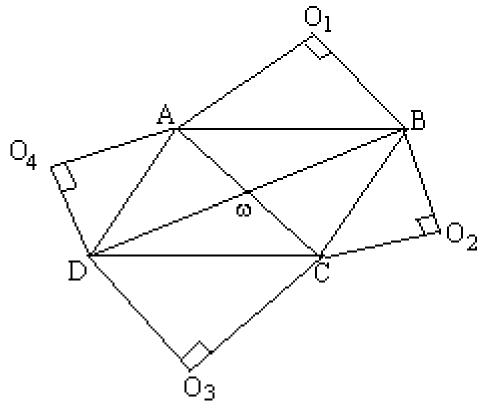
Enoncé

EXERCICE N°1 (6 points)

Dans la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme de centre ω et les triangles ABO_1, BCO_2, CDO_3 et DAO_4 sont des triangles rectangles isocèles de sommets principaux respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4. On suppose que le plan est orienté et que $(\widehat{\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1B}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On désigne par R_1, R_2, R_3 et R_4 les rotations d'angle P/2 et de centre respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4.



1) a- Déterminer $(R_2 o R_1)$ (A) ; $(R_3 o R_2)$(B) et $(R_4 o R_3)$(C).
   b- Montrer que les applications $R_2 0 R_1$, $R_3 o R_2$, $R_4 o R_3$ sont toutes les trois égales à une même application que l'on déterminera et que l'on désigne par f.
2) a- Montrer que $R_3(R_2(O_1))=R_2(O_1)$ et déterminer $f(O_1)$
   b- Montrer que $f(O_2)=O_4$.
   c- Quelle est la nature du quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$?
3) Soit Δ la médiatrice du segment [AB] et S_Δ la symétrie orthogonale d'axe Δ. On pose $g=R_2 o S_\Delta$.
   a- Déterminer g(A) et $g(O_1)$
   b- Montrer que g n'est pas une symétrie axiale et en déduire la nature de g.
   c- Construire le point ω'=g(ω). Déterminer les éléments caractéristiques de g.

EXERCICE N°2 (4 points)

Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher. Deux boules sont blanches et portent respectivement les nombres 1 et 2, les deux autres boules sont noires et portent respectivement les nombres 1 et 2.
Une épreuve consiste à tirer successivement deux boules de la manière suivante : on tire une première boule

- Si elle est blanche, on la remet dans l'urne et on tire une deuxième boule.
- Si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne et on tire une deuxième boule.

1) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque épreuve, associe le nombre de fois où l'on obtient une boule blanche.
   a- Donner la loi de probabilité de X
   b- Calculer son espérance mathématique.
2) Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque épreuve, associe le produit des nombres marqués sur les deux boules obtenues. Donner la loi de probabilité de Y.

PROBLEME (10 points)

A- Soit f la fonction définie sur]0,+∞[par $f(x)=\text{Log}(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^2}$.

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2) a- Montrer qu'il existe un réel α unique tel que : 0<α<1 et f(α)=0
   b- En déduire le signe de f(x) pour x≥α.
3) Soit un réel λ tel que α≤λ. On désigne par A(λ) l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et la droite d'équation x=λ.
   a- Calculer A(λ)
   b- Trouver la limite de A(λ) lorsque λ tend vers +∞.

B- Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On se propose de déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$

1) Démontrer, en utilisant les variations de la fonction f, que :

   $\text{Log}\,(n+1) - \text{Log}\,n \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{4n^2}$

   et en déduire que : $(1+\dfrac{1}{n})^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$

2) Démontrer alors que : $u_{n+1} \leq u_n\, e^{-\frac{1}{4n}}$

   et en déduire que : $u_{n+1} \leq u_1\, e^{-\frac{1}{4}\sum_{1}^{n}\frac{1}{k}}$

3) Démontrer en utilisant la relation (1) de la première question de la partie B du problème, que :

   $\text{Log}(n+1) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$

   et en déduire que : $u_{n+1} \leq u_1 e^{-\frac{1}{4}\text{Log}(n+1)}$

4) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.