Enoncé

EXERCICE N° 1 (5 points)

Dans le plan P orienté, on considère un rectangle ABCD tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et AB = 2 AD. On désigne par I le milieu de [AB] , O le milieu de [BD] et par (C) le cercle circonscrit au rectangle ABCD .

Soit f la similitude directe qui transforme B en I et I en D .

1) Montrer que le rapport de f est $\sqrt{2}$ et que $-\frac{\pi}{4}$ est une mesure de son angle .

2) Soit s la similitude directe de centre C de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

a) Montrer que s (B) = I .
b) Montrer que f o s^{-1} = id_P , où id_P est l'application identique du plan .
c) En déduire que f = s .

3) Soit A' = f(A) . Montrer que D est le milieu de [A'I] . Construire alors le point A' .

4) La demi-droite [CA') recoupe (C) en O' .

a) Calculer CO' et CA' en fonction de CA .

b) En déduire que O' est le milieu de [CA'] .

c) Prouver alors que O' = f(O) .

EXERCICE N° 2 (5 points)

Un sac contient deux boîtes B_1 et B_2 indiscernables au toucher .

La boîte B_1 contient deux boules rouges et une boule noire.

La boîte B_2 contient deux boules rouges et deux boules noires .Toutes les boules sont indiscernables au toucher .

Une épreuve consiste à tirer du sac, au hasard, l'une des deux boîtes puis de tirer, au hasard et simultanément, deux boules de cette boîte .

Soit A, l'évènement : « obtenir deux boules de même couleur » et E, l'évènement : « les deux boules tirées sont de B_1 » .

1) a) Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à $\frac{1}{3}$.

b) Sachant que les deux boules tirées sont de même couleur, quelle est la probabilité pour qu'elles aient été tirées de B_1 ?

2) On répète l'épreuve n fois, en remettant chaque fois, les deux boules tirées dans leur boîte et la boîte tirée dans le sac. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 .
Soit X l'aléa numérique qui prend pour valeur le nombre de fois où on obtient deux boules de même couleur .
a) k étant un entier naturel inférieur ou égal à n, calculer P(X = k).
b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
c) On désigne par p_n la probabilité d'obtenir, au bout des n tirages, au mois une fois deux boules de même couleur . Calculer p_n en fonction n . Quelle est la limite de p_n lorsque $n \to +\infty$?

PROBLEME (10 points)

Dans tout le problème la lettre P désigne un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I – 1) On considère la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x \operatorname{Log} x - x + 1$.

a) Etudier les variations de g

b) En déduire le signe de g(x) pour $x \in [1, +\infty[$.

2) Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-1}{\operatorname{Log} x} & \text{si } x \in]1, +\infty[\\ f(1) = 1 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 1 .

3) a) Montrer que pour tout réel t de $[1, +\infty[$ on a :

$$t - 1 - (t-1)^2 \leq 1 - \frac{1}{t} \leq t - 1$$

b) En déduire que pour tout x de $[1, +\infty[$ on a :

$$\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} \leq x - 1 - \operatorname{Log} x \leq \frac{(x-1)^2}{2}$$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x - 1 - \operatorname{Log} x}{(x-1)^2}$

d) En déduire que f est dérivable à droite en 1 et que $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

4) a) Dresser le tableau de variation de la fonction f

b) Tracer la courbe représentative C de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On précisera la nature de la branche infinie de C .)

II – On considère la fonction F définie sur $[1, +\infty[$ par

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\operatorname{Log} t}\, dt & \text{si } x \in]1, +\infty[\\ F(1) = \operatorname{Log} 2 \end{cases}$$

On désigne par C' la courbe représentative de la fonction F dans le plan P .

1) a) Montrer que pour tout x de $]1, +\infty[$ on a $\dfrac{x^2 - x}{\operatorname{Log} x^2} \leq F(x) \leq \dfrac{x^2 - x}{\operatorname{Log} x}$

b) En déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x}$

2) a) Montrer que pour tout x de $]1, +\infty[$ et pour tout t de $[x, x^2]$ on a :

$$\frac{x}{t\,\mathrm{Log}\,t} \leq \frac{1}{\mathrm{Log}\,t} \leq \frac{x^2}{t\,\mathrm{Log}\,t}$$

b) En déduire que pour tout x de $]1, +\infty[$ on a : $x\,\mathrm{Log}\,2 \leq F(x) \leq x^2\,\mathrm{Log}\,2$

c) Montrer alors que F est continue en 1.

3) a) Montrer que pour tout x de $]1, +\infty[$, F est dérivable et que $F'(x) = f(x)$.

b) Soit x un réel de $]1, +\infty[$. Montrer qu'il existe un réel c de $]1, x[$ tel que :

$$F(x) - F(1) = (x-1)\,F'(c)$$

c) En déduire que F est dérivable à droite en 1 et que $F'(1) = 1$

4) Dresser le tableau de variation de F et tracer la courbe représentative C' de F.
(On précisera la nature de la branche infinie de C .)

III – Soit α un réel de $]1, +\infty[$ et $A(\alpha)$ l'aire de la région du plan P délimitée par la courbeC et les droites d'équations respectives : $y = 0$, $x = 1$ et $x = \alpha$

1) Montrer que pour tout x de $]1, +\infty[$ on a :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt + \mathrm{Log}\,2$$

2) En déduire : $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \dfrac{\mathscr{A}(\alpha)}{\alpha}$ et $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \dfrac{\mathscr{A}(\alpha)}{\alpha^2}$