REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ******* **EXAMEN** **DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2001**	**SECTION MATHEMATIQUES** **EPREUVE : MATHEMATIQUES** **Durée : 4 heures** **Coef. : 4**

Il sera donné une grande importance à la rédaction et à la présentation de la copie.

EXERCICE N° 1 (5 points)

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives a et1 où a est un nombre complexe donné différent de 1.

Soit f l'application de $P \setminus \{B\}$ dans P qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{z - a}{z - 1}$.

1°) Montrer que les affies des points invariants par f sont les solutions de l'équation .

$$E : z^2 - 2z + a = 0$$

2°) a) On suppose que $a = 1 + 2^{i\theta}$ où $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$. Résoudre l'équation E.

b) Mettre sous forme trigonométrique chacune des solutions de E.

3°) Dans cette question on suppose que a = - 1

Soit M un point de $P \setminus \{B\}$ d'affixe z et M' le point d'affixe $z' = f(z)$

a) Montrer que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM'}}\right) \equiv 0\ (2\pi)$

En déduire que la demi-droite [BA) est une bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'})$

b) Montrer que z' est imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$

c) En déduire la construction du point M' image d'un point M du cercle trigonométrique privé du point B.

EXERCICE N° 2 (5 points)

Soient F et H deux points distincts, Δ la médiatrice de [FH] et J le milieu de [FH].

Soit M un point de Δ et D la droite passant par H et perpendiculaire à la droite (MH).

On désigne par P la parabole de foyer F et de directrice D.

1) a) Montrer que Δ est la tangente à P au point M

b) Vérifier que les droites D et Δ sont parallèles si et seulement si M = J

2) Dans le cas où le point M est différent de J, la droite D coupe Δ en I. Soit E le symétrique de H par rapport à I et Δ' la perpendiculaire à Δ en I.

a) Montrer que Δ' est tangente à la parabole P.

b) Contruire le point de contact N de la parabole P et de la droite Δ' et montrer que les points M, F, et N sont alignés.

3) a) Soit S le sommet de la parabole P. Montrer que le point J appartient à la tangente au sommet à la parabole P et déduire que S appartient au cercle C de diamètre [FJ].

b) Soit R un point de C distinct de F. Montrer que la parabole de foyer F et de sommet R est tangente à Δ en un point que l'on déterminera (Il est conseillé de faire une figure séparée pour cette question).

c) Déterminer alors l'ensemble des points S quand le point M varie sur Δ.

PROBLÈME (10 points)

I- Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \dfrac{2}{e^{x} + e^{-x}}$ et soit C sa courbe réprésentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Etudier les variations de la fonction f.

En déduire que pour tout x de IR on a : $0 < f(x) \leq 1$.

b) Tracer la courbe C.

2) On considère la fonction g définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \text{Log}(\text{tg}\, x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer g'(x) pour x appartenant à $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que g admet une fonction réciproque h définie sur IR. Calculer h (0) .

c) Montrer que h est dérivable sur IR et que pour tout x de IR, $2h'(x) = f(x)$.

En déduire que pour tout x de IR, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = 2h(x) - \frac{\pi}{2}$.

II - Soit n un entier naturel non nul et F_n la fonction définie sur [0, + ∞] par $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x f^n(t)\,dt$.

1) a) Calculer $F_1(x)$ en fonction de h(x) et montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F_1(x) = \frac{\pi}{2}$

b) Soit K la fonction définie sur IR par $K(t) = \dfrac{e^{t} - e^{-t}}{e^{t} + e^{-t}}$ Montrer que $K'(t) = f^2(t)$.

Calculer alors $F_2(x)$ et monter que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F_2(x) = 1$.

2) a) Monter que l'image de l'intervalle [0, + ∞] par F_n est l'intervalle $\left[0, \displaystyle\lim_{x \to +\infty} F_n(x)\right[$.

b) Vérifier que pour tout réel t positif ou nul on a $f(t) < 2\,e^{-t}$.

En déduire, en utilisant **I -1) a)**, que pour tout x de $[0, +\infty[$ on a $F_n(x) \leq 2$ et que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F_n(x)$ est finie.

c) Vérifier que pour tout réel t positif ou nul, on a $f(t) \geq e^{-t}$.

Montrer alors que pour tout réel x positif, on a $\dfrac{1 - e^{-nx}}{n} \leq F_n(x)$

et en déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)$ est non nulle.

3) Soit la suite (u_n) définie sur IN* par $u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)$

a) Donner la valeur de u_1 et la valeur de u_2.

b) En remarquant que $4 - (e^t + e^{-t})^2 = -(e^t - e^{-t})^2$, montrer que pour tout n de IN* et tout t de $[0, +\infty[$ on a $f^{n-1}(t)\, f'(t)\, K(t) = f^{n+2}(t) - f^n(t)$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que tout n de IN* et tout x de $[0, +\infty[$, on :

$$\int_0^x f^{n-1}(t)\, f'(t)\, K(t)\, dt = \frac{1}{n} K(x)\, f^n(x) - \frac{1}{n} \int_0^x f^{n+2}(t)\, dt.$$

d) En déduire que pour tout n de IN* et tout x de $[0, +\infty[$, on a :

$$(n + 1)\, F_{n+2}(x) - n\, F_n(x) = K(x)\, f^n(x)$$

Montrer alors que $u_{n+2} = \dfrac{n}{n+1} u_n$

4) a) Soit n un entier naturel. Déterminer, en fonction de n, les deux termes u_{2n+1} et u_{2n+2}

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante .

c) Montrer que pour tout n de IN on a : $\dfrac{2n}{2n+1} \leq \dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} \leq 1$

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}$

d) Montrer alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\left(\dfrac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}{3 \times 5 \times \dots \times (2n - 1)} \right)^2 \times \dfrac{2}{2n + 1} \right] = \pi$