^x f(t)dt$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数

(B) 若$|f(x)|$在$[a,b]$上可积,则$f(x)$在$[a,b]$上一定可积

(C) 若$f(x)$在区间(a,b)内不是连续函数,则$f(x)$在区间(a,b)内必无原函数

(D) 若$f(x)$在$[a,b]$上可积,$g(x)$在$[a,b]$上不可积,则$f(x)+g(x)$在$[a,b]$上不可积

11. (09) (4分)设$f(x)$为给定的连续函数,令$I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)dx$,其中$t,s>0$,则$I$的值为(　　)

(A) 依赖于s和t　(B) 依赖于s,t和x

(C) 依赖于t不依赖于s　(D) 依赖于s不依赖于t

五. 求广义积分

求广义积分其实就是和求定积分一样,同样涉及到凑微分、换元、分部积分,所不同的是,求定积分最后一步计算N-L公式的值是代值计算,而求广义积分是求极限.值得注意的是不要将被积函数随便的分开.因为只有在两个函数的广义积分都收敛的情况下才可.另外在使用分部积分法的时候也要注意$\int_a^{+\infty}u(x)dv(x)=u(x)v(x)|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty}v(x)du(x)$,如果$u(x)v(x)|_a^{+\infty}$不存在不要马上下结论说广义积分发散,因为正确的是求$\lim\limits_{b\to+\infty}\left(u(x)v(x)|_a^b-\int_a^b v(x)du(x)\right)$极限是否存在.

1. (17) (12分) ,设对任意正数θ,积分$\int_{\theta}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$收敛,其中$f(x)$为连续函数,$f(0)=A$.试证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}\mathrm{d}x=A\ln\frac{\beta}{\alpha},\qquad(\alpha,\,\beta>0).$$

2. (16) (6分) $\int_0^1 \ln^n(x)\,dx$, 其中n 为正整数.

3. (15) (5分)$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+1}dx.$

4. (14) (6分)$\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos x dx.$

5. (13) (6分)$\int_0^{+\infty}x^3e^{-x^2}dx.$

6. (12) (5分)$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$

7. (10) (5分)求$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$(根据瑕积分的定义计算)

8. (09) (4分)下列广义积分发散的是(　　)

   (A) $\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$　　(B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos x\sqrt{\sin x}}$

   (C) $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$　　(D) $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln\sqrt{x})^2}$

9. (09) (8分)求$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+e^{2x}}.$

10. (08) (5分)$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+3)\sqrt{x-1}}=($　　$)$

    (A) π　　(B) 1　　(C) 2　　(D) $\frac{\pi}{2}$

11. (07) (5分)求$\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx.$

12. (06) (9分)求$\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx.$

13. (05) (8分)$n\geq 0,\quad I_n=\int_0^{\infty}x^{2n+1}e^{-x^2}dx$,求证$I_n=\frac{n!}{2}.$

14. (04) (6分)求$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^8)}$.

15. (03) (5分)求$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$.

16. (02) (8分)求$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

以上求广义积分是历年的期末考试题.再给出几题求广义积分的题

1. 求$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$.

2. 求$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x)^3}$.

3. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

4. 求$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

5. 下列积分

(1). $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{x^2-1}=0$　　(2) $\int_{-1}^{1}\frac{\sin x^2}{x}dx=0$

(3) $\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=0$　　(4) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=-2$.

正确的是( )

(A) (1) (2)　(B) (3) (4)　(C) (1) (4)　(D) (2) (3)

六. 定积分的应用

牢记书求弧长、平面图形面积、旋转体体积、旋转体的侧面积的公式

1.平面曲线的弧长

(1). 平面曲线的方程由显示函数$y=f(x)$, $a\le x\le b$给出.

$$dl=\sqrt{1+f'^2(x)}dx=\sqrt{dx^2+dy^2},\quad l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

(2). 平面曲线的参数方程为$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t).\end{cases}$ $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$给出.

$$dl=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt,\quad l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

(3), 平面曲线方程由极坐标方程$r=r(\theta),\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$给出.

$$dl=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta,\quad l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta.$$

2. 平面图形的面积

(1). 曲边梯形

(i). 由$x=a,x=b(a<b),y=0$和$y=f(x)$围成的曲边梯形的面积

$$S=\int_a^b|f(x)|dx.$$

曲边是参数曲线

$$L:\quad\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\qquad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,\ .$$

$\varphi(t)$、$\psi(t)\in C^{(1)}[\alpha,\beta]$,并且在$(\alpha,\beta)$中$\varphi'(t)\neq0$,

$$S=\int_\alpha^\beta|\varphi'(t)\psi(t)|dt.$$

(ii) 由$y=c,\ y=d(c<d),\ x=0$和$x=g(y)$围成的曲边梯形的面积

$$S=\int_c^d|g(y)|dy.$$

曲边是参数曲线

$$L:\quad\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\qquad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,\ .$$

并且在(α,β)中 $\psi'(t)\neq0$,

$$S=\int_\alpha^\beta|\psi'(t)\varphi(t)|dt.$$

(iii). 由$x=a,x=b(a<b),y=y_1(x)$和$y=y_2(x)$围成的图形面积是

$$S=\int_a^b|y_2(x)-y_1(x)|dx.$$

(2). 以原点为顶点曲边扇形的面积

曲线L由极坐标方程$r=r(\theta),\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\ (0<\alpha-\beta\leqslant2\pi)$ 给出,曲边扇形的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta.$$

由$\theta=\alpha,\ \theta=\beta\ (0<\beta-\alpha\leqslant 2\pi),\ r=r_1(\theta)$和$r=r_2(\theta)\ (r_1(\theta)\geqslant r_2(\theta))$围成的面积,则是

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r_1^2(\theta)-r_2^2(\theta))d\theta.$$

(3). 封闭曲线围成的图形面积

L为简单封闭曲线,L的参数方程为

$$x=x(t),\quad y=y(t),\qquad a\leqslant t\leqslant b.$$

其围成的面积为

$$S=\frac{\varepsilon}{2}\int_a^b (xdy-ydx),$$

L的绕行方向为逆时针方向$\varepsilon=1$,L的绕行方向为是顺时针方向$\varepsilon=-1$. 或简单表示面积为

$$S=\frac{1}{2}|\int_a^b (xdy-ydx)|.$$

3. 旋转体的体积

由$y=f(x),y=0,x=a$和$x=b$围成的曲边梯形绕Ox轴旋转所得旋转体的体积为

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

如果曲线L是由参数方程$x=\varphi(t),y=\psi(t)\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$给出的,那么

$$V=\pi\int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\psi^2(t)dt.$$

由$y=f(x)$,$x=a,x=b\ (0\leqslant a<b)$所围成的曲边梯形绕$y$轴旋转一周所得的旋转体体积为

$$V=2\pi\int_a^b x|f(x)|dx.$$

4. 旋转体的侧面积

S是由曲线$L:y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$绕$Ox$轴旋转所得旋转面,侧面积

$$S=2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

如果L是由参数方程$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta$给出的,那么

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta |\psi(t)|\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

常用曲线的方程

(1). 旋轮线一拱:$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

(2). 双纽线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(a>0)$,极坐标方程为$r=a\sqrt{\cos 2\theta}$. $-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{5\pi}{4}$.

(3). 星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$,参数方程$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$ $\qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

(4)心形线$r=a(1+\cos\theta)$, $\qquad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

1. (17) (6分) 试求曲线$y=x^2$与直线$y=a^2$以及y轴所围成的平面图形绕y轴旋转一周所成的旋转体的体积$(0\leqslant x\leqslant a)$.

2. (16) (16分) 考察旋轮线的一拱：$x=a(t-\sin(t)), y=a(1-\cos(t)), 0\leqslant t\leqslant 2\pi$ (常数$a>0$)，并记它与x 轴围起来的平面图形为D.

   (1) 求D 的面积;

   (2) 求D 绕x 轴旋转一周所产生的旋转体的体积.

3. (15) (20分) 求在$[0,+\infty)$上的连续可微函数$f(x), f(0)=1$,使得对$\forall t>0$,曲线段$L: y=f(x), x\in[0,t]$的弧长恰好等于L与两个坐标轴及垂直线$x=t$所围成的区域的面积，并求L绕x轴旋转所得旋转体的体积。

4. (14) (10分) 设曲线$y=a\sqrt{x}(a>0)$与$y=\ln\sqrt{x}$在(x_0,y_0)处有公共切线,求这两曲线与x轴围成的平面图形绕x轴旋转而成的旋转体的体积V.

5. (13) (10分) (1) 写出由方程$|\ln x|+|\ln y|=1$所表示的四条平面曲线.

   (2) 求由方程$|\ln x|+|\ln y|=1$所表示的平面曲线所围成的平面图形面积.

6. (12) (10分)设u是正常数,求曲边梯形D： $0\leq y\leq\frac{e^x+e^{-x}}{2}, 0\leq x\leq u$,绕$x$轴旋转一周所得旋转体的体积和侧面积.

7. (11) (8分)曲线L:$\begin{cases} x(t)=2(\cos t+t\sin t) \\ y(t)=2(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ $\quad t\in[0,2\pi]$,求曲线L的弧长.

8. (11) (15分)求圆盘$x^2+(y-R)^2\leq r^2$ $(0<r<R)$,绕x轴旋转一周所得旋转体的体积.

9. (10) (15分)曲线$y=\sqrt{x}$和$y=x^2$围成xy平面上一个封闭的区域,(1) 计算这个区域的面积及周长 (2) 该区域绕x轴旋转一周得到xyz空间的一个旋转体,计算这个体积.

10. (10) (4分)由曲线$y = f(x)$ $(a \le x \le b)$绕x轴旋转一周得到旋转面,该旋转面的面积公式是__________.

11. (09) (10分)求闭曲线$y^2 = x^2 - x^4$所围成的图形面积.

12. (09) (10分)设平面图形A由$x^2+y^2 \le 2x$与$y \ge x$所确定,画出图形A的示意图,并求出图形A绕直线$x = 2$旋转一周所得旋转体的体积.

13. (07) (10分)求曲线$L_1 : y = \sqrt{x}$的切线L_2,使由$L_1, L_2, x = 0$及$x = 1$所围成的面积最小.

14. (07) (4分)曲线$y = \sqrt{\sin x}$ $(0 \le x \le \pi)$绕ox轴旋转一周所成曲面所包围的体积为(　　)

    (A) 2π　　(B) π　　(C)$\frac{\pi}{2}$　　(C)$\frac{\pi}{4}$

15. (06) (9分)设曲线L的参数方程是$x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ (0 \le t \le 2\pi)$. (1) 求L所围平面图形的面积. (2) 求L绕x轴旋转一周所得旋转面所围的体积.

16. (05) (10分)设由$x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = \sin x$和$y = \sin a$ $(0 < a < \frac{\pi}{2})$所围成的几何图形的面积为$S(a)$，求$S(a)$的最小值.

17. (04) (10分)设由$y = 0$及$y = 1 - x^2$所围成的图形的面积被$y = ax^2$ $(a > 0)$平分,求a.

18. (03) (12分)设$0 < a < 1$,由$y = x^2$和$y = ax$围成的图形面积为S_1,由$y = x^2,\ y = ax$和$x = 1$所围成的图形面积是S_2,求$S_1 + S_2$的最小值.

19. (02) (14分)设曲线L的参数方程为$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi,\ a > 0$. (1) 求L的弧长　(2) 求L绕$x$轴旋转一周所得旋转面的面积.

七. 关于证明

1. (16) (10分) 设$f(x)$ 是$[0, +\infty)$ 上的非负且单调递减的函数, 而

$$a_n = \int_0^n f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(i).$$

判断数列$\{a_n\}$ 是否收敛, 并说明原因.

2. (16) (8分) 设函数$f(x)$ 在$\mathbf{R}$ 上连续, 而$f(x)\int_0^x f(t)\,dt$ 为$\mathbf{R}$ 上的单调递减函数. 证明: f 必为常值函数.

3. (15) (10分) 设$f(x)$在$\mathbf{R}$上连续,且满足方程$f(x+a)=-f(x)$，求证$\int_0^{2a} xf(x)dx = -a\int_0^a f(t)dt$.

4. (15) (10分) 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,且$0\le f(x)\le 1$,求证$2\int_0^1 xf(x)dx \ge \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$,并求使上式成为等式的连续函数。

5. (14) (6分) 设$f(x)$是$[0,1]$上的非负连续函数,且满足$f^2(x)\leqslant 1+2\int_0^x f(t)dt$,证明$f(x)\leqslant 1+x$.

6. (13) (6分) 设$f(x)$是$[0,1]$上的连续函数,且满足$\int_0^1 f(x)dx=1$, $\int_0^1 xf(x)dx=\alpha$, $\int_0^1 x^2f(x)dx=\alpha^2$,其中$\alpha$为一常数,证明存在$[0,1]$中的点$x_0$,使得$f(x_0)=0$.

7. (12) (6分)设$f(x)$是区间$[0,1]$上的可导函数,且满足$f(0)=0$,和$f'(x)>0$,对于$0<\alpha<\beta<1$,求证:

$$\int_0^1 f(x)dx > \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

8. (12) (a) (5分)设$f(x)$在$\mathbf{R}$上连续,令$g(x,y)=\int_0^x (f(t+y)-f(t))dt$,求证:$g(x,y)=g(y,x)$.

   (b) (5分)求在$\mathbf{R}$上连续且满足$f(x+y)-f(x)-f(y)=xy$及条件$f(1)=\frac{1}{2}$的函数$f(x)$.

9. (11) (6分)设$f(x)\in C^{(1)}[a,b]$, $a_n=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)$, $n\in\mathbf{N}$,其中$x_k=a+\frac{k(b-a)}{n}$, $k=1,2,\cdots,n$,求证:$\lim\limits_{n\to\infty} na_n=\frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]$.

10. (10) (5分)设$f(x)$是区间$[0,1]$上的可微函数,且满足$f(1)=\int_0^1 e^{x-1}f(x)dx$,证明:$\exists\xi\in(0,1)$,满足$f(\xi)+f'(\xi)=0$.

11. (09) (8分)$f(x)$在$[a,b]$上有连续的一阶导数,且满足$f'(x)\ge m>0$, $|f(x)|\le\pi$,证明:

$$\left|\int_a^b \sin f(x)dx\right|\le\frac{2}{m}.$$

12. (08) (5分)设$f(x)$恒不为零,在$[0,1]$上有二阶连续导数,$f(0)=f(1)=0$,证明:在$[0,1]$上$|f(x)| \leq \frac{1}{4}\int_0^1 |f''(x)|dx$.

13. (08) (8分)设$f(x)$满足$f(1)=1$,且$x \geq 1, f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$,试证:

    $f(x) \leq 1+\dfrac{\pi}{4}$.

14. (07) (7分)设$f(x)$在$[0,1]$上非负、连续严格单调增加,对$n \in \mathbf{N}$积分中值定理确定$x_n \in (0,1)$,使$f^n(x_n)=\int_0^1 f^n(x)dx$.

    (1) 问$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$是否存在,如果存在它的值如何. (2) 证明你的结论.

15. (06) (6分)设$f(x) \in C^{(2)}(a,b)$,且$f''(x)>0$,证:

    $$(b-a)f(\frac{a+b}{2}) < \int_a^b f(x)dx < \frac{(b-a)[f(a)+f(b)]}{2}.$$

16. (05) (5分)设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上可微,并满足$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx = 0$,求证:$\exists\ \xi \in (a,b)$,使$f'(\xi)\int_a^\xi g(x)dx = g'(\xi)\int_a^\xi f(x)dx$.

17. (04) (5分)设$f(x)$在$[-1,1]$上连续,且$\int_{-1}^1 f(x)dx = 0, \int_{-1}^1 (x+1)f(x)dx = 1$,证明$|f(x)|$在$[-1,1]$上的最大值大于1.

以上是历年的期末考试题,下面再补充几题.

1. 设$f(x)$是连续的奇函数,记$F(x)=\int_a^{2x} f(\sin t)dt$, a为实常数.证明:

    (1) $F(x)$为连续的偶函数. (2) $F(x)$以π为周期.

2. 设$f(x)$具有连续的二阶导数,且$f''(x) \geq 0$,又$u(t)$为连续的函数.证明:

    $$\frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))dt \geq f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt\right].$$

3. 设$S(x)=\int_0^x |\cos t|dt$.

    (1) 当n为正整数,且$n\pi < x < (n+1)\pi$时,证明$2n < S(x) < 2(n+1)$.

    (2) 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

4. 设$f(x)\in C[a,b]$, $g(x)$在$[a,b]$上可积且不变号,则必有$\xi\in(a,b)$,使$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.(第一积分中值定理)

5. 证明:(1) 设$f(x)\in C[a,b]$,$g(x)\in C^{(1)}[a,b]$, $g(x)\geq 0, g'(x)\leq 0$,求证:必有$\xi\in[a,b]$,使$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx$

(2) 设$f(x)\in C[a,b]$,$g(x)\in C^{(1)}[a,b]$, $g(x)\geq 0, g'(x)\geq 0$,求证:必有$\xi\in[a,b]$,使$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\xi^b f(x)dx$.

(3) 设$f(x)\in C[a,b]$, $g(x)\in C^{(1)}[a,b]$,且$g(x)$为$[a,b]$上的单调函数,则在$[a,b]$内至少存在ξ,使得$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx$.(第二积分中值定理)

(4) 当$0<a<b$,证$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b \frac{\sin nx}{x}dx = 0$.

6. 设$f(x)\in C^{(2)}[a,b]$,证明:$\exists\ \xi\in(a,b)$,使

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$

7. 设$f(x)\in C(-\infty,+\infty)$且严格单增,$f(0)=0$,常数$n$为正奇数,并设

$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x t^n f(t)dt$,证明$F(x)$在$(-\infty,0)$内严格减,在$(0,+\infty)$ 内严格增.

8. 设$f(x)\in C[-1,1]$,且$f(x)>0$.证明曲线$y=\int_{-1}^1 |x-t|f(t)dt$在$[-1,1]$上是凹的.

9. 设$f(x)$是$[1,+\infty)$上单增非负的连续函数,则对任意的自然数n,有

$$0\leq\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)dx \leq f(n).$$

10. 设$f(x)\in C^{(1)}(-\infty,+\infty)$,且$m\leq f(x)\leq M$,

(1) 求$\lim\limits_{a\to 0^+}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^a [f(t+a)-f(t-a)]dt$.

(2) 证明:$\left|\frac{1}{2a}\int_{-a}^a f(t)dt - f(x)\right| \leq M-m,\ (a>0)$.