

中国科学技术大学

2014 – 2015 学年第一学期《计算方法(B)》考试试卷

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
复评人								

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚。
2. 计算结果保留4位小数。
3. 本试卷为闭卷考试, 共 7 道试题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟。

得分	评卷人

一、填空题 (本题有6小题, 每小题6分, 共36分)

(1) 设 $\sqrt{20}$ 的近似值 x 相对误差为0.1%, 则 x 的绝对误差限为_____, 有_____位有效数字。

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, 则范数 $\|A\|_2 =$ _____, 谱半径 $\rho(A) =$ _____。

(3) 设 $f(x) = 8x^8 - x^6 + 3$, 则差商 $f[0, 1] =$ _____, $f[2^0, 2^1, \dots, 2^8] =$ _____。

(4) 设三次样条函数 $S(x) = \begin{cases} x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____。

(5) 设对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则Givens变换 $Q(1, 3, \theta) =$ _____。

使得 $Q(1, 3, \theta)^T A Q(1, 3, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

(6) 设 $f(x) \in C^4[0, 1]$, 则满足 $h(0) = f(0) = 1$, $h'(0) = f'(0) = 3$, $h''(0) = f''(0) = -4$, $h(1) = f(1) = 3$ 的最低次插值多项式 $h(x)$ 为_____, 插值余项为_____。

得分	评卷人

二、（本题10分）

用Courant分解法求解线性方程组：

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 7 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 29 \\ -6 \end{pmatrix}$$

得分	评卷人

三、（本题10分）

下表为 $f(x) = e^{2x}$ 在 $[0, 1]$ 区间某些等分点上的函数值，分别用复化梯形积分公式和复化Simpson积分公式计算 $\int_0^1 e^{2x} dx$ 。

x	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.675	0.75	0.875	1
$f(x)$	1	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183	3.4903	4.4817	5.7546	7.3891

得分	评卷人

四、（本题10分）

用最小二乘法原理求一个形如 $y = a + bx^2$ 的经验公式，使其与下列数据相拟合：

x	3	4	5	6	7
y	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

得分	评卷人

五、（本题12分）

已知方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 $x = 1.5$ 附近有实根，

- (1) 用牛顿迭代法求根，取初值 $x_0 = 1.5$ ，计算到 $|x_{k+1} - x_k| < 0.05$ 时停止；
- (2) 判断迭代序列： $x_{k+1} = 1 + \frac{1}{x_k^2}$ 对初值 $x_0 = 1.5$ 的收敛性，并简述理由。

得分	评卷人

六、（本题12分）

用迭代法解线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ，其中实数 $a \neq 1$ 。

- (1) 分别写出Jacobi迭代公式、Gauss-Seidel迭代公式及松弛因子为 ω 的松弛迭代公式；
- (2) 写出Gauss-Seidel的迭代矩阵，并求 a 的取值范围使得Gauss-Seidel迭代收敛。

得分	评卷人

七、（本题10分）

设有线性多步格式： $y_{n+1} = y_n + h[Af(x_n, y_n) + Bf(x_{n-2}, y_{n-2}) + Cf(x_{n-4}, y_{n-4})]$, $n \geq 4$, 其中 $A, B, C \in \mathbb{R}$ 是常数。当该数值格式应用于常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = a + bx + cx^2, & x \in [x_0, +\infty) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

时，对于任意给定的 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 可以得到该方程的精确解(假定计算过程中无舍入误差)，试确定常数 A, B, C 。