中 国 科 学 技 术 大 学

2016 – 2017 学年第二学期期中考试试卷

课程名称 线性代数(B1) 课程编号 001519

考试时间 2017 年4 月22 日 考试形式 闭卷

学院 ________ 姓名 ________ 学号 ________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
复评人							

注意事项：

1. 答题前，考生务必将所在院系、姓名、学号等填写清楚。
2. 请考生在答卷纸左侧留出装订区域。

答题时不要超过此线

得分	评卷人

一、填空题（每小题4分，共24分）

(1) 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(4,4,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,5,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,2,3)^{\mathrm{T}}$, 则$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ $=$ ________。

(2) 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&-2&-1\\2&4&2\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^{10}=$ ________。

(3) 设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，$\det(\boldsymbol{A})=5$，$\boldsymbol{A}^*$为A的伴随方阵，则$\det(\boldsymbol{A}^*)=$ ________。

(4) 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&5&2&-1\\0&3&1&-4\\0&0&-1&2\\1&5&2&3\end{pmatrix}$，$A_{ij}$为代数余子式，则$A_{14}-3A_{24}+2A_{34}-A_{44}=$ ________。

(5) 若向量$\boldsymbol{\beta}=(3,9,6)^{\mathrm{T}}$不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-\lambda,3)^{\mathrm{T}}$线性表示，则$\lambda$满足________。

(6) 设分块矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，其中$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$为$n$阶可逆方阵，$\boldsymbol{O}$ 为零矩阵，则$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=$ ________。

得分	评卷人

二、判断题（判断下列命题是否正确，并简要说明理由。每小题5分，共20分）

(1) 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 5 & 11 & -4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$不相抵。

(2) 设数组空间F^n中的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，$\boldsymbol{A}\in F^{m\times l}$，$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\boldsymbol{A}$，则向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$也线性相关。

(3) 设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为n阶实方阵，则$\mathrm{rank}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{BA})$。

(4) 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的秩为$r$，且任何向量$\boldsymbol{\alpha}_i(1\leqslant i\leqslant s)$均可以被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的一个极大线性无关组。

答题时不要超过此线

得分	评卷人

三、（本题12分）

当a取何值时，下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=2, \\ 3x_1+8x_2-x_3-2x_4=0, \\ 2x_1+5x_2-2x_3+x_4=a, \end{cases}$$

有解，并求出它的通解。

得分	评卷人

四、（本题16分）

设n阶方阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求$\det(\boldsymbol{A})$ 及$\boldsymbol{A}^{-1}$。

得分	评卷人

五、（本题16分）

设$\mathbb{P}_3[x]$为实数域$\mathbb{R}$上次数不超过3的多项式全体，按多项式的加法和数乘运算构成线性空间。

(1) 证明：$S=\{1,x+1,(x+1)^2,(x+1)^3\}$构成$\mathbb{P}_3[x]$的一组基。

(2) 求基S到自然基$\{1,x,x^2,x^3\}$的过渡矩阵。

(3) 求多项式$5+7x-x^2+13x^3$在基S下的坐标。

答题时不要超过此线

得分	评卷人

六、（本题12分）

设方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$c=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$，已知$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=1$，

(1) 证明：$\boldsymbol{A}^2=c\boldsymbol{A}$；

(2) 计算$\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})$，其中$\boldsymbol{I}$为$n$阶单位方阵。