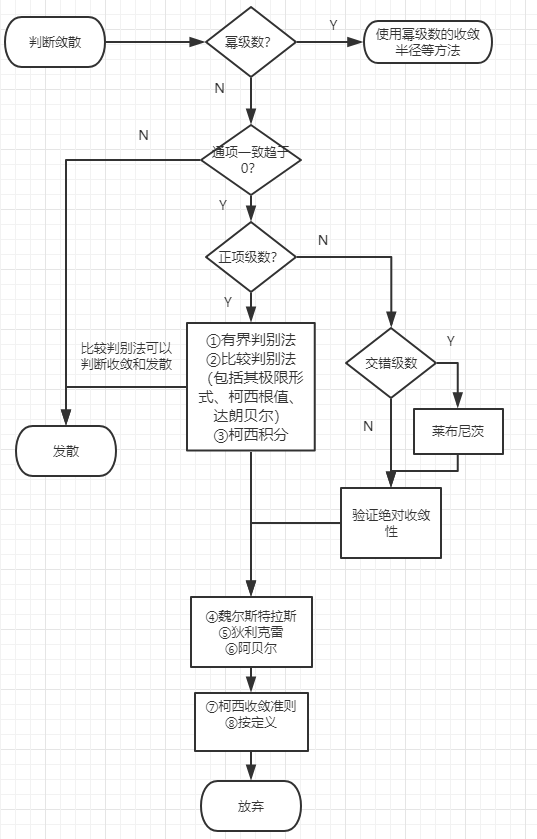
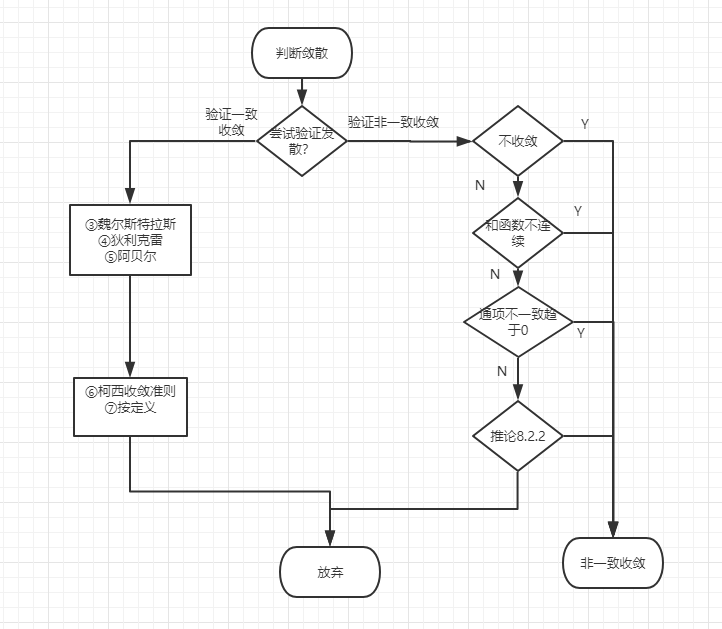
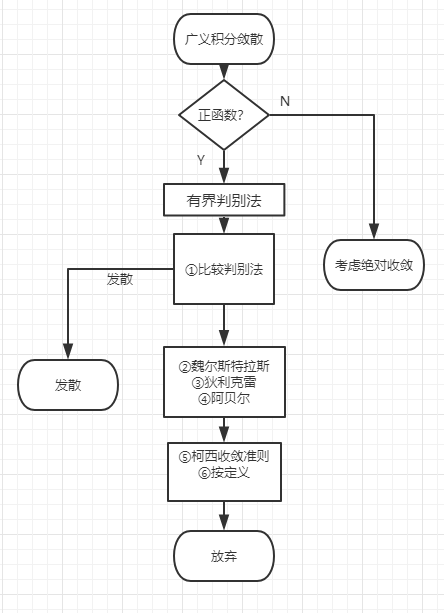
1. 级数的敛散性



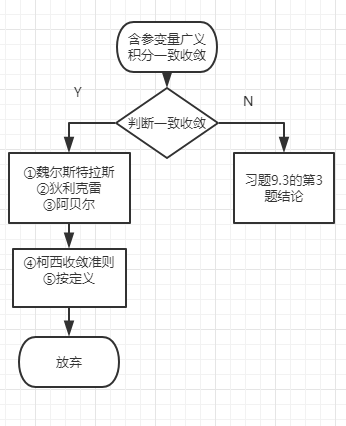
1. 级数的一致收敛



1. 广义积分敛散



1. 含参变量广义积分一致收敛



# 特殊积分

1. 相关计算公式
   1. 勒让德加倍公式：
   2. 余元公式：

# 级数和含参变量积分的性质及其条件

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 类型 | 性质 | 区间特别要求 | 连续 | | 级数(积分)收敛 | |
| 通项 | 通项导数 | 原 | 求导后 |
| 函数项级数 | 连续性 |  | √ |  | 内闭一致收敛 |  |
| 可微性 |  | √ | √ | 收敛 | 一致收敛 |
| 可积性 | 闭区间 | √ |  | 一致收敛 |  |
| 含参变量常义积分  值得注意的是含参变量常义积分就是闭区间上连续函数的积分 | 连续性 | 闭区间 | √ |  |  |  |
| 可微性 | 闭区间 | √ | √ |  |  |
| 可积性 | 闭区间 | √ |  |  |  |
| 积分限依赖于参变量的连续性和可导性 | 闭区间 | √ | √ |  |  |
| 含参变量的广义积分 | 连续性 |  | √ |  | 内闭一致收敛 |  |
| 可微性 |  | √ | √ | 收敛 | 一致收敛 |
| 非无穷积分可积 | 闭区间 | √ |  | 一致收敛 |  |
| 无穷积分可积性 | 闭区间，无穷端开 | √ |  | ①f的两个广义积分均内闭一致收敛  ②|f(x,u)|的两个累次积分至少一个存在 |  |

# 傅里叶分析

构成一组标准正交基

1. 欧拉-傅里叶公式：

若周期为的函数可以展开成傅里叶级数：

则傅里叶系数由下面公式给出：

1. 狄利克雷定理：设周期函数的周期为，并且任何有限区间上逐段光滑，那么：
   1. 它的傅里叶级数在整个数轴上收敛；
      1. 在的每个连续点处收敛于；
      2. 在的间断点出收敛于
   2. 若在数轴上处处连续，则傅里叶级数在整个数轴上**绝对一致收敛**于
2. 周期不是时：

则傅里叶系数由下面公式给出：

1. 傅里叶正弦级数——奇函数，只含有正弦函数项

傅里叶余弦级数——偶函数，只含有余弦函数项

1. 有限区间上函数的傅里叶级数：
   1. 周期开拓
   2. 奇性开拓→傅里叶正弦级数
   3. 偶性开拓→傅里叶余弦级数
2. 均方收敛及其一些相关定义

引入上的内积：

对应的度量（或距离，称为度量）：

在度量下收敛于，即 均方收敛于，是指：

即：

1. 傅里叶系数的最优性：设在区间可积且平方可积，是的傅里叶级数的第n个部分和函数，是任意一个n次三角多项式，则

贝塞尔不等式：设在区间可积且平方可积，并且

则有贝塞尔不等式：

1. 收敛及巴塞瓦尔等式：设在区间可积且平方可积，并且

则的傅里叶级数的第n个部分和函数在度量下收敛于，且有：

其实就是勾股定理，向量的模长平方是各坐标平方和

巴塞瓦尔等式的推广形式：

1. 逐项积分

由巴塞瓦尔等式的推广可证。令

傅里叶级数的逐项微分条件太强，书上未描述。

1. 傅里叶积分

其中

1. 傅里叶积分表示的收敛定理：设函数在整个数轴上绝对可积，在任何有限区间上逐段光滑，则对任意实x，的傅里叶积分表示必收于左右极限的平均值
2. 傅里叶变换：

把傅里叶积分表示成复数形式：

为傅里叶正变换/像函数：

为傅里叶逆变换/本函数：

1. 傅里叶正余弦变换