Enoncé

EXERCICE N°1 (6points)

Dans le plan orienté, ABC est un triangle quelconque de sens direct.
I et J sont les milieux respectifs des côtés [BC] et [AB] .
r est la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$

A' et C' sont les images respectives des points A et C par r.

s est la similitude directe qui transforme le point I en C' et le point J en A'. On pose $h = r^{-1}os$.

1) a - Déterminer les images respectives des points I et J par h.
   b - En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h .
2) a - Montrer que (IJ) est perpendiculaire à (A'C') et que A'C' = 2 IJ.
   b - Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s et construire son centre ω .
   c- B' étant le symétrique du point A' par rapport à J, montrer que (ωB) est perpendiculaire à (ωB').

EXERCICE N°2 (4points)

Une urne contient cinq boules blanches, deux boules rouges et trois boules vertes indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément trois boules de l'urne.
   Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : obtenir trois boules de même couleur
   B : Obtenir au moins une boule rouge.
2) On effectue maintenant un tirage successif de deux boules de la manière suivante :
   On tire une première boule :
   Si elle est blanche, on la remet dans l'urne et on effectue le deuxième tirage.
   Si elle n'est pas blanche, on la garde à l'extérieur de l'urne et on effectue le deuxième tirage.
   On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout résultat, associe le nombre de boules rouges.
   Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

PROBLEME (10points)

A - Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par: $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x} - x$.

1) Etudier les variations de f.
2) Montrer qu'il existe un réel unique α appartenant à l'intervalle]Log2,1[tel que $f(\alpha) = 0$.
3) Tracer la courbe représentative (C) de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

B - Soit g une fonction numérique à variable réelle définie et dérivable sur un intervalle [a, b]. On suppose de plus que g' est continue sur l'intervalle [a, b] et qu'elle est dérivable sur]a, b[.
On définit alors la fonction φ sur [a,b] par :

$$\varphi(x)=g(b)-g(x)-(b-x)g'(x).\frac{[g(b)-g(a)-(b-a)g'(x)]}{(b-a)^2}(b-x)^2$$

1) Ecrire l'expression de $\varphi'(x)$ pour tout x élément de]a, b[.
2) a - Vérifier que φ(a) = φ(b) = 0.
   b - En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel c élément de]a, b[tel que φ'(c) = 0.
3) Déduire de ce qui précède que le réel c vérifie : $g(b)=g(a)+(b-a)g'(a)+[(b-a)^2g''(c)]/2$

C - Soit h la restriction de la fonction f à l'intervalle [Log2,1]
(f étant la fonction définie dans la partie A du problème).

1) Vérifier que : Pour tout $x \in$]Log 2, 1[on a, h'(x) < 0 et h "(x) > 0.
2) Soit t un réel appartenant à l'intervalle]log2, α[(où α est le réel défini à la deuxième question de la partie A) et soit M le point de coordonnées $(t, h(t))$.

La tangente en M à la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse t'.

a- Montrer que $t'=t-[h(t)/h'(t)]$

b - En appliquant le résultat établi à la 3ème question de la partie B, montrer qu'il existe un réel K appartenant à l'intervalle $]t,\alpha[$ tel que

c - Déduire de ce qui précède, que t' appartient à l'intervalle $]\mathrm{Log}2, \alpha[$.

3) Soit x_o un réel appartenant à l'intervalle $]\mathrm{Log}2,\alpha[$, on définit la suite (x_n) par : pour tout entier naturel n

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$$

$$t' = \alpha + \frac{(\alpha - t)^2 h''(k)}{2h'(t)}$$

a- Montrer que : Pour tout entier n, x_n appartient à l'intervalle $]\mathrm{Log}2, \alpha[$.

b- Montrer que la suite (x_n) est convergente et calculer sa limite.

4) a- En remarquant que pour tout entier naturel n on a :

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha + \frac{h(\alpha) - h(x_n)}{h'(x_n)}$$

montrer que : pour tout $n \in$ IN, il existe $c_n \in \left]x_n, \alpha\right[$ tel que :

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{h''(c_n)}{2h'(x_n)}(x_n - \alpha)^2$$

b- En étudiant les variations des fonctions h' et h" sur l'intervalle $[\mathrm{Log}2, 1]$, montrer pour tout n, on a

$$\left|\frac{h''(c_n)}{2h'(x_n)}\right| < 1$$

c- En déduire que : pour tout $n \in$ IN, $|x_{n+1} - \alpha| < (x_n - \alpha)^2$

5) En remarquant que $|x_n-\alpha|<31.10^{-2}$, déterminer un entier naturel n_0 tel que Pour tout $n > n_0$, on a $|x_n-\alpha|<10^{-5}$