Enoncé

EXERCICE N°1 (6 points)

Dans un plan orienté, on considère un carrée ABCD de centre O tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$. On désigne par I et J les milieux respectifs de [AB] et [BC].

1) a- Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et B sur D. Caractériser f.
b- Soit g l'antidéplacement qui envoie A sur C et B sur D. Déterminer (gof) (C) et (gof) (D). Caractériser gof.
c- Déduire la forme réduite de l'antidéplacement g.

2) Soit S la similitude directe qui envoie A sur B et D sur I.
a- Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S. Construire le centre Ω de S.
b- Déterminer les images des droites (AC) et (CD) par S. En déduire que le triangle OΩC est rectangle.
c- Déterminer l'image du carré ABCD par la similitude S.
d- Montrer que les points A, Ω et J sont alignés.

EXERCICE N°2 (4 points)

On dispose de deux dés en apparence identiques dont l'un est parfait et l'autre truqué. Les faces de chacun d'eux sont numérotées de 1 à 6.

Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir la face portant le chiffre 4 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

1) a- On lance le dé parfait trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où la face portant le chiffre 4 apparaît.
Quelle est la loi de probabilité de X ?
b- On lance le dé truqué trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 ?

2) On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on le lance trois fois de suite. On considère les événements suivants :
A : "obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4".
B : "choisir le dé truqué et obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4".
C : "choisir le dé parfait et obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4".
a- Calculer la probabilité de l'événement B.
b- Calculer la probabilité de l'événement C.
c- En déduire la probabilité de l'événement A.

PROBLEME (10 points)

A- 1) Soit la fonction φ définie sur IR par $\varphi(x) = e^x(2 - x) - 2$
a- Etudier les variations de φ .
b- Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet dans IR exactement deux solutions. On notera a la solution non nulle et on vérifiera que $1 < a < 2$.
c- En déduire le signe de $\varphi(x)$.

2) Soit f la fonction définie sur ℝ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a- Montrer que f est continue sur ℝ.

b- Monter que f est dérivable sur ℝ et que : Pour tout $x \in$ IR* on a : $f'(x) = \dfrac{x\,\varphi(x)}{(e^x - 1)^2}$

c- Montrer que $f(a) = a(2 - a)$.
d- Etudier les variations de f, puis construire la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
(pour la construction on prendra a = 1,6).

3) On considère la fonction F définie sur IR_+ par : $F(x) = \int_{Log2}^{x} t^2 e^{-t} dt$

a- Justifier l'existence de F(x) pour tout réel positif x.
b- Montrer que F est continue et strictement croissante sur l'intervalle I = [0, +□ [.
c- Donner la forme de l'intervalle F(I).

4) On considère la fonction G définie sur IR_+ par : $G(x) = \int_{Log2}^{x} t^2 e^{-t} dt$

a- Justifier l'existence de G(x) pour tout réel positif x.
b- A l'aide de deux intégrations par parties, calculer G(x) puis montrer que G admet une limite en +□ que l'on précisera.
c- Montrer que :
Pour tout $t \in [Log2, +\infty[$ on a $f(t) \leq 2t^2e^{-t}$
et en déduire qu'il existe un réel positif M tel que: Pour tout $x \in IR_+$ on a $F(x) \leq M$.
d- En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \leq M$

(Dans la suite du problème on posera $L = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$).

B- Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1) a- Montrer que pour tout réel positif x, on a :

$$\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} + e^{-2x} + ... + e^{-nx} + \frac{e^{-nx}}{e^x - 1}$$

b- Montrer que pour tout réel positif x, on a :

$$0 \leq \int_0^x f(t)e^{-nt}\, dt \leq \frac{a(2-a)}{n}$$

c- x étant un réel positif, calculer $I_n(x) = \int_0^x t^2 e^{-nt} dt$

d- Montrer que $I_n(x)$ admet une limite lorsque x tend vers +□.

2) a- Montrer que pour tout réel positif x, on a : $\sum\limits_{k=1}^{n} I_k(x) = F(x) - \int_0^x f(t)e^{-nt} dt$

En déduire que la fonction H_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $H_n(x) = \int_0^x f(t)e^{-nt} dt$ admet une limite ℓ_n, lorsque x tend vers $+\infty$, vérifiant : $L - \ell_n = 2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^3}\right)$

b- En utilisant le résultat établi à la question B 1) b-, montrer que la suite $(\ell_n)_{n \in IN^*}$. converge vers 0.

c- Soit $(u_n)_{n \in IN^*}$ la suite définie par : $u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{n^3}$

Montrer que cette suite convergente et a pour limite le réel L' tel que L = 2 L'.