

« آنچه از مباحث فصل ششم ریاضی هفتم آموخته ام »

سطح و حجم

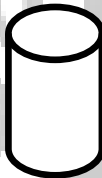
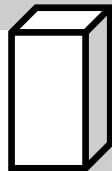
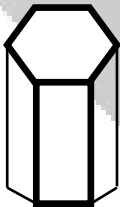
نکته ۱- حجم ها را می توان به دو دسته هندسی و غیر هندسی تقسیم کرد، حجم های هندسی شکل های مشخص و تعریف شده دارند.

نکته ۲- حجم های هندسی را می توان به سه دسته تقسیم کرد. منشوری - کروی - هرمی. بعضی از حجم های هندسی ترکیبی از این سه نوع هستند.

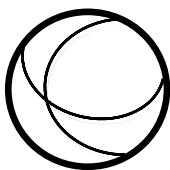
نکته ۳- حجم های منشوری بین دو صفحه موازی قرار می گیرند. به این دو سطح موازی که سطح منشوری را قطع می کنند، قاعده و به سطح های اطراف آن و جه های جانبی می گویند. به محل برخورد سطح ها یال به نقطه برخورد هر سه سطح رأس می گویند.

نکته ۴- ویژگی های حجم های منشوری:

بین دو صفحه موازی قرار می گیرند و دو قاعده دارد که این دو قاعده هم نهشت هستند و سطوح جانبی آنها به شکل مستطیل یا متوازی الاضلاع است و به تعداد سه برابر وجه های جانبی یال دارند و به تعداد دو برابر وجه های جانبی رأس دارد.



نکته ۵- ویژگی های حجم های کروی:



هیچ گونه رأس و وجه جانبی و یال و سطح و قاعده ندارند اما قطر دارند.

نکته ۶- حجم های هرمی:

همه وجه ها به جز قاعده در یک رأس مشترک اند و یک قاعده دارند که همه رئوس قاعده به آن وصل شده اند. به تعداد اضلاع قاعده، وجه جانبی دارند. وجوه جانبی به شکل مثلث هستند.



نکته ۷- برای اینکه در نام بردن یال و رأس چیزی از قلم نیفتد از راهبرد الگوسازی استفاده می شود.

نکته ۸- با حرکت یک سطح در فضا حجم ساخته می شود. همین کار را برای شکل های دیگر هم می توانیم انجام دهیم تا حجم های دیگری بسازیم.

نکته ۹- از خاصیت چرخاندن احجام در خراطی و تراشکاری و سفال گری برای ساختن حجم های مختلف استفاده می کنند.

نکته ۱۰- استوانه:

استوانه یک حجم منشوری است زیرا دو قاعده ی آن موازی و هم نهشت است و منشوری با قاعده ی دایره می باشد. دو دایره و یک مستطیل، مساحت کل استوانه را تشکیل می دهند. دایره ها قاعده ی استوانه است و استوانه دو قاعده دارد.

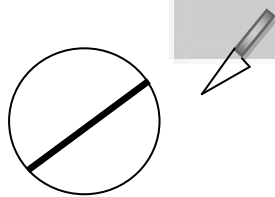


نکته ۱۱- مقطع زدن:

یک استوانه می سازیم و با یک قیچی یا چاقو آن را برش می دهیم و سطح برش خورده را رنگ می کنیم و روی یک کاغذ قرار می دهیم. اثر آن به صورت دایره یا بیضی مؤرب موازی با قاعده می ماند.



نکته ۱۲- قطع یک کره و یک استوانه هم شکل هستند زیرا در یک استوانه برش، موازی سطوح و قاعده می باشد. مقطع یک منشور و یک هرم هم شکل اند زیرا قاعده ها هم هم شکل هستند.



نکته ۱۳- اصل کاوالیری:

اگر قاعده های حجم منشوری را روی سطوح مربوطه جابه جا کنیم و بینشان فاصله ایجاد کنیم در حجم آنها تغییری حاصل نمی شود.

نکته ۱۴- بلورها کریستال های معدنی به طور طبیعی شکل می گیرند، ولی دارای حجم هندسی اند بعضی از بلورها ترکیبی از شکل های هرمی و منشوری هستند.

نکته ۱۵- فرمول محاسبه حجم: $V = Sh$ مساحت قاعده \times ارتفاع

نکته ۱۶- فرمول محاسبه مساحت کل: $S = S_{\text{جانبی}} + S_{\text{قاعده}}$ ۲ برابر

نکته ۱۷- فرمول محاسبه محیط دایره: $P = \pi r$

نکته ۱۸- فرمول محاسبه حجم مکعب: $V = a^3$ ضلع \times ضلع \times ضلع

نکته ۱۹- فرمول محاسبه حجم مکعب مستطیل: $V = a b c$ طول \times عرض \times ارتفاع

نکته ۲۰- فرمول محاسبه مساحت دایره: $S = \pi r^2$ $\frac{3}{14} \times (\text{شعاع} \times \text{شعاع})$

نکته ۲۱- فرمول محاسبه مساحت مربع: یک ضلع ضرب در خودش یا $(\text{قطر} \times \text{قطر}) \div 2$ $S = a^2$

نکته ۲۲- فرمول محاسبه مساحت مستطیل: $S = a b$ (عرض \times طول)

نکته ۲۳- فرمول محاسبه مساحت جانبی مکعب مستطیل: $S = 2 a c + 2 b c$ جانبی

نکته ۲۴- فرمول محاسبه مساحت جانبی: $S = p h$ جانبی

نکته ۲۵- فرمول محاسبه مساحت جانبی مکعب: $S = 4 a^2$ جانبی

نکته ۲۶- فرمول محاسبه مساحت لوزی: $(\text{قطر کوچک} \times \text{قطر بزرگ}) \div 2$

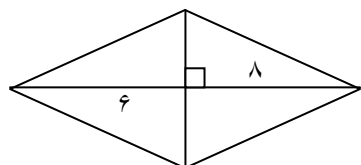
نکته ۲۷- فرمول محاسبه مساحت متوازی الاضلاع: ارتفاع \times قاعده

نکته ۲۸- فرمول محاسبه مساحت مثلث: $(\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}) \div 2$

نکته ۲۹- فرمول محاسبه مساحت دوزنقه: $(\text{ارتفاع} \times \text{مجموع دو قاعده}) \div 2$

نکته ۳۰- فرمول محاسبه مساحت مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین: $(\text{وتر} \times \text{وتر}) \div 4$ یا $2 \times (\text{ساق} \times \text{ساق})$

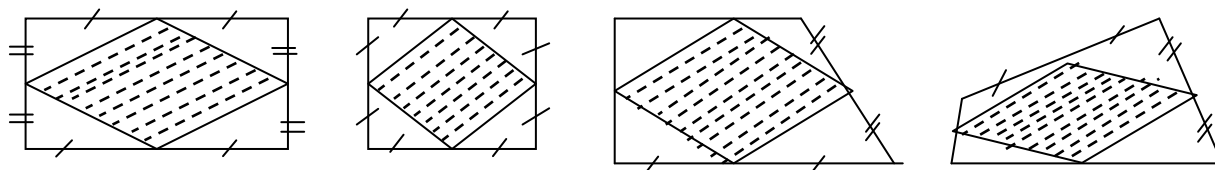
نکته ۳۱- اندازه ی مساحت هر چهار ضلع که قطرهايش بر هم عمود باشند مانند اندازه ی مساحت لوزی به دست می آید. مثال: مساحت این شکل را به دست آورید؟



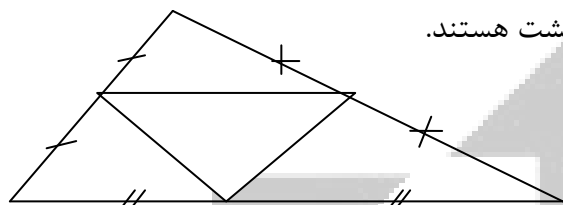
حل مسئله- $\text{مساحت} = \frac{8 \times 6}{2} = 24$

نکته ۳۲- اگر وسط های اضلاع یک چهار ضلعی را به هم وصل کنیم، مساحت چهار ضلعی به دست آمده نصف مساحت چهار ضلعی اولیه است و شکل ایجاد شده حتماً یکی از حالت های متوازی الاضلاع است.

مثال: در هر کدام از شکل های زیر، مساحت چهار ضلعی هاشور خورده نصف مساحت کل شکل است.



نکته ۳۳- اگر وسط های اضلاع یک مثلث را به هم وصل کنیم، به چهارمثلث هم نهشت تقسیم می شود.



مثال: در این شکل چهار مثلث به وجود آمده، هم نهشت هستند.

نکته ۳۴- اگر اندازه ی ضلع یا قطر مکعبی را A برابر کنیم، مساحت آن $A \times A$ برابر و حجم آن $A \times A \times A$ برابر می شود.

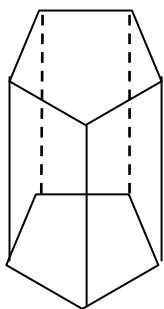
مثال: اگر اندازه ی ضلع یک مکعب را ۵ برابر کنیم، مساحت آن ۲۵ برابر ($5 \times 5 = 25$) و حجم آن ۱۲۵ برابر ($5 \times 5 \times 5 = 125$) می شود.

نکته ۳۵- اگر جسمی را داخل یک ظرف آب یا مایع دیگر بیندازیم، حجم جسم با حجم آب بالا آمده برابر است (به شرط اینکه آن جسم به زیر آب برود).

مثال: در ظرفی مکعب مستطیل شکل به طول ۳۰ سانتی متر و عرض ۲۰ سانتی متر مقداری آب ریخته ایم. گلوله ای آهنی داخل ظرف می اندازیم، ارتفاع آب داخل ظرف ۳ سانتی متر بالا می آید. حجم گلوله چند سانتی متر مکعب است؟ ارتفاع آب بالا آمده \times عرض ظرف \times طول ظرف = حجم آب بالا آمده = حجم گلوله

حل مسئله- سانتی متر مکعب $30 \times 20 \times 3 = 1800$ = حجم گلوله

در بعضی سؤالات به جای طول و عرض ظرف، مساحت قاعده ی ظرف را می دهند که همان حاصل ضرب طول و عرض ظرف است.



نکته ۳۶- تعداد یال های یک منشور با قاعده ی چند ضلعی، سه برابر تعداد اضلاع آن است.

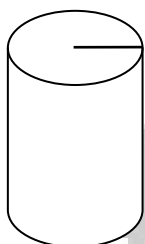
مثال: منشور ۵ پهلو، ۱۵ یال دارد. ($۳ \times ۵ = ۱۵$).

نکته ۳۷- تعداد رأس های یک منشور با قاعده ی چند ضلعی، دو برابر تعداد اضلاع آن است.

مثال: منشور ۵ پهلو، ۱۰ رأس دارد ($۲ \times ۵ = ۱۰$).

نکته ۳۸- منظور از مساحت جانبی چیست؟

به مساحت دور تا دور یک حجم، مساحت جانبی گفته می شود. ارتفاع \times محیط قاعده = مساحت جانبی



مثال: مساحت جانبی این شکل را به دست آورید؟

$$۱۵۷۰ = ۶۲/۸ \times ۲۵ = \text{مساحت جانبی} \quad ۶۲/۸ = ۲ \times ۳/۱۴ \times ۱۰ = \text{محیط قاعده}$$

نکته ۳۹- منظور از مساحت کل چیست؟

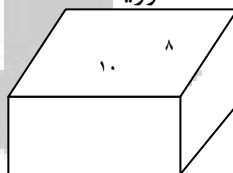
به مجموع مساحت جانبی و مساحت ۲ قاعده ی بالا و پایین یک حجم، مساحت کل گفته می شود.

مساحت کل مکعب، شش برابر مساحت یک وجه آن است.

$$۸۰ = ۱۰ \times ۸ = \text{مساحت قاعده}$$

مثال: مساحت کل این شکل را به دست آورید؟

$$۳۴۰ = (۲ \times ۸۰) + ۱۸۰ = \text{مساحت کل}$$



حل مسئله-

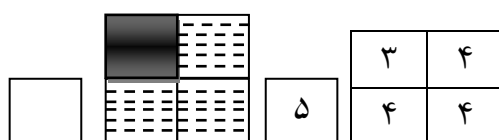
نکته ۴۰- روش محاسبه مساحت (تعداد وجوه رنگی) در حجم های ناقص:

برای به دست آوردن تعداد وجوه رنگی در شکل های ناقص، طبقات را از بالا به پایین رسم می کنیم و تعداد وجوه رنگی هر مکعب را داخل آن می نویسیم. برای راحتی کار مکعب هایی را که سقف آنها رنگ می شود هاشور زده ایم و مکعب هایی را که کف آنها رنگ می شود قرمز رنگ کرده ایم.

مثال: مساحت این شکل چند واحد است؟

حل مسئله- طبقات را از بالا رسم می کنیم و طبق قانونی که گفتیم تعداد وجه های آزاد هر مکعب را

داخل آن می نویسیم.



۳	۴
۴	۴

$$\rightarrow \text{مساحت کل} = ۵ + ۳ + ۴ + ۴ + ۴ = ۲۰$$

