

## Momentum, Markowitz и Smart Beta

Тактический, аналитический и практический взгляд на современную теорию портфеля

Воутер Дж. Келлер (Flex Capital)<sup>1</sup>

июня 2014 г., версия 0.9

Абстрактный

В этой статье мы попытаемся улучшить Современную Портфельную Теорию (MPT), разработанную Марковицем (1952). В качестве первого шага мы объединяем модель MPT с обобщенным импульсом (см. Keller 2012), чтобы получить «тактическую» MPT. На втором этапе мы будем использовать модель с одним индексом (Элтон, 1976), чтобы получить аналитическое решение для максимального распределения Шарпа только для длинных позиций. Мы назовем эту моделью МАА для современного распределения активов.

На третьем этапе мы используем оценки усадки в нашей формуле для доходности активов, волатильности и корреляций, чтобы получить практические распределения. Кроме того, в качестве особых случаев мы получаем EW (равный вес), минимальную дисперсию (MV), максимальную диверсификацию (MD) и (наивную) паритет риска (RP) подмодели МАА. Эти модели EW, MV, MD и RP иногда называют моделями «умная бета».

Мы иллюстрируем все эти разные модели на трех вселенных, состоящих соответственно из 10 и 35 глобальных ETF и 104 акций/облигаций США с ежедневными данными с января 1998 г. по декабрь 2013 г. (16 лет), ежемесячно ребалансируемыми. Мы показываем, что все эти модели последовательно превосходят простую модель EW по различным критериям доходности/риска, при этом общая модель МАА (с импульсом доходности) также превосходит почти все модели «умной бета».

Ключевые слова: тактическое распределение активов, импульс, Марковиц, Элтон, MPT, средняя дисперсия, минимальная дисперсия, Шарп, EW, SIM, умная бета.

Классификация JEL: C00, C10, G00, G11

Место работы и контактная информация: Воутер Дж. Келлер, Flex Capital BV, Университет Роттердама и Врие, Амстердам, Нидерланды, электронная почта [wkeller@flexcapital.nl](mailto:wkeller@flexcapital.nl)

---

<sup>1</sup> Это легкая переработанная версия статьи, представленной на конкурс NAAIM/Wagner 2014 года. Это также продолжение Келлера (2013). Я хотел бы поблагодарить Гэри Антоначи, Леннарта Аппельса, Адама Батлера, Уэса Грея, Винфрида Халлербаха, Яна-Виллема Кенинга, Фрэнка Койпера, Стива ЛеКомпта, Джона МакКлюра, Баса Нагтзаама, Хьюго ван Путтена, Дэвида Варади, Джерри Вагнера и многих других. Все ошибки наши.

## 1. Введение

Современная теория портфеля (MPT) восходит к основополагающей статье Марковица (1952).

Он также известен как решение «среднего отклонения» или «кастельного» решения для оптимального распределения портфеля. В принципе, это стратегический подход, или, другими словами, он нацелен на долгосрочное (многолетнее) распределение.

Ядром MPT является классическое решение для выбора портфеля на основе средней дисперсии, также известное как максимизация коэффициента Шарпа. Для расчета соответствующего оптимального портфеля необходимо оценить ожидаемое среднее значение и ковариацию доходности активов, например, с помощью их выборочных оценок на основе исторических данных о доходности. Эти оценки часто содержат существенные ошибки оценки, особенно для средней доходности.

В стратегической (многолетней) структуре MPT ожидаемое среднее значение и ковариация доходности активов часто оцениваются в течение многолетнего исторического окна, скажем, от пяти до десяти лет (60–120 месяцев). В основополагающей статье DeMiguel (2007) показано, что стратегическое распределение MPT на основе выборки почти всегда превосходит простое распределение с равным весом (EW). Они показывают, что это также верно для большинства его расширений, предназначенных для уменьшения ошибки оценки, например, когда используются оценщики усложки. К аналогичному выводу недавно пришли Анг (2012) и Джейкобс (2013). Все авторы использовали многолетние окна (60–120 месяцев) и, следовательно, стратегический подход.

В этой статье мы будем использовать более тактический подход к MPT и ограничим окно оценки (оглядываться назад) до 12 месяцев или меньше. Подход в значительной степени зависит от аномалии обратного импульса, с.м., например, Джек-адис (1993) и Фабер (2007 и 2010). Мы также применяем тот же подход к коротким импульсам («постоянство», с.м. также Keller, 2012) для оценки будущих волатильностей и корреляций. Вместе с долгосрочной максимизацией коэффициента Шарпа в качестве критерия оптимизации мы приходим к нашей модели «тактического MPT».

Чтобы получить больше информации об оптимальном распределении в аналитических терминах, мы также использовали допущение о модели с одним индексом (с.м. Elton, 1976), в которой доходность связана с рыночной (индексной) доходностью, например EW. Теперь мы можем прийти к элегантной аналитической формуле для распределения максимизации коэффициента Шарпа (только длинное, с одним индексом). Мы будем называть получившуюся модель (с предположениями об одном индексе, только длинных позициях и обобщенном моментуме) как «модель МАА» для современного распределения активов. Оптимальное распределение МАА может быть выражено аналитически как решение, близкое к закрытой форме, только с одним нелинейным параметром, которое может быть решено очень легко и быстро с помощью вычислений.

Модель МАА показывает влияние четырех компонентов: доходности ( $R$ ), волатильности ( $V$ ), рынка ( $M$ ) и корреляции ( $C$ ). Позже мы свяжем эти четыре компонента с уменьшением доходности активов, волатильностью активов, дисперсией рынка и взаимными корреляциями активов.

Первая составляющая  $R$  представляет собой эффект возврата: оптимальное (только для длинных позиций) распределение МАА для актива прямо пропорционально его импульсной доходности и равно нулю для активов с отрицательным значением.

---

<sup>2</sup> Kritzman (2010) обнаружил, что EW можно превзойти, «выбрав ручную» ожидаемую отдачу от еще более длительного анализа периоды назад, чем 60 или 120 месяцев ДеМигеля.

активный импульс возвращается. Это хорошо известная обратная связь и абсолютный импульсный эффект, теперь он вытекает из теории MPT. Второй компонент  $V$  представляет собой эффект волатильности: оптимальное распределение MAA только для длинных позиций для актива обратно пропорционально квадрату его ожидаемой волатильности. Этот эффект хорошо известную аномалию низкой волатильности, теперь она является результатом теории MPT.

Компоненты  $M$  и  $S$  работают вместе и отражают так называемый «систематический» эффект рынка и различных корреляций. Если предполагается, что рыночный эффект (компонент  $M$ ) равен нулю, все активы (с положительной доходностью) включаются в оптимальное распределение МАА только для длинных позиций. В этом случае полностью исчезает влияние корреляций на оптимальное распределение только на длинные дистанции. Если рыночный эффект положительный, существует порог для включения активов в распределение только для длинных позиций, в зависимости от корреляций. Таким образом, мы можем увеличить количество выбранных активов, просто скомпановав рыночный эффект до нуля, обеспечив большую диверсификацию. Это позволяет избежать хорошо известной практической проблемы с МРТ, когда количество выбранных активов часто очень ограничено. Чем больше «систематический» или рыночный эффект (измеряемый дисперсией рынка), тем больше эффект корреляций. Когда тому же компоненту  $S$  отлична от нуля, тем сильнее влияние разных корреляций, а нулевая компонента  $S$  соответствует модели МАК с моделью постоянной корреляции.

Мы также с правля емся с практическими ошибками оц енки в этой модели и ис пользуем оц енки с окращ ения для дох однос ти моментума, волатильнос ти и т. д., чтобы улучшить эти оц енки. Кроме тог о, путем полног о с окращ ения дох однос ти каждог о актива до пос тоя нной или до ег о волатильнос ти мы также прих одим к час тнымс лучая мэтой практичес кой модели MAA: минимальной дис перс ии (MAA-MV), макс имальной диверс ификац ии (MAA-MD) и паритету рис ка (RP). ) модели. Эти модели иног да называют «умными бета-моделя ми» (с м, например, Maillard (2009), Scherer (2010), Clark (2011), Jurek и Croux (2013), Jurek (2014), S (2013), (2012), с равним все наши модели с моделью равног о вес а (EW), которая , как можно показат ь, также я вля ется час тнымс лучаемнашей модели MAA.

Обратите внимание, что для всех этих интеллектуальных бета-моделей мы предполагаем ограниченный ковариационный матрицу, возникающую из модели с одним индексом. В результате этого допущения об одном индексе все оптимальные распределения с март-бета могут быть выражены как решения почти в закрытой форме только с одним нелинейным параметром, как и в общей модели МАР. Это отличается от сложного нелинейного решения общих моделей минимальной дисперсии и максимальной диверсификации (без предположения об одном индексе) [3].

Мы продемонстрируем, что все эти «умные бета-модели» (и, в частности, общая модель МАА с импульсом) легко превосходят распределение равновесия (EW) (взятое в качестве эталона) для различных вселенных, демонстрируя полезность современной теории портфеля. Однако перед этим мы с начала более подробно рассмотрим нашу аналитическую модель.

<sup>3</sup> Хотя в дальнейшем модели MAA-MV и MAA-MD мы будем называть MV и MD, читателю следует помнить, что эти модели являются подмоделями модели MAA, где мы предполагали ограниченную ковариационную модель в соответствии с моделью с одним индексом. Модели EW и RP не имеют таких ограничений.

## 2. Одноиндексная модель

Наше основное предположение МРТ заключается в максимизации коэффициента Шарпа (так называемое решение касательной или средней дисперсии) в одноиндексной модели Элтона (1976). В основе этой модели лежит различие между систематическим эффектом, который вызывает доходность актива с доходностью отдельного рыночного индекса (например, индекса EW) через так называемый «бета-коэффициент», с одной стороны, и осцилляторным эффектом (или идиосинкразическое, или несистематическое) влияние на другой. Используя эту простую модель, мы можем сократить количество параметров из ковариационной матрицы доходности  $N \times N$  до более управляемых  $N$  бета-коэффициентов, где  $N$  — количество активов во вселенной.

Мы предположим отсутствие коротких продаж (только длинные), отсутствие кредитного плеча и нулевую безрисковую ставку для простоты<sup>4</sup>. Тогда оптимальное размещение активов только для длинных позиций, которое максимизирует коэффициент Шарпа, может быть выражено в виде элегантно-аналитической формулы. Мы вывели эту формулу MAA как обобщение формулы Clark (2012) для портфеля MV или MD только для длинных позиций. Позже мы узнали, что подобная наша формула давно появилась в классической статье Элтона (1976), который назвал ее моделью с одним индексом (SIM).

Наша формула максимума Шарпа для одноиндекса выражает оптимальные доли распределения активов только для длинных позиций  $w_i$  как функцию ожидаемой доходности  $r_i$ , ожидаемых идиосинкразических дисперсий  $s_i$  и ожидаемого коэффициента бета  $b_i$  активов ( $i=1..N$ ) для данной вселенной. Это основная формула нашей работы. Формула MAA (доказательство см. также в Приложении A):

$$(1) \quad w_i \sim (1-t/t_i) r_i / s_i \quad \text{для } t_i > t, \text{ иначе } w_i = 0, \text{ для } i=1..N$$

где « $\sim$ » означает «пропорционально» и представляется собой

$r_i$	доходность актива $i$ , представляется собой
$s_i$	идиосинкразическую дисперсию доходности актива $i$ , представляется собой
$t_i$	коэффициент Трейнора актива $i$ (при $t_i = r_i/b_i$ ), представляется собой бета-Актив,
$b_i$	который я написал рыночную доходность влется порогом Трейнора
$t$	только для длинных позиций, так что $w_i = 0$ для всех активов с $t_i < t$

Формула MAA экв. (1) дает нам оптимальное распределение портфеля в виде элегантно-аналитической формулы с учетом предположений только о длинных позициях и одном индексе. Помимо доходности  $r_i$  и идиосинкразических дисперсий  $s_i$ , важную роль играет коэффициент Трейнора  $t_i$  (с м. Treynor, 1996).

Выбранные (только длинные) активы должны иметь коэффициент Трейнора  $t_i$  выше порогового значения Трейнора  $t$ . Этот порог влется функцией оптимальных весов  $w_i$  и, следовательно, влется эндогенным. Оптимальное распределение MAA может быть выражено аналитически как решение «почти закрытой формы» только с одним нелинейным параметром, которое может быть решено очень легко и быстро с помощью вычислений.<sup>5</sup>

Когда дисперсия рынка  $s$  (компонент M) равна нулю, систематическая часть  $t/t_i$  уравнения (1) становится равным нулю, поскольку пороговое значение  $t$  равно нулю (с м. уравнение (A.6)) и отсутствует эффект бета или корреляции. В

<sup>4</sup> Мы используем это предположение главным образом для простоты обозначений. Математически можно легко включить ненулевую безрисковую ставку, заменив доходность избыточной доходностью (выше безрисковой ставки) в большинстве формул. На практике мы обнаружили лишь небольшой эффект при использовании избыточной доходности, в том числе потому, что в большинстве наших универсальных облигаций и облигаций.

<sup>5</sup> Мы можем численно решить эту задачу, итерируя между  $w_i$  и  $t$  до сходимости, что на практике происходит очень быстро.

В этом случае оптимальные доли распределения MAA только для длинных позиций для актива равны нулю, если его доходность  $r_i$  отрицательна, или пропорциональна его доходности, если она положительна. Назовем это эффектом компоненты R. Доля актива также обратно пропорциональна его идiosинкразической дисперсии  $s_i$ , равной квадрату их осцилляционных волатильностей (компонент V). Когда компонент M не равен нулю, только наборы с коэффициентом Трейнора выше порога  $\alpha$  включаются в портфель, с более крупными долями для активов с более высокими коэффициентами Трейнора. Обратите внимание, что более высокие коэффициенты Трейнора соответствуют меньшим бетами, следовательно, меньшим рыночным корреляциям при определенной доходности.

### 3. Частные случаи формулы MAA

Самая большая практическая проблема с MPT — это определение ожидаемой доходности. Это справедливо и для приведенной выше формулы MAA (1). Традиционно при «стратегическом» MPT для оценки ожидаемой доходности (а также волатильности и корреляций) используются данные за 60 или 120 месяцев (5–10 лет). Вследующем разделе мы рассмотрим более «тактические» (краткосрочные) ретроспективные периоды. В качестве альтернативы можно использовать ограниченные модели без необходимости оценки ожидаемой доходности. Примерами являются модели с минимальной дисперсией (MV), максимальной диверсификацией (MD) и наивным паритетом риска (RP), которые часто называют «умными бета-версиями». Можно показать, что это особые случаи модели MAA с учетом некоторых упрощающих допущений относительно ожидаемой доходности (см. также, например, Hallerbach, 2013).

Минимальная дисперсия (MV). Альтернативой максимизации коэффициента Шарпа является минимизация дисперсии портфеля. См. например, Шарп (2010) и Кларк (2011). Легко показать, что соответствующие оптимальные распределения являются частными случаями максимальных распределений Шарпа, когда предполагается, что ожидаемая доходность для каждого актива постоянна для всех активов. После замены  $r_i = r$  в уравнении (1) мы приходим к формуле MV для оптимального распределения индекса только для длинных одиночных индексов:

$$(2) w_i \sim (1 - b_i/b) / s_i \quad \text{для } b_i < b, \text{ иначе } w_i = 0, \text{ для } i = 1..N$$

где  $b$

— бета-порог только для длинных, так что  $w_i = 0$  для всех активов с бета- $b_i > b$ .

Когда рыночная дисперсия  $s$  (компонент M) равна нулю, идiosинкразическая дисперсия  $s_i$  равна дисперсии актива ( $s_i = v_i$ , где  $v_i$  — волатильность актива<sup>2</sup>). Это соответствует уравнению (2) для распределения актива только для длинных позиций обратно пропорционально его дисперсии (равной квадрату его волатильности  $v_i$ ). Таким образом, все активы теперь включены. Когда компонент M не равен нулю, в портфель включаются только активы с коэффициентом бета ниже порога этого значения  $b$ , с большей долей для активов с меньшим коэффициентом бета.

Максимальная диверсификация (MD). Альтернативой максимизации коэффициента Шарпа является максимизация диверсификации портфеля. См. Maillard (2009), Choueifaty (2011), Jurczenko (2013) и Roncalli (2013). Легко показать, что соответствующие оптимальные распределения являются частными случаями максимальных распределений Шарпа, когда ожидаемая доходность для

<sup>2</sup> Это делается при условии, что все бета-би неотрицательны (что верно почти для всех вселенных). Особый случай активов с отрицательными бета-коэффициентами (хотя и редко) наиболее интересен, поскольку эти активы могут действовать как «хедж». См. также термин  $(1-t/t_i)$  в уравнении (1), который становится  $>1$ , когда  $t_i < 0$  и  $t > 0$ . Подробнее см. Элтон (1976) и Приложение.

предполагается, что каждый актив пропорционален его волатильности. Это означает, что коэффициенты Шарпа  $ri/vi$  одинаковы для всех активов. После замены  $ri = vi$  в уравнении (1), мы приходим к формуле MD для оптимального распределения одного индекса только для длинных:

$$(3) w_i \sim (1 - ci/c) v_i / s_i \quad \text{для } ci < c, \text{ иначе } w_i = 0, i = 1..N$$

где

$ci$  - корреляция актива  $i$  с рынком, - волатильность  
 $vi$  актива  $i$ , - порог корреляции только для длинных  
 $c$  позицией, так что  $w_i = 0$  для всех активов с  $ci > c$ .

Когда рыночная дисперсия  $s$  (компонент M) равна нулю, идиосинкразическая дисперсия снова равна дисперсии актива и систематической части  $ci/c$  уравнения (3) обращается в нуль (поскольку  $1/c = 0$ , см. Приложение). В этом случае оптимальная доля распределения актива только для длинных позиций обратно пропорциональна его волатильности. Это «наивное» решение по паритету риска (RP) как частный случай распределения MD, где все веса распределения  $w_i$  пропорциональны обратной величине волатильности  $vi$ . Все активы теперь включены. Когда компонент M не равен нулю, в портфель включаются только активы с рыночной корреляцией ниже порога  $c$ , с большей долей для активов с меньшей корреляцией.

Обратите внимание, что когда мы ссылаемся на MAA, MV и MD, мы всегда будем предполагать модель с одним индексом и, следовательно, ограниченную ковариационную матрицу. Частным случаем моделей MAA, MV и MD является версия с постоянной корреляцией (CC) (Elton, 1976), где мы предполагаем постоянную взаимную корреляцию между активами, что является случаем, когда рыночная корреляция ( $ci$ ) постоянна по активам. Теперь мы говорим, что компонента C равна нулю. Для модели MAA-CC мы приходим к формуле, аналогичной уравнению (1), но с заменой отношения Трейнора ( $ri/bi$ ) на отношение Шарпа ( $ri/vi$ ). Теперь будут включены только активы с коэффициентом Шарпа (вместо коэффициента Трейнора) выше определенного порога только для длинных позиций, с большими долями для активов с более высокими коэффициентами Шарпа. Наконец, если мы предположим, что все доходности, волатильности и все рыночные корреляции одинаковы для всех активов, мы приходим к распределению с равными весами (EW) как к очень частному случаю распределения MAA, где все веса равны  $1/N$ , т.е. идентичны к рыночному (индексному) размещению.

#### 4. Оценка общей модели MAA: импульс и сдвиг

В приведенной выше модели MAA предполагается, что будущие параметры, такие как ожидаемая доходность  $ri$  и т.д., известны, что нереалистично. На практике приходится использовать выборочные оценки этих параметров, основанные на прошлом. Таким образом, качество нашей оптимальной модели распределения портфеля в первую очередь зависит от качества этих оценок.

Импульс. Мы будем оценивать все ожидаемые доходности по скорости изменения (ROC) цены актива за определенный ретроспективный период, предполагая некоторое постоянство во времени. В традиционной «стратегической» модели MPT ретроспективный период составляет несколько лет (60–120 месяцев). Мы выберем более тактический подход, сосредоточившись на ретроспективном периоде максимум двенадцать месяцев, чтобы использовать хорошо известную аномалию импульса.

Глядя на рис. (1) мы видим, что оптимальные акции только для длинных позиций  $w_i$  положительны только в том случае, если доходности  $r_i$  положительны<sup>7</sup>. Это соответствует абсолютному моменту или следованию трендом, с.м., например, Фабер (2007), Херст (2012), Антоначи (2013). Когда эти доли положительны, оптимальные доли только для длинных позиций  $w_i$  пропорциональны  $r_i$ . Это соответствует относительной аномалии импульса, с.м., например, Джегджиш (1993), Фабер (2010) и Батлер (2013). Таким образом, оба эффекта напрямую связаны с нашей моделью МАР.

Помимо доходности, используя ежедневные исторические данные, мы также можем получить выборочные оценки ожидаемой волатильности активов  $v_i$ , ожидаемой волатильности рынка  $v = \sqrt{s(s)}$  и рыночных корреляций  $c_i$ , используя исторические оценки за аналогичные периоды ретроспективного анализа. Например, при ретроспективном анализе за 4 месяца мы можем использовать около 84 дней данных об общей доходности для расчета исторической волатильности и корреляций наряду с доходностью. Как и в случае импульса доходности (для компонента R), мы используем предположение о постоянстве («обобщенный импульс», с.м. Keller, 2012), чтобы получить оценки ожидаемой волатильности активов (компонент V), волатильности рынка (компонент M) и корреляций (компонент C) в будущем. И помните, что с тактическими (т.е. ежемесячными) перекладками ирровками в будущем тоже через месяцы, а не годы, как в случае «стратегического» МРТ.

Таким образом, «импульс» здесь относится не только к доходности. Поэтому мы можем воспользоваться гибкостью краткосрочного импульса также для волатильности и корреляций. Это актуально, поскольку, даже когда волатильность и корреляции более стабильны во времени, чем доходность, они меняются, особенно во время кризиса, такого как 2008 г. (с.м. Chin 2013, Butler 2012, Schoen 2010 и Newfound, 2013). То, что эта гибкость может иметь значение для распределения активов, также показано в настоящем обсуждении индексов с низкой волатильностью и низкой бета-версией и ETF (с.м., например, Blitz, 2012).

Обратите внимание, что, как следствие модели с одним индексом, должны оцениваться только N рыночных корреляций  $c_i$  (и, следовательно, N бета). Это контрастирует с полной ковариационной матрицей  $N \times N$ , которая может быть единственной с ограниченными (краткосрочными) данными. Обратите также внимание на то, что в принципе ретроспективный период может быть разным для всех этих компонентов R, V, M и C. Как уже говорилось, для нашего «тактического» распределения МРТ мы предполагаем, что все ретроспективные периоды имеют максимальную продолжительность 12 месяцев. По умолчанию в нашем эмпирическом тесте мы фактически будем использовать ретроспективный период в 4 месяца для всех компонентов, поскольку это дает хорошие результаты для многих различных вселенных. В следующем разделе мы рассмотрим различные периоды ретроспективного анализа для конкретной вселенной ( $N = 10$ ), чтобы проверить надежность этого значения по умолчанию.

Усложнение. Недостаток использования коротких ретроспективных периодов заключается в том, что предполагаемые ожидаемые доходности, волатильность и бета-коэффициенты могут быстро меняться с течением времени, что приводит к большим ошибкам, возможно, к еще более экстремальным весам в нашем оптимальном распределении портфеля, чем в стратегическом распределении МРТ. Поэтому мы будем использовать простые методы сжатия, чтобы уменьшить эти ошибки<sup>8</sup>. С.м. также Le doit (2004) и DeMiguel (2009 и 2013). Мы просто уменьшим все доходности  $r_i$  до среднего дохода, все волатильности  $v_i$  до среднего уровня волатильности, рыночную дисперсию  $s$  до нуля и все рыночные корреляции  $c_i$  до среднего рыночного соотношения, введя «вес аусджи»  $WR, WV, WM$  и  $WC$  (с.м. ниже) для компонентов R, V, M и C.

<sup>7</sup> Поскольку идиосинкразическая дисперсия  $s_i$  и систематическая часть  $(1-t/t_i)$  всегда положительны, если  $t_i > t$ . На данный момент мы отбрасываем редкий случай «хеджирования», когда  $b_i < r_i < 0$ , что также приводит к положительной доле  $w_i$ . С.м. также Элтон (1976) и примечание 4.

<sup>8</sup> Например, формула аусджи для возврата  $r_i$  равна  $w \cdot r_i + (1-w) \cdot r_m$ , где  $w$  — вес аусджи ( $w=0$  и 100% соответствуют полной и нулевой аусдже соответственно),  $r_m$  — (средняя) рыночная доходность. Аусджа уменьшит среднюю квадратичную ошибку за счет уменьшения дисперсии и увеличения смещения оценки.

Все средние значения также являются краткосрочными (например, за 4 месяца) и перекрестными, т.е. средняя доходность равна доходности EW ( $r_m = r_i/N$ ).

Сокращая рыночную дисперсию  $s$ , мы уменьшаем порог Трейнора  $t$  и, следовательно, допускаем наличие большего количества активов в портфеле (с м. А.6 в Приложении). Это делает больший упор на диверсификацию и уменьшает систематический компонент. Когда уменьшенная дисперсия  $s$  становится равной нулю, пороговое значение  $t$  равно нулю, и все активы (с положительной доходностью) включаются в оптимальное распределение. Это тот случай, когда мы говорим, что компонент  $M$  равен нулю.

Мы используем «веса»  $WR$  для компонента  $R$  таким образом, что вес  $WR=100\%$  подразумевает отсутствие сокращения доходности  $r_i$ , а  $WR=0\%$  подразумевает полное сжатие по направлению к (рыночному) среднему значению, эффективно исключая вариации доходности  $r_i$ . То же самое относится к компонентам  $V$ ,  $M$  и  $S$  с весами  $WV$ ,  $WM$  и  $WC$  от  $100\%$  (без усадки) до  $0\%$  (полная усадка). Следовательно, усадочный вес  $W$  отражает важность компонента с максимальным эффектом компонента, когда  $W=100\%$ .

Помимо сокращения компонента до  $50\%$  для улучшения (надежности) оценок ожидаемого значения (например, для доходности, волатильности, дисперсии или корреляции), мы также можем включить эти веса ( $100\%$ ) или «выключить» ( $0\%$ ), чтобы получить некоторые частные случаи. И вместе с тем, чтобы уменьшать доходность  $r_i$  до средней (рыночной) доходности, мы также можем уменьшить ее до (или заменить) волатильностью  $v_i$  актива  $i$ , обозначенной как  $WP=100\%$  (с  $R$  для паритета)<sup>9</sup>. Ниже мы обобщили все модели, использованные в следующих разделах, с точки зрения веса усадки  $W$ , где веса, выделенные жирным шрифтом, — это значения модели по умолчанию ( $W=0$  или  $100\%$ ), а остальные — наши (произвольные) собственные значения по умолчанию  $W=50\%$  (или  $WV$ ).  $=0\%$  для MAA-Offensive, с следующими разделы).

Модель <sup>10</sup>	BP	BB	BM	PM
МАО	50%	50%	50%	0%
МАО-Выкл.	50%	0%	50%	0%
МВ	0%	50%	50%	0%
дополнительно	0%	50%	50%	100%
РП	0%	100%	0%	100%
РЭБ	0%	0%	0%	Туалет 50% 50% 50% 50% 0% 0% 0%

Таблица 1. Вес усадки для различных моделей

<sup>9</sup> Можно даже смешать  $MS$  и  $MD$ , усадив  $r_i$  в обоих направлениях (например,  $WR=50\%$  и  $WP=50\%$ ).

<sup>10</sup> Для последней вселенной ( $N = 104$ ) мы будем использовать  $WR = 10\%$  (вместо  $50\%$ ) в качестве выбора по умолчанию для  $MS$  и  $MS-Off$ , и  $WV = 10\%$  (вместо  $50\%$ ) для  $MS$ ,  $MV$  и  $MD$ , ввиду высокой волатильности отдельных акций (Nasdaq100). См. также раздел 8.



## 5. Тактическая МПТ на практике: данные и методика.

В следующих разделах мы применим наши модели к трем вселенным с 1997 по 2013 год (16 лет), чтобы продемонстрировать превосходство «тактического МПТ» над РЭБ и другими март-бета-моделями.

Мы представим результаты ретроспективного тестирования для трех вселенных увеличивающегося размера ( $N = 10$  и  $N = 35$  для глобальных ETF и  $N = 104$  для акций Nasdaq100), используя в основном те же сокращения по умолчанию (50%) и те же периоды ретроспективного анализа по умолчанию (4). месяца для всех вселенных в качестве параметров, чтобы ограничить риск отсложения данных. В следующем разделе мы также более подробно рассмотрим наши модели для первой вселенной ( $N = 10$ ) для других значений параметров, чтобы проверить их надежность. В качестве активов мы будем использовать глобальные ETF для первых двух вселенных ( $N = 10$  и  $35$ ) для акций, облигаций, альтернатив и т. д. как для США, так и для других стран (IM и EM), и в основном акции Nasdaq для третьей вселенной. Мы предполагаем ежемесячную ребалансировку.

Ежедневные данные совокупной доходности для трех вселенных получены от Bloomberg и Yahoo, а временные рамки для всех бэктестов — с 31 декабря 1997 г. по 31 декабря 2013 г. (16 лет). Когда исторические данные недоступны с начала 1997 года (для максимальной длины периода ретроспективного анализа в двенадцать месяцев для определенных ETF и акций), мы расширяем до прошлого, используя (доходность) аналогичных (сильно коррелированных) индексных фондов.

Ребалансировка производится при первом закрытии нового месяца на основе (скорректированных) данных за последнее закрытие старого месяца. Для транзакционных издержек мы будем использовать<sup>11</sup>. Мы предполагаем, что нет возможное кредитное плечо 10 бит/с, и все сделки будут только длинными. Для простоты будем считать, что безрисковая ставка во всех наших моделях равна нулю.<sup>12</sup>

Легенда для различных статистических данных тестирования:

$R = \text{CAGR}$ , годовая доходность (в %)

$V = \text{годовая волатильность}$  (в %)

$D = \text{максимальная просадка за полный бэктест 1997–2013 гг.}$  (в %).

$T = \text{годовой оборот SR} =$

коэффициент Шарпа (с годовой безрисковой ставкой 2,5%).

ИЛИ = коэффициент Омега (с целевой годовой доходностью 0%).

$CR = \text{коэффициент Calmar}$  (с годовой целевой доходностью 5%).

Отношение Омега OR отражает отношение «прибылей к убыткам» (около целевой доходности 0%). Коэффициент Шарпа SR дает годовую доходность  $R$  выше средней исторической ставки казначейских векселей<sup>13</sup>, деленную на волатильность  $V$ . Коэффициент Калмара CR дает отношение доходности выше годовой целевой доходности 5% и максимальной просадки  $D$ . При использовании коэффициента 5% целевой доходности (вместо ставки по казначейским векселям, равной 2,5%), этот коэффициент более чувствителен к более высокой доходности (чем SR и OR). Используя максимальную просадку  $D$  (вместо волатильности), коэффициент Calmar CR более чувствителен к отрицательным значениям.

<sup>11</sup> Мы провели некоторые тесты на чувствительность для более высоких (одностронних) транзакционных издержек, чем 10 бит/с, но большинство результатов для нашего модели по сравнению с EW с точки зрения доходности/риска остаются в силе максимум до 50-100 б.п.

<sup>12</sup> См. примечание 4. Безрисковая ставка также относительно низка за 16 лет. Для коэффициента Шарпа (SR) мы будем использовать среднюю ставку по казначейским векселям (около 2,5%) как безрисковую ставку, для Calmar Ratio (CR) удвойте эту ставку как целевую ставку (5%).

<sup>13</sup> Трехмесячные казначейские векселя имеют средний годовую доходность (CAGR) примерно 2,5% за рассматриваемый период (1997-2013 гг.).

отклонения, чем  $S$ . Обратите внимание, что вся статистика бэк-тестинга (включая максимальные просадки) основана на ежемесячных (а не ежедневных) измерениях.

Мы предпочитаем соотношение Calmar CR, а не SR (и OR), как наилучшую метрику для оценки доходности/риска при тестировании на исторических данных. Подтвердить это, на наш взгляд, можно при визуальном просмотре графиков эквити при разных значениях CR для разных вселенных.

В дальнейшем мы будем часто ссылаться на подмодели MAA и MV, MD и RP. Пожалуйста, помните, что для всех этих моделей используются не только краткосрочные (импульсные) оценки окрашивания, но и ограниченная ковариационная матрица из модели с одним индексом. Для модели EW никакие ограничения на усилку или ковариацию не имеют значения. То же самое справедливо и для наивной модели RP, где используются только (краткосрочные) оценки волатильности без окрашивания, чтобы получить традиционное взвешенное распределение волатильности.

#### 6. Маленькая глобальная вселенная (N=10)

Прежде чем мы приступим к эмпирической проверке наших моделей для двух других (более крупных) вселенных, в этом абзаце мы исследуем различные аспекты наших моделей, примененных к первой мультиактивной вселенной (N = 10), чтобы оценить ее надежность. Вселенная N=10 состоит из 10 глобальных ETF, представляющих акции США, других стран и развивающихся рынков (VTI, VGK, EWJ, EEM), двух государственных облигаций (IEF и TLT), двух REIT (IYR, RWX) и двух сырьевых товаров (DBC), ГЛД.

Данные (ежедневно скорректированные на закрытие) взяты из Bloomberg (январь 1997 г. - декабрь 2013 г.), ретроспективные тесты начинаются в январе 1998 г. Все ретроспективные периоды установлены на 4 месяца, а все веса окрашивания WR, WV, WM, WC изначально равны (довольно произвольно) устанавливаются на 50%, кроме MV (WR=WP=0), для MD и RP (WR=0 и WP=1) и для EW (WR=WV=WM=0). Помимо варианта MAA по умолчанию, существует также «наступательный» вариант (MAA-Off), в котором WV установлен на ноль. Изменяя WV, мы фактически можем управлять V почти линейно.

На рис. 1 мы представляем статистику и график капитала (логарифмическая шкала) для всех наших шести моделей, включая EW, для этой небольшой глобальной вселенной (N = 10). Как видно, модели MAA явно превосходят не только EW, но и подмодели MV, MD и RP. Эти последние модели очень похожи по доходности R на эталон EW, но с меньшей максимальной просадкой D (и волатильностью V) и, следовательно, с лучшими (более высокими) показателями доходности/риска, выраженными коэффициентами Омега и Шарпа и Кальмара. С точки зрения коэффициента CR обе модели MAA выигрывают безоговорочно, в то время как вариант MAA-Off обеспечивает несколько более высокую доходность R без значительного снижения доходности/риска. Мы включаем этот вариант, потому что он показывает, как наши модели могут демонстрировать некоторый «псевдорыв» (без кредитования) за счет полного окрашивания V-компонента (WV=0). Обратите внимание, что оборот T близок к нулю (минимальный) для модели EW, с моделями MD и RP на втором месте и моделью MV на третьем, и максимален для обеих моделей MAA. В остальной части этого раздела мы рассмотрим эту глобальную вселенную с несколькими активами (N = 10) более подробно, чтобы получить представление о надежности наших моделей.

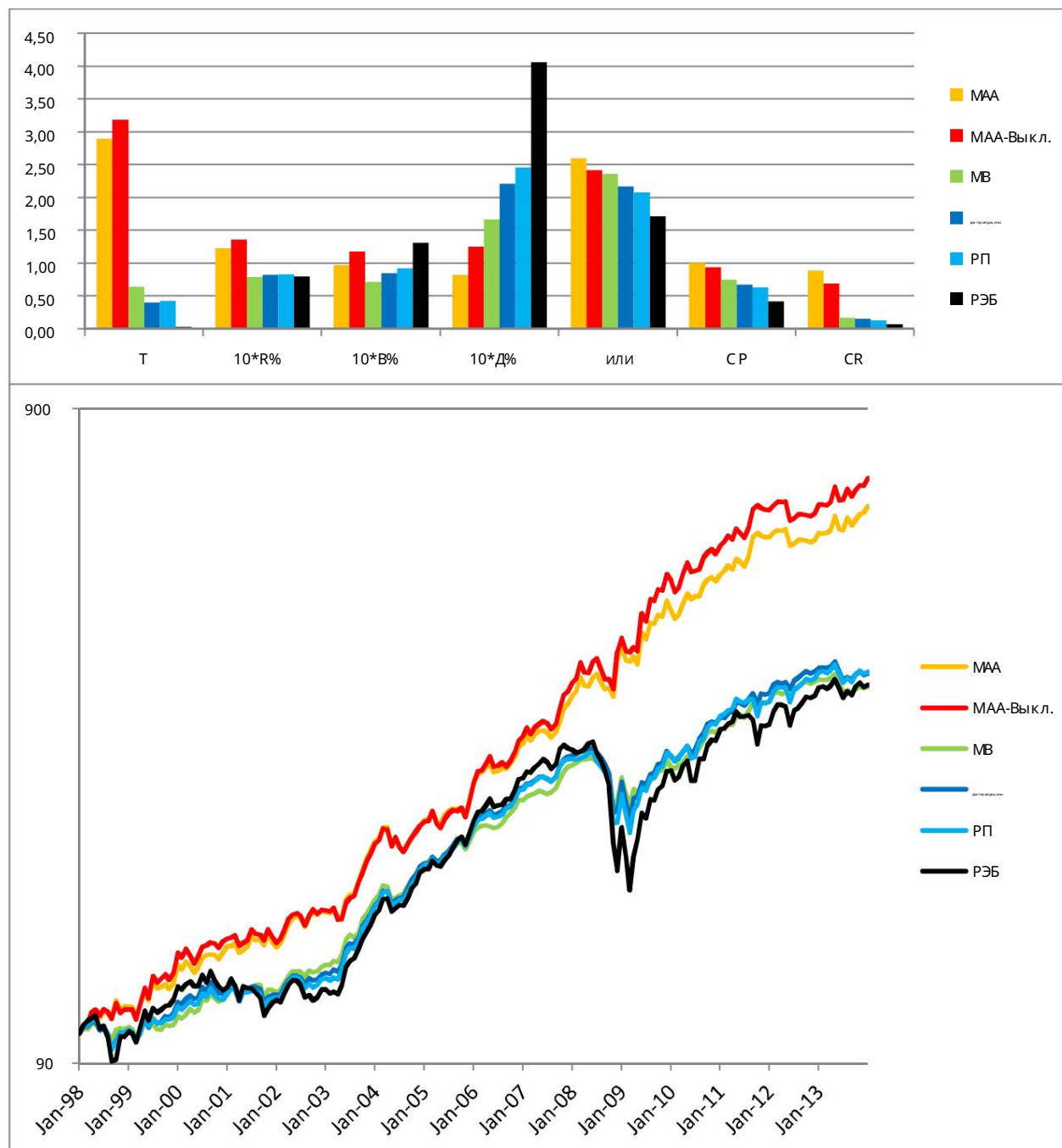


Рис. 1. Линия статистики и справедливости (логарифмическая шкала) для небольшой глобальной вселенной (N=10)

Декомпозиция модели MAA на компоненты различных коэффициентов, позволяющая анализировать влияние соотношения доходности/риска модели MAA путем пошагового перестроения модели, начиная с эталонного показателя EW и добавляя эти компоненты один за другим, используя сокращенные и безусловные оценки.

Когда мы предполагаем, что все компоненты R, V и C не имеют значения, мы можем полностью сократить соответствующие оценки до их средних значений, приравняв веса сокращения WR, VW и WC к нулю. В этом случае мы приходим к модели равновесия (EW) в качестве рыночного индекса.

(или эталон), для которого  $WR=WV=WC=0$ . Это наша отправная точка на рис. 2 (левая полоса), где мы показываем соотношение Шарпа и Calmar (CR слева, SR справа) для EW. На графиках мы также показываем эти отношения для однофакторных моделей (R, RV, RVM и RVMC), включая случай абсолютного импульса (AM), где только знак веса однофакторной модели (как в R) используется в уравнении (1). Мы даем эти отношения как для модели с уменьшенным размером по умолчанию (с всеми  $W = 50\%$ ), так и для модели без сжатия (NS) (с всеми  $W = 100\%$ ). Например, для случая RVM имеем  $WR=WV=WM=50\%$  (или  $=100\%$  для NS) и  $WC=0\%$ . Это модель постоянной корреляции (здесь для MAA). Обратите внимание, что случай RV не имеет систематического (рыночного) эффекта, в то время как случай RVMC отражает систематический (рыночный) эффект, включая различные корреляции.

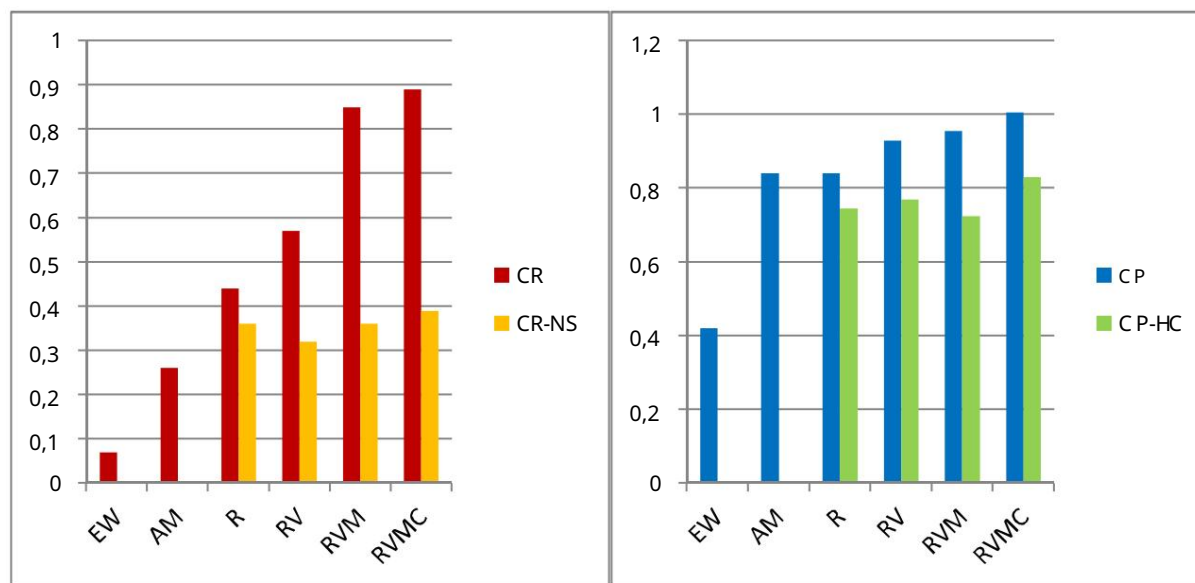


Рис. 2. Влияние комбинаций факторов / EW на коэффициенты Шарпа (SR) и Кальмара (CR), усложненные и не усложненные (NS) для MS (N=10)

Как коэффициент Шарпа, так и коэффициент Кальмара улучшаются монотонно для уменьшенной модели, когда количество компонентов увеличивается от EW и AM до полной модели RVMC. Это не относится к несжатым компонентам, где соотношение доход/риск также ниже, чем в сжатом случае. Обратите внимание на улучшение коэффициента Кальмара CR от EW до RVMC для случая усложнения. То же самое относится и к коэффициенту Шарпа (SR) от EW/AM/R. Существует (с точки зрения SR) небольшая разница между AM и R, но добавление V, M и C улучшает соотношение доход/риск, как и усложнение.

Различные веса усложнения. На рис. 3 мы представляем влияние на коэффициент Кальмара (CR) для модели MAA (N = 10) как функцию различных весов усложнения ( $WR, WV, WM, WC$ ) плюс баллы для EW (правая полоса) для сравнения. Например, в левой группе мы видим влияние на CR изменения  $WR (=0, 10, \dots, 100\%)$ , удерживая все остальные веса ( $WV, WM, WC$ ) на значении по умолчанию ( $W=50\%$ ). Влияние на коэффициент Шарпа (не показано) очень похоже на влияние на коэффициент Кальмара, но менее выражено.

Из графика видно, что влияние весов усложнения  $WR$  на соотношение доход/риск CR является наиболее существенным из всех четырех компонентов, при этом наилучший CR составляет около  $WR=50\%$  (красная полоса). Следующими компонентами, проявляющими некоторую чувствительность, являются  $WV$  и  $WM$  с той же закономерностью. Влияние  $WC$  в этом случае незначительно (MAA, N=10), что ясно показывает, что влияние различных корреляций очень ограничено. Все отношения CR намного лучше, чем для EW (черная полоса), в том числе для случая без усложнения ( $W=100\%$ , оранжевая полоса). Это также показывает, что

(для  $N=10$ ) наши результаты МАР по сравнению с эталоном EW достаточно устойчивы для различной степени усложнения.

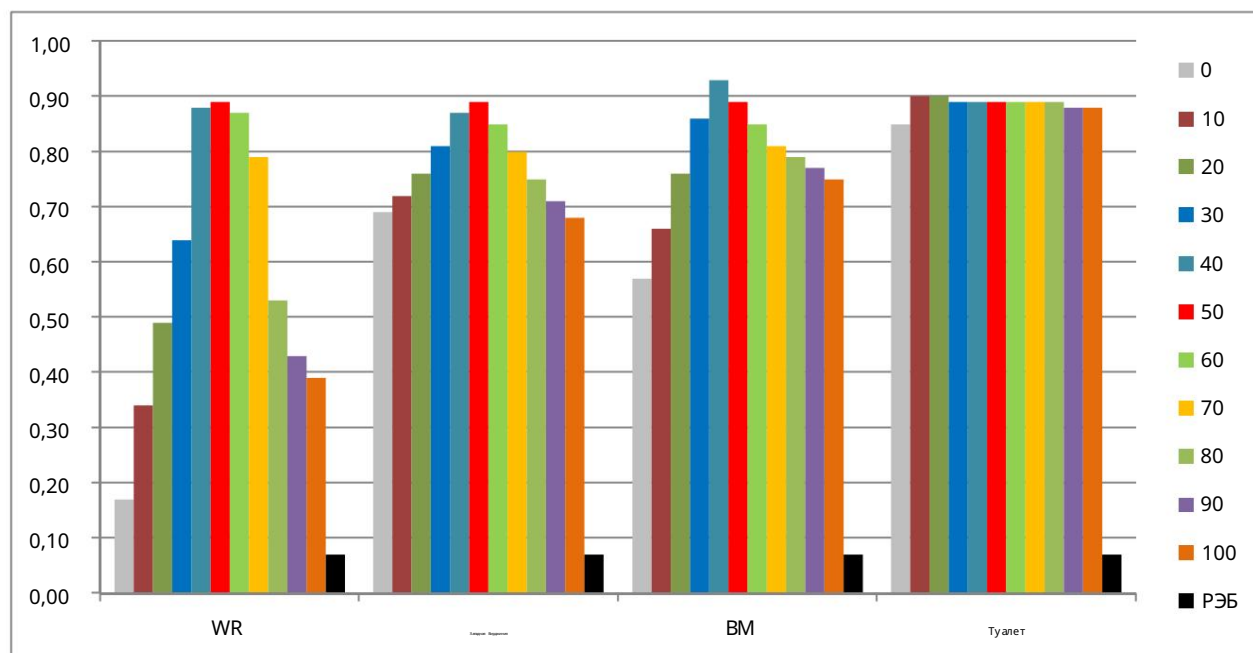


Рис. 3. Влияние веса усложнения и EW на коэффициент Calmar (CR) для MS ( $N=10$ )

Различная продолжительность ретроспективного периода. Теперь мы проверим надежность модели МАР ( $N = 10$ ) для другого ретроспективного периода для R, V, M и C (доходность, волатильность, дисперсия и корреляция) для вселенной  $N = 10$ , как для 1998-2005 гг. (8 лет) и дефолт 1998-2013 (16 лет). См. рис. 4, где мы показываем влияние на коэффициент Calmar (CR) для ретроспективной длины 1-6, 9 и 12 месяцев в месяцах плюс EW. Для всех наших моделей в этой статье мы использовали период ретроспективного анализа по умолчанию продолжительностью 4 месяца для четырех компонентов R, V, M, C. Все длины на рис. 4 также одинаковы для всех компонентов. Поэтому, когда мы используем, например, ретроспективный период в 12 месяцев, доходность, волатильность/дисперсия и корреляция оцениваются на основе исторических данных ретроспективного периода в 12 месяцев.

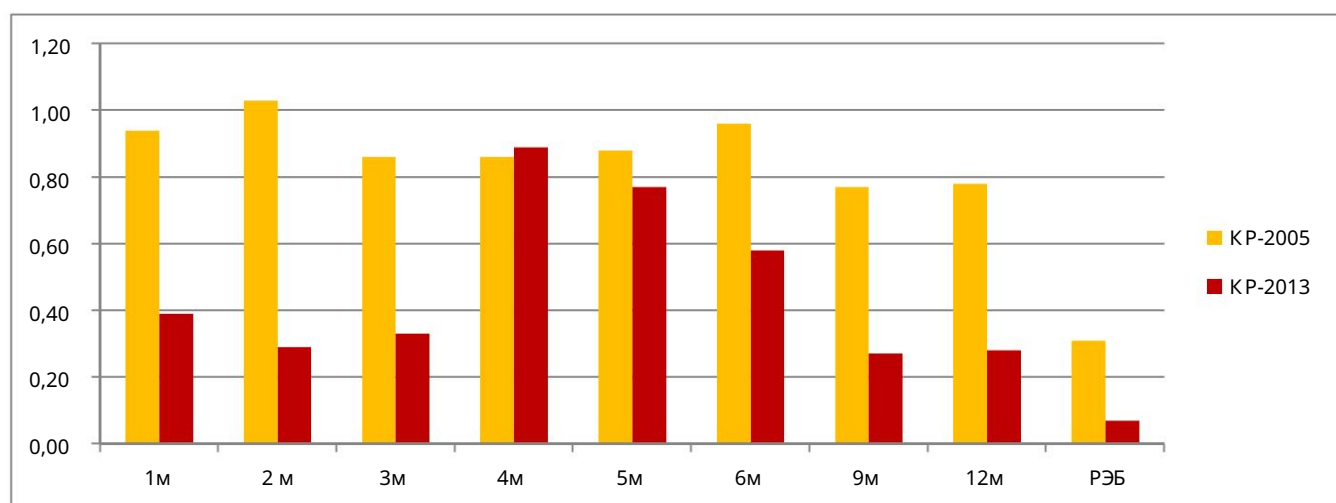


Рис. 4. Влияние длины ретроспективного анализа (месяцев) и EW на коэффициент Calmar (CR) для 1998-2005 и 1998-2013 гг. для MS ( $N = 10$ )

Мы снова предположили, что усреднение по умолчанию составляет 50% для всех наших четырех компонентов. Обратите внимание, что для сэмплирования ретроспективного периода в 12 месяцев нам нужны данные с начала 1997 года.

Из рис. 4 мы заключаем, что для полного 16-летнего периода (1998-2013 гг.) ретроспективная продолжительность в четыре месяца явно оптимальна. Для первого 8-летнего периода (1998-2005 гг.), исключая финансовый кризис 2008-2009 гг.) все короткие периоды (1-6 месяцев) хороши с небольшим оптимумом в два месяца. Так что четыре месяца кажутся хорошим компромиссом. За период все показатели CR все еще лучше, чем контрольный показатель EW.

## 7. Большая глобальная вселенная (N=35)

В этом абзаце мы исследуем наши модели применительно к более крупной глобальной вселенной (N=35). Вселенная N=35 состоит из 35 глобальных ETF (VTI, IWM, VIG, QQQ, XLF, XLY, XLP, XLV, XLB, PFF, VGK, EWJ, EPP, SCZ, FXI, ILF, EWX, SHY, IEI), IEF, TLT, TIP, MUB, MBB, CIU, LQD, NYG, BWX, EMB, VNQ, RWX, DBE, DBC, DBP), расширенных до 1997 года с соответствующими индексными фондами, если это необходимо. Данные (ежедневное закрытие) взяты из Yahoo (январь).

1997-декабрь 2013), бэктесты начинаются в январе 1998 года. Мы используем те же модели, веса и ретроспективный анализ, что и для вселенной N=10, в т.ч.  $WV=0$  для MAA-нагнетания.

На рис. 5 мы представляем статистику и график капитала (логарифмическая шкала) для всех моделей, включая EW для этой вселенной (N=35). Если не принимать во внимание модель MAA-Off (красная полоса), почти все выводы для N=10 справедливы и для этой вселенной. В частности, статистика риска/дохода лучше для MAA, а затем ниже для MV, MD, RP и EW. В частности, коэффициент Calmar CR резко низок для MV, MD, RP и EW из-за низкой доходности и высокой максимальной просадки D, в то время как коэффициенты Шарпа (SR) и Омега (OR) самые низкие для EW.

Наиболее интересной моделью является наступательная MAA-Off (с  $WV=0\%$ ), которая имеет гораздо лучшую доходность ( $R=14,3\%$ ), чем MAA (10,7%), но с почти вдвое большей волатильностью ( $V=14\%$  против 8%). и более чем в два раза превышает максимальную просадку ( $D=17\%$  против 7%). Тем не менее, эта форма «псевдо кредитного плеча» легко побеждает EW ( $R=9,5\%$ ,  $V=14\%$ ,  $D=37\%$ ) и по показателям доходности/риска SR и CR уступает только MAA.

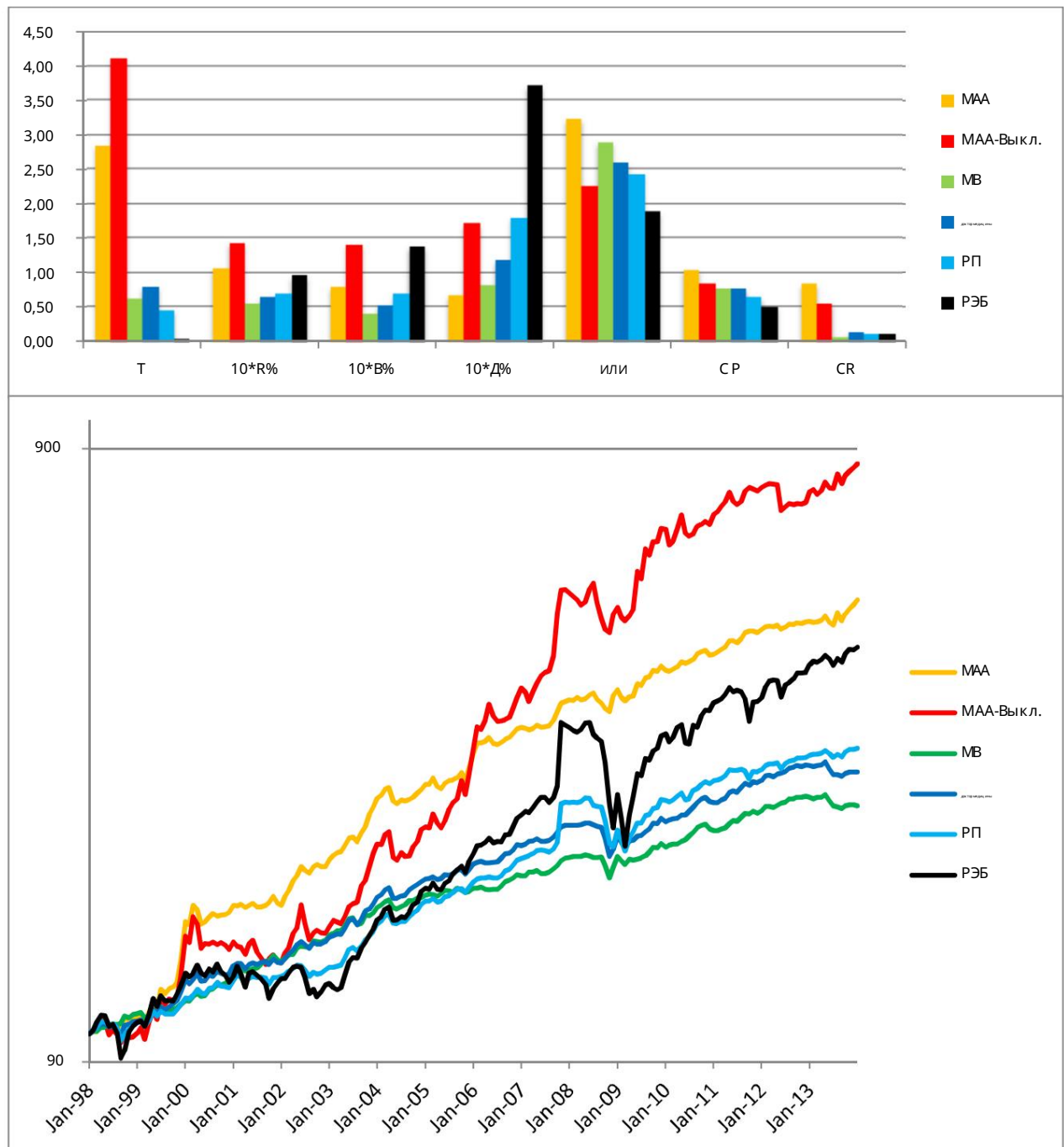


Рис. 5. Линия статистики и капитала (лог арифм) для большой глобальной вселенной (N=35)

## 8. Большой фондовый рынок США (Nasdaq100)

В этом параграфе мы рассмотрим наши модели применительно к третьей и последней вселенной ( $N = 104$ ), которая состоит из всех последних 100 акций Nasdaq100 вместе с 4 ETF государственной облигацией США (IEI, IEF, TLT и EDV). Все акции продлены до 1997 года индексом Nasdaq-100 ( $\wedge\text{NDX}$ ) и с соответствующими девятилетними фондами (для января 1997 года и декабря 2005 года), в которых все сформировано на основе данных, начавшихся в январе 1998 г. Из-за гораздо более высокой волатильности отдельных акций мы решили сократить  $WV$  и  $WR$  до 10 % (вместо по умолчанию 50%), но в остальном мы использовали те же модели, веса и ретроспективные взгляды, что и для вселенной  $N=10$  и 35, в т.ч.  $WV=0$  для MAA-наступления.

На рис. 6 мы представляем статистику и график капитала (лог арифметическая шкала) для всех наших моделей, включая EW для этой вселенной ( $N=104$ ). Почти все выводы для  $N=10$  и  $N=35$  справедливы и для этой вселенной. В частности, соотношение Calmar  $CR$  является лучшим для MAA и MAA-Off (около  $CR = 1,5$ ), а затем ниже для MAA-MV, MAA-MD (около  $CR = 1,1$ ) и значительно ниже для RP и EW (около  $CR = 0,4$ ) из-за высоких максимальных просадок ( $D=38\%$  и  $47\%$  соответственно).

Соотношения Омега ( $OR$ ) и Шарпа ( $SR$ ) аналогичны для MAA, MAA-Off, MAA-MV и MAA MD (около  $OR=4$  и  $SR=1,6$  соответственно), в то время как отношение Calmar резко низкое (около  $CR=0,4$ ) для RP и РЭБ.

Обратите внимание, что MAA-Off показала невероятную доходность ( $R = 36\%$  в год) без кредитного плеча, но также и другие модели показали себя с самой низкой доходностью ( $R = 20\%$ ) для RP и лучшими для MD и MAA (29%)., причем даже 24% для EW (включая 4 облигации). Волатильность  $V$  составляет от 13 до 21% для всех моделей без EW и 27% для EW. Помимо обеих моделей MAA, производительность MAA-MD и MAA-MV впечатляет.

---

<sup>14</sup> Некоторые акции, отсутствующие с овеи недавно (например, Facebook), расширены нами на  $\wedge\text{NDX}$  (индекс Nasdaq100) назад до 1997 г. Таким образом, мы несколько уменьшаем погрешность выживших, поскольку  $\wedge\text{NDX}$  также включает не выживших из прошлого. Однако сочетание высокой бета-версии и средней доходности  $\wedge\text{NDX}$  часто препятствует выбору оптимального распределения.



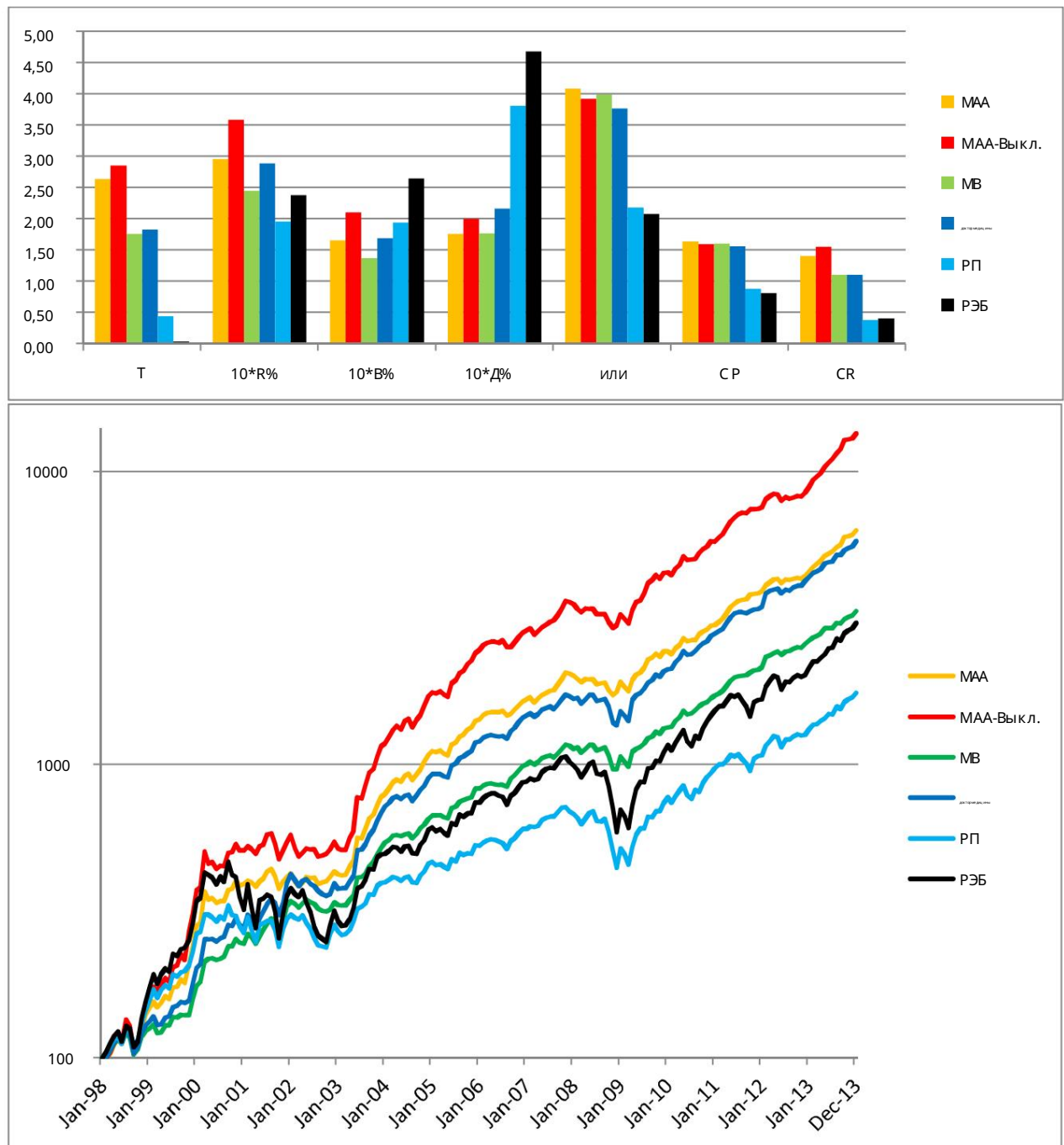


Рис. 6. Линия статистики и капитала (лог арифм) для множества крупных акций (N = 104)

## 9. Выводы

Мы попытались улучшить MPT, используя более тактический, аналитический и практический подход. В нашей тактической модели MPT мы используем краткосрочные ретроспективные периоды, чтобы иметь больше гибкости и извлечь выгоду из эффекта импульса. Этот маленький шаг оказывает наибольшее влияние на успех MPT, как мы доказали эмпирически. Кроме того, мы использовали простую четырехкомпонентную модель с одним индексом, чтобы обеспечить элегантно аналитическую интерпретацию распределения только для длинных позиций. Наконец, мы добавляем соотношение доходности, волатильности и корреляций, чтобы получить наше практическое решение. Сюда входят модели максимального Шарпа (MAA) и модели «умного бета», такие как модели минимальной дисперсии (MV), максимальной диверсификации (MD) и модели наивного паритета риска (RP). Мы проводим ежемесячные бэктесты с 1998 по 2013 год (16 лет) для трех наборов из 10 и 35 глобальных ETF и 100 акций Nasdaq. Все наши модели превосходят EW с точки зрения различной статистики доходности/риска, и почти во всех случаях наши модели MAA превосходят модели с март-бета.

Для будущих исследований мы хотели бы рассмотреть более продвинутые (например, EMA и GARCH) модели для оценки ожидаемых компонентов  $R$ ,  $V$ ,  $M$  и  $C$ , а не простой ретроспективный анализ на 4 месяца. Мы также провели некоторые предварительные тесты с неограниченной тактической моделью MPT, используя метод критических линий (CLA) Марковица (см. также Nawrocki, 1996), чтобы численно инвертировать ковариационную матрицу. Кроме того, мы провели некоторые тесты отслеживания данных на наших моделях MAA на основе Bailey (2013). Первые результаты для обоих выглядят многообещающе.

В заключение, мы думаем, что есть достаточные основания для будущих исследований, когда мы используем более «тактический» подход к старому доброму MPT. Так что да, сообщения о гибели MPT Марковица сильно преувеличены!

Приложение. Доказательство уравнения (1)

Далее следует матричное представление доказательства Элтона (1976). Пусть  $S$  — ожидаемая (положительно определенная и симметричная) ковариационная матрица  $N \times N$ ,  $w$  — вектор оптимальных весов,  $r$  — вектор ожидаемой (избыточной) доходности,  $I$  — вектор единиц, все длины  $N$ . Тогда решение МАР минимизирует

$$(A.1) \quad r' I / \sqrt{w' S w}, \quad \text{ш/л} = 1$$

Решение дается вектором оптимальных весов

$$(П2) \quad w = sp S^{-1} p$$

где  $sp$  — нормировочная константа (и дисперсия оптимального портфеля), следующая из ограничения  $w_i = 1$ . Одноиндексная модель (SIM) для активов  $i=1, \dots, N$

$$(П3) \quad r_i = a_i + b_i r_m + e_i$$

где  $r_m$  — рыночная или индексная (избыточная) доходность,  $a_i$  — «альфа» для актива  $i$ ,  $b_i$  — рыночная (или индексная) «бета» для актива  $i$ ,  $e_i$  — «идиосинкразический» остаток для актива  $i$ , предполагаемый рассредотачиваться независимо и случайным образом. Когда  $r_m$  равно индексу EW, возникает небольшая зависимость, которую мы не будем учитывать для простоты и поскольку она имеет порядок  $1/N$  и, следовательно, мала при больших  $N$  (с.м. Fama, 1968).

Ковариационная матрица  $N \times N$   $S$  равна, учитывая предположение об одном индексе,

$$(П4) \quad S = s b b' + \text{Diag}(s^e)$$

где  $b$  равно  $N$ -вектору бета  $b_i (=v_i/v)$ ,  $s (=v^2 u)$  (или  $s^2$ ) рыночная дисперсия,  $s^e$   $N$ -вектор резидентов идиосинкразическая дисперсия  $s_i (=v_i^2 \text{Обратная матрица})$  дисперсия актива  $i$  с рынком,  $i=1..N$ .  
равна (с.м., например, Clarke, 2012)

$$(A5) \quad C^{-1} = \text{Diag}(1/s^e) - (b/s^e)(b/s^e)' / (1/s + (b/s^e)'b)$$

Замена кв. (A.5) в уравнении (A.2) дает уравнение. (1) с «только длинным» порогом Трейнора  $t$

$$(A.6) \quad t = (s^{-1} p' b_j / s_j) / (1 + s^{-1} p' b_j^2 / s_j)$$

где  $p$  равно сумме всех активов  $j$  в портфеле (т.е.  $w_j > 0$ ),  $a_i = r_i / b_i$  равно коэффициенту Трейнора для актива  $i$  ( $i=1, \dots, N$ ). Это можно легко реализовать, когда  $b_i > 0$ , отсортировав все активы по их коэффициенту Трейнора (сначала с самое высшее  $t_i$ ) и вычислив порог Трейнора  $t$  для тех активов, которые уже включены, до тех пор, пока актив  $t_i$  не превысит порог Трейнора (с.м. также Элтон, 1976). На практике вычисляются урав. (1) начиная с  $t=0$  и повторяя затем между  $t$  и  $w_i$  до сходимости (что часто происходит очень быстро).

Это также работает, когда  $b_i < 0$  для некоторого  $i$ .

В случае MV (полное сжатие всех доходностей  $r_m$ ) и MD ( $k v_i$ ) мы можем вычислить бета-порог  $b=1/t$  и порог корреляции  $c=1/t$ , предполагая  $r_m=1$ , поскольку  $r_m$  сокращается в частное  $t/t$  в уравнении (1) при этом константа  $r_m$  поглощается нормировочной константой. Тогда ур. 1 становится  $w_i \sim (1-b_i/b) / s_i$  для  $b_i < b$ , иначе  $w_i=0$  для MV, и  $w_i \sim (1-c_i/c) / s_i$  для  $c_i < c$ , иначе  $w_i=0$  для MD. Мы также можем доказать, что в случае МАР с постоянной корреляцией ( $c_i$  не зависит от  $i$ ) выполняются  $w_i \sim (1-h/h_i) / s_i$  для  $h_i > h$ , иначе  $w_i=0$ , где  $h_i=r_i/v_i$  равно коэффициенту Шарпа и  $h=1/t$  — порог Шарпа, опять же при условии, что  $r_m=1$ .

Рекомендации

Анг, А., 2012 г., Инвестирование с осредней дисперсией, SSRN 2131932

Антоначчи, Г., 2013 г., Абсолютный импульс: простая стратегия, основанная на правилах, и универсальное наложение следования за трендом, SSRN 2244633

Бейли, ДХ., Борвейн, ДжМ., Лопес де Прадо, М., Чжу, Дж., 2013 г., Вероятность переобучения на исторических данных, SSRN 2326253.

Блиц, Д., ван Влит, П., 2012 г., Инвестирование с низкой волатильностью: Сборник статей Robeco, Robeco, Роттердам.

Батлер, А., Филбрик, М., Гордильо, Р., 2013, Адаптивное распределение активов: учебник, SSRN 2328254

Чин, СДЖ., 2013, Корреляции тоже имеют индивидуальность: анализ корреляций между активами, бумага, Price Asset Management.

Choueifaty, Y., Froidure, T., Reynier, J., 2011, Свойства наиболее диверсифицированного портфеля, SSRN 1895459

Кларк Р., Де Сильва Х., Торли, С., 2011, Состав портфеля с минимальной дисперсией, Журнал управления портфелем 37/2 Зима, стр. 31-45.

Кларк Р., Де Сильва Х., Торли С., 2012 г., Паритет риска, максимальная диверсификация и минимальная дисперсия: аналитическая перспектива, SSRN 1977577

ДеМигель, В., Гарлаппи, Л., Уггаль, Р., 2009, Оптимальная и наивная диверсификация: насколько неэффективна портфельная стратегия 1/N?, Обзор финансовых исследований 22/5, стр. 1915-1953.

ДеМигела, В., Мартин-Утрераб, А., Ногалес Б, Ф., 2013, Размер имеет значение: оптимальная калибровка оценщиков усадки для выбора портфеля, SSRN 1891847

Элтон, Э. Дж. Грuber, М. Дж., Падберг, М. В., 1976, «Простые критерии выбора оптимального портфеля», Journal of Finance 31, 5, стр. 1341-1357.

Faber, MT (2007), Количественный подход к тактическому распределению активов. Journal of Wealth Management, весна 2007 г. Обновление (2009 г.) как SSRN 962461.

Faber, MT (2010), Стратегии относительной силы для инвестирования, SSRN 1585517

Фам, Э.Ф., 1968, Риск, доход и равновесие: некоторые поясняющие комментарии, Финансовый журнал, 23, стр. 29-40,

Hallerbach, WG, 2013, Достижения в области управления портфельными рисками. Риск! Паритет?, SSRN 2259041

Херст, Б., Оои, Й. Х., Педерсон, Л. Х., 2012 г., Век доказательств в области инвестирования, следующий за трендом, рабочий документ, AQR Capital Management.

- Джейкобс Х., Мюллер С., Вебер М., 2013 г., Как следует диверсифицировать индивидуальных инвесторов? Эмпирическая оценка альтернативных политик распределения активов, SSRN 1471955.
- Джеггидиш Н., Титман, С., 1993, Доходы от покупки победителей и продажи проигравших: последствия для эффективности фондового рынка, *Journal of Finance* XLVIII, 65/91.
- Юфченко, Э., Мишель, Т., Тейлетче, Дж., 2013, Обобщенное инвестирование на основе рисков, SSRN 2205979
- Келлер, В. Дж. и Ван Гуттен, Х., 2012 г., Обобщенный импульс и гибкое распределение активов (FAA): эвристический подход, SSRN 2193735
- Келлер, В. Дж. и Ван Гуттен, Х., 2013 г., Tactical MPT и Momentum: современное распределение активов (MAA), SSRN 2373086.
- Крицман, М., Пейдж, С., Теркингтон, Д., 2010, В защиту оптимизации: ошибка  $1/N$ , журнал финансовых аналитиков 66-2, с. 31-39
- Ледуа, О., и Вольф, М., 2004. Дорогая, я уменьшил выборочную ковариационную матрицу: проблемы оптимизации с редней дисперсией. *Журнал управления портфелем* 30: 110-19
- Навроцкий, Д., 1996, Анализ портфеля с большим набором активов, *Прикладная экономика* 28, с. 1191-1198.
- Newfound, 2013, Распределение в условиях неопределенности: простые эвристики и сложные модели, статья, Новое исследование.
- Нидермайер, А., Нидермайер, Д., 2006, Применение алгоритма критической линии Марковица, Дискуссионный документ 06-02, Бернский университет, кафедра экономики.
- Майя, Р. С., Ронкалли, Т., Тейлетче, Дж., 2009 г., Освойства портфелей с равновзвешенными рисками, SSRN 1271972.
- Марковиц, Х. М., 1952, Анализ с редней дисперсии при выборе портфеля и рынках капитала, *Journal of Finance* 7, 77-91.
- Ронкалли, Т., 2013 г., Введение в паритет рисков и оставление бюджета, Серия статей Чепмена и Холла/CRC по финансовой математике.
- Шарп, В.Ф., 1963, Упрощенная модель анализа портфеля, *Наука управления*, Vol. 9, № 2, с. 277-293
- Шерер, Б., 2010 г., Новый взгляд на инвестирование с минимальной дисперсией, SSRN 1681306.
- Шон, Р. Дж., 2012 г., Паритетные стратегии и максимальная диверсификация, Putnam Investments, бумага, Putnam Investments
- Трейнор, Дж. Л., 1966, «Как оценить управление инвестиционными фондами», *Harvard Business Review* 43, с. 63-75.