Enoncé

EXERCICE N° 1 (6 points)

Soit une droite fixe D et un point fixe A n'appartenant pas à la droite D. On construit le cercle ($\mathcal{C}$) de centre A et tangent à la droite D.

1) Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite D et F un point variable sur ($\mathcal{C}$) -{H}.

a- Vérifier que le point F est le foyer d'une parabole P ayant pour directrice la droite D et passant par le point A.

b- Préciser le point F_o foyer de la parabole P qui admet A pour sommet.

2) On désigne par (F) la famille des paraboles de directrice commune D et passant par A. Soit P et P' deux paraboles de la famille (F) de foyers respectifs F et F'.

c- Montrer que si F et F' sont diamétralement opposés sur le cercle ($\mathcal{C}$) alors les tangentes en A à P et P' sont perpendiculaires.

d- Etudier la réciproque.

3) On fait varier le point F sur $\mathcal{C}$ -{H,F_0}et on désigne par B le deuxième point d'intersection de la parabole P de foyer F et de directrice D avec la droite (FA).

a- Montrer que le point B varie sur une parabole (F) dont on précisera le foyer et la directrice.

b- Montrer que les paraboles P et (F) ont même tangente en B.

EXERCICE N° 2 (4 points)

Dans l'espace orienté, on considère un carré ABCD et on désigne par E le milieu de [AB], par F celui de [CD] et par E' un point, distinct de E, tel que (EE') soit perpendiculaire au plan P du carré ABCD.

Soit O le milieu de [E'F].

1) On note Q le plan (EE'F) et on pose :

f =S_QoS_P où S_Q est la réflexion de plan Q et S_P la réflexion de plan P.

Préciser la nature de f et la caractériser.

2) Soit Δ la droite passant par le point O et parallèle à la droite (EF) et g le demi-tour d'axe Δ

Déterminer le plan P' tel que : g=$S_{P'}$oS_Q.

Où $S_{P'}$ est la réflexion de plan P'.

3) Soit h=gof

Préciser la nature de l'application h et la caractériser.

PROBLEME (10 points)

Dans tout le problème, P désigne un plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

On pose D=]-∞ ,-1[∪ [0,+ ∞ [et D* =]-∞ ,-1[∪]0,+ ∞ [.

A- Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x\mathrm{Log}(1+\frac{1}{x}) \text{ si } x\in D^* \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) a - Montrer que f est continue à droite en 0.

b- Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a- Montrer que f est dérivable sur D* et calculer f'(x) pour x □ D* .

b- Etudier les variations de la fonction f' sur D* . En déduire que f'(x)>0 pour tout x de D *.

c- Dresser le tableau de variation de la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan P.

3) Soit α un nombre réel vérifiant : 0<α <1

a- Calculer l'aire A(α) de la région du plan délimitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives y=0, x=α et x=1.

b- Calculer $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} A(\alpha)$

B- Soit Δ la droite d'équation x= $-\frac{1}{2}$

1) Tracer, dans le plan P, la courbe (C') déduite de la courbe (C) par la symétrie orthogonale $S_{□}$ d'axe Δ .

2) Soit M(x,y) et M'(x',y') deux points du plan P.

b- Montrer que M'=$S_{□}$ (M) si et seulement si $\begin{cases} x' = -x-1 \\ y' = y \end{cases}$

c- Soit x ∈ D* et M(x,y) un point du plan P. Vérifier que (-x-1)∈ D* et montrer que M est un point de (C') si et seulement si y =f(-x-1).

d- On désigne par g la fonction admettant (C') comme courbe représentative. Montrer que pour tout x de D* on a : $g(x)=(x+1)\mathrm{Log}(1+\frac{1}{x})$

C- 1) Justifier que pour tout n de IN*, $f(n)<1<g(n)$.

2) Soit (u_n) et (v_n) les suites définies sur IN* par :

$u_n=(1+\frac{1}{n})^n$ et $v_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$

a- Montrer que pour tout n de IN*, $u_n<e<v_n$.

b- Montrer que pour tout n de IN*, $v_n-u_n<\frac{e}{n}$

c- Déduire des questions précédentes la limite de u_n puis celle de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.