均值函数$\mu_X(t)=E[X(t)]$; **方差函数**$\mathrm{Var}[X(t)]$; **联合二维分布** $F_{t_1,t_2}(x_1,x_2)$; **自相关函数**$r_X(t_1,t_2)=\mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)]$; 标准自相关函数: $\rho(v)=\frac{R(v)}{\sigma^2}=\frac{R(v)}{R(0)}$; **协方差函数**$R_X(t_1,t_2)=$ $\mathrm{Cov}(X(t_1),X(t_2))=E\{(X(t_1)-\mu_X(t_1))(X(t_2)-\mu_X(t_2))\}$

过程: $T=\{0,1,\dots\}$, 序列: $T=\{0,\pm1,\dots\}$

严平稳: $\forall t_1,\dots,t_n,h$有$(X(t_1+h),\dots,X(t_n+h))$独立同分布于$(X(t_1),\dots,X(t_n))$; **宽平稳**: ①所有二阶矩存在②$\mathrm{EX(t)}=\mathrm{m}$③协方差函数$R_X(t,s)$只与$t-s$有关

独立增量过程: 对任意 $t_1<\cdots<t_n$, $X(t_2)-X(t_1),\dots,X(t_n)-X(t_{n-1})$ 相互独立; **平稳独立增量过程**: 进一步有对任意 t_1 和 t_2 有 $X(t_1+h)-X(t_1)$ 独立同分布 $X(t_2+h)-X(t_2)$,

其均值函数必为 t 的线性函数

条件期望 $E(X|Y=y)=\sum_x x\{X=x|Y=y\}$ 或 $\int x f_{X|Y}(x|y)dx$, 且有 $f(x,y)=f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)$. **(a)**. 若 X 和 Y **独立**, 则 $E(X|Y=y)=EX$; **(b)**. 平滑性: $EX=\int E(X|Y=y)dF_Y(y)=E[E(X|Y)]$; (c).$E[\phi(X,Y)|Y=y]=E[\phi(X,y)|Y=y]$

最佳预报: 基于 Y 对 X 的最佳预报函数 $\phi(y)=\underset{\phi}{\operatorname{argmin}}\,E[X-\phi(Y)]^2\ \text{可证}=E(X|Y=y)=\mu_X+\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}(y-\mu_Y)$.

矩母函数 $g(t)=E(\exp\{tX\})=\int\exp\{tx\}dF(x)$.

矩母函数性质 **(1)**. $E[X^n]=g^{(n)}(0)$; **(2)**.独立的 X 和 Y 有 $g_{X+Y}(t)=g_X(t)g_Y(t)$; 常用特征函数$E(\exp\{itX\})$代替

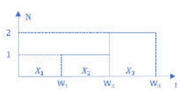
随机和: $X_1,X_2,\dots$ 独立同分布, N 非负且与 X_i 都独立, 则 $Y=\sum_{i=1}^N X_i$ 为随机和. **(1)**.随机和的矩母函数 $g_Y(t)=E[(g_X(t))^N]$;**(2)**. $EY=E[NE(X)]=EN\cdot EX$; **(3)**. $EY^2=EN\cdot\mathrm{Var}X+EN^2\cdot E^2X$; **(4)**. $\mathrm{Var}Y=EN\cdot\mathrm{Var}X+E^2X\cdot VarN$.

生成函数/概率生成函数: 离散随机变量 X 的概率生成函数为 $\phi_X(s)=E(s^X)$, 特别地, 若 $P(X=k)=p_k,k=0,1,2\dots$, 则 $\phi_X(s)=\sum_{k=0}^\infty p_k s^k$. **(1)**. $p_0=\phi_X(0),p_k=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}\phi_X(s)|_{s=0}$;**(2)**. 若 X,Y 独立, 则 $\phi_{X+Y}(s)=\phi_X(s)\phi_Y(s)$;**(3)**. 随机和的生成函数 $\phi_Y(s)=E(s^Y)=E\{E[s^Y|N]\}=E\left\{(\phi_X(s))^N\right\}=\phi_N(\phi_X(s))$.

收敛性: $\{X_n,n\geq1\}$ **依概率收敛**于 X, $\lim\limits_{n\to\infty}P(|X_n-X|\geq\varepsilon)=0$; **几乎必然收敛**: $P\left(\lim\limits_{n\to\infty}(X_n-X)=0\right)=1$; **均方收敛**: $\lim\limits_{n\to\infty}E(X_n-X)^2=0$. 均方收敛和几乎必然收敛都蕴含依概率收敛, 反之不成立; 均方收敛和几乎必然收敛互不包含.

强度λ泊松过程 $\{N(t),t\geq0\}$:**(1)**. $N(0)=0$;**(2)**.N(t)独立增量过程;**(3)**.对$t>0,s\geq0$,增量$N(s+t)-N(s)\sim Poi(\lambda t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$

另一定义(1). $t_0=0<t_1<\cdots<t_n$, 增量$N(t_1)-N(t_0),\cdots,N(t_n)-N(t_{n-1})$ 相互独立; **(2)**.增量$N(t+h)-N(t)$只依赖于 h ;**(3)**. $h\downarrow0,P\{N(t+h)-N(t)\geq1\}=\lambda h+o(h)$;**(4)**. $h\downarrow0,P\{N(t+h)-N(t)\geq2\}=o(h)$;



泊松过程若干分布: 泊松过程 X_n 是均值为$\frac{1}{\lambda}$ 的独立同指数分布$(\lambda e^{-\lambda t})$; **时间间隔** X_n ; **到达时间/等待时间** $P\{W_n\leq t\}=P\{N(t)\geq n\}=\sum_{j=n}^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}$ 和 $W_n=\sum_{i=1}^n X_i\sim f(t)=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$(Erlang 分布/Γ分布$\Gamma(n,\lambda)$. **等待时间的联合密度**: 给定 $N(t)=n$, 则与[0,t]均匀分布抽样 n 个的顺序统计量 $U_1,\dots,U_n$ 联合密度相同 $f_{W_1,\dots,W_n|N(t)=n}(w_1,\dots,w_n|n)=\frac{n!}{t^n},0<w_1<\cdots<w_n\leq t$; 同时也有$E[\sum_{i=1}^n W_i|N(t)=n]=E[\sum_{i=1}^n U_{(i)}]=\frac{nt}{2}$ 火车进站那附近的题

非齐次泊松过程: $P\{N(t+h)-N(t)\geq1\}=\lambda(t)h+o(h)$ 及 $P\{N(t+h)-N(t)=k\}=\frac{\left(\int_t^{t+h}\lambda(u)du\right)^k exp\left(-\int_t^{t+h}\lambda(u)du\right)}{k!}$; **失效率**: $\lambda(t)=\frac{f(t)}{1-F(t)}$

复合泊松过程: $X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$, 其中 $Y_i\sim G(y),EY=\mu$, $\mathrm{Var}Y=\tau^2$, 而 N(t) 服从参数 λ 的 Poisson 过程. $X(t)$ 是随机和并且 $E[X(t)]=\lambda\mu t,Var[X(t)]=\lambda(\tau^2+\mu^2)t$. 若 $Y_i\equiv1$, 则退化为普通泊松过程.

更新过程: 时间间隔不一定是指数分布了. $X_i\sim F(x)$, $W_n=\sum_{i=1}^n X_i$, $N(t)=\max\{n:W_n\leq t\}$. 其分布 $P\{N(t)=n\}=F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t)$(这里$F^{(n)}$是 n 重卷积, F(t) 是 X_i的分布), $m(t)=E[N(t)]=\sum_{n=1}^\infty F^{(n)}(t)$. **平均事件次数**: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{EN(t)}{t}=\frac{1}{\mu}=\frac{1}{EX_i}$ (在泊松过程中 $\frac{EN(t)}{t}=\frac{\lambda t}{t}=\lambda=1/(\frac{1}{\lambda})$ 恒为常数)

N(t) 和 W_n 的等价性: $\{N(T)\geq n\}\Leftrightarrow\{W_n\leq t\}$, 且有 $P\{W_n\leq t\}=F^{(n)}(t)$.

Markov 性: $P\{X_{n+1}=j|X_0=i_0,\dots,X_{n-1}=i_{n-1},X_i=i\}=P\{X_{n+1}=j|X_n=j\}$. 满足此称为离散时间 Markov 链

↑一步转移概率$p_{ij}(n)$, 与 n 无关时表示平稳转移概率, 任意 ij 都与 n 无关则称 markov 链是齐次的

Markov 链一些记号: $P_{ij}^{(n)}=P\{X_{m+n}=j|X_m=i\}$, 初始$p_i$, $(X_0=i)$, 绝对$p_i(n)$, $(X_n=i)$

Chapman-Kolmogorov 方程: $P_{ij}^{(n+m)}=\sum_{k=0}^\infty P_{ik}^{(n)}P_{kj}^{(m)}$

互达性: 存在 $P_{ij}^{(n)}>0$, 记作$i\to j$.互达$i\leftrightarrow j$. 不可约的 Markov 链所有状态属于同一互达类. (闭集 c 的状态互通称 c **不可约**

周期性: 使 $P_{ii}^{(n)}>0$ (或$f_{ii}^{(n)}>0$)的所有正整数 n 的最大公约数称作状态 i 的周期 d(i). $P_{ii}^{(n)}=0$ 则约定周期为 ∞. $d(i)=1$ 则称**非周期**. 只能说明不是周期的倍数回不来

性质: **(1)**. 存在 N, 对所有 $n>N$ 有 $P_{ii}^{(nd(i))}>0$; **(2)**. 若 $P_{ii}^{(m)}>0$, 存在 N, 对所有 $n>N$ 有 $P_{ii}^{(m+nd(i))}>0$; **(3)**. 不可约非周期有限状态, 则 n 充分大有 $P^{(n)}$都非零.

互达则周期相同: $i\leftrightarrow j\Rightarrow d(i)=d(j)$.

n 步首达概率记为 $f_{ij}^{(n)}$. $f_{ij}^{(n)}=P\{X_n=j,X_k\neq j,k=1,\dots,n-1|X_0=i\}=P\{\text{常返时}T_{i=n}|X_0=i\}$; $f_{ij}^{(0)}=0$. 记**从 I 最终到 j 概率**为 $f_{ij}=\sum_{n=1}^\infty f_{ij}^{(n)}$

常返: $\boldsymbol{f_{ii}=1}\ \Leftrightarrow\sum_{n=1}^\infty\boldsymbol{P_{ii}^{(n)}}=\infty$, **瞬过**: 非常返 ⇔ $\sum_{n=1}^\infty p_{ii}^{(n)}=\frac{1}{1-f_{ii}}<\infty$. 证:设返回 i 次数为 k, $\sum_{n=1}^\infty p_{ii}^{(n)}=E\{k|X_0=i\}$,几何分布 $EX=\frac{1}{p}$,首次回不来首次成功,$p=1-f_{ii}$

性质: (1). 直线对称随机游动是(零)常返的, 非对称是瞬过的, 二维对称也是(零)常返的, 三维以上对称都是瞬过的.

常返时: 对常返状态 i 定义 $T_i=min\{n\geq1:X_n=i\}$ 为首次返回状态 i 的时刻; 记 $\mu_i=ET_i=\sum_{n=1}^\infty nf_{ii}^{(n)}$ 为返回的期望步数. **零常返**: $\mu_i=\infty$, **正常返**: $\mu_i<\infty$. **遍历态: 正常返且非周期**

$p_{ij}^{(n)}$和$f_{ij}^{(n)}$关系: ① $p_{ij}^{(n)}=\sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)}p_{jj}^{(n-k)}$

② $f_{ij}^{(n)}=p_{ij}^{(n)}-\sum_{k=1}^{n-1}f_{ij}^{(k)}p_{jj}^{(n-k)}$, (代$p_{jj}^{(0)}=1$)

①证明: $p_{ij}^{(n)}=P(X_n=j|X_0=i)=\sum_{k=1}P(X_n=j,T_j=k|X_0=i)=\sum_{k=1}P(X_n=j|T_j=k,X_0=i)P(T_j=k|X_0=i)$,后一项是$f_{ij}^{(k)}$

若 $i\to j$, j 常返则$\sum_{n=1}^\infty p_{ij}^{(n)}=\infty$ 瞬过则$<\infty$(CK+左下①证若 j 瞬过或零常返, $\forall i,\lim\limits_{n->\infty}p_{ij}^{(n)}=0$ (左下①+k:[1,m]+[m,∞]

有限状态 Markov 至少有一个正常返(不然极限行和是 0 不是 1

若$i\leftrightarrow j$, 同为常/非常返, 正/零常返, 周期相同

状态空间分解: 状态空间 I 可以唯一分解成互不相交的 D 和C_i (1)D 由全体非常返组成 (2) 每个C_i是常返态组成的不可约闭集 (3) C_i中的状态同类(全正/零常返), 周期相同且任意$f_{ij}=1$ 称 Ci 为基本常返闭集

随机矩阵:元素非负行和为 1

a.M 链有一个零常返则必有无限多个零常返 b.有限状态 m 链不可能有零常返也不可能全是非常返 c.不可约有限 m 链必为正常返

Markov 链的基本极限定理: (a). 若状态 i 是瞬过或零常返的, ⇔ $\lim\limits_{n\to\infty}P_{ii}^{(n)}=0$; (b) 若状态 i 是周期为 d 的常返状态, ⇔ $\lim\limits_{n\to\infty}P_{ii}^{(nd)}=\frac{d}{\mu_i}$; (c)当状态 i 是非周期的正常返状态(遍历), ⇔ $\lim\limits_{n\to\infty}P_{ii}^{(n)}=\frac{1}{\mu_i}$

Markov 链的平稳分布:$\{\pi_i,i\geq0\}$ 满足 $\pi_j=\sum_{i=0}^\infty\pi_i P_{ij}$. 性质 **(1)**. 若一个不可约 Markov 链中所有状态都是遍历的, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}=\pi_j$ 存在且 $\pi=\{\pi_j,j\geq0\}$ 为平稳分布; 反之, 若不可约 Markov 链只存在一个平稳分布, 且所有状态都是遍历的, 那么该平稳分布$\{\pi_j\}$就是这 Markov 链的极限分布.$\{\frac{1}{\mu_i}\}$

若不可约马氏链无正常返, 则不存在平稳分布

齐次不可约遍历:极限唯一且极限是平稳; 齐次不可约正常返:平稳唯一; 一般齐次:无平稳⇔无正常返不可约闭集, 唯一平稳⇔只一个正常返不可约闭集, 多个平稳⇔两个及以上

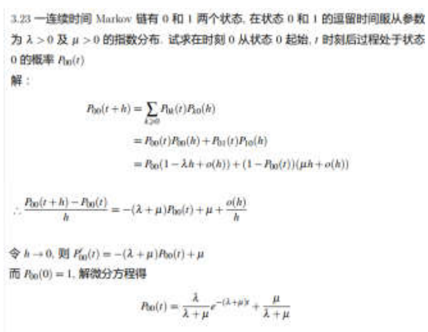
分支过程: $\{X_n,n\geq0\}$中 X_n 为第 n 代后裔大小, $X_{n+1}=\sum_{i=1}^{X_n}Z_i$. 若记 $P(Z_1=k)=p_k,EZ_1=\mu,VarZ_1=\sigma^2$, 则 $P_{ij}=P\{\sum_{k=1}^i Z_k=j\}$. 再由 $EX_{n+1}=EX_n\,EZ_1,VarX_{n+1}=EX_nVarZ_1+VarX_n(EZ_1)^2$, 可以迭代出 $EX_{n+1}=\mu^{n+1}$, $\mathrm{Var}X_{n+1}=\begin{cases}\sigma^2\mu^n\frac{1-\mu^{n+1}}{1-\mu},\mu\neq1\\(n+1)\sigma^2,\mu=1\end{cases}$

群体消亡概率 π 是方程 $\phi(s)=\sum_{j=0}^\infty p_j s^j=s$ 的最小正解, 其中 $p_j=P(X_1=j)$.; $\pi=1$ 当且仅当 $\mu=EZ_1\leq1$,

连续时间 Markov 链: 泊松过程, 纯生过程为一例. 满足 $P\{X(t+s)=j|X(s)=i,X(x)=x(u),0\leq u<s\}=P\{X(t+s)=j|X(s)=i\}$. **平稳转移概率的连续时间 Markov 链**: $P\{X(t+s)=j|X(s)=i\}$ 是与 s 无关的. **联合分布**:$P\{X(t_n)=i_n,\dots,X(0)=i_0\}=P_{i_{n-1},i_n}(t_n-t_{n-1})\dots P_{i_0,i_1}(t_1)p_{i_0}$; **Chapman-Kolmogorov 方程**$P_{ij}(t+\tau)=\sum_k P_{ik}(\tau)P_{kj}(t)$. 另外还要满足保证不能刚到状态就离去 $\lim\limits_{\tau\to0}P\{X(t+\tau)=i|X(t)=i\}=\lim\limits_{\tau\to0}P_{ii}(\tau)=1$.

过程在 i **逗留时间** 服从参数为 v_i 的指数分布. 从 i 到 j 的**转移率** $q_{ij}=v_iP_{ij}$

纯生过程,生灭过程.



3.23 一连续时间 Markov 链有 0 和 1 两个状态. 在状态 0 和 1 的逗留时间服从参数为 $\lambda>0$ 及 $\mu>0$ 的指数分布. 试求在时刻 0 从状态 0 起始, t 时刻后过程处于状态 0 的概率 $P_{00}(t)$

解:

$$P_{00}(t+h)=\sum_{k\geq0}P_{0k}(t)P_{k0}(h)$$
$$=P_{00}(t)P_{00}(h)+P_{01}(t)P_{10}(h)$$
$$=P_{00}(1-\lambda h+o(h))+(1-P_{00}(t))(\mu h+o(h))$$

$$\therefore\frac{P_{00}(t+h)-P_{00}(t)}{h}=-(\lambda+\mu)P_{00}(t)+\mu+\frac{o(h)}{h}$$

令 $h\to0$, 则 $P_{00}'(t)=-(\lambda+\mu)P_{00}(t)+\mu$

而 $P_{00}(0)=1$, 解微分方程得

$$P_{00}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

严平稳不一定有二阶矩而不必是宽平稳；**宽平稳**由于其有限维联合分布不满足严平稳定义而不一定是严平稳。但严平稳+二阶矩存在则为宽平稳

高斯过程：$G=\{G(t),-\infty<t<\infty\}$，对任一 $k\in Z^+, t_1\le t_2\le\cdots\le t_k$，若$(G(t_1),G(t_2),\dots,G(t_k))$的联合分布为 k 维正态分布，则称 G 为高斯过程。**高斯过程严平稳和宽平稳一致，**因为它完全由均值和协方差矩阵确定.

平稳白噪声序列：$EX_n=0, EX_n^2=\sigma^2, EX_n^2=\sigma^2, EX_mX_n=0(m\neq n)$，协方差函数只和 $m-n$ 有关

三角多项式过程：设 A 和 B 同分布，均值 0，方差σ^2，A 和 B 不相关$Cov(A,B)=EAB=0, \omega\in[0,\pi]$。$X_t=Acos\omega t+Bsin\omega t$。则 $X=\{X_t:-\infty<t<\infty\}$ 是宽平稳过程。$EX_{t+\tau}X_t=\sigma^2cos\tau\omega$.

推广三角多项式过程：$X_t=\sum_{k=0}^m A_kcos\omega_kt+B_ksin\omega_kt$。则 $EX_{t+\tau}X_t=\sum_{k=0}^m\sigma_k^2cos\tau\omega_k$。也是宽平稳过程。推广到连续频率：$R(\tau)=\sigma^2\int_0^\pi cos\tau\omega dF(\omega)$，若 $F(\omega)$是均匀分布且 τ 取整值 $0,1,\cdots$，那么$R(\tau)=\sigma^2\int_0^\pi\frac{1}{\pi}cos\tau\omega d\omega=\begin{cases}\sigma^2,\tau=0\\0,\tau\neq0\end{cases}$

滑动平均序列：$\{\epsilon_n,n=0,\pm1,\pm2,\dots\}$为一列不相关的有相同均值m和方差$\sigma^2$的随机变量，$\alpha_i\in R$，$X_n=a_1\epsilon_n+a_2\epsilon_{n-1}+\cdots+a_k\epsilon_{n-k+1}, n=0,\pm1,\dots$。则有 $EX_n=m(a_1+\cdots+a_k)$，记 $\xi_j=\epsilon_j-m$，$R(n+\tau,n)=E(a_1\xi_n+a_2\xi_{n+\tau-1}+\cdots+a_k\xi_{n-k+1})(a_1\xi_{n+\tau}+a_2\xi_{n+\tau-1}+\cdots a_k\xi_{n+\tau-k+1})=\begin{cases}\sigma^2(a_ka_{k-\tau}+\cdots+a_{\tau+1}a_1),0\le\tau\le k-1\\0,\tau\ge k\end{cases}$仅与$\tau$有关。若取$a_j=\frac{1}{\sqrt{k}}, j=1,\dots,k$，则$R(|\tau|)=\begin{cases}\sigma^2(1-\frac{|\tau|}{k}),|\tau|\le k-1\\0,|\tau|\ge k\end{cases}$

随机电报信号：$X=\{X(t),t\ge0, P(X(t)=I)=P(X(t)=-I)=\frac{1}{2}$。而在$[t,t+\tau]$内正负号变化次数$N\sim Poi(\lambda)=\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^k}{k!},\lambda>0$。则有 $EX(t+\tau)X(t)=I^2e^{-2\lambda|\tau|}$

周期平稳过程：$X(t+\kappa)=X(t)$，这使得$R(\tau+\kappa)=R(\tau)$

复平稳过程：注意协方差函数 $E(X(t)-m)\overline{(X(s)-m)}$

估计均值和协方差函数：$\hat{m}_n=\frac{1}{n}(X_1(t)+\cdots+X_n(t)), \hat{R}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}(X_k(t+\tau)-\hat{m}_n)(X_k(t)-\hat{m}_n)$

均值遍历性：$\bar{X}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^TX(t)dt=_{L_2}m$ 或 $\bar{X}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\sum_{k=-N}^NX(k)=_{L_2}m$。这里是**均方收敛**$E\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^TX(t)dt-m\right)^2\to0\ (T\to\infty)$

协方差遍历性: TODO.

随机过程遍历性：均值和协方差都有遍历性.

遍历性定理：考虑对时间的均值=过程的均值 R 是协方差

均值遍历性定理：(1). **离散**：平稳序列 $\{X_n,n=0,\pm1,\dots\}$ 有遍历性的充分必要条件是 $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1}R(\tau)=0$；(2). **连续**：$X=\{X(t),-\infty<t<\infty\}$，充要条件 $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)R(\tau)d\tau=0$

均值遍历性定理推论：(1).若$\int_{-\infty}^{\infty}|R(\tau)|d\tau<\infty$，则均值遍历性成立；(2).对平稳序列，$R(\tau)\to0(\tau\to\infty)$，则均值遍历性成立.

方差遍历性.

平稳过程的协方差函数：性质：**(1)**. $R(-\tau)=R(\tau)$，(2). $|R(\tau)|\le R(0)$,**(3)**. **非负定性** $\sum_{n=1}^N\sum_{m=1}^N a_na_mR(t_n-t_m)\ge0$. (4). **均方导数** $\lim_{h\to0}E\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}-Y(t)\right|^2=0$，则 $Y=\{Y(t)\}$ 为过程X在 t 点的均方导数，简称导数，记为$X'(T)$或$\frac{dX(t)}{dt}$。**均方导数存在的充要条件是** $\lim_{h\to0,k\to0}\frac{R(0)-R(h)-R(k)+R(h-k)}{hk}$；(5). 平稳过程 n 阶导数的协方差函数$Cov\left(X^{(n)}(t),X^{(n)}(t+\tau)\right)=(-1)^nR^{(2n)}(\tau)$.

常见信号协方差函数：1. **振幅调制波**$Z(t)=Y(t)e^{j\lambda_0t}, t\in R$，其中 $Y(t)$是零均值实平稳过程。则$R_Z(\tau)=R_Y(\tau)e^{j\lambda_0\tau}$ 实数形式地振幅调制波:$X(t)=Y(t)\cos(\omega t+\Theta), t\in R$，其中随机相位 $\Theta\sim U(0,2\pi)$独立于$Y(t)$。当 $EY(t)=0$，$R_X(\tau)=R_Y(\tau)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\theta)\cos(\omega(t+\tau)+\theta)d\theta=\frac{1}{2}R_Y(\tau)cos\omega\tau$.

2.频率调制波：只讨论Y 对应的相位调制信号。$X(t)=cosY(t), t\in R$。设 Y 为零均值高斯过程，令$C=\sqrt{R_Y(0)}$,则 $g_Y(s)=Eexp\{sY(t)\}=\exp\{\frac{C^2s^2}{2}\}$。从而**均值函数** $EX(t)=E\frac{1}{2}(\exp\{jY(t)\}+\exp\{-jY(t)\})=_{带入g(j)}\exp\{-\frac{R_Y(0)}{2}\}$。**协方差函数**$R_X(\tau)=EX(t)X(t+\tau)-(EX(t))^2=e^{-R_Y(0)}(\cosh(R_Y(\tau))-1)$，近似公式：由$-R_Y''(0)=E(Y'(0))^2>0$知$R_Y(\tau)\approx R_Y(0)-\frac{k^2}{2}\tau^2$，$R_X(\tau)\approx\exp\{-R_Y(0)+R_Y(\tau)\}=\exp\{-\frac{1}{2}k^2\tau^2\}$.

3.平方检波：Y 为零均值平稳高斯过程，$X(t)=Y^2(t), t\in R$。则 $R_X(\tau)=2R_Y^2(\tau)$.

傅里叶展开：周期 2T 的函数,$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A(n)e^{-jn\omega t}$，其中 $\omega=\frac{\pi}{T}, A(n)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^Tx(t)e^{jn\omega t}dt$。$\frac{1}{2}A(0)$ 为直流分量,$|A(1)|$为基波ω的振幅，$|A(n)|$为nω的振幅。Parsval 等式给出 x(t)的**功率**为$\frac{1}{2T}\int_{-T}^Tx^2(t)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|A(n)|^2$。**角频率**：$\omega_n=n\omega$，**线频率** $\lambda=\frac{n}{2T}$.

能量型信号：非周期总能量有限($\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)dt<\infty$)则有频谱 $(F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt)$。Parsval 等式仍然成立$\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega$.

功率型信号：平均功率非无限$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^Tx^2(t)dt<\infty$

利用傅里叶变换给出功率谱表达式：令$x_T(t)=\begin{cases}x(t),|t|\le T\\0,|t|>T\end{cases}$，则$F(\omega,T)=\int_{-\infty}^{\infty}x_T(t)e^{-j\omega t}dt$，若**功率谱密度**$S(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F(\omega,T)|^2$存在，则平均功率谱表达式 $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}x_T^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2T}|F(\omega,T)|^2d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)d\omega$

平稳过程的功率谱密度：依然有$F(\omega,T)=\int_{-T}^TX(t)e^{-j\omega t}dt$和 $\frac{1}{2T}\int_{-T}^TX^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2T}|F(\omega,T)|^2d\omega$，则 X 的**功率谱密度**$S(\omega)=\lim_{T\to\infty}E\frac{1}{2T}|F(\omega,T)|^2$，**平均功率** $\lim_{T\to\infty}E(\frac{1}{2T}\int_{-T}^TX^2(t)dt)$，假定$EX(t)=0$则可交换顺序得到**平均功率的谱表达式**:$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^TEX^2(t)dt=R(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)d\omega$.

半谱密度：$G(\omega)=\begin{cases}2S(\omega),\omega\ge0\\0,\omega<0\end{cases}$

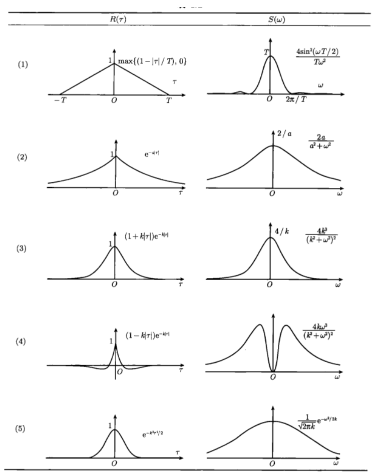
Wiener-Khintchine 公式：假定 $EX(t)=0,\int R(\tau)d\tau<\infty$ 则$S(\omega)=\int R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$，$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$；而 $R(\tau),S(\omega)$都是偶函数，可以写成$S(\omega)=2\int_0^{\infty}R(\tau)cos\omega\tau d\tau, R(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}S(\omega)cos\omega\tau d\omega$；**离散平稳序列(不同于平稳过程)**:$S(\omega)=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega\tau}R(\tau), R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega$。若$EX(t)=m$,则$S(\omega)$, $r(\tau)$构成一对傅里叶变换($R(\tau)$换成$r(\tau)$就行，$r(\tau)$是自相关函数)

有理谱密度：$S(\omega)=\frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$，而谱密度是ω的非负实值偶函数，故$S(\omega)=s_0\frac{\omega^{2n}+a_{2n-2}\omega^{2n-2}+\cdots+a_2\omega^2+a_0}{\omega^{2m}+b_{2m-2}\omega^{2m-2}+\cdots+b_2\omega^2+b_0}$。$S(\omega)$应在$[0,\infty)$可积，从而$Q(\omega)$不能有实根，分母多项式次数至少比分子高 2，$s_0>0$.

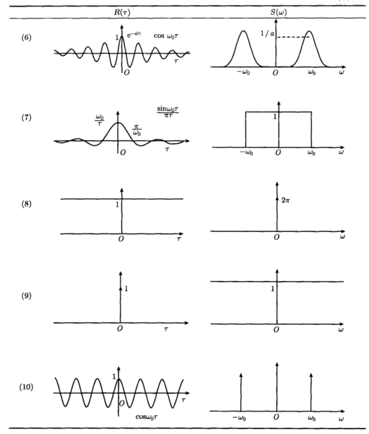
广义下：利用$\int\delta(\tau-\tau_0)f(\tau)d\tau=f(\tau_0)$，有 **1**. $F[\delta(\tau)]=1, F^{-1}[1]=\delta(\tau)$; **2**. $R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int a\cos\omega\tau_0e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{a}{4\pi}[\int e^{j\omega(\tau+\tau_0)}d\omega+\int e^{j\omega(\tau-\tau_0)}d\omega=\frac{a}{2}(\delta(\tau+\tau_0)+\delta(\tau-\tau_0)d\omega$；白噪声(谱密度为常数$S_0$),$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int S_0e^{j\omega\tau}d\omega=S_0\delta(\tau)$，是理想化数学模型，平均功率无穷是不可能做到的.

对平稳序列$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_0\cos\omega\tau\,d\omega=\begin{cases}S_0,\tau=0\\0,\tau=\pm1,\pm2,\dots\end{cases}$

平稳序列的预报.



	常返态		非常返态
	零常返态	正常返态	
转移概率 $p_{ij}^{(n)}$	$\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=\infty$		$\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}<\infty$
	$\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(n)}=0$	$\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(n)}>0$	
首达概率 $f_{ij}^{(n)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}f_{ii}^{(n)}=f_{ii}=1$		$\sum_{n=1}^{\infty}f_{ii}^{(n)}=f_{ii}<1$
	$\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}=\mu_i=\infty$	$\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}=\mu_i<\infty$	



常用随机变量的分布与矩母函数

离散概率分布	$P(X=x)$	矩母函数	EX	$Var(X)$
二项分布 $B(n,p)$, $0\leqslant p\leqslant1$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$, $x=0,1,\cdots,n$	$(pe^t+(1-p))^n$	np	$np(1-p)$
Poisson 分布 ,$\lambda>0$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!},x=1,2,\cdots$	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$	λ	λ
几何分布, $0\leqslant p\leqslant1$	$p(1-p)^{x-1}$, $x=1,2,\cdots$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
负二项分布 参数为 r,p	$\binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r}$, $x=r,r+1,\cdots$	$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
连续概率分布	$f(x)$	$g(t)$	EX	$VarX$
均匀分布 $U(a,b)$	$\frac{1}{b-a},a<x<b$	$\frac{e^{ta}-e^{tb}}{t(a-b)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 ,$\lambda>0$	$\lambda e^{-\lambda x},x\geqslant0$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Γ分布$\Gamma(n,\lambda),\lambda>0$	$\frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!},x\geqslant0$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-u)^2/2\sigma^2}$	$\exp\left\{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}\right\}$	μ	σ^2
Beta 分布 $B(a,b)$, $a>0,b>0$	$cx^{a-1}(1-x)^{b-1},0<x<1$, $c=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$		$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

分布概率：(1).**顺序统计量**：$\mathbf{F}_{X_{(r)}}(x)=\sum_{j=r}^n\binom{n}{j}[F_X(x)]^j[1-F_X(x)]^{n-j}$；$\boldsymbol{f}_{X_{(r)}}=r\binom{n}{r}f_X(x)[F_X(x)]^{r-1}[1-F_X(x)]^{n-t}$；$\mathbf{F}_{X_{(n)}}(x)=P(\max\{\dots\}<x)=[F_X(x)]^n$；$\boldsymbol{F}_{X_{(1)}}=1-[1-F_X(x)]$^n; (2). **多元正态**：$f_X(x_1,\dots,x_k)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k|\Sigma|}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)}$; (3).**二元正态**：$f(x,y)=\left(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)^{-1}\exp[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}$

Gamma 函数$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}, \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$; **Beta 函数**$B(P,Q)=\int_0^1x^{P-1}(1-x)^{Q-1}dx=\frac{\Gamma(P)\Gamma(Q)}{\Gamma(P+Q)}$

三角函数相关：$\frac{1}{2}+\cos x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$；$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{nx}{2}$

和差化积: $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$; **积化和差**: $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$; $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$; $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$;

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$;

积分式: $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$, $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega\tau}d\tau=2\pi\delta(\omega)$

留数定理: $\oint f(z)dz=2\pi j\sum_{k=1}^{n}Res[f(z),z_k]$, 若 $f=\frac{g}{(z-z_0)^m}$, g 是解析函数, 则$Res[f(z),z_k]=\frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$; 若 R(x) 无实零点, $\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega x}R(x)dx=2\pi j\sum_k Res[e^{j|\omega|z}R(z),z_k]$

留数计算: $Res[f(z),a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]$, 特别当$m=1, Res[f(z),a]=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$. $Res\left[\frac{P(z)}{Q(z)},a\right]=\frac{P(a)}{Q'(a)}$

傅里叶变换: $F\left[e^{-k|\tau|}\right]=\frac{2k}{k^2+\omega^2}$; $F\left[-\frac{k}{2}|\tau|\right]=\frac{k}{\omega^2}$

切比雪夫不等式: $P\{|X-\mu|\geq\epsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$,其中$EX=\mu, VarX=\sigma^2$

Stirling:$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{e^n n!}{n^n\sqrt{n}}=\sqrt{2\pi}$

$$
\begin{aligned}
R_X(s,t) &= Cov(X(t),X(s)) \\
&= Cov(X(s)-X(t)+X(t)-X(0),X(t)-X(0)) \\
&= Cov(X(t)-X(0),X(t)-X(0)) \qquad \text{（独立增量）} \\
&= \lambda t \qquad (s \geqslant t)
\end{aligned}
$$

1.8

1.11

1. ∵ X, Y 独立同分布 设随机变量 $Z=X+Y$

则 $F_{X|Z}(x|z)$ 与 $F_{Y|Z}(y|z)$ 分布相同

∴ $E(X|X+Y=z) = \int x\, dF(x|z) = \int y\, dF(y|z) = E(Y|X+Y=z)$

求基于 $X+Y=z$ 的 X 的最佳预报函数 φ，即求出 φ 使 $E[X-\phi(X+Y)]^2$ 最小

而 $E(X+Y|X+Y=z)=z$ 故 $E(X|X+Y=z)=\frac{z}{2}$

$E[X-\phi(z)]^2 = E[X-E(X|X+Y=z)+E(X|X+Y=z)-\phi(z)]^2$

$= E[X-E(X|X+Y=z)]^2 + E[E(X|X+Y=z)-\phi(z)]^2$

$+ 2E[(X-E(X|X+Y=z))\cdot(E(X|X+Y=z)-\phi(z))]$

(∵ $EX = E[E(X|Z)]$) $= E[X-E(X|X+Y=z)]^2 + E[E(X|X+Y=z)-\phi(z)]^2 \geqslant E[X-E(X|X+Y=z)]^2$

当且仅当 $\phi(z)=E(X|X+Y=z)$

∴ 最佳预报 $\phi(z) = E(X|X+Y=z) = \frac{z}{2}$

预报误差 $E[X-\phi(X+Y)]^2 = E(X-\frac{z}{2})^2$

2.5

2.7 $N(t)$ 是强度为 λ 的 Possion 过程. 给定 $N(t)=n$. 试求第 r 个事件 $(r \leqslant n)$ 发生的时刻 W_r 的条件概率密度 $f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)$.

解：

$$
\begin{aligned}
& f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)\cdot\Delta w_r \\
&= P\{N(w_r)-N(0)=r-1, N(w_r+\Delta w_r)-N(w_r)=1 | N(t)=n\} \\
&= P\{N(w_r)-N(0)=r-1\}\cdot P\{N(w_r+\Delta w_r)-N(w_r)=1\} \\
&\quad \cdot P\{N(t)-N(w_r+\Delta w_r)=n-r\}/P\{N(t)=n\} \\
&= \frac{(\lambda w_r)^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\lambda w_r}\cdot(\lambda\Delta w_r+o(\Delta w_r))\cdot\frac{(\lambda(t-w_r-\Delta w_r))^{n-r}}{(n-r)!}e^{-\lambda(t-w_r-\Delta w_r)} \Big/ \left[\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{\lambda t}\right]
\end{aligned}
$$

两边除以 Δw_r 并令 $\Delta w_r \to 0$ 得

$f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\frac{(w_r)^{r-1}(t-w_r)^{n-r}}{t^n}$

2.11 冲击模型 (Shock Model) 记 $N(t)$ 为某系统到某时刻 t 受到的冲击次数. 它是参数为 λ 的 Possion 过程. 设第 k 次冲击对系统的损害大小 Y_k 服从参数为 μ 的指数分布, $Y_k, k=1,2,\cdots$, 独立同分布. 记 $X(t)$ 为系统所受到的总损害. 当损害超过一定的极限 α 时系统不能运行, 寿命终止. 记 T 为系统寿命. 试求该系统的平均寿命 ET, 并对所得结果作出直观解释.

提示：对非负随机变量 $ET=\int_0^{\infty}P(T>t)dt$

解：令 $W_n=\sum\limits_{k=1}^{n}Y_k$

法一：

$$
\begin{aligned}
P(T>t) &= P\{X(t)\leqslant\alpha\} \\
&= P\{\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k\leqslant\alpha\} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}P\left\{\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k\leqslant\alpha|N(t)=n\right\}\cdot P\{N(t)=n\} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}P\left\{\sum_{k=1}^{n}Y_k\leqslant\alpha|N(t)=n\right\}\cdot P\{N(t)=n\} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}P\{W_n\leqslant\alpha\}\cdot P\{N(t)=n\}
\end{aligned}
$$

求和式中当 $n=0$ 时认为 $P\{W_n\leqslant\alpha|N(t)=n\}=1$

$\because Y_k\sim\exp(\mu)$, $\therefore W_n=\sum\limits_{k=1}^{n}Y_k\sim\Gamma(n,\mu)$

$$
\begin{aligned}
&\therefore P(W_n\leqslant\alpha)=\frac{\mu^n}{(n-1)!}\int_0^{\alpha}s^{n-1}e^{-\mu s}ds \quad (n\geqslant 1) \\
&P\{N(t)=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \\
&\therefore P(T>t)=e^{-\lambda t}+e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\lambda\mu t)^n}{n!(n-1)!}\int_0^{\alpha}s^{n-1}e^{-\mu s}ds \\
&\therefore ET=\int_0^{+\infty}P(T>t)dt \\
&=\frac{1}{\lambda}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\lambda\mu)^n}{n!(n-1)!}\int_0^{+\infty}t^ne^{-\lambda t}dt\int_0^{\alpha}s^{n-1}e^{-\mu s}ds \\
&=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mu^n\Gamma(n+1)}{n!(n-1)!}\int_0^{\alpha}s^{n-1}e^{-\mu s}ds \\
&=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\alpha}\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\mu s)^{n-1}e^{-\mu s}}{(n-1)!}\right]d(\mu s) \\
&=\frac{1+\mu\alpha}{\lambda}
\end{aligned}
$$

从结果看, 若 λ 越大 (系统所受冲击越频繁), μ 越小 (每次冲击所造成的平均损害越大), α 越小 (系统所能承受的的损害极限越小), 则系统平均寿命越短, 且当 α 等于 0 时系统的平均寿命即为第一次冲击到来的平均时间, 符合常识.

3.15 考虑一有限状态的 Markov 链. 试证明

(a) 至少有一个状态是常返的.

(b) 任何常返状态必定是正常返的.

证：(a) 反设所有状态均为瞬过或零常返 (加强结论), 则对 $\forall i\in S$, 有

$$\lim_{n\to+\infty}P_{ii}^{(n)}=0 \qquad (*)$$

考虑 $P_{ij}^{(n)}=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}f_{ij}^{(k)}P_{jj}^{(n-k)}$, 则有

$$\sum_{k=1}^{\ell}f_{ij}^{(k)}P_{jj}^{(n-k)}\leqslant P_{ij}^{(n)}\leqslant\sum_{k=1}^{\ell}f_{ij}^{(k)}P_{jj}^{(n-k)}+\sum_{k=\ell}^{+\infty}f_{ij}^{(k)} \qquad (**)$$

固定 ℓ, 令 $n\to+\infty$, 则由 $(*)$ 得

$$0\leqslant\lim_{n\to+\infty}P_{ij}^{(n)}\leqslant 0+\sum_{k=\ell}^{+\infty}f_{ij}^{(k)} \qquad (***)$$

在 $(***)$ 中令 $\ell\to+\infty$, 由于 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}f_{ij}^{(k)}\leqslant 1$ 收敛

$$\therefore\lim_{n\to+\infty}P_{ij}^{(n)}=0 \qquad (*4)$$

若此有限状态 $M.C.$ 有 N 个状态, 则

$$\sum_{j=1}^{N}P_{ij}^{(n)}=1 \qquad (*5)$$

$(*5)$ 中令 $n\to+\infty$, 由 $(*4)$ 得 $0=1$, 矛盾

∴ 至少有一个状态是 (正) 常返的

(b) 若存在零常返状态 i, 可构造 $C(i)=\{j|i\leftrightarrow j\}$, 则 $C(i)$ 为原 $M.C.$ 的一不可约子 $M.C.$(有限状态), 于是 $C(i)$ 中所有状态均为零常返, 与有限状态 $M.C.$ 至少有一个正常返状态矛盾, ∴ 任何常返状态均为正常返

3.(19.5) 袋中有 N 个球, 为白色或黑色, 每次从袋中随机取一球然后放回一个不同颜色的球. 若袋中有 k 个白球, 则称系统为状态 k. 试用 M.C. 描述此模型, 且

(1) 求 P, 作状态分类.

(2) 问该 M.C. 是否存在平稳分布, 有则求出.

(3) 问极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}P_{ij}^{(n)}$ 是否存在? 为什么?

33