**均值函数**; **方差函数**; **联合二维分布**; **自相关函数**; 标准自相关函数: ; **协方差函数**

过程: , 序列:

**严平稳**: 有独立同分布于; **宽平稳**: ①所有二阶矩存在②③协方差函数只与有关

**独立增量过程**: 对任意 , 相互独立; **平稳独立增量过程**: 进一步有对任意 和 有 独立同分布 , 其**均值函数必为 的线性函数.（bosongguoch**

**条件期望** 或 , 且有 . **(a)**. 若X和Y**独立,** 则 ; **(b)**. 平滑性: ; (c).

**最佳预报**: 基于 对 的最佳预报函数 .

**矩母函数** .

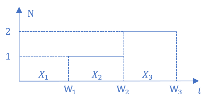
矩母函数性质 **(1)**. ; **(2)**.独立的X和Y有 ; 常用特征函数代替

**随机和**: 独立同分布, N非负且与 都独立, 则 为随机和. **(1)**.随机和的矩母函数 ;**(2)**. ; **(3)**. ; **(4)**. .

**生成函数**/**概率生成函数**: 离散随机变量 的概率生成函数为 , 特别地, 若 , 则 . **(1)**. ;**(2)**. 若X,Y独立, 则 ;**(3)**. **随机和生成函数** .

**收敛性**: **依概率收敛**于 , ; **几乎必然收敛**: ; **均方收敛**: . **均方收敛和几乎必然收敛都蕴含依概率收敛**, 反之不成立; **均方收敛和几乎必然收敛互不包含**.

**强度泊松过程** :**(1)**.;**(2)**.独立增量过程;**(3)**.对,增量

**另一定义(1)**. , 增量 相互独立; **(2)**.增量只依赖于;**(3)**.;**(4)**. ;

**泊松过程若干分布**: 泊松过程 是均值为 的独立同指数分布() ; **时间间隔** ; **到达时间/等待时间** 和 (Erlang分布/Γ分布. **等待时间的联合密度**: 给定 , 则与[0,t]均匀分布抽样n个的顺序统计量 联合密度相同 ; 边缘分布为, 同时也有

**非齐次泊松过程**: 及 ; **失效率**:

**复合泊松过程**: , 其中 , 而 服从参数 的 Poisson 过程.

是随机和并且 . 若 , 则退化为普通泊松过程.

**更新过程**: 时间间隔不一定是指数分布了. , , . 其分布 (这里是 n 重卷积, F(t) 是 的分布), . **平均事件次数**: . (在泊松过程中 恒为常数)

**N(t) 和 的等价性**: , 且有 .

**Markov性**: . 满足此称为离散时间Markov链

↑一步转移概率，与n无关时表示平稳转移概率，任意ij都与n无关则称markov链是齐次的

**Markov链一些记号**: ，初始绝对

**Chapman-Kolmogorov 方程**:

**互达性**: 存在 , 记作.互达. 不可约的Markov链所有状态属于同一互达类. (闭集c的状态互通称c**不可约**

**周期性**: 使 (或)的所有正整数 n 的最大公约数称作状态 i 的周期 . 则约定周期为 . 则称**非周期**. 只能说明不是周期的倍数回不来

**性质**: **(1)**. 存在 N, 对所有 n > N 有 ; **(2)**. 若, 存在 N, 对所有 n > N 有 ; **(3)**. 不可约非周期有限状态, **则 n 充分大有 都非零**.

**互达则周期相同**: .

**n 步首达概率记为** . ; . 记**从i 最终到 j 概率**为

**常返**: , **瞬过**: 非常返 . 证:设返回i次数为k，几何分布首次回不来首次成功

**性质**: **(1).** 直线对称随机游动是(零)常返的, 非对称是瞬过的, 二维对称也是(零)常返的, 三维以上对称都是瞬过的. **(2)**. 一阶随机游走,第一次返回平均时间, ; 迟早返回原点.

**常返时**: 对常返状态 i 定义 为首次返回状态 i 的时刻; 记 为返回的期望步数. **零常返**: , **正常返**: . **遍历态: 正常返且非周期**

和关系：**①** ②，(代) ①证明：后一项是

j常返则,瞬过则(CK+左下①证

若j瞬过或零常返， (左下①+k:[1,m]+[m,]

**有限状态Markov**至少有一个正常返(不然极限行和是0不是1s

若，同为常/非常返，正/零常返，周期相同

**状态空间分解**: 状态空间I可以唯一分解成互不相交的D和

(1)D由全体非常返组成 (2) 每个是常返态组成的不可约闭集 (3) 中的状态同类(全正/零常返)，周期相同

称Ci为基本常返闭集。**随机矩阵**:元素非负行和为1

(a).M链有一个零常返则必有无限多个零常返 (b).有限状态m链不可能有零常返也不可能全是非常返 (c).不可约有限m链必为正常返

**Markov链的基本极限定理**: (a). 若状态 i 是瞬过或零常返的 ; (b) 若状态 i 是周期为 d 的常返状态, ; (c)当状态 i 是非周期的正常返状态(遍历), ; **推论**: 若i遍历,则对所有

**Markov链的平稳分布**: 满足 . 性质 **(1).** 若一个不可约Markov链中所有状态都是遍历的, 则 存在且 为平稳分布; 反之, 若不可约Markov链只存在一个平稳分布, 且所有状态都是遍历的, 那么该平稳分布就是这Markov链的极限分布*..*

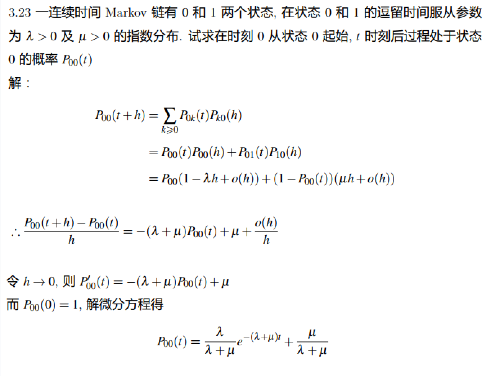
齐次不可约遍历:极限唯一且极限是平稳; 齐次不可约正常返:平稳唯一；一般齐次:无平稳无正常返不可约闭集，唯一平稳只一个正常返不可约闭集，多个平稳两个及以上

**总结:** 平稳分布和极限分布都依赖于初值分布; **(1).平稳分布**不一定存在(一阶随机游走), 也不一定唯一存在(转移矩阵为单位阵, 则依赖于初值); **(2)**.极限分布不一定存在(环, 来回), 但一定唯一存在. **(3)**对于不可约且遍历的MC, 极限存在/平稳分布唯一则二者相等.**(4)**. **有限状态 MC**, 至少一个状态常返, 常返必然正常返;**(5).不可约MC状态一致**, 同为正/零常返或非常返.(单边随机游走); **(6)平稳分布不存在没有正常返状态**; **(7). 存在唯一平稳分布只有一个正常返不可约闭集**; **(8).无穷多个平稳分布至少存在两个以上不可约闭集**;

**分支过程**: 中 为第 n 代后裔大小, . 若记 , 则 . 再由 , 可以迭代出

**群体消亡概率** 是方程 的最小正解, 其中 .; 当且仅当 ,

**连续时间Markov链**: 泊松过程, 纯生过程为一例. 满足 . **平稳转移概率的连续时间Markov链**: 是与 s 无关的. **联合分布**:; **Chapman-Kolmogrov 方程**. 还要满足保证不能刚到状态即离.

过程在 i **逗留时间** 服从参数为 的指数分布. 从i到j的**转移率** 

**严平稳不一定**有二阶矩而不必是宽平稳; **宽平稳**由于其有限维联合分布不满足严平稳定义而不一定是严平稳. 但严平稳+二阶矩存在则为宽平稳

**高斯过程**: , 对任意 , 若的联合分布为k维正态分布, 则称G为高斯过程. **高斯过程严平稳和宽平稳一致,** 因为它完全由均值和协方差矩阵确定.

**平稳白噪声序列**: , 协方差函数只和 有关

**三角多项式过程**: A和B 同分布, 均值0, 方差, A和B不相关. . 则 宽平稳过程. .

**推广三角多项式过程**: . 则 . 也是宽平稳过程. 推广到连续频率: , 若 是均匀分布且 取整值0,1,…, 那么

**滑动平均序列**: 为一列不相关的有相同均值和方差的随机变量, , . 则有 , 记仅与有关. 若取, 则

**随机电报信号**: , 而在内正负号变化次数. 则有

**周期平稳过程**: , 这使得

**复平稳过程**: 注意协方差函数

估计均值和协方差函数:

**均值遍历性**: 或 . 这里是**均方收敛**

**协方差遍历性**: TODO.

**随机过程遍历性**: 均值和协方差都有遍历性.

**遍历性定理**: 考虑对时间的均值=过程的均值 R是协方差

**均值遍历性定理**: (1). **离散**: 平稳序列 有遍历性的充分必要条件是 ; (2). **连续**: , 充要条件

**均值遍历性定理推论**: (1).若, 则均值遍历性成立; (2).对平稳序列, , 则均值遍历性成立.

方差遍历性.

**平稳过程的协方差函数**: 性质: **(1)**. , (2). ,**(3)**. **非负定性** . (4). **均方导数** , 则 为过程在t点的均方导数, 简称导数, 记为. **均方导数存在的充要条件**是 ; (5).平稳过程n阶导协方差函数.

**常见信号协方差函数**: 1. **振幅调制波**, 其中 是零均值实平稳过程. 则 **实数形式**振幅调制波:, 其中随机相位独立于. 当 , .

**2.频率调制波**: 只讨论程Y对应的相位调制信号. . 设 Y 为零均值高斯过程, 令,则. 从而**均值函数** . **协方差函数**, 近似公式: 由知.

**3.平方检波**: Y 为零均值平稳高斯过程, . 则.

**傅里叶展开**: 周期2T的函数,, 其中. 为直流分量,|A(1)|为基波的振幅, |A(n)|为的振幅. Parsval 等式给出x(t)的**功率**为. **角频率**: , **线频率**.

**能量型信号**: 非周期总能量有限(则有频谱(). Parsval等式仍然成立.

**功率型信号**: 平均功率非无限

**利用傅里叶变换给出功率谱表达式**: 令, 则, 若**功率谱密度**存在, 则平均功率谱表达式

**平稳过程的功率谱密度**: 依然有和,

则X的**功率谱密度**, **平均功率** , 假定则可交换顺序得到**平均功率的谱表达式**:. **功率谱密度函数性质: (1). 非负,(2),偶函数(3).实值**

**半谱密度**:

**Wiener-Khintchine公式**: 假定

则, ; 而**都是偶函数**, 可以写成; **离散平稳序列(不同于平稳过程)**:. 若,则构成一对傅里叶变换(换成就行，是自相关函数)

**有理谱密度**: , 谱密度是的非负实值偶函数, 故. 应在可积, 从而不能有实根, 分母多项式次数至少比分子高2, .

**广义下**: 利用, 有**1**. ; **2**. ; **白噪声**(谱密度为常数),, 是理想化数学模型, 平均功率无穷是不可能做到的. 对平稳序列

**分布概率**: (1).**顺序统计量**: ; (2). **多元正态**: ; (3).**二元正态**:

**Gamma函数**; **Beta函数**

**三角函数相关**: ;

**和差化积:** ; ; ; ; **积化和差**: ; ; ; ;

**积分式**: ,

**留数定理**: , 若 , g是解析函数, 则; 若 R(x) 无实零点,

**留数计算**: , 特别当. (要求)

**留数积分**: **(1).** 有理函数, 多项式Q(x) 至少比P(x)高2次,Q(x)在实轴无零点,则; (2).有理函数, 多项式Q(x) 至少比P(x)高1次,Q(x)在实轴无零点,则;

**傅里叶变换**: ;

切比雪夫不等式: *,*其中

**Stirling公式**:

**协方差函数和功率谱密度函数对应关系**: :

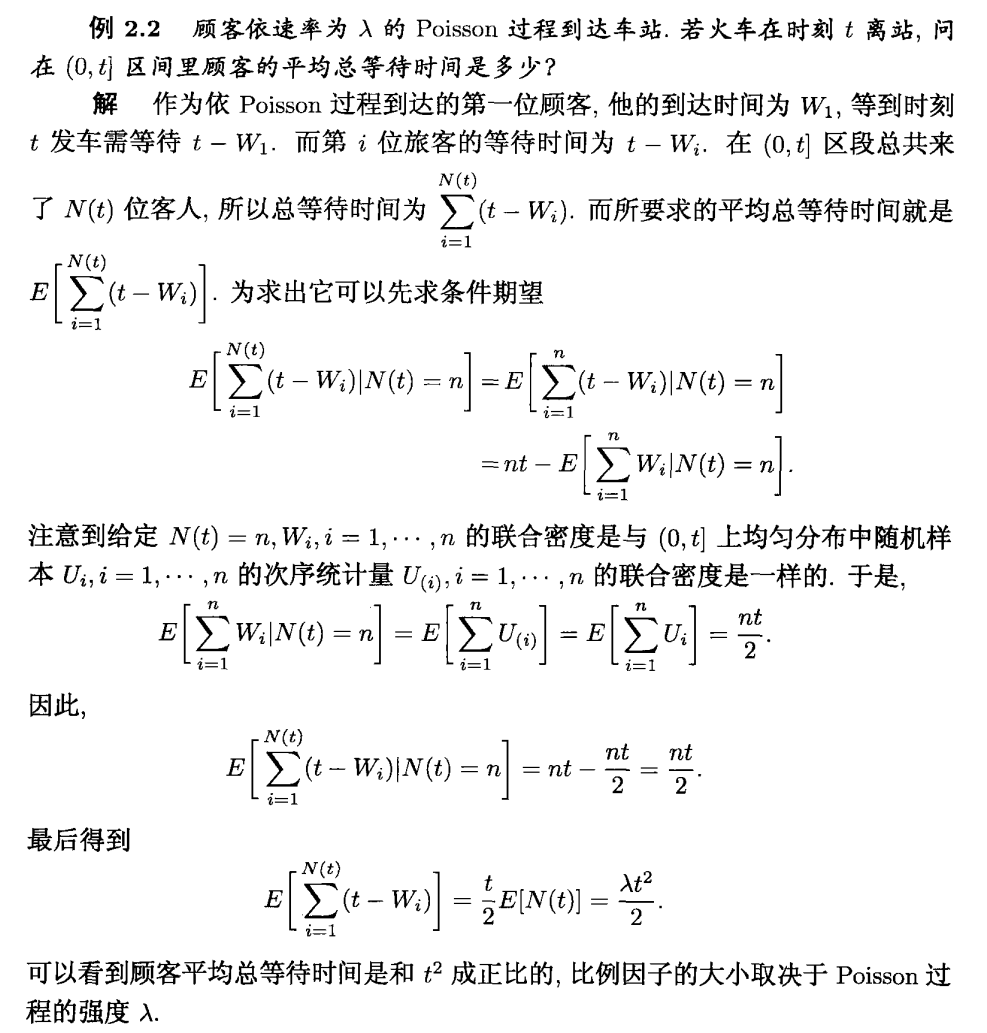
**(1)**. ; **(2)**.

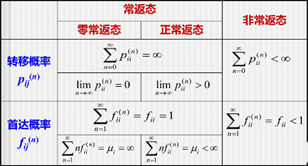
**(3).** ; **(4)**.

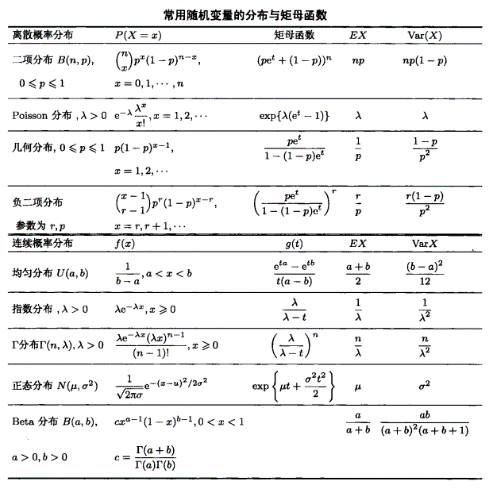
**(5)**. ; **(6)**.

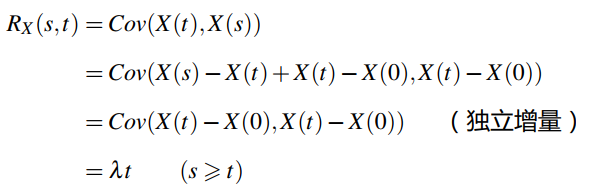
**(7)**.; **(8)**. . **(9)**.

**(10)**.



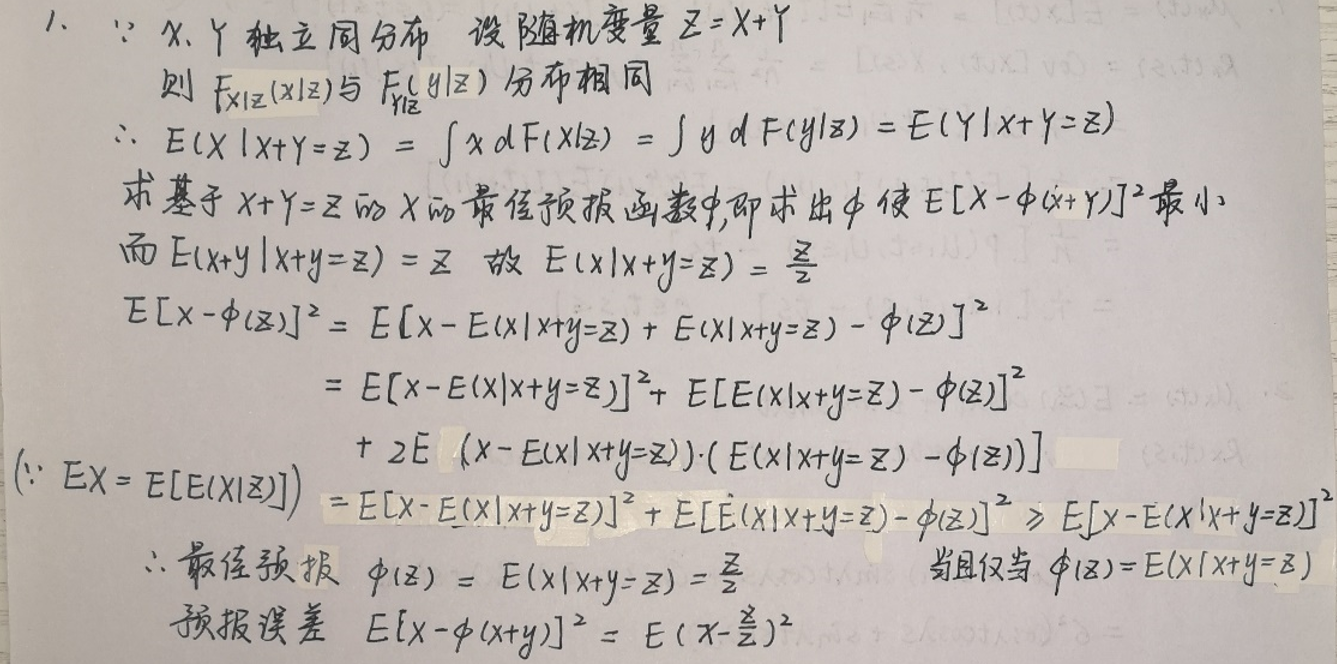






1.8

1.11



2.5

