2018年5月5日星期六 多变量微积分期中考试

1、（16分）

设

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^n\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, \quad x^2+y^2=0\end{cases}$$

期中n为正整数，讨论n为何值时，f(x,y)在原点(0,0)处

（1） 连续（2）一阶偏导存在（3）可微（4）一阶偏导连续

2.1（10分）

求二重积分$\iint_D e^{-y^2}dxdy$其中D为以（0,0），（0,1）（1，1）为顶点的三角形

2.2（10分）

设曲线L由A（0,1,1）到B（1,0,1）直线段，B（1,0,1）到C（1,1,0）直线段，以（1,1,1）为圆心、1为半径自C（1,1,0）到A（0,1,1）的四分之一圆弧所组成，求积分$\int_L xyds$

2.3（10分）

设$a,b,c>0$，求$\iiint_V(x^2y+xyz+z^2)dxdydz$，其中V是$x^2+y^2+\dfrac{a^2-b^2}{c^2}z^2=a^2$与$|z|\leq c$所围成的区域。

3（12分）

试用变量代换$\xi=\dfrac{y}{x},\eta=y$将方程$x^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$化为$\dfrac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=0$

4（12分）

求直线l: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$在平面$x-y+2z-1=0$上的投影直线$l_0$的方程,并求$l_0$绕Oy轴旋转一周所成曲面的方程

5（12分）

若曲面S的球坐标参数表示为$\begin{cases}x=r(\theta)\sin(\theta)\cos(\varphi)\\ y=r(\theta)\sin(\theta)\sin(\varphi)\\ z=r(\theta)\cos(\theta)\end{cases}$，$(\theta,\varphi)\in D,\ r\in C^1$

求证，曲面S的面积为$\sigma(S)=\iint_D\sqrt{r^2+(r')^2}\,r\sin(\theta)\ d\theta d\varphi$

由此求出曲面$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2),\ (a>0)$的面积

6（10分）

设实数x,y,z满足$x+y+z=0$，求函数$f(x,y,z)=\sin x+\sin y+\sin z$的取值范围

7（8分）

求积分$\iint_D\dfrac{dxdy}{x^2+y^2}$ 其中$D=\{(x,y)|1\leq e^x+e^y,e^{2x}+e^{2y}\leq 1\}$

以下是试题答案。

试题答案的前一部分是讲解试卷的习题课讲义，后一部分是批卷时老师所给的标准答案。