Enoncé

EXERCICE N°1 (5 points)

Dans le plan orienté, ABI est un triangle équilatéral tel que :

$$(\widehat{\vec{AB}, \vec{AI}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

Soit Ω le symétrique de B par rapport à (AI).

1) Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en I.
   a- Montrer que Ω est le centre de cette rotation.
   b- Soit C=R(B). Montrer que I est le milieu du segment [AC].

2) A out point M de [AB] distinct de A et de B, on associe le point M' de [IC] tel que AM=IM'.
   Montrer que ΩMM' est équilatéral.
3) Soit G le centre d gravité du triangle ΩMM' et S la similitude directe de centre Ω qui transforme M en G.
   a- Préciser le rapport et l'angle de cette similitude.
   b- Montrer que S(B)=I et construire le point A'(S(A).
   c- Montrer que les points I, G et A' sont alignés.

EXERCICE N°2 (5 points)

Soit u un nombre complexe et (E_u) l'équation :
$$z^2 - (2u - i\bar{u})z - 2iu.\bar{u} = 0$$

$\bar{u}$ étant le nombre conjugué de u.

1) Résoudre, dans ℂ des nombres complexes, l'équation (E_u). On désignera par z' et z'' les solutions de cette équation.

2) On rapporte le plan à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ et on désigne par A, M, M' et M'' les points d'affixes respectives 2i, u, z' et z''.
   Soit $(\aleph)$ l'ensemble des points M tels que les points A, M' et M'' soient alignés.
   a- Trouver une équation cartésienne de $(\aleph)$.
   b- Montrer que l'ensemble $(\aleph)$ est une hyperbole dont on précisera le centre, les sommets, les foyers et les asymptotes.
   c- Vérifier que $(\aleph)$ passe par le point O et donner une équation cartésienne de la tangente à $(\aleph)$ en O.
   d- Tracer $(\aleph)$.

PROBLEME (10 points)

A- Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie sur IR par :
$$f(x) = \text{Log}(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\ ).$$

1) a- Montrer que la fonction f est impaire.
   b- Montrer que f est dérivable sur IR et vérifier que $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$.

2) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   a- Etudier les branches infinies de la courbe (C).
   b- Trouver une équation cartésienne de la tangente Δ à (C) en O.
   c- Préciser la position de Δ par rapport à (C).
   d- Tracer la droite Δ et la courbe (C).

3) Soit a un réel strictement positif ; calculer en fonction de a, l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives x=0, y=0 et x=a.

B-1) a- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur un domaine I que l'on précisera.

b- Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C') représentative de g.

c- Montrer que, pour tout $x \in I$, on a : $g(x)=\frac{1}{4}(e^{x}-e^{-x})$.

2) a- Montrer que l'équation g(x)=x admet, dans IR_{+}^{*}, une seule solution α et que $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b- Calculer, en fonction de α l'aire A, du domaine limité par les deux courbes (C) et (C') et situé dans le demi-plan x≥0.

C- On considère la fonction φ définie sur IR par :

$$\varphi(x)=\frac{g(x)}{g'(x)}$$

1)

a- Montrer que φ est une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

b- On pose $h=\varphi^{-1}$. Donner les expressions de h(x) et h'(x) pour tout $x \in J$.

2) On pose, pour tout $x \in [0,1[$ et pour tout $n \in N^*$.

$$S_n(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

a- Montrer que $S_n(x)=h(x)-\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}\,dt$

b- En déduire la limite, quand n tend vers +∞, de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)3^{2n-1}}\ .$$