# REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ����

## EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION 2015

Section: Mathématiques

Epreuve: MATHEMATIQUES

Durée: 4 H

Coefficient: 4

Session principale

#### Exercice 1 (5 points)

- 1) a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E):  $z^2 2z + 4 = 0$ .
  - b) Déterminer une écriture exponentielle de chacune des solutions de (E).
- 2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère le cercle  $(\Gamma)$  de centre O et de rayon 2 et le point A d'affixe 2.

Placer les points B et C d'affixes respectives  $2e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .

3) Soit  $\theta \in ]-\pi,\pi]$  et M le point du cercle ( $\Gamma$ ) d'affixe  $2e^{i\theta}$ .

On désigne par N le point de  $(\Gamma)$  tel que  $(\overline{\widetilde{OM}}, \overline{\widetilde{ON}}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ . Justifier que N a pour affixe  $2e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}$ .

- 4) Soit r la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .
  - a) Vérifier que la rotation r a pour expression complexe :  $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ .
  - b) Soit F et K les milieux respectifs des segments [BM] et [CN]. Montrer que r(F) = K.
  - c) En déduire la nature du triangle AFK.
- 5) a) Montrer que AF<sup>2</sup> =  $4 2\sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ .
  - b) En déduire l'affixe du point M pour laquelle AF est maximale et construire le triangle AFK correspondant.

#### Exercice 2 (4 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que  $\left(\widehat{\overline{AB}}, \widehat{\overline{AC}}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$  et  $\left(\widehat{\overline{BC}}, \widehat{\overline{BA}}\right) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ .

1) Soit f la similitude directe de centre A qui envoie B sur C. Déterminer l'angle et le rapport de f.

- 2) Soit g la similitude indirecte de centre A qui envoie C sur B.
  - a) Déterminer le rapport de g.
  - b) Déterminer l'axe Δ de g.
  - c) Soit D le point défini par  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$ .

Montrer que g(B) = D et en déduire que [BD) est la bissectrice intérieure de l'angle ABC

- 3) a) Montrer que fog est une symétrie axiale et préciser son axe.
  - b) On pose D'=f(D). Montrer que D' est le symétrique de B par rapport à A.
- 4) La bissectrice intérieure de l'angle  $\widehat{CAD}'$  coupe la droite (CD') en un point J. Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. Déterminer f(I).

#### Exercice 3 (4points)

- 1) On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E): 47x+53y=1.
  - a) Vérifier que (-9,8) est une solution de (E).
  - b) Résoudre l'équation (E).
  - c) Déterminer l'ensemble des inverses de 47 modulo 53.
  - d) En déduire que 44 est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53.
- 2) a) Justifier que  $45^{52} \equiv 1 \pmod{53}$ .
  - b)Déterminer alors le reste de 45<sup>106</sup> modulo 53.
- 3) Soit  $N = 1 + 45 + 45^2 + ... + 45^{105} = \sum_{k=0}^{k=105} 45^k$ .
  - a) Montrer que  $44 N \equiv 10 \pmod{53}$ .
  - b) En déduire le reste de N modulo 53.

#### Exercice 4 (7 points)

I- Soit f la fonction définie sur  $[0,\pi]$  par  $f(x) = e^{\sin x}$ .

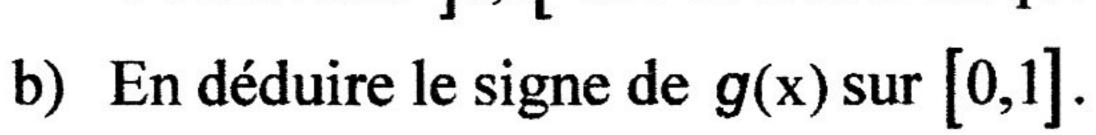
On désigne par  $(C_f)$  la courbe représentative de f dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

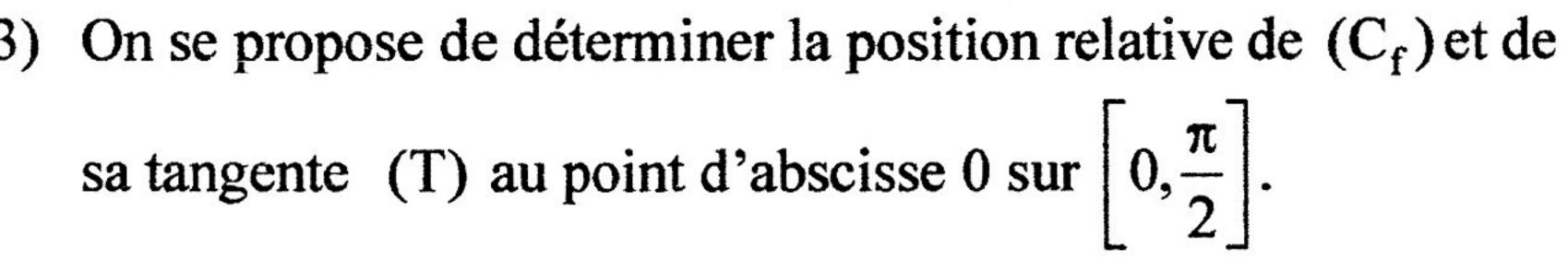
- 1) a) Déterminer la dérivée f'et dresser le tableau de variation de f sur  $[0, \pi]$ .
  - b) Montrer que la droite  $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$  est un axe de symétrie de la courbe  $(C_f)$ .
  - c) Soit (T) la tangente à ( $C_f$ ) au point d'abscisse 0. Justifier que (T) a pour équation y = x + 1.

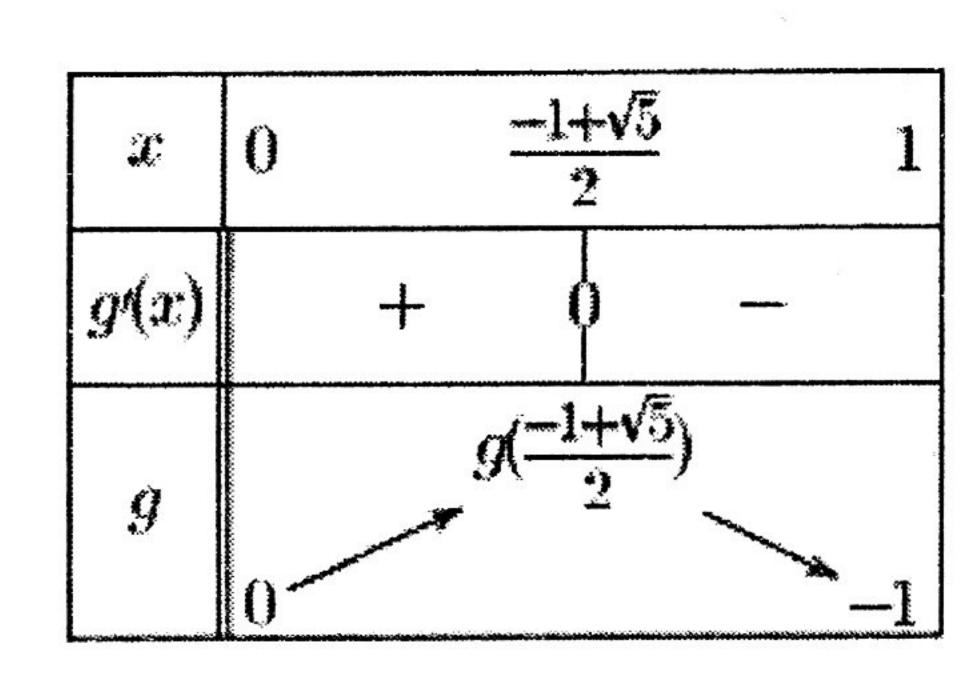
Soit la fonction g définie sur [0,1] par  $g(x) = e^x \sqrt{1-x^2-1}$ .

On donne ci-contre le tableau de variation de g

a) Justifier que l'équation g(x) = 0 admet dans l'intervalle [0,1] une solution unique  $\alpha$ .







Soit la fonction h définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par  $h(x) = e^{\sin x} - (x+1)$ .

- a) Vérifier que pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $h'(x) = g(\sin x)$ .
- b) Montrer qu'il existe un unique réel  $\beta$  dans  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  tel que sin  $\beta = \alpha$ .
- c) Déterminer alors l'image par la fonction sinus de chacun des intervalles  $[0,\beta]$  et  $\left[\beta,\frac{\pi}{2}\right]$ .
- d) Dresser le tableau de variation de h.
- e) En déduire que pour tout x de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $f(x) \ge x + 1$ . Conclure.

II

- 1) a) Montrer que pour tout réel  $x \ge 0$ ,  $\sin x \le x$ .
  - b) Déduire alors que pour tout réel  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $f(x) \le e^x$ .
  - c) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé la courbe de la fonction  $x\mapsto e^x$ . Tracer la droite (T) et la courbe ( $C_f$ ).

2) a) Montrer que 
$$\int_0^1 f(x) dx \le e^{-1}$$
 et que  $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \le e^{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}$ .

b) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $(C_f)$ , l'axe  $(O, \vec{i})$  et les droites d'équations x = 0 et  $x = \pi$ . Montrer que  $\frac{\pi^2}{4} + \pi \le A \le e\pi - 2$ .

### Annexe (à rendre avec la copie)

