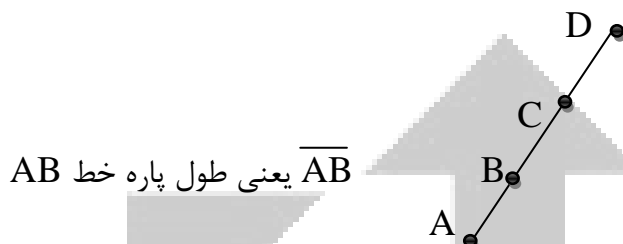


« آنچه از مباحث فصل چهارم ریاضی هفتم آموخته ام »

هندسه و استدلال

نکته ۱- در ریاضیات برای نام گذاری شکل ها از حروف انگلیسی استفاده می کنیم. به طور معمول نقطه را با حروف بزرگ انگلیسی نام گذاری می کنیم و برای نام گذاری امتداد خط که در شکل با فلش نشان می دهیم از حروف کوچک استفاده می کنیم. طول یک پاره خط را با قرار دادن یک پاره خط کوچک در بالای نام آن نمایش می دهیم.

مثال:



نکته ۲- برای بدست آوردن تعداد پاره خط هایی که روی یک خط قرار دارند، از رابطه زیر استفاده می کنند.

$$\text{تعداد پاره خط ها} = \frac{((\text{تعداد نقطه ها} - 1) \times \text{تعداد نقطه ها})}{2}$$

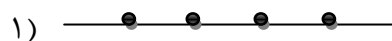
مثال: در این شکل چند پاره خط وجود دارد؟

حل مسئله -

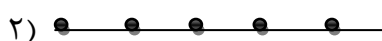
$$\text{تعداد پاره خط ها} = \frac{(7 \times 6)}{2} = 21$$

نکته ۳- برای بدست آوردن تعداد نیم خط هایی که روی یک خط قرار دارند، اگر خط از دو طرف باز باشد، تعداد نقطه ها را دو برابر می کنیم و اگر نیم خط باشد یعنی از یک طرف باز باشد فقط کافیست که تعداد نقطه ها را بشماریم.

مثال: در این شکل ها چند نیم خط وجود دارد؟



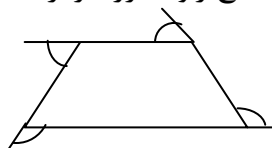
۱) $4 \times 2 = 8$ = تعداد نیم خط ها



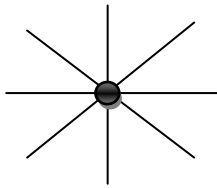
۲) 5 = تعداد نیم خط ها

نکته ۴- چند ضلعی هایی که هیچ زاویه بزرگتر از 180° ندارند محدب نامیده می شوند یعنی مربع چهار

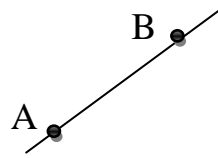
ضلعی. مثال:



نکته ۵- از هر نقطه واقع در یک صفحه تعداد بی شماری خط می گذرد، ولی از دو نقطه فقط یک خط

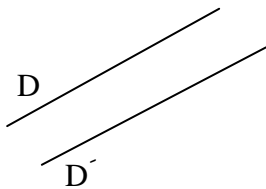


می گذرد.



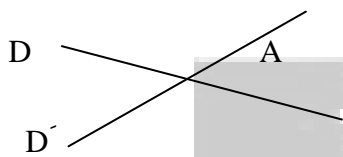
مثال:

نکته ۶- وضعیت دو خط نسبت به هم:



دو خط در صفحه نسبت به هم دو حالت دارند.

۱- موازی: دو خط که هیچ نقطه مشترکی ندارند موازی اند.

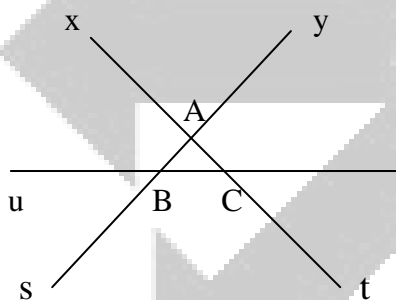


۲- متقاطع: دو خط که فقط در یک نقطه مشترک اند، متقاطع اند.

نکته ۷- اگر دو خط بیش از یک نقطه مشترک داشته باشند، بر هم منطبق اند.

نکته ۸- خط از دو طرف امتداد دارد و نیم خط از یک طرف امتداد دارد و از طرف دیگر به یک نقطه

محدود است و پاره خط از دو طرف محدود است.



مثال: در شکل مقابل نیم خط ها و پاره خط ها را نام ببرید؟

پاره خط ها: BC, AC, AB

نیم خط ها: $Cz, Ct, Cu, Cx, Bz, Bu, Bs, By, At, As, Ay, Ax$

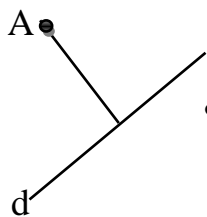
نکته ۹- فاصله دو نقطه:



اندازه ی پاره خطی که دو نقطه را به هم وصل می کند، فاصله دو نقطه نام دارد. مثال:

نکته ۱۰- فاصله نقطه تا خط:

اندازه ی پاره خطی که از نقطه بر خط، عمود می شوند، فاصله نقطه تا خط نام دارد.
مثال: اگر $\overline{AB} = \overline{CD}$ و $\overline{CD} = \overline{EF}$ باشند، درباره ی \overline{AB} و \overline{EF} چه می توان گفت؟



$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{CD} \\ \overline{CD} = \overline{EF} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{EF}$$

حل مسئله -

نکته ۱۱- واحدهای اندازه گیری طول:

برای اندازه گیری طول از واحدهای مختلفی مانند میکرون و میلی متر و سانتی متر و متر و کیلومتر استفاده می شود که رابطه این واحدها به این صورت است.

$$1\text{ m} = 100\text{ cm} \Rightarrow \text{صد سانتی متر} = \text{یک متر}$$

$$1\text{ cm} = 10\text{ mm} \Rightarrow \text{ده میلی متر} = \text{یک سانتی متر}$$

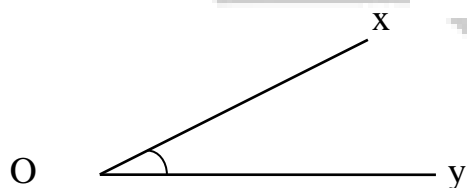
$$1\text{ mm} = 1000\text{ M} \Rightarrow \text{هزار میکرون} = \text{یک میلی متر}$$

$$1\text{ Km} = 1000\text{ m} \Rightarrow \text{هزار متر} = \text{یک کیلومتر}$$

نکته ۱۲- زاویه:

اگر دو نیم خط در مبدأ مشترک باشند و بر هم منطبق نباشند، در صفحه ناحیه ای را به وجود می آورند که زاویه نامیده می شود. مبدأ مشترک دو نیم خط رأس زاویه و هر کدام از نیم خط ها ضلع زاویه می باشند.

زاویه را به چهار صورت می خوانند.



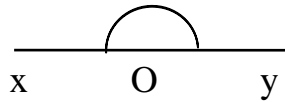
۱- با حرف رأس \hat{O}

۲- با شماره $\hat{1}$

۳- با حرف رأس و شماره \hat{O}_1

۴- به صورت سه حرفی \hat{xOy}

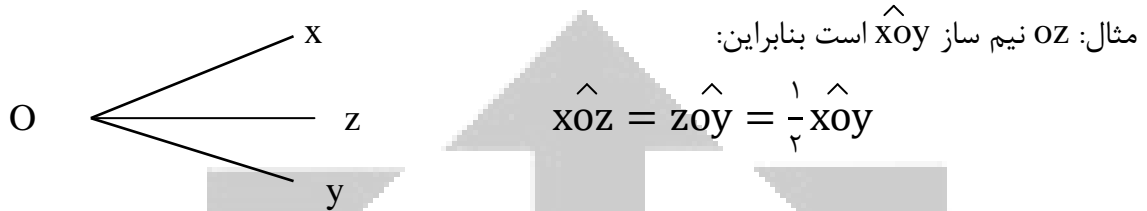
نکته ۱۳ - زاویه نیم صفحه:



زاویه ای که دو ضلع آن در امتداد یک دیگر باشند، زاویه نیمه صفحه نام دارد.

نکته ۱۴ - نیم ساز زاویه:

نیم خطی که از رأس یک زاویه رسم شود و آن را به دو زاویه مساوی تقسیم کند، نیم ساز نامیده می شود.

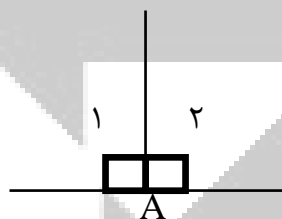


نکته ۱۵ - واحد اندازه گیری زاویه (درجه):

اگر زاویه نیم صفحه را به ۱۸۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت یک درجه نامیده می شود.

نکته ۱۶ - زاویه قائمه:

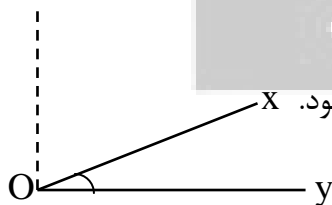
اگر نیم ساز یک زاویه نیم صفحه را رسم کنیم آن را به ۲ قسمت مساوی تقسیم می کند که هر قسمت یک زاویه قائمه نامیده می شود.



مثال:

$$A_1 = A_2 = 90^\circ$$

نکته ۱۷ - زاویه حاده (تند):

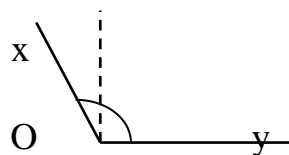


زاویه ای که از زاویه قائمه کوچکتر باشد، زاویه حاده یا تند نامیده می شود.

مثال:

نکته ۱۸ - زاویه منفرجه (باز):

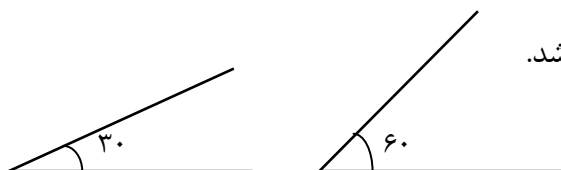
زاویه ای که از زاویه قائمه بزرگتر و از زاویه نیم صفحه کوچکتر باشد، زاویه باز یا منفرجه نامیده می شود.



مثال:

نکته ۱۹- دو زاویه متمم:

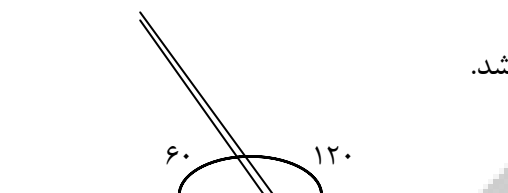
دو زاویه را متمم می گویند که مجموعشان برابر 90° باشد.



مثال: $30 + 60 = 90$

نکته ۲۰- دو زاویه مکمل:

دو زاویه را مکمل می گویند که مجموعشان برابر 180° باشد.



مثال: $120 + 60 = 180$

نکته ۲۱- اگر متمم دو زاویه مساوی باشد، خود آن دو زاویه زیر مساوی اند.

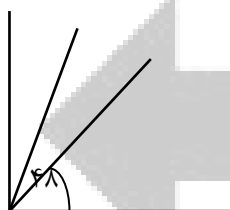
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{C} = 90^\circ \\ \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$$

مثال: تفاضل دو زاویه متمم 48° است اندازه ی هر زاویه چقدر است؟

حل مسئله - دو برابر زاویه کوچکتر $90^\circ - 48^\circ = 42^\circ$

زاویه کوچک $42^\circ \div 2 = 21^\circ$

$90^\circ - 21^\circ = 69^\circ$



نکته ۲۲- اگر مکمل دو زاویه مساوی باشد، خود آن دو زاویه هم مساوی اند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$$

مثال: دو زاویه متمم یک دیگراند و اندازه ی یکی ۴ برابر دیگری است آن دو زاویه کدامند؟ $1 + 4 = 5$

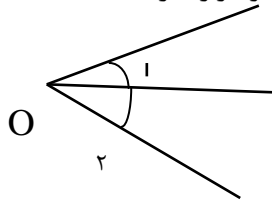
$$\frac{1}{5} = \frac{x}{90} \rightarrow x = \frac{1 \times 90}{5} = 18$$

حل مسئله -

$90 - 18 = 72$

نکته ۲۳- دو زاویه مجاور:

دو زاویه که در رأس و یک ضلع مشترک هستند و ضلع مشترک بین دو ضلع دیگر قرار دارد.

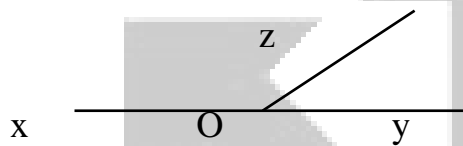


مثال:

نکته ۲۴- دو زاویه مجانب:

دو زاویه ای که مجاور هستند و مجموعشان 180° است. هر دو زاویه مجانب، مکمل هم هستند؛ اما

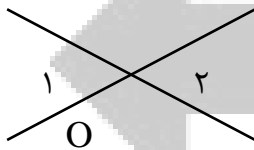
عکس این مطلب درست نیست.



مثال: \hat{xOz} و \hat{zOy} مجانب اند.

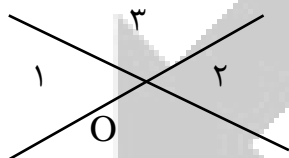
نکته ۲۵- دو زاویه متقابل به رأس:

دو زاویه ای که در رأس مشترک هستند و اضلاعشان در امتداد یکدیگر است.



مثال: \hat{O}_1 و \hat{O}_2 متقابل به رأس اند.

مثال: ثابت کنید دو زاویه متقابل به رأس با هم برابراند.

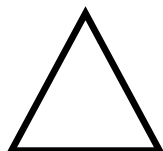


$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 + \hat{O}_3 = 180^\circ \\ \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

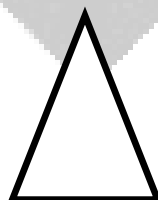
حل مسئله -

نکته ۲۶- هر مثلث متساوی الساقین، متساوی الاضلاع نیست زیرا در مثلث متساوی الساقین قاعده باید

بزرگتر یا کوچکتر از ساق باشد.



متساوی الاضلاع

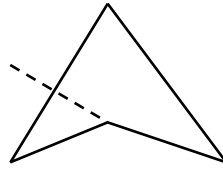
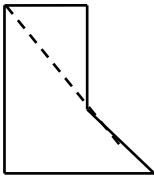


متساوی الساقین

مثال:

نکته ۲۷- به چند ضلعی که دست کم یک زاویه بزرگتر از 180° داشته باشد، چند ضلعی مقعری می گویند.

مثال:



نکته ۲۸- مجموعه زوایای داخلی یک چند ضلعی برابر است با:

مثال: مجموع زوایای داخلی یک شش ضلعی چقدر است؟

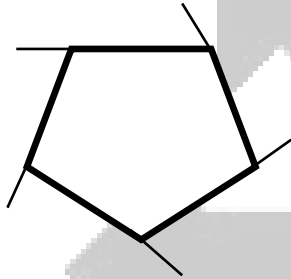
$$(2 - \text{تعداد اضلاع}) \times 180^\circ$$

حل مسئله -

$$(6 - 2) \times 180^\circ = 720^\circ$$

نکته ۲۹- مجموع زوایای خارجی هر چند ضلعی محدب 360° است.

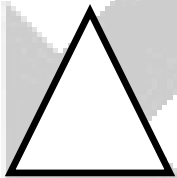
مثال:



نکته ۳۰- چند ضلعی منتظم:

به چند ضلعی ای می گویند که تمام اضلاع آن با هم و تمام زاویه های آن با هم برابر باشند. مثل سه ضلعی منتظم مثلث متساوی الاضلاع و چهار ضلعی منتظم مربع

مثال:



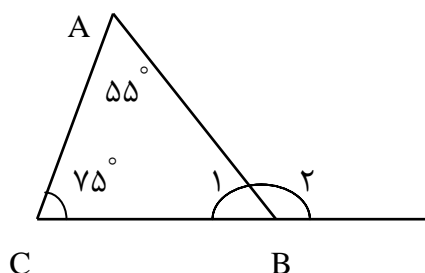
نکته ۳۱- هر زاویه داخلی یک چند ضلعی منتظم برابر است با:

$$\frac{(2 - \text{تعداد اضلاع}) \times 180^\circ}{\text{تعداد اضلاع}}$$

$$\frac{(8 - 2) \times 180^\circ}{8} = 135^\circ$$

مثال: هر زاویه داخلی یک ۸ ضلعی منتظم چقدر است؟

نکته ۳۲- در هر مثلث اندازه ی هر زاویه ی خارجی با مجموع اندازه های دو زاویه داخلی غیر مجاور برابر است.



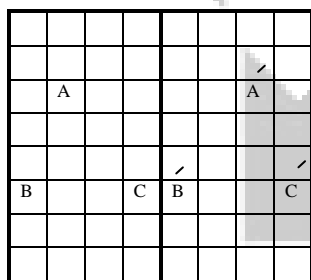
مثال: $\hat{B}_1 = \hat{A} + \hat{C} = 55^\circ + 75^\circ = 130^\circ$

نکته ۳۳- اگر یکی از زاویه های داخلی یک چند ضلعی منتظم مشخص باشد، برای بدست آوردن تعداد اضلاع آن چند ضلعی، آن زاویه را از 180° کم می کنیم تا اندازه ی زاویه ی خارجی به دست آید. سپس 360° را بر حاصل تفریق تقسیم می کنیم تا تعداد اضلاع مشخص شود.

مثال: یکی از زاویه های داخلی یک چند ضلعی منتظم 120° است. این شکل چند ضلعی است؟

شکل یک شش ضلعی منتظم است. $360^\circ \div 60^\circ = 6$ $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

نکته ۳۴- وقتی شکل را روی صفحه انتقال می دهیم، تصویر به دست آمده مساوی و هم جهت شکل اولیه است. وقتی قرینه شکلی را نسبت به یک خط پیدا می کنیم، تصویر به دست آمده مساوی آن شکل است اما جهت آن تغییر می کند. مثال:

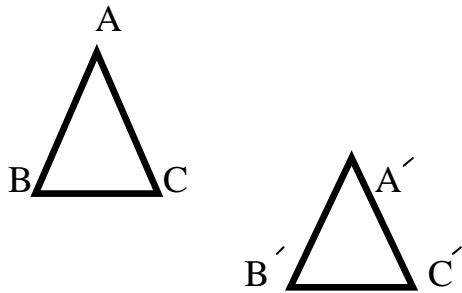


نکته ۳۵- در هندسه به داده های مسئله فرض و به سؤال مسئله حکم می گویند.

نکته ۳۶- مثلث سه ضلع و سه زاویه دارد که حالت های تساوی دومتثل همان حالت های رسم آن است.

۱- سه ضلع (ض ض ض) ۲- دو ضلع و زاویه بین (ض ض ض) ۳- دو زاویه و ضلع بین (ز ز ز)

نکته ۳۷- دو مثلثی که بر هم منطبق می شوند و یکدیگر را کاملاً می پوشانند، دو مثلث هم نهشت و یا مساوی هستند.



مثال:

نکته ۳۸- عقربه ساعت شمار در هر ساعت 30° می چرخد، زیرا:
ساعت یک دور کامل $360^\circ \div 12 = 30^\circ$

همچنین عقربه دقیقه شمار در هر دقیقه 6° می چرخد، زیرا:
دقیقه یک دور کامل $360^\circ \div 60 = 6^\circ$

سرعت عقربه دقیقه شمار، ۱۲ برابر سرعت عقربه ساعت شمار است؛ زیرا در طی زمانی که عقربه دقیقه شمار یک دور کامل می زند، عقربه ساعت شمار، فاصله بین دو ساعت متوالی (۱ دور کامل) را طی می کند.
۱۲

نکته ۳۹- برای تعیین زاویه بین دو عقربه ساعت شمار و دقیقه شمار باید ساعت را در 30° و دقیقه را در 11° یا $5/5$ ضرب کرده سپس جواب ها را از هم کم می کنیم.
۲

مثال: در ساعت ۳:۲۲، زاویه بین دو عقربه ساعت شمار و دقیقه شمار چند درجه است؟
حل مسئله - $3 \times 30^\circ = 90^\circ$

$$22 \times \frac{11^\circ}{2} = 121^\circ$$

$$121^\circ - 90^\circ = 31^\circ$$

- اگر جواب نهایی از 180° بیشتر باشد آن را از 360° کم کنیم.

نکته ۴۰- در یک مثلث همیشه اندازه ی یک ضلع از مجموع اندازه های دو ضلع دیگر کوچکتر و از اختلافشان بزرگتر است.

مثال: با کدام یک از اندازه های زیر می توان یک مثلث رسم کرد؟

$$۱- ۶ و ۷ و ۱۳ \quad ۶ + ۷ = ۱۳$$

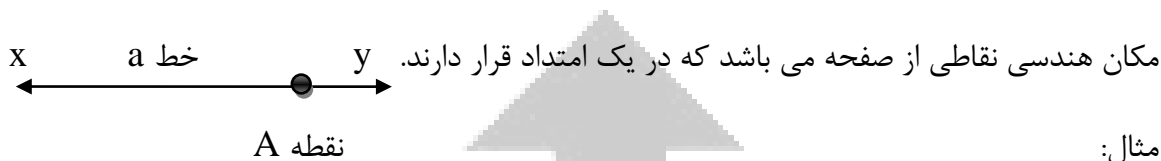
$$۲- ۹ و ۸ و ۱۵ \quad ۸ + ۹ > ۱۵$$

$$۳- ۴ و ۵ و ۱۰ \quad ۵ + ۴ < ۱۰$$

$$۴- ۱۴ و ۳ و ۸ \quad ۸ + ۳ < ۱۴$$

- فقط در گزینه (۲) مجموع اندازه ی دو ضلع کوچکتر از اندازه ی ضلع بزرگتر، بیشتر است.

نکته ۴۱- خط:



نکته ۴۲- تبدیلات هندسی:

۱- تقارن: قرینه نسبت به یک خط تقارن محوری می باشد.

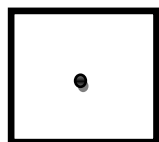
۲- انتقال: جهت و اندازه تغییر نمی کند.

۳- دوران: قرینه نسبت به یک نقطه که تقارن مرکزی (دوران) می شود.

نکته ۴۳- مرکز تقارن:

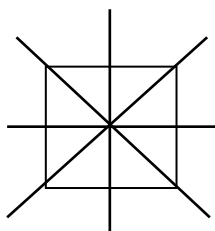
مرکز تقارن یک شکل نقطه ای است درون شکل که قرینه هر نقطه از محیط شکل نسبت به آن (باز)

نقطه ای از محیط می شود. مثال:



نکته ۴۴- محور تقارن:

محور تقارن یک شکل خطی است درون شکل که شکل را به دو قسمت کاملاً قرینه تقسیم می کند.



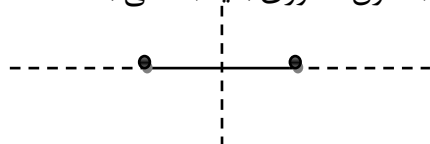
مثال:

نکته ۴۵- تقارن مرکزی:

اندازه ثابت است ولی جهت تغییر می کند. مثال:



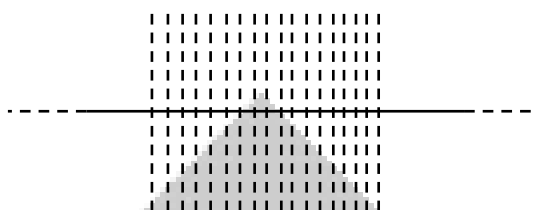
نکته ۴۶- تعداد خطوط تقارن بعضی از شکل های معروف: (تقارن محوری) یا (خطی)



- پاره خط: ۲ تا

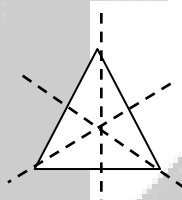


- نیم خط: یکی

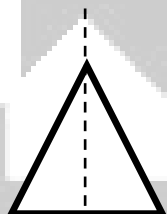


- خط: بی شمار

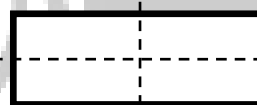
- مثلث متساوی الاضلاع: ۳ تا



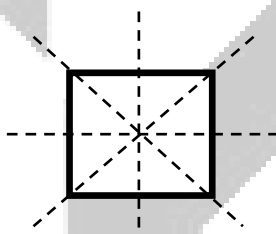
- مثلث متساوی الساقین: یکی



- مستطیل: ۲ تا



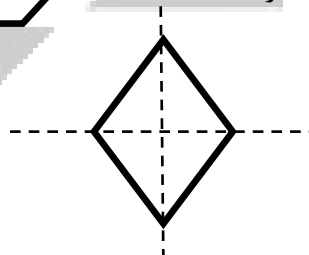
- مربع: ۴ تا



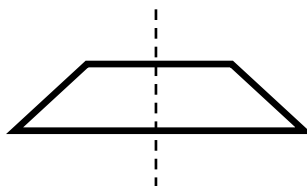
- متوازی الاضلاع: ندارد



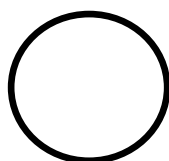
- لوزی: ۲ تا



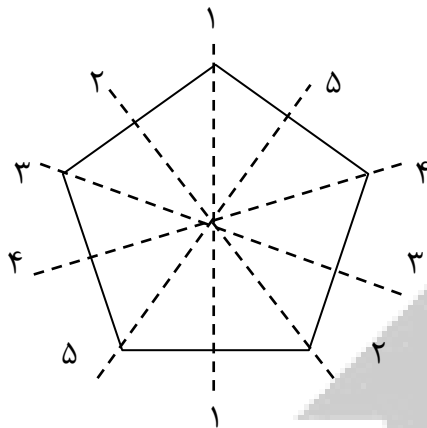
- دوزنقه متساوی الساقین: یکی



- دایره: بی شمار



نکته ۴۷- هر چند ضلعی منتظم به تعداد اضلاعش خط تقارن دارد مثلاً سه ضلعی منتظم (مثلث متساوی الاضلاع) سه خط تقارن، چهار ضلعی منتظم (مربع ۴ خط تقارن) و پنج ضلعی منتظم ۵ خط تقارن دارد.

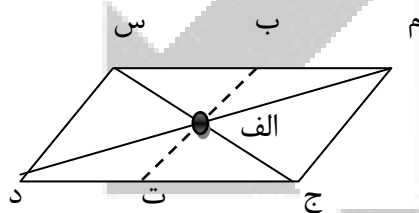


مثال: پنج ضلعی منتظم

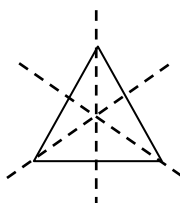
نکته ۴۸- تقارن مرکزی (نقطه ای):

اگر همه نقاط یک شکل نسبت به یک نقطه متقارن باشد، آن شکل مرکز تقارن دارد. مثلاً متوازی الاضلاع با اینکه خط تقارن ندارد، مرکز تقارن دارد و محل برخورد قطرهای متوازی الاضلاع مرکز تقارن آن است.

مثال: در شکل مقابل قرینه نقاط « م »، « ب » و « س » نسبت به نقطه « الف » (مرکز تقارن) به ترتیب نقاط « د »، « ت » و « ج » هستند.



نکته ۴۹- چند ضلعی هایی که تعداد اضلاعشان فرد است، مرکز تقارن ندارند. مثلاً مثلث متساوی الاضلاع با اینکه سه خط تقارن دارد، مرکز تقارن ندارد.

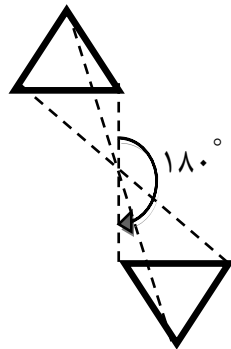


مثال:

نکته ۵۰- دوران:

منظور از دوران، چرخاندن یک شکل حول یک نقطه مشخص با زاویه ای مشخص است.

اگر یک شکل را 180° حول نقطه ای مشخص دوران دهیم، قرینه مرکزی آن شکل نسبت به آن نقطه به دست می آید.



مثال:

نکته ۵۱- اگر زاویه دوران ضربی از 180° باشد جهت دوران اهمیتی ندارد چون در هر صورت نتیجه یکی خواهد شد اما اگر زاویه دوران ضربی از 180° نباشد جهت دوران باید مشخص باشد یعنی مشخص شود که دوران ساعت گرد است (در جهت عقربه های ساعت) یا پاد ساعت گرد (مخالف جهت حرکت عقربه های ساعت).

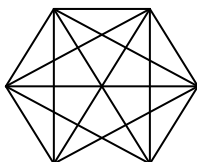


مثال:

اگر زاویه دوران ضربی از 360° باشد، شکل دوران یافته روی شکل اصلی می افتد یعنی دقیقاً بر آن منطبق می شود.

نکته ۵۲- تعداد قطرهای یک چندضلعی برابر است با:
$$\frac{(3 - \text{تعداد اضلاع}) \times \text{تعداد اضلاع}}{2}$$

مثال: تعداد قطرهای یک شش ضلعی برابر است با: $9 = \frac{6 \times (6 - 3)}{2}$ یعنی شش ضلعی ۹ قطر دارد.



نکته ۵۳- هم نهشتی:

هر گاه دو شکل به کمک یک یا چند تبدیل هندسی بر هم منطبق شوند آن گاه دو شکل هم نهشت اند و بر عکس.

نکته ۵۴- هر گاه دو شکل هم نهشت باشند آن گاه اجزای متناظر آن ها با هم برابرند و بر عکس.

نکته ۵۵- در هم نهشتی ها، اولویت اول با تعداد اضلاع است.