Enoncé

EXERCICE N° 1 : (6 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) .
Soit Δ la droite d'équation x = 2 et A le point d'affixe 2 .

1) Vérifier que Δ est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $4 - z - \bar{z} = 0$

2) Soit j l'application de P \ Δ dans P , qui à tout point M d'affixe z associe le point M'

d'affixe $z' = \dfrac{4 - z\bar{z}}{4 - z - \bar{z}}$

a - Montrer que z' est un nombre réel .

b - Déterminer l'ensemble (Γ) des points M (z) tel que z' = k où k est un réel donné différent de 2 .

3) a - Montrer que pour tout nombre complexe z tel que Re(z) $\neq$ 2 on a : $|z' - z| = |z' - 2|$

b - En déduire que pour tout point M de P \ Δ , le point M' est l'intersection de la médiatrice de [AM] avec l'axe des abscisses .

4) Soit D la droite d'équation x = 3 .

Pour tout point M de D on désigne par M' le point j (M) et par M '' le symétrique de M' par rapport à (AM).

Montrer que M'' appartient à une parabole de foyer A et dont on précisera la directrice .

EXERCICE N° 2 : (4 points)

Dans le plan orienté , on considère un triangle rectangle ABC tel que

$(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{2} (2\pi)$ et AB = 2 AC .

Soient D et D' deux droites parallèles passant respectivement par B et C et ne contenant aucun des côtés du triangle ABC .

Soit Δ la droite passant par A et perpendiculaire à D et D' .

La droite Δ coupe les droites D et D' respectivement en I et J .

1) Soit S la similitude directe qui transforme A en B et C en A .

a - Déterminer l'angle et le rapport de S .

b - Soit Ω le centre de S .

Montrer que Ω est le projeté orthogonal de A sur (BC) .

2) a - Déterminer S(D') et S(Δ)

b - En déduire S(J)

c - Montrer que le cercle de diamètre [IJ] passe par Ω .

PROBLEME : (10 points)

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul . On considère la fonction f_n définie sur $[\ 0\ , +\infty\ [$ par : $f_n(x) = x^n e^{-nx}$.

On appelle C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé ($O, \vec{i}, \vec{j}$) (unité graphique : 3 cm)

A - 1) a - Dresser le tableau de variation de la fonction f_n .

b - Déterminer la position relative des courbes C_n et C_{n+1} .

2) a - Tracer C_1 et C_2 en précisant les demi-tangentes à l'origine .

b - Calculer l'aire S_n du domaine limité par la courbe C_1 et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = n$.

c - Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} S_n$.

B - Pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$$

1) Montrer que , pour tout $t \geq 0$, on a :

$$0 \leq f_1(t)\ e^{t/2} \leq 1$$

2) a - Montrer alors que , pour tout $t \geq 0$ et tout entier $n \geq 1$, on a :

$$0 \leq f_n(t)\ e^{-t/2} \leq 1$$

b - En déduire que , pour tout $x \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$0 \leq F_n(x) \leq 2$$

C - Pour tout réel $u \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$G_n(u) = \int_0^u t^n e^{-t}dt$$

1) a - Montrer que , pour tout entier $n \geq 2$, on a : $G_n(u) = -u^n e^{-u} + n\, G_{n-1}(u)$

b - En déduire que :

$$G_n(u) = -n!\ e^{-u} \sum_{p=2}^{n} \frac{u^p}{p!} + n!\ G_1(u)$$

2) Montrer alors que :

$$\lim_{u \to +\infty} G_n(u) = n\ !$$

3) a - Montrer que , pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$G'_n(nx) = n^n f_n(x)$$

f_n étant la fonction définie dans la partie A .

b - Montrer alors que , pour tout réel $n \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$F_n(x) = \frac{1}{n^{n+1}}\ G_n(nx)$$

c - En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)$