آکادمی کنکور دورخیز

جزوه ریاضی هشتم

خلاصه درس و نکات

بسم الله الرحمن رحیم

درس اول: معرفی مجموعه

● مجموعه چیست؟ هر دسته‌ی کاملاً مشخص و غیرتکراری از اشیاء را یک مجموعه می‌گویند و هر یک از آن اشیاء را عضو مجموعه می‌نامند.

منظور از عبارت «کاملاً مشخص» چیست؟ به مثال زیر توجه کنید.

کدام‌یک از تعریف‌های زیر، یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

الف) چهار عدد زوج متوالی　　　ب) اعداد اول یک‌رقمی

تعریف «الف» دارای بی‌شمار جواب است، چون جواب‌ها می‌تواند سلیقه‌ای باشد.

۲,۴,۶,۸ یا ۴,۶,۸,۱۰ یا ۳۰,۳۲,۳۴,۳۶ یا ...,۱۰۰۲,۱۰۰۴,۱۰۰۶,۱۰۰۸

بنابراین چهار عدد زوج متوالی نمی‌توانند یک مجموعه را مشخص کنند.

اما تعریف «ب» فقط یک جواب دارد (این‌جا دیگر جواب سلیقه‌ای نداریم).　　۲,۳,۵,۷

بنابراین تعریف «ب» یک مجموعه را مشخص می‌کند.

● مجموعه‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی A، B، C و... نام‌گذاری می‌کنند. عضوهای یک مجموعه را داخل این علامت‌ها { } قرار می‌دهند که به آن‌ها «آکلاد» می‌گویند.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک‌رقمی را به صورت اعضا بنویسید.

$A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

● هر یک از عددهای ۱، ۲، ۳ و ... و ۹ را عضو مجموعه‌ی A می‌گوییم. علامت عضویت یا عضوبودن در یک مجموعه را با نماد $\in$ و علامت عضونبودن در یک مجموعه را با نماد $\notin$ نشان می‌دهیم.

برای مثال در مجموعه‌ی A:

عدد ۲ عضو مجموعه‌ی A است که به صورت ریاضی می‌نویسیم:　　$۲\in A$

عدد ۱۰ عضو مجموعه‌ی A نیست که به صورت ریاضی می‌نویسیم:　　$۱۰\notin A$

در مجموعه، ترتیب نوشتن عضوها مهم نیست، یعنی با جابجایی عضوهای یک مجموعه، مجموعه‌ی جدیدی مشخص نمی‌شود.

برای مثال مجموعه‌ی $A=\{۳,۵,۷\}$ را می‌توان به صورت‌های زیر نشان داد.

$A=\{۳,۵,۷\}$ یا $A=\{۵,۳,۷\}$ یا $A=\{۷,۵,۳\}$

همان‌طور که در تعریف مجموعه گفتیم عضوهای یک مجموعه باید غیرتکراری باشند، پس در مجموعه، عضوهای تکراری فقط یک عضو حساب می‌شوند (یک بار نوشته می‌شوند).

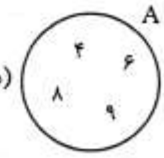
مجموعه‌ی $A=\{۲,۳,۵,۲,۵,۷\}$ دارای چهار عضو است، یعنی:　　$A=\{۲,۳,۵,\cancel{۲},\cancel{۵},۷\}=\{۲,۳,۵,۷\}$

● یکی از روش‌های نشان‌دادن مجموعه‌ها، نمایش هندسی یا «نمودار ون» است. در این روش عضوهای مجموعه را داخل یک منحنی بسته قرار می‌دهیم.

اگر A مجموعه‌ی اعداد مرکب یک‌رقمی باشد، آن را به دو صورت نمایش دهید.

الف) $A=\{۴,۶,۸,۹\}$

ب)



در قسمت «ب» مجموعه‌ی A را به صورت نمایش هندسی یا نمودار وِن نشان داده‌ایم.

اگر تعداد عضوهای یک مجموعه قابل شمارش باشد، آن مجموعه را «متناهی» یا «باپایان» می‌گوییم و اگر تعداد عضوهای یک مجموعه غیرقابل شمارش باشد، آن مجموعه را «نامتناهی» یا «بی‌پایان» می‌گوییم.

مجموعه‌های زیر «متناهی» یا «باپایان» هستند.

الف) مجموعه‌ی اعداد طبیعی دورقمی $A=\{۱۰,۱۱,۱۲,\ldots,۹۹\}$

ب) مجموعه‌ی حروف الفبای فارسی $B=\{$آ, ب, پ, ت, … , ی$\}$

مجموعه‌های زیر «نامتناهی» یا «بی‌پایان» هستند.

الف) مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,\ldots\}$

ب) مجموعه‌ی اعداد صحیح منفی کوچک‌تر از ۹- $C=\{\ldots,-۱۳,-۱۲,-۱۱,-۱۰\}$

نماد … یعنی عضوهای مجموعه به همین صورت ادامه پیدا می‌کنند.

● مجموعه‌ای که عضو نداشته باشد، مجموعه‌ی تهی نامیده می‌شود. مجموعه‌ی تهی را با نماد $\{\ \}$ یا $\varnothing$ نمایش می‌دهیم.

هیچ‌گاه مجموعه‌ی تهی را با این نماد $\{\varnothing\}$ نشان ندهید (غلط است).

● هر یک از مثال‌های زیر، مجموعه‌ی تهی را مشخص می‌کنند.

الف) مجموعه‌ی انسان‌هایی که در کره‌ی ماه زندگی می‌کنند.

ب) مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱

ج) مجموعه‌ی اعداد اول زوج دورقمی

● مجموعه‌ای که فقط دارای یک عضو باشد، مجموعه‌ی یک‌عضوی نامیده می‌شود. مانند مجموعه‌های زیر:

الف) مجموعه‌ی اعداد اول زوج $A=\{۲\}$

ب) مجموعه‌ی اعداد صحیح که نه مثبت هستند و نه منفی $B=\{۰\}$

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

دو مجموعه‌ی برابر: دو مجموعه‌ی A و B را مساوی می‌گوییم، در صورتی که هر عضو A، عضو B باشد و هر عضو B نیز عضو A باشد.

مجموعه‌های A و B با هم برابرند. $B=\{۷,۵,\sqrt{۹}\}$ $A=\{۳,۵,۷\}$

x و y را تعیین کنید تا دو مجموعه‌ی A و B برابر باشند. $B=\{y-۱,۷,۵\}$ $A=\{۷,x+۱,۲\}$

عدد ۷ عضو هر دو مجموعه است. باید عدد ۲ عضو B و عدد ۵ عضو A باشد تا دو مجموعه برابر شوند.

$x+۱=۵ \Rightarrow x=۵-۱=۴ \Rightarrow x=۴$

$y-۱=۲ \Rightarrow y=۲+۱ \Rightarrow y=۳$

کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با مجموعه‌ی A برابر است؟

$D=\{۲a,b,c\}$ $C=\{a,c,b,۲,a,b\}$ $B=\{a,۲,b,d\}$ $A=\{a,۲,b,c\}$

مجموعه‌ی A با B مساوی نیست، چون در مجموعه‌ی B عضو d هست و در مجموعه‌ی A نیست و در مجموعه‌ی A عضو c هست که در مجموعه‌ی B نیست. پس: $A\neq B$

مجموعه‌های A و C برابرند، زیرا: $C=\{a,c,b,۲,\cancel{a},\cancel{b}\}=\{a,c,b,۲\}$

یعنی هر عضو A در C هست و برعکس. پس: $A=C$

مجموعه‌ی D با مجموعه‌ی A برابر نیست، چون D دارای ۳ عضو و A دارای ۴ عضو است. پس: $A\neq D$

زیرمجموعه: دو مجموعه‌ی A و B را در نظر بگیرید. $B=\{۲,۳,۵,۷\}$ $A=\{۳,۵,۷\}$

همان‌طور که می‌بینید هر عضو A در مجموعه‌ی B هست، بنابراین می‌گوییم، مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌ی B است و به زبان ریاضی می‌نویسیم:

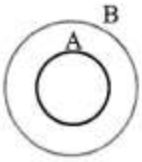
$A\subseteq B$

نماد $\subseteq$ نشانه‌ی زیرمجموعه‌بودن و نماد $\nsubseteq$ نشانه‌ی زیرمجموعه‌نبودن است. در دو مجموعه‌ی بالا، عدد ۲ عضو مجموعه‌ی B است اما عضو A نیست، بنابراین مجموعه‌ی B زیرمجموعه‌ی A نیست. این مطلب را به زبان ریاضی می‌نویسیم: $B\nsubseteq A$

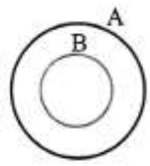
هر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی خودش است. $A\subseteq A\,,B\subseteq B\,,\varnothing\subseteq\varnothing$

مجموعه‌ی تهی زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها است. $\varnothing \subseteq A , \varnothing \subseteq B , \varnothing \subseteq \varnothing$

رابطه‌های $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ را با نمودار ون نمایش دهید.



$A \subseteq B$



$B \subseteq A$

با توجه به سه مجموعه‌ی A، B و C، درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید.

$A = \{-۴,۲,۷\}$　　$B = \{۷,-۴,۲,۳\}$　　$C = \{۳,۷,۲,-۴\}$

☐ الف) $A \subseteq B$　　☐ ب) $B \subseteq A$　　☐ ج) $A \subseteq C$

☐ د) $B \subseteq C$　　☐ هـ) $C \subseteq B$　　☐ و) $B = C$

☐ ز) $C \nsubseteq A$　　☐ ح) $A \nsubseteq C$　　☐ ط) $A = C$

الف) ✓　　ب) ✗　　ج) ✓

د) ✓　　هـ) ✓　　و) ✓

ز) ✓　　ح) ✗　　ط) ✗

با توجه به مثال بالا درمی‌یابیم که اگر:

$$\left.\begin{matrix} B \subseteq C \\ C \subseteq B \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow B = C$$

این علامت $\Leftrightarrow$ نتیجه‌گیری دوطرفه است یعنی اگر دو مجموعه‌ی B و C زیرمجموعه‌ی یکدیگر باشند، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم که دو مجموعه برابرند و برعکس، اگر دو مجموعه‌ی B و C برابر باشند، آن‌گاه این دو مجموعه زیرمجموعه‌ی یکدیگرند.

اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ باشد، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم که $A \subseteq C$ است.

اگر $A = \{۲,۳\}$ و $B = \{۵,۲,۳\}$ باشد، داریم $A \subseteq B$ و اگر $C = \{۷,۳,۲,۵\}$ باشد، آن‌گاه $B \subseteq C$ است. پس می‌توان نتیجه گرفت که $A \subseteq C$ است.

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه:

تمامی زیرمجموعه‌های $A = \{۲,۳\}$ را بنویسید.

می‌خواهیم مجموعه‌هایی را بنویسیم که عضوهای آن‌ها در مجموعه‌ی A باشند. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

زیرمجموعه‌های A:
- عدد ۲ عضو مجموعه باشد
  - عدد ۳ عضو مجموعه باشد $\Rightarrow \{۲,۳\}$
  - عدد ۳ عضو مجموعه نباشد $\Rightarrow \{۲\}$
- عدد ۲ عضو مجموعه نباشد
  - عدد ۳ عضو مجموعه باشد $\Rightarrow \{۳\}$
  - عدد ۳ عضو مجموعه نباشد $\Rightarrow \{\ \}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید برای این‌که عدد ۲ عضو مجموعه باشد، ۲ حالت وجود دارد (یا ۲، عضو مجموعه هست و یا عضو مجموعه نیست) و همین‌طور برای این‌که ۳ عضو مجموعه باشد یا نباشد، ۲ حالت وجود دارد، پس: $۲ \times ۲ = ۲^۲ = ۴ =$ تعداد زیرمجموعه‌های A

به طور کلی تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی، برابر است با ۲^n. (n تعداد عضوهای مجموعه است.)

یک مجموعه‌ی ۵ عضوی چند زیرمجموعه دارد؟

$۲^n = ۲^۵ = ۳۲$ زیرمجموعه

تمامی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی A را بنویسید. $A = \{۵,۷,۹\}$

مجموعه‌ی A دارای ۸ زیرمجموعه است. $۲^۳ = ۸$

$A_۱ = \{\ \}$ ، $A_۲ = \{۵\}$ ، $A_۳ = \{۷\}$ ، $A_۴ = \{۹\}$ ، $A_۵ = \{۵,۷\}$ ، $A_۶ = \{۵,۹\}$ ، $A_۷ = \{۷,۹\}$ ، $A_۸ = \{۵,۷,۹\} = A$

به تمامی زیرمجموعه‌های هر مجموعه، به‌جز خودش، زیرمجموعه‌های محض آن مجموعه می‌گویند. در مثال بالا، مجموعه‌های A_1 ، A_2 ، A_3 و... و A_7 زیرمجموعه‌های محض مجموعه‌ی A هستند.

تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با $2^n - 1$.

یک مجموعه‌ی ۷ عضوی چند زیرمجموعه‌ی محض دارد؟

$2^n - 1 = 2^7 - 1 = 127$

روش دیگر نمایش مجموعه: (نمایش ریاضی مجموعه)

قبل از این‌که روش نمایش مجموعه با نمادهای ریاضی را توضیح دهیم، لازم است چند مجموعه را معرفی کنیم:

- مجموعه‌ی اعداد طبیعی که با حرف «$\mathbb{N}$» نمایش داده می‌شود: $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,...\}$
- مجموعه‌ی اعداد حسابی که با حرف «$\mathbb{W}$» نمایش داده می‌شود: $\mathbb{W} = \{0,1,2,3,...\}$
- مجموعه‌ی اعداد صحیح که با حرف «$\mathbb{Z}$» نمایش داده می‌شود: $\mathbb{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$

چون مجموعه‌ی اعداد طبیعی زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی اعداد حسابی است، پس می‌توان گفت که هر عدد طبیعی یک عدد حسابی است و این مطلب به زبان ریاضی می‌شود: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$. چون همه‌ی اعداد طبیعی و حسابی، عضو $\mathbb{Z}$ هستند، بنابراین $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}$ است. یعنی هر عدد طبیعی، یک عدد صحیح و هر عدد حسابی نیز، یک عدد صحیح است.

اکنون، با یک مثال روش نمایش مجموعه با نمادهای ریاضی را بیان می‌کنیم:

مجموعه‌ی $A = \{3,4,5,6,7\}$ را به صورت ریاضی نمایش دهید.

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 8\}$

شکل ریاضی مجموعه‌ی A را به این صورت می‌خوانیم: مجموعه‌ی A دارای عضوهایی به شکل x است که این عضوها (اعداد) متعلق به مجموعه‌ی اعداد طبیعی هستند، به طوری که این اعداد از ۲ بزرگ‌تر و از ۸ کوچک‌تر هستند. علامت« | » در نمایش ریاضی مجموعه‌ها، یعنی «به طوری که» یا «به قسمی که».

- مجموعه‌ی اعداد زوج طبیعی را با حرف «E» نمایش می‌دهند که اعضای آن به این صورت است: $E = \{2,4,6,8,...\}$

این مجموعه به شکل ریاضی به این صورت نشان داده می‌شود: $E = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$

- مجموعه‌ی اعداد فرد طبیعی را با حرف «O» نمایش می‌دهند که اعضای آن به این صورت است: $O = \{1,3,5,7,...\}$

شکل ریاضی این مجموعه به صورت مقابل است: $O = \{2x-1 \mid x \in \mathbb{N}\}$

مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی عدد ۵ را به صورت اعضا و با نمادهای ریاضی نشان دهید.

$A = \{5,10,15,20,...\}$ $\quad$ $A = \{5k \mid k \in \mathbb{N}\}$

مجموعه‌های روبه‌رو را به صورت اعضا نمایش دهید. $A = \{6x-1 \mid x \in \mathbb{N}\}$ $\quad$ $B = \{n^3 \mid n \in \mathbb{N}, n > 3\}$

$A = \{6\times1-1, 6\times2-1, 6\times3-1, 6\times4-1,...\} \Rightarrow A = \{5,11,17,23,...\}$

$B = \{4^3, 5^3, 6^3, 7^3,...\} \Rightarrow B = \{64,125,216,343,...\}$

در مجموعه‌ی B چون $n > 3$ است، بنابراین کوچک‌ترین عدد طبیعی که به جای n می‌توان قرار داد، عدد ۴ است.

مجموعه‌های روبه‌رو را با نمادهای ریاضی نمایش دهید. $A = \{7,14,21,28,...\}$ $\quad$ $B = \{16,25,36,49,...\}$

عضوهای مجموعه‌ی A، مضرب‌های طبیعی عدد ۷ هستند. پس:

$A = \{7k \mid k \in \mathbb{N}\}$

عضوهای مجموعه‌ی B را می‌توان به صورت مقابل نوشت: $B=\{۴^۲,۵^۲,۶^۲,۷^۲,...\}$

همان‌طور که می‌بینید عضوهای این مجموعه، مجذور اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۳ هستند، پس می‌توان نوشت: $B=\{x^۲ \mid x\in \mathbb{N}, x>۳\}$

◎ مجموعه‌ی اعداد گویا را با حرف $\mathbb{Q}$ نشان می‌دهیم. این مجموعه شامل تمامی اعداد صحیح و تمامی کسرهای متعارفی (معمولی) است.

مجموعه‌ی $\mathbb{Q}$ را نمی‌توان با اعضا مشخص کرد و فقط می‌توان آن را با نمادهای ریاضی تعریف کرد: $\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b} \mid a,b\in\mathbb{Z}, b\neq ۰\}$

یعنی هر عددی را که بتوانیم به صورت یک کسر متعارفی (معمولی) بنویسیم به طوری که صورت و مخرج آن عدد صحیح و مخرج کسر مخالف صفر باشد، آن عدد گویا است.

همه‌ی اعداد طبیعی، حسابی و صحیح، گویا هستند. یعنی: $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

اشتراک دو مجموعه: به دو مجموعه‌ی A و B دقت کنید. $B=\{۳,۸,۵,۶,۹\}$ $A=\{۴,۶,۸,۹\}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید سه عدد ۶، ۸ و ۹ عضوهای مشترک دو مجموعه‌ی A و B هستند. این مطلب را به زبان ریاضی می‌نویسیم.

$A\cap B=\{۶,۸,۹\}$

علامت اشتراک

◎ اشتراک دو مجموعه‌ی A و B که آن را با $A\cap B$ نشان می‌دهیم، مجموعه‌ای است که عضوهای آن هم در A باشد و هم در B. یعنی:

$A\cap B=\{x \mid x\in A, x\in B\}$

اجتماع دو مجموعه: به دو مجموعه‌ی C و D دقت کنید.

$C=\{۱,۴,۹,۷,۸,۳\}$ $D=\{۴,۷,۱,۶,۵,۹\}$

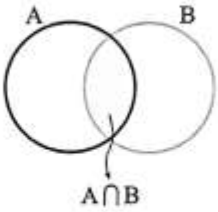
اگر تمام عضوهای این دو مجموعه را در یک مجموعه قرار دهیم (بدون تکرار)، آن‌گاه مجموعه‌ی اجتماع دو مجموعه را نوشته‌ایم، یعنی:

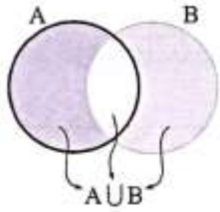
$C\cup D=\{۱,۴,۹,۶,۵,۷,۸,۳\}$

◎ اجتماع دو مجموعه‌ی A و B که آن را با $A\cup B$ نشان می‌دهیم، مجموعه‌ای است که عضوهای آن یا در A باشند یا در B. یعنی:

$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ یا } x\in B\}$

مجموعه‌های $A\cap B$ و $A\cup B$ را به وسیله‌ی نمودار ون نمایش دهید.





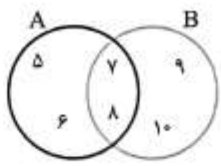
اگر $A=\{۵,۶,۷,۸\}$ و $B=\{۷,۸,۹,۱۰\}$ باشد،

الف) $A\cap B$ و $A\cup B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

ب) این دو مجموعه را با نمودار ون نشان دهید.

الف) $A\cup B=\{۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$ $\qquad$ $A\cap B=\{۷,۸\}$

ب)

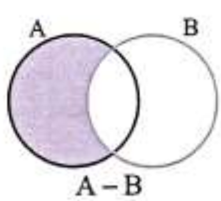


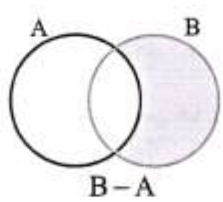
تفاضل دو مجموعه: مجموعه‌ی $A-B$ (می‌خوانیم: A منهای B) مجموعه‌ای است که عضوهای آن در A باشند و در B نباشند و $B-A$ (می‌خوانیم: B منهای A) مجموعه‌ای است که عضوهای آن در B باشند و در A نباشند.

$$A-B=\{x\mid x\in A, x\notin B\}$$

$$B-A=\{x\mid x\in B, x\notin A\}$$

نمودار هندسی دو مجموعه‌ی $A-B$ و $B-A$ به صورت مقابل است.





اگر $A=\{۳,۵,۷,۹\}$ و $B=\{۲,۴,۷,۹\}$ باشد، مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ را بنویسید.

$B-A=\{۲,۴\}$ $\qquad$ $A-B=\{۳,۵\}$

عدد اصلی یک مجموعه: تعداد عضوهای یک مجموعه‌ی متناهی (باپایان) مانند A، را عدد اصلی مجموعه‌ی A می‌گویند و آن را با $n(A)$ نمایش می‌دهند. به عنوان مثال اگر مجموعه‌ی A دارای k عضو باشد. آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$n(A)=k$$

عدد اصلی مجموعه‌های روبه‌رو را بنویسید. $\qquad$ $B=\{x,y,z,t,w\}$ $\qquad$ $A=\{۵,۷,a,۴\}$

$n(B)=۵$ $\qquad$ $n(A)=۴$

چون مجموعه‌ی تهی هیچ عضوی ندارد، بنابراین: $\qquad$ $n(\varnothing)=۰$

درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال

می‌دانیم که احتمال وقوع یک پیشامد از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود. $\text{احتمال رخ دادن پیشامد} = \dfrac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}}$

اکنون اگر مجموعه‌ای را که شامل همه‌ی حالت‌های ممکن است با S و تعداد این حالت‌ها را با $n(S)$ و مجموعه‌ی شامل همه‌ی حالت‌های مطلوب را، با A و تعداد این حالت‌ها را با $n(A)$ نشان دهیم و احتمال وقوع پیشامد A را با $P(A)$ نمایش دهیم، رابطه‌ی زیر را می‌توان نوشت:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

- $n(S)$ را فضای نمونه هم می‌گویند.

احتمال وقوع هر پیشامد عددی از صفر تا ۱ است.

اگر احتمال وقوع پیشامدی صفر باشد، آن پیشامد را غیرممکن می‌گوئیم.

هر یک از اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۵ را روی یک کارت نوشته‌ایم و آن‌ها را در داخل کیسه‌ای انداخته‌ایم. اگر به طور تصادفی یک کارت را از داخل کیسه بیرون بیاوریم، احتمال وقوع هر یک از پیشامدهای زیر را حساب کنید.

الف) عدد روی کارت اول باشد (پیشامد A)

ب) عدد روی کارت مرکب باشد (پیشامد B)

ج) عدد روی کارت مضرب ۳ باشد (پیشامد C)

د) عدد روی کارت مضرب ۱۷ باشد (پیشامد D)

ابتدا مجموعه‌ی حالت‌های ممکن (مجموعه‌ی S) را می‌نویسیم. $S = \{1,2,3,\dots,14\} \Rightarrow n(S) = 14$

الف) $A = \{2,3,5,7,11,13\} \Rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{6}{14} = \dfrac{3}{7}$

ب) $B = \{4,6,8,9,10,12,14\} \Rightarrow n(B) = 7 \Rightarrow P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{7}{14} = \dfrac{1}{2}$

ج) $C = \{3,6,9,12\} \Rightarrow n(C) = 4 \Rightarrow P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{4}{14} = \dfrac{2}{7}$

د) $D = \{\ \} \Rightarrow n(D) = 0 \Rightarrow P(D) = \dfrac{n(D)}{n(S)} = \dfrac{0}{14} = 0$

پیشامد D غیرممکن است.

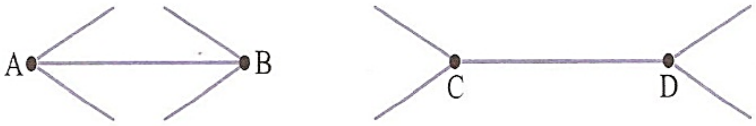
بسم الله الرحمن الرحیم

درس اول: استدلال

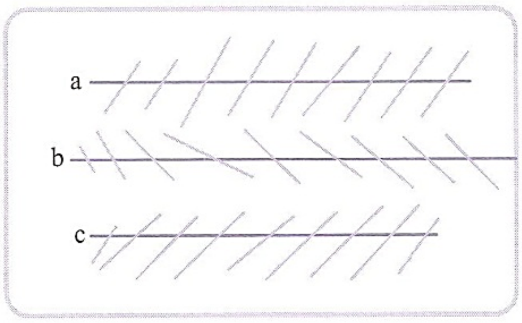
استدلال: استدلال یعنی دلیل‌آوردن و استفاده‌کردن از دانسته‌های قبلی، برای معلوم یا مشخص کردن موضوع یا مسئله‌ای که در ابتدا نامشخص بوده است.

- به استدلالی که درستی موضوع یا مسئله‌ای را مشخص کند، اثبات می‌گوییم.
- رسم شکل در هندسه کمک زیادی به فهم مسئله و تشخیص راه‌حل‌ها می‌کند، اما باید توجه داشت که مشاهدات ما برای تشخیص اندازه‌ها و یا حالت شکل‌ها، صددرصد قابل اطمینان نیستند و گاهی ما را به نتایج نادرست هدایت می‌کنند. برای نمونه به شکل‌های زیر در مثال‌های «الف» و «ب» دقت کنید.

الف) آیا طول پاره‌خط‌های AB و CD در شکل‌های مقابل برابرند؟



ب) آیا خطوط a، b و c در شکل زیر با هم موازی‌اند؟



در هر دو مورد «الف» و«ب» پاسخ مثبت است، اما ممکن است خطای دید ما باعث شود که نتیجه‌ی نادرست بگیریم.

درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

برای اثبات یا مشخص‌کردن هر موضوع یا مسئله‌ای در هندسه، ابتدا باید ببینیم که چه اطلاعاتی در مورد مسئله داریم، به این اطلاعات داده‌شده‌ی مسئله، فرض مسئله یا داده‌ی مسئله می‌گویند. سپس باید دقت کنیم که مسئله چه چیزی را از ما خواسته است یا باید ببینیم چه چیزی را باید اثبات کنیم. آن‌چه را که باید اثبات کنیم، حکم نامیده می‌شود. نوشتن فرض و حکم برای هر مسئله‌ی هندسی کمک زیادی به دقت در حل مسئله می‌کند.

ثابت کنید در لوزی، ضلع‌های مقابل برابرند.

ابتدا فرض و حکم مسئله را می‌نویسیم.

فرض شکل لوزی است.

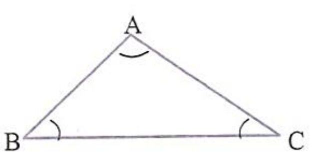
حکم ضلع‌های مقابل لوزی برابرند.

استدلال: می‌دانیم که لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است. پس: {لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است. / در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های مقابل برابرند.} $\Leftarrow$ در لوزی ضلع‌های مقابل برابرند.

برای مسئله‌ی زیر، فرض و حکم را بنویسید.

اگر در یک مثلث دو زاویه، نامساوی باشند، ضلع مقابل به زاویه‌ی بزرگ‌تر، از ضلع مقابل به زاویه‌ی کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.

در این سؤال رسم شکل کمک می‌کند تا بهتر فرض و حکم را تشخیص دهیم.



فرض ABC مثلث است و $\hat{A} > \hat{B}$

حکم $BC > AC$

ثابت کنید که در هر مثلث، اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی، با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاورش برابر است.

ابتدا شکل را رسم می‌کنیم و سپس فرض و حکم را می‌نویسیم.

فرض ABC (ABC مثلث است)

حکم $\hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B}$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}_1=180^\circ\\ \hat{C}_2+\hat{C}_1=180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\cancel{\hat{C}_1}=\hat{C}_2+\cancel{\hat{C}_1} \Rightarrow \hat{C}_2=\hat{A}+\hat{B}$$

درس سوم: همنهشتی مثلث‌ها

حالت‌های همنهشتی دو مثلث: سال گذشته آموختیم که دو مثلث در حالت کلی می‌توانند به ۳ صورت همنهشت باشند.

۱- داشتن سه ضلع برابر (ض ض ض)

۲- داشتن دو ضلع برابر و زاویه‌ی مساوی بین دو ضلع (ض ز ض)

۳- داشتن دو زاویه‌ی برابر و ضلع مساوی بین دو زاویه (ز ض ز)

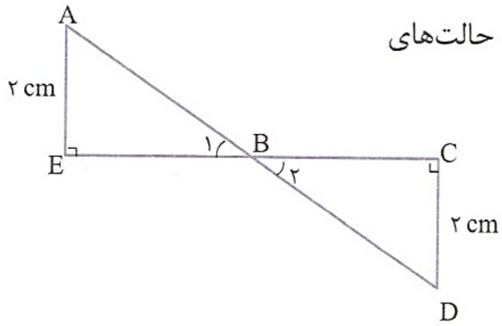
هم‌چنین یاد گرفتیم که مثلث‌های قائم‌الزاویه، علاوه بر سه حالت فوق به دو صورت دیگر می‌توانند همنهشت باشند که مختص خودشان است.

۱- داشتن وتر و یک ضلع برابر (و ض)

۲- داشتن وتر و یک زاویه‌ی تند برابر (و ز)

اکنون روش‌های ریاضی نوشتن حالت‌های همنهشتی دو مثلث را نیز با مثال زیر برای شما بیان می‌کنیم.

در شکل مقابل پاره‌خط‌های AD و EC یکدیگر را نصف کرده‌اند (منصف یکدیگرند). حالت‌های همنهشتی دو مثلث را بنویسید.



حالت اول: (ض ض ض)

$$\left.\begin{array}{ll} AB = BD & \text{طبق فرض} \\ BE = BC & \text{طبق فرض} \\ AE = CD = ۲\,cm & \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{ض ض ض})}{\overset{\Delta}{ABE} \cong \overset{\Delta}{BCD}}$$

حالت دوم: (ض ز ض)

$$\left.\begin{array}{ll} AB = BD & \text{طبق فرض} \\ BE = BC & \text{طبق فرض} \\ \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ & \text{متقابل به رأس} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{ض ز ض})}{\overset{\Delta}{ABE} \cong \overset{\Delta}{BCD}}$$

حالت سوم: (ز ض ز)

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ & \text{متقابل به رأس} \\ \hat{C} = \hat{E} = ۹۰^\circ & \\ BE = BC & \text{طبق فرض} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{ز ض ز})}{\overset{\Delta}{ABE} \cong \overset{\Delta}{BCD}}$$

حالت چهارم: (و ض)

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{E} = \hat{C} = ۹۰^\circ & \\ AB = BD & \text{طبق فرض} \\ BE = BC & \text{طبق فرض} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{و ض})}{\overset{\Delta}{ABE} \cong \overset{\Delta}{BCD}}$$

حالت پنجم: (و ز)

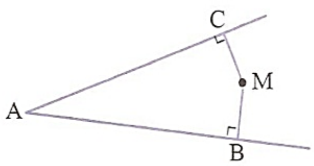
$$\left.\begin{array}{ll} \hat{E} = \hat{C} = ۹۰^\circ & \\ \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ & \text{متقابل به رأس} \\ AB = BD & \text{طبق فرض} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{و ز})}{\overset{\Delta}{ABE} \cong \overset{\Delta}{BCD}}$$

درس چهارم: حل مسئله در هندسه

برای حل مسئله‌های هندسه، ابتدا باید صورت مسئله را با دقت بخوانیم و به هر کلمه‌ای از صورت مسئله توجه کافی داشته باشیم و سپس مفاهیم تشکیل‌دهنده‌ی مسئله را به خوبی بشناسیم.

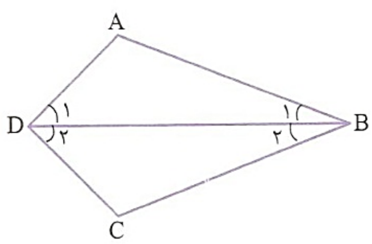
به مثال‌های زیر دقت کنید:

فاصله‌ی نقطه‌ی M از دو ضلع زاویه‌ی A، یعنی طول پاره‌خط‌های عمودی که از M بر دو ضلع $\hat{A}$ رسم می‌شود، یعنی: MB و MC (در شکل زیر).

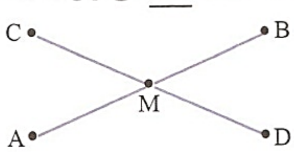


اگر در صورت مسئله گفته شود که BD نیمساز زاویه‌ی B $(A\hat{B}C)$ است، یعنی: $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$.

از این گفته نمی‌توان نتیجه گرفت که $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$.



اگر در صورت مسئله گفته شود که پاره‌خط CD، پاره‌خط AB را نصف کرده یا پاره‌خط CD از وسط AB گذشته است، فقط می‌توان نتیجه گرفت که: $AM = MB$ و نمی‌توان نتیجه گرفت که $CM = MD$.

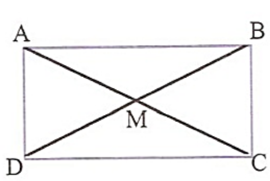


اما اگر در صورت مسئله گفته شود که پاره‌خط‌های AB و CD یکدیگر را نصف کرده‌اند، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت که: $CM = MD$ و $AM = MB$.

- یکی از راه‌های اثبات برابری دو پاره‌خط یا دو زاویه در هندسه، استفاده از همنهشتی مثلث‌ها است؛ یعنی باید دو مثلث بیابیم که دو پاره‌خط یا دو زاویه‌ی موردنظر، دقیقاً هر کدام ضلع یکی از مثلث‌ها یا زاویه‌ی یکی از مثلث‌ها باشند و پس از اثبات همنهشتی دو مثلث، تساوی دو پاره‌خط یا دو زاویه‌ی موردنظر را نتیجه بگیریم.

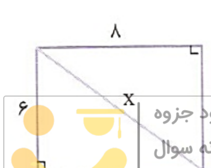
ثابت کنید قطرهای مستطیل با هم برابرند.

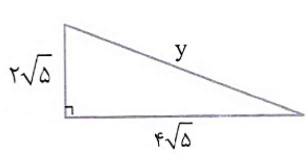
ابتدا شکل را رسم می‌کنیم. در این شکل هشت مثلث دیده می‌شود (!) اما برای اثبات برابری قطرهای مستطیل باید مثلث‌های مناسب برای این کار انتخاب شود، مثلاً مثلث‌های AMB و BMC یا مثلث‌های BMC و CMD برای حل این مسئله به ما کمکی نمی‌کنند، اما با اثبات همنهشتی مثلث‌های ADC و BCD یا ABC و BCD، به نتیجه‌ی دلخواه می‌رسیم.



- روش دوم اثبات برابری دو پاره‌خط در هندسه، استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس است. به مثال زیر توجه کنید.

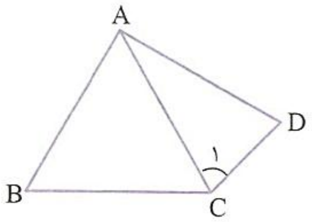
در شکل زیر ثابت کنید قطر مستطیل با وتر مثلث برابر است.





$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow x = \sqrt{100} = 10 \\ y^2 = (2\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2 = 20 + 80 = 100 \Rightarrow y = \sqrt{100} = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

روش سوم، روش مقایسه‌ی دو پاره‌خط مساوی با یک پاره‌خط است. به مثال زیر توجه کنید.



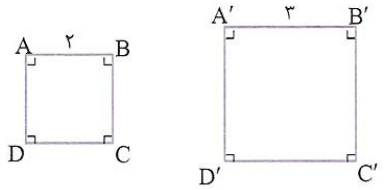
مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و $\hat{C}_1 = \hat{D}$ است. ثابت کنید: $BC = AD$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{C}_1 = \hat{D} \Rightarrow AC = AD \\ AC = BC \quad \text{طبق فرض} \end{array}\right\} \Rightarrow AD = BC$$

درس پنجم: شکل‌های متشابه

دو چندضلعی در صورتی متشابه هستند که تعداد اضلاع آن‌ها مساوی، ضلع‌های متناظر آن‌ها با هم متناسب (به یک نسبت بزرگ یا کوچک شده یا بدون تغییر) باشند و زاویه‌های متناظر آن‌ها مساوی باشند.

دو مربع دلخواه همواره با هم متشابه‌اند، زیرا زاویه‌های نظیر آن‌ها با هم برابر و نسبت ضلع‌های نظیر آن‌ها به دلیل مساوی‌بودن هر چهار ضلع، برابر است. به مربع‌های شکل روبه‌رو توجه کنید.



$\hat{C}=\hat{C}'=۹۰^\circ$ $\qquad$ $\hat{A}=\hat{A}'=۹۰^\circ$

$\hat{D}=\hat{D}'=۹۰^\circ$ $\qquad$ $\hat{B}=\hat{B}'=۹۰^\circ$

$\Rightarrow ABCD \sim A'B'C'D'$ عدد $\frac{۲}{۳}$ یا $\frac{۳}{۲}$ را نسبت تشابه دو مربع فوق می‌گویند. $\qquad$ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{AD}{A'D'}=\frac{۲}{۳}$

علامت متشابه‌بودن دو شکل (علامت تشابه)

نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه را نسبت تشابه می‌گویند. برای مثال در مربع‌های شکل بالا، نسبت تشابه مساوی $\frac{۲}{۳}$ یا $\frac{۳}{۲}$ است.

به طور کلی هر دو چندضلعی منتظم دلخواه که دارای تعداد اضلاع برابر باشند، متشابه‌اند.

برای مثال هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع دلخواه متشابه‌اند، یا هر دو شش‌ضلعی منتظم دلخواه متشابه‌اند.

آیا هر دو لوزی دلخواه متشابه‌اند؟

خیر، در دو لوزی دلخواه نسبت اضلاع نظیر هم، با هم برابر است (به دلیل مساوی‌بودن چهار ضلع) اما ممکن است که زاویه‌های نظیر آن‌ها برابر نباشد و به همین دلیل دو لوزی دلخواه متشابه نیستند.

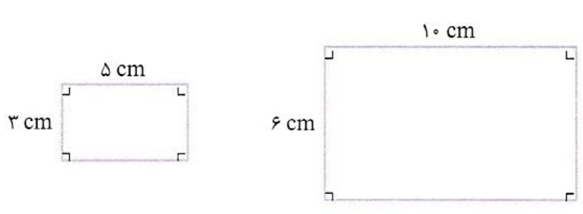
دو لوزی در صورتی متشابه‌اند که یک زاویه‌ی مساوی داشته باشند.

آیا هر دو مستطیل دلخواه متشابه‌اند؟

خیر. در دو مستطیل دلخواه، به دلیل مساوی‌بودن زاویه‌ها، زاویه‌های نظیر دو شکل مساوی‌اند، اما ممکن است نسبت اضلاع نظیر در دو مستطیل برابر نباشد، به همین دلیل دو مستطیل دلخواه متشابه نیستند.

دو مستطیل دلخواه در صورتی متشابه‌اند که نسبت عرض‌های آن‌ها با نسبت طول‌هایشان برابر باشد.

دو مستطیل شکل مقابل متشابه‌اند، زیرا زاویه‌های نظیر در دو شکل برابرند و نسبت عرض‌های آن‌ها با نسبت طول‌هایشان برابر است.



$\left.\begin{array}{l}\text{نسبت عرض‌ها}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}\\ \text{نسبت طول‌ها}=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{نسبت طول‌ها}=\text{نسبت عرض‌ها}$

بنابراین دو مستطیل با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{۱}{۲}$ یا ۲ است.

نقشه‌ی هر مکان، با آن مکان متشابه است و نسبت تشابه آن‌ها را <u>مقیاس نقشه</u> می‌گویند. برای مثال اگر مقیاس نقشه‌ای $\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰}$ باشد و فاصله‌ی دو نقطه روی نقشه ۱ سانتی‌متر باشد، فاصله‌ی نقطه‌های متناظر آن‌ها در طبیعت ۱۰۰۰۰۰ سانتی‌متر یا یک کیلومتر است.

زاویه‌ی بین دو خط در نقشه، با زاویه‌ی بین خط‌های متناظر آن‌ها در طبیعت برابر است. برای مثال اگر زاویه‌ی بین دو خط در نقشه ۶۷° باشد، زاویه‌ی بین خط‌های متناظر آن‌ها در طبیعت نیز ۶۷° است.

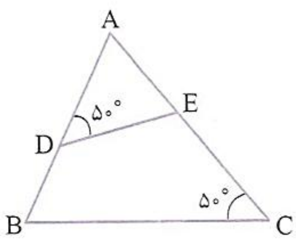
دو شکل همنهشت با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها ۱ است.

تشابه دو مثلث: دو مثلث در سه حالت با هم متشابه هستند:

۱- تساوی دو زاویه

۲- دارابودن دو ضلع متناسب و زاویه‌ی مساوی بین دو ضلع

۳- متناسب‌بودن سه ضلع



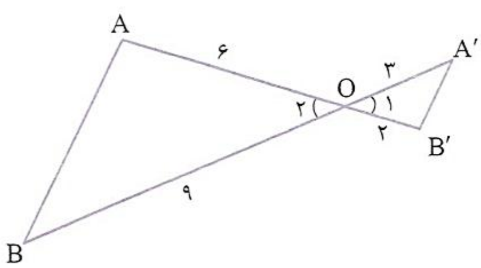
در شکل زیر دو مثلث متشابه‌اند.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A}\ \text{زاویه‌ی مشترک}\\ \hat{D}=\hat{C}=۵۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{ADE}\underset{(\text{زز})}{\sim}\overset{\Delta}{ABC}$$

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

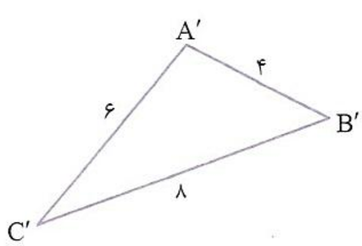
در دو مثلث متشابه، ضلع‌های مقابل به زاویه‌های نظیر مساوی، متناسب‌اند یعنی در شکل بالا:

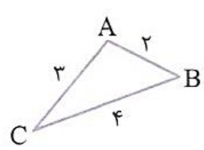
در شکل زیر دو مثلث متشابه‌اند.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_۱=\hat{O}_۲\ \text{متقابل به رأس}\\ \dfrac{OB'}{OA}=\dfrac{۲}{۶}=\dfrac{۱}{۳}\\ \dfrac{OA'}{OB}=\dfrac{۳}{۹}=\dfrac{۱}{۳}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{OAB}\sim\overset{\Delta}{OA'B'}$$ دو ضلع متناسب و زاویه‌ی بین مساوی

در شکل زیر دو مثلث متشابه‌اند.





$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{۲}{۴}=\dfrac{۱}{۲}\\ \dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{۳}{۶}=\dfrac{۱}{۲}\\ \dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{۴}{۸}=\dfrac{۱}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}$$ به حالت سه ضلع متناسب

دو مثلث متساوی‌الساقین همواره متشابه نیستند، بلکه در صورتی متشابه‌اند که زاویه‌ی رأس آن‌ها برابر باشد.

دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین همواره متشابه‌اند.

بسم الله الرحمن الرحیم

درس اول: توان صحیح

قبل از این‌که قوانین جدید توان و محاسبات اعداد توان‌دار را برای شما بیان کنیم، بهتر است که مروری بر قوانین و مثال‌های توان که در سال‌های گذشته فرا گرفته‌اید، داشته باشیم و سپس، مطالب جدید را مطرح کنیم.

$a^m \times a^n = a^{m+n} \Rightarrow$ مثال: $5^3 \times 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$

$a^m \times b^m = (ab)^m \Rightarrow$ مثال: $4^8 \times 7^8 = (4 \times 7)^8 = 28^8$

$$a^n \times a^n = \begin{cases} a^{n+n} = a^{2n} \\ (a \times a)^n = (a^2)^n \end{cases} \Rightarrow (a^2)^n = a^{2n}$$

$(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn} \Rightarrow$ مثال: $(2^3)^7 = 2^{3 \times 7} = 2^{21}$

$a^m \div a^n = a^{m-n} \Rightarrow$ مثال: $3^{11} \div 3^4 = 3^{11-4} = 3^7$

$a^m \div b^m = (\frac{a}{b})^m \underset{(b \neq 0)}{} \Rightarrow$ مثال: $14^9 \div 2^9 = (\frac{14}{2})^9 = 7^9$ یا $3^{11} \div 5^{11} = (\frac{3}{5})^{11}$

$$\underset{(a \neq 0)}{a^m \div a^m} = \begin{cases} a^{m-m} = a^0 \\ (\frac{a}{a})^m = 1^m = 1 \end{cases} \Rightarrow \underset{(a \neq 0)}{a^0 = 1}$$

$a^{m^n} = a^{(m^n)} \Rightarrow$ مثال: $a^{5^2} = a^{(5^2)} = a^{25}, 2^{2^4} = 2^{(2^4)} = 2^{16}$

توان منفی: اگر پایه‌ی عدد توان‌داری را معکوس کنیم، علامت توان آن تغییر می‌کند (یعنی اگر علامت توان مثبت باشد، منفی می‌شود و اگر علامت توان منفی باشد، مثبت می‌شود).

$2^{-5} = (\frac{1}{2})^5$ $\qquad (\frac{4}{5})^{+6} = (\frac{5}{4})^{-6}$ $\qquad (\frac{2}{3})^{-3} = (\frac{3}{2})^{+3}$

از این نکته‌ی ساده به راحتی می‌توان استفاده کرد و هر عددی با توان منفی را به عددی با توان مثبت تبدیل کنیم.

اعداد روبه‌رو را با توان مثبت بنویسید. ج) $(\frac{7}{3})^{-5} =$ ب) $(\frac{3}{5})^{-2} =$ الف) $3^{-4} =$

ج) $(\frac{7}{3})^{-5} = (\frac{3}{7})^5$ ب) $(\frac{3}{5})^{-2} = (\frac{5}{3})^2$ الف) $3^{-4} = (\frac{3}{1})^{-4} = (\frac{1}{3})^4$

توان ۱- هر عدد غیرصفر، یعنی معکوس آن عدد.

$a^{-1} = \frac{1}{a} \ (a \neq 0) \Rightarrow$ مثال: معکوس ۳ $= 3^{-1} = \frac{1}{3}$ $\qquad$ معکوس $\frac{2}{5} = (\frac{2}{5})^{-1} = \frac{5}{2}$

روش دیگر تبدیل یک عدد با توان منفی به عددی با توان مثبت: هر عدد غیرصفر به توان منفی برابر است با، یک بر روی توان مثبت همان عدد، یعنی:

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$5^{-6}=\frac{1}{5^6}$ ، $7^{-3}=\frac{1}{7^3}$ $\qquad (a\neq 0, n\in\mathbb{N})$

اگر صورت یا مخرج کسری دارای عددی با توان منفی باشند، با انتقال عدد دارای توان منفی از صورت به مخرج و یا از مخرج به صورت، علامت توان، مثبت می‌شود.

$$\frac{2^{-5}}{3^{-7}}=\frac{3^7}{2^5}$$

حاصل عبارت روبه‌رو را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

$$\frac{2^{-7}\times 5^3}{2^5\times 5^{-9}}=$$

$$\left(\frac{2^{-7}\times 5^3}{2^5\times 5^{-9}}\right)=\frac{5^3\times 5^9}{2^5\times 2^7}=\frac{5^{12}}{2^{12}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{12}$$

برای محاسبه‌ی حاصل اعداد توان‌دار با توان منفی یا مقایسه‌ی اعداد با توان منفی، ابتدا باید توان آن‌ها را مثبت کنیم.

حاصل اعداد توان‌دار زیر را حساب کنید.

الف) $3^{-3}=$ $\qquad$ ب) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}=$

الف) $3^{-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$ $\qquad$ ب) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

اعداد توان‌دار مقابل را از کوچک به بزرگ و از چپ به راست بنویسید. $\qquad 3^{-3}, 5^{-2}, 2^{-5}$

$5^{-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$ $\qquad$ $3^{-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$ $\qquad$ $2^{-5}=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

$$\frac{1}{32}<\frac{1}{27}<\frac{1}{25}\Rightarrow 2^{-5}<3^{-3}<5^{-2}$$

حاصل عبارت زیر را به صورت عددی با توان مثبت بنویسید.

الف) $6^{-5}\times 6^{-7}=$ $\qquad$ ب) $7^{-9}\div 7^{-2}=$

الف) $6^{-5}\times 6^{-7}=6^{-5+(-7)}=6^{-12}=\left(\frac{1}{6}\right)^{12}$

ب) $7^{-9}\div 7^{-2}=7^{-9-(-2)}=7^{-9+2}=7^{-7}=\left(\frac{1}{7}\right)^7$

به مثال‌های زیر دقت کنید.

$4^{-3}=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}=7^2=49$

اگر توان عدد منفی باشد، نمی‌توان گفت که لزوماً حاصل عدد توان‌دار، منفی می‌شود. یعنی توان منفی نشانه‌ی منفی‌بودن عدد توان‌دار نیست.

به مثال‌های روبه‌رو دقت کنید. $\qquad -5^{-4}=-\left(\frac{1}{5}\right)^4=-\frac{1}{625}$ $\qquad -2^{-3}=-\left(\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$

به مثال‌های زیر دقت کنید.

پایه منفی و توان هم منفی است، اما حاصل مثبت شده است. چون پایه داخل پرانتز و توان عدد زوج است.

$$(-8)^{-2}=\left(-\frac{1}{8}\right)^2=\frac{1}{64}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}=\left(-\frac{3}{2}\right)^4=\frac{81}{16}$$

چند نکته‌ی مفید برای محاسبه با عددهای دارای توان منفی:

$$0/2=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}=5^{-1}\Rightarrow \boxed{0/2=5^{-1}}$$

$$0/04=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}=25^{-1}=(5^2)^{-1}=5^{-2}\Rightarrow \boxed{0/04=5^{-2}}$$

$$0/008=\frac{8}{1000}=\frac{1}{125}=125^{-1}=(5^3)^{-1}=5^{-3}\Rightarrow \boxed{0/008=5^{-3}}$$

به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\boxed{0/0016=5^{-4}}$$

$$0/5=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}=2^{-1}\Rightarrow\boxed{0/5=2^{-1}}$$

$$0/25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}=4^{-1}=(2^{2})^{-1}=2^{-2}\Rightarrow\boxed{0/25=2^{-2}}$$

$$0/125=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}=8^{-1}=(2^{3})^{-1}=2^{-3}\Rightarrow\boxed{0/125=2^{-3}}$$

به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\boxed{0/0625=2^{-4}=4^{-2}}$$

حاصل عبارت‌های زیر را به صورت عددی با توان مثبت بنویسید.

الف) $(0/008)^{-5}\times5^{7}=$

ب) $\dfrac{2^{11}}{(0/25)^{-3}}=$

الف) $(0/008)^{-5}\times5^{7}=(5^{-3})^{-5}\times5^{7}=5^{15}\times5^{7}=5^{22}$

ب) $\dfrac{2^{11}}{(0/25)^{-3}}=\dfrac{2^{11}}{(2^{-2})^{-3}}=\dfrac{2^{11}}{2^{6}}=2^{5}$

درس دوم: نماد علمی

سال نوری یکی از واحدهای اندازه‌گیری مسافت است که در نجوم برای بیان فاصله‌ی بین ستارگان و سیارات استفاده می‌شود. یک سال نوری، مسافتی است که نور در مدت یک سال با سرعت ۳۰۰۰۰۰ کیلومتر در ثانیه می‌پیماید. می‌خواهیم بدانیم که یک سال نوری چند کیلومتر است؟

می‌دانیم که هر سال به طور معمول ۳۶۵ روز، هر روز ۲۴ ساعت و هر ساعت ۳۶۰۰ ثانیه است، پس می‌توان نوشت:

یک سال نوری $=300000\times3600\times24\times365=9460800000000$ کیلومتر

همان‌طور که مشاهده می‌کنید نوشتن اعداد بسیار بزرگ یا اعداد بسیار کوچک با رقم، کار ساده‌ای نیست و امکان خطا در محاسبه را افزایش می‌دهد؛ به همین دلیل برای سهولت در محاسبه و نوشتن این‌گونه اعداد، از نماد علمی اعداد استفاده می‌کنیم.

به طور کلی نماد علمی یک عدد اعشاری مثبت به صورت $a\times10^{n}$ است که در آن $1\le a<10$ و n عدد صحیح است.

مسافتی که نور در یک سال برحسب کیلومتر می‌پیماید به صورت نماد علمی به این شکل نوشته می‌شود: $۹۴۶۰۸۰۰۰۰۰۰۰۰ = \underbrace{۹/۴۶۰۸ \times ۱۰^{۱۲}}_{\text{نماد علمی}}$

در جدول زیر تعدادی عدد را با نماد علمی نمایش داده‌ایم.

اعداد بزرگ‌تر از ۱۰	اعداد بین صفر و یک
نماد علمی $\Leftarrow$ $۲۳ = ۲/۳ \times ۱۰^{۱}$	نماد علمی $\Leftarrow$ $۰/۱۷ = ۱/۷ \times ۱۰^{-۱}$
$۱۳۹۴ = ۱/۳۹۴ \times ۱۰^{۳}$	$۰/۱۳۹۴ = ۱/۳۹۴ \times ۱۰^{-۱}$
$۷۸۰۰۰۰۰۰ = ۷/۸ \times ۱۰^{۷}$	$۰/۰۰۰۰۰۰۳۴ = ۳/۴ \times ۱۰^{-۷}$
$۱۴۲۸۵۷ = ۱/۴۲۸۵۷ \times ۱۰^{۵}$	$۰/۰۲۰۱۵ = ۲/۰۱۵ \times ۱۰^{-۲}$
$۲۷۱۸۲۸۰۰۰ = ۲/۷۱۸۲۸ \times ۱۰^{۸}$	$۰/۰۰۰۳۱۴۱۵ = ۳/۱۴۱۵ \times ۱۰^{-۴}$

همان‌طور که در جدول بالا مشاهده می‌کنید در نماد علمی اعداد بزرگ‌تر از ۱۰، توان ۱۰، عدد مثبت و در نماد علمی اعداد بین صفر و یک، توان ۱۰، عدد منفی است.

به اعداد روبه‌رو دقت کنید. $۱۰^{-n} = ۰/\underbrace{۰۰۰\cdots۰۰}_{(n-۱)\text{ تا صفر}}۱$ $\quad ۱۰^{-۳} = ۰/۰۰۱ \quad ۱۰^{-۲} = ۰/۰۱ \quad ۱۰^{-۱} = \frac{۱}{۱۰} = ۰/۱$

به حاصل‌ضرب‌ها و تقسیم‌های زیر و تغییر مکان‌های اعشار دقت کنید.

$۲۰/۱۶ \div ۱۰ = ۲/۰۱۶$	$۲۰/۱۶ \times ۱۰ = ۲۰۱/۶$
$۳۱۴۱۵/۹۲۶۵ \div ۱۰۰۰ = ۳۱/۴۱۵۹۲۶۵$	$۳۱۴۱۵/۹۲۶۵ \times ۱۰۰۰ = ۳۱۴۱۵۹۲۶/۵$
$۷۵۶ \div ۱۰۰۰۰ = ۰/۰۷۵۶$	$۷۵۶ \times ۱۰۰۰۰ = ۷۵۶۰۰۰۰$
$۳/۷۵۶ \div ۱۰^{۶} = ۰/۰۰۰۰۰۳۷۵۶$	$۳/۵۷۶ \times ۱۰^{۶} = ۳۵۷۶۰۰۰$
$۱۳۹/۵ \div ۱۰^{۶} = ۰/۰۰۰۱۳۹۵$	$۱۳۹/۵ \times ۱۰^{۵} = ۱۳۹۵۰۰۰۰$

$a \div ۱۰^{n} = a \times ۱۰^{-n}$

$۳/۵۷ \div ۱۰^{۲} = ۳/۵۷ \times ۱۰^{-۲} = ۰/۰۳۵۷$

درس سوم: ریشه‌گیری

می‌دانیم که مجذور یا مربع عددهای ۲+ و ۲- برابر عدد ۴ است. عددهای ۲ و ۲- را ریشه‌های دوم عدد ۴ می‌گوییم. به طور کلی $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ ریشه‌های دوم عدد حقیقی مثبت a هستند.

اعداد منفی ریشه‌ی دوم ندارند و عدد صفر فقط یک ریشه‌ی دوم دارد که همان صفر است. $\sqrt{۰}=۰$

مکعب (توان سوم) عدد ۳ برابر است با $۲۷=۳^۳$. عدد ۳ را ریشه‌ی سوم عدد ۲۷ می‌گوییم و می‌نویسیم: $\sqrt[۳]{۲۷}=۳$

مکعب عدد ۴- برابر است با $-۶۴=(-۴)^۳$، عدد ۴- را ریشه‌ی سوم عدد ۶۴- می‌گوییم و می‌نویسیم: $\sqrt[۳]{-۶۴}=-۴$

هر عدد حقیقی مانند a، فقط یک ریشه‌ی سوم دارد که آن را با $\sqrt[۳]{a}$ نشان می‌دهیم.

$$۶^۳=۲۱۶ \Rightarrow \sqrt[۳]{۲۱۶}=۶ \qquad (-\frac{۱}{۲})^۳=-\frac{۱}{۸} \Rightarrow \sqrt[۳]{-\frac{۱}{۸}}=-\frac{۱}{۲}$$

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها: برای هر دو عدد مثبت a و b داریم:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{۳\times۵}=\sqrt{۳}\times\sqrt{۵} \quad , \quad \sqrt{\frac{۲}{۷}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۷}}$$

$$\sqrt{۴\times۴۹}=\sqrt{۴}\times\sqrt{۴۹} \quad , \quad \sqrt{\frac{۸۱}{۱۶}}=\frac{\sqrt{۸۱}}{\sqrt{۱۶}}$$

برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$\sqrt[۳]{ab}=\sqrt[۳]{a}\times\sqrt[۳]{b} \quad , \quad \sqrt[۳]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[۳]{a}}{\sqrt[۳]{b}} \quad (b\neq۰)$$

$$\sqrt[۳]{۸\times۲۷}=\sqrt[۳]{۸}\times\sqrt[۳]{۲۷} \quad , \quad \sqrt[۳]{\frac{۱۲۵}{۶۴}}=\frac{\sqrt[۳]{۱۲۵}}{\sqrt[۳]{۶۴}}$$

ساده‌کردن رادیکال‌ها:

به مثال‌های زیر دقت کنید.

$$\sqrt{۵۰}=\sqrt{۲۵\times۲}=\sqrt{۲۵}\times\sqrt{۲}=۵\sqrt{۲}$$

$$\sqrt[۳]{۱۶}=\sqrt[۳]{۸\times۲}=\sqrt[۳]{۸}\times\sqrt[۳]{۲}=\sqrt[۳]{۲^۳}\times\sqrt[۳]{۲}=۲\sqrt[۳]{۲}$$

عدد $۵\sqrt{۲}$، ساده‌شده‌ی $\sqrt{۵۰}$ و عدد $۲\sqrt[۳]{۲}$، ساده‌شده‌ی $\sqrt[۳]{۱۶}$ است.

حجم مکعبی به ضلع a، برابر است با $a^۳$. بنابراین اندازه‌ی ضلع مکعب، برابر است با ریشه‌ی سوم عدد حجم مکعب.

حجم مکعبی $64\ cm^3$ است. اندازه‌ی ضلع آن چند سانتی‌متر است؟

$\sqrt[3]{64} = 4\ cm$

درستی تساوی مقابل را نشان دهید.

$$\sqrt[3]{\frac{8^3+12^3}{10^3+15^3}} = \frac{8+12}{10+15}$$

$$\sqrt[3]{\frac{8^3+12^3}{10^3+15^3}} = \sqrt[3]{\frac{4^3(\cancel{2^3+3^3})}{5^3(\cancel{2^3+3^3})}} = \sqrt[3]{(\frac{4}{5})^3} = \frac{4}{5} = \frac{4\times5}{5\times5} = \frac{20}{25} = \frac{8+12}{10+15}$$

درس چهارم: جمع و تفریق رادیکال‌ها

در درس گذشته ساده‌کردن اعداد رادیکالی را فراگرفتید. اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده‌کردن کاملاً یکسان باشند، آن رادیکال‌ها را رادیکال‌های متشابه می‌گوییم. رادیکال‌های متشابه را می‌توان با هم جمع یا تفریق کرد.

عددهای رادیکالی مقابل با هم متشابه‌اند. $3\sqrt{5}, \frac{7}{2}\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 7\sqrt{5}, \sqrt{5}$

متشابه‌بودن عبارت‌های رادیکالی به ضریب عددی آن‌ها بستگی ندارد.

عددهای $2\sqrt{7}$ و $2\sqrt[3]{7}$ متشابه نیستند چون قسمت رادیکالی آن‌ها یکسان نیست.

حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

الف) $۲\sqrt{۵}+۴\sqrt{۵}=$ ‏ ‏ ‏ ب) $۶\sqrt{۷}-۲\sqrt{۷}=$

ج) $۵\sqrt{۳}+\sqrt{۱۲}=$ ‏ ‏ ‏ د) $۸\sqrt{۲}-\sqrt{۱۸}=$

الف) $۲\sqrt{۵}+۴\sqrt{۵}=(۲+۴)\sqrt{۵}=۶\sqrt{۵}$

ب) $۶\sqrt{۷}-۲\sqrt{۷}=(۶-۲)\sqrt{۷}=۴\sqrt{۷}$

ج) $۵\sqrt{۳}+\sqrt{۱۲}=۵\sqrt{۳}+\sqrt{۴\times۳}=۵\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}=۷\sqrt{۳}$

د) $۸\sqrt{۲}-\sqrt{۱۸}=۸\sqrt{۲}-\sqrt{۹\times۲}=۸\sqrt{۲}-۳\sqrt{۲}=۵\sqrt{۲}$

حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

الف) $۳\sqrt{۸}-۵\sqrt{۱۸}=$ ‏ ‏ ‏ ب) $۹\sqrt{۲۷}+۷\sqrt{۱۲}=$

ابتدا باید رادیکال‌ها را ساده کنیم و سپس جمع و تفریق را انجام دهیم.

الف) $۳\sqrt{۸}-۵\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۴\times۲}-۵\sqrt{۹\times۲}=۳\times۲\sqrt{۲}-۵\times۳\sqrt{۲}=۶\sqrt{۲}-۱۵\sqrt{۲}=-۹\sqrt{۲}$

ب) $۹\sqrt{۲۷}+۷\sqrt{۱۲}=۹\sqrt{۹\times۳}+۷\sqrt{۴\times۳}=۹\times۳\sqrt{۳}+۷\times۲\sqrt{۳}=۲۷\sqrt{۳}+۱۴\sqrt{۳}=۴۱\sqrt{۳}$

گویاکردن مخرج کسرها

گاهی اوقات لازم است تا در محاسبات کسری، اگر مخرج کسرها شامل رادیکال یا عبارت رادیکالی باشند، مخرج را از حالت رادیکالی خارج کنیم. به این کار گویاکردن مخرج می‌گویند.

مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}=$ ‏ ‏ ‏ ب) $\frac{۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=$

صورت و مخرج این کسر را در $\sqrt{۲}$ ضرب می‌کنیم.

الف) $\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$

صورت و مخرج این کسر را در $\sqrt{۳}$ ضرب می‌کنیم.

ب) $\frac{۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=\frac{۳\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}=\frac{\cancel{۳}\sqrt{۶}}{\cancel{۳}}=\sqrt{۶}$

مخرج کسرهای زیر را گویا کنید. (دقت کنید!)

الف) $\frac{۶}{\sqrt[۳]{۳}}=$ ‏ ‏ ‏ ب) $\frac{۲\sqrt[۳]{۳}}{\sqrt[۳]{۲^۲}}=$

الف) $\frac{۶}{\sqrt[۳]{۳}}\times\frac{\sqrt[۳]{۳^۲}}{\sqrt[۳]{۳^۲}}=\frac{۶\sqrt[۳]{۳^۲}}{\sqrt[۳]{۳^۳}}=\frac{\overset{۲}{\cancel{۶}}\sqrt[۳]{۳^۲}}{\cancel{۳}}=۲\sqrt[۳]{۳^۲}=۲\sqrt[۳]{۹}$

همان‌طور که مشاهده کردید، چون در این مثال با ریشه‌ی سوم ($\sqrt[۳]{\ }$) سروکار داشتیم، باید سعی کنیم توان عدد زیر رادیکال ۳ بشود تا بتوانیم رادیکال را حذف کنیم.

ب) $\frac{۲\sqrt[۳]{۳}}{\sqrt[۳]{۲^۲}}=\frac{۲\sqrt[۳]{۳}}{\sqrt[۳]{۲^۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۲\sqrt[۳]{۶}}{\sqrt[۳]{۲^۳}}=\frac{\cancel{۲}\sqrt[۳]{۶}}{\cancel{۲}}=\sqrt[۳]{۶}$

می‌دانیم که به طور کلی در محاسبات ریاضی، هر چه اعداد کوچک‌تر باشند، کار محاسبه ساده‌تر است به همین دلیل در گویاکردن مخرج کسرها، اگر مخرج کسری دارای رادیکال قابل ساده‌شدن باشد، بهتر است که ابتدا رادیکال را ساده کنیم و سپس مخرج را گویا کنیم. برای درک بهتر این موضوع به مثال زیر دقت کنید.

کسر $\frac{۶\sqrt{۳}}{\sqrt{۳۲}}$ را گویا کنید.

روش اول:

$$\frac{۶\sqrt{۳}}{\sqrt{۳۲}}\times\frac{\sqrt{۳۲}}{\sqrt{۳۲}}=\frac{۶\sqrt{۹۶}}{\sqrt{۳۲^۲}}=\frac{۶\sqrt{۱۶\times ۶}}{۳۲}=\frac{۶\times \overset{۱}{\cancel{۴}}\sqrt{۶}}{\underset{۸}{\cancel{۳۲}}}=\frac{\overset{۳}{\cancel{۶}}\sqrt{۶}}{\underset{۴}{\cancel{۸}}}=\frac{۳\sqrt{۶}}{۴}$$

روش دوم: (روش بهتر) ابتدا $\sqrt{۳۲}$ را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۶\sqrt{۳}}{\sqrt{۳۲}}=\frac{۶\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۶\times ۲}}=\frac{\overset{۳}{\cancel{۶}}\sqrt{۳}}{\underset{۲}{\cancel{۴}}\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۶}}{۲\times ۲}=\frac{۳\sqrt{۶}}{۴}$$

بسم الله الرحمن الرحیم

درس اول: عبارت‌های جبری و مفهوم اتحاد

یک‌جمله‌ای

به عبارت‌های جبری $5x^2$، $-\frac{1}{3}xy$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}xy^2z^4$ یک‌جمله‌ای می‌گویند. هر یک‌جمله‌ای، از حاصل‌ضرب اعداد حقیقی در متغیرها به دست می‌آید.

در یک‌جمله‌ای، توان متغیرها باید عدد صحیح نامنفی (غیرمنفی) باشد.

هر یک‌جمله‌ای از دو قسمت ضریب عددی و عبارت حرفی تشکیل شده است.

عبارت حرفی	ضریب عددی	یک‌جمله‌ای	عبارت حرفی	ضریب عددی	یک‌جمله‌ای
a^2bc^3	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}a^2bc^3$	x^2y	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}x^2y$
$a^0x^0b^0y^0$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	x	$\frac{1}{5}$	$\frac{x}{5}$

- دقت کنید که یک عدد نیز به تنهایی، یک‌جمله‌ای محسوب می‌شود. مانند: $-\frac{1}{3}$، 5 و $\sqrt{2}$.

- عبارت‌هایی مانند $\frac{-2}{a}$، $\frac{3x}{y}$، $\sqrt{x}$ و $\sqrt[3]{x^2}$ یک‌جمله‌ای نیستند، چون توان متغیرها در آن‌ها عدد صحیح نامنفی نیست. برای مثال:

$-\frac{2}{a}=-2a^{-1} \longrightarrow$ توان a منفی است، پس عبارت یک‌جمله‌ای نیست.

$\frac{3x}{y}=3xy^{-1} \longrightarrow$ توان y منفی است، پس عبارت یک‌جمله‌ای نیست.

- در عبارت‌های $\sqrt{x}$ و $\sqrt[3]{x^2}$، توان x کسری می‌شود، بنابراین عبارت‌ها یک‌جمله‌ای نیستند (بعداً در مورد توان این عبارت‌ها توضیح کامل‌تری می‌دهیم).

- در یک‌جمله‌ای $-\frac{2}{3}ab^2x^3$، توان متغیر a، مساوی ۱ است، بنابراین می‌گوییم درجه‌ی این یک‌جمله‌ای نسبت به متغیر a، برابر ۱ است. توان x در این یک‌جمله‌ای برابر ۳ است، پس می‌گوییم درجه‌ی این یک‌جمله‌ای نسبت به متغیر x، ۳ است یا این یک‌جمله‌ای نسبت به x از درجه‌ی سوم است. درجه‌ی این یک‌جمله‌ای نسبت به دو متغیر x و b برابر ۵ است ($\underbrace{3}_{\text{توان x}}+\underbrace{2}_{\text{توان b}}=5$). درجه‌ی این یک‌جمله‌ای نسبت به تمامی متغیرهایش ۶ است ($\underbrace{3}_{\text{توان x}}+\underbrace{2}_{\text{توان b}}+\underbrace{1}_{\text{توان a}}=6$). یک‌جمله‌ای $\frac{2}{3}ab^2x^3$ را می‌توان به صورت $\frac{2}{3}ab^2x^3y^0z^0$ نوشت، بنابراین درجه‌ی این یک‌جمله‌ای برای مثال نسبت به y و z، صفر است.

- همان‌طور که گفتیم، عددهای ثابت مانند ۲، $\frac{1}{5}$، $\sqrt{2}$ و $-\frac{\sqrt{3}}{5}$ و π یک‌جمله‌ای هستند. برای مثال یک‌جمله‌ای ۲ را می‌توان به صورت $2x^0a^0b^0y^0$ نوشت که درجه‌ی این یک‌جمله‌ای صفر است.

عدد صفر هم یک‌جمله‌ای است، اما برای عدد صفر (یک‌جمله‌ای ثابت صفر) درجه تعریف نمی‌شود.

یک‌جمله‌ای‌های متشابه

دو یا چند یک‌جمله‌ای را متشابه می‌گوییم که متغیرها و توان‌های مربوط به هر متغیر در آن‌ها یکسان باشد. (متشابه‌بودن یک‌جمله‌ای‌ها به ضریب عددی آن‌ها بستگی ندارد.)

یک‌جمله‌ای‌های روبه‌رو متشابه‌اند. $-x^۲yz \ , \ \frac{۷}{۲}yzx^۲ \ , \ \sqrt{۵}x^۲zy \ , \ -\frac{۷}{۹}x^۲yz$

- یک‌جمله‌ای‌های $۲a$، $۲a^۲$ و $۲a^۳$ متشابه نیستند.
- یک‌جمله‌ای‌های $-۳ab$، $-۳a^۲b$ و $-۳ab^۲$ متشابه نیستند.
- واضح است که یک‌جمله‌ای‌های $-۳a^۲b$ و $-۳ab^۲$ با هم متشابه نیستند، بنابراین یک‌جمله‌ای‌های غیرمتشابه نامیده می‌شوند.
- دو یا چند یک‌جمله‌ای متشابه را می‌توان با هم جمع و یا از هم کم کرد.
- برای جمع یا تفریق یک‌جمله‌ای‌های متشابه، کافی است که ضرایب عددی آن‌ها را با هم جمع و یا از هم کم کنیم و در کنار حاصل، قسمت حرفی یک‌جمله‌ای‌ها را قرار دهیم.

$$۳x^۲yz+۴x^۲yz=(۳+۴)x^۲yz=۷x^۲yz$$

یک‌جمله‌ای‌های غیرمتشابه را نمی‌توان با هم جمع یا از هم تفریق کرد.

دقت کنید! $۲x+۳x^۲\neq ۵x^۳$ یا $۵x+۳y\neq ۸xy$

دقت کنید! $x+x\neq x^۲ , ۴a+۳a\neq ۷a^۲$ یا $x^۲+x^۲\neq x^۴$

چندجمله‌ای

از جمع دو یا چند یک‌جمله‌ای غیرمتشابه یک چندجمله‌ای حاصل می‌شود. برای مثال: عبارت‌های $۲x+۱$، $۳x^۲+۴y$ و $x^۲+y$ دوجمله‌ای هستند. عبارت $۳x+۴y-۲y^۲$ سه‌جمله‌ای و عبارت $a^۳+a^۲+a+۷$ یک چهارجمله‌ای است.

توجه داشته باشید که یک‌جمله‌ای‌ها نیز چندجمله‌ای محسوب می‌شوند.

اگر متغیری مانند x در یک چندجمله‌ای وجود داشته باشد، بزرگ‌ترین توانی از x را که در آن چندجمله‌ای وجود دارد، درجه‌ی آن چندجمله‌ای نسبت به x می‌نامند.

برای مثال چندجمله‌ای‌های $x+۷$، $۲xy+y-z$ و $\frac{\sqrt{۲}}{۵}z^۲-\frac{x}{۴}y^۲+۱$ نسبت به x از درجه‌ی ۱ هستند.

چندجمله‌ای‌های $xy-x^۲+۲$، $x^۲+xy^۳+z^۴-۱۱$ و $۶zyx^۲-x-۷y^۲+۱۹$ نسبت به x از درجه‌ی ۲ هستند.

چندجمله‌ای‌های $-۷x^۲yz+yx^۳-xyz+۲$ و $x^۳y^۲z-\frac{x}{۵}+\frac{yx^۲}{۷}$ نسبت به x از درجه‌ی ۳ هستند.

چندجمله‌ای استاندارد

هرگاه همه‌ی جمله‌های یک چندجمله‌ای را برحسب توان‌های نزولی (از بزرگ به کوچک) یک متغیر، مرتب کنیم؛ آن چندجمله‌ای را استاندارد می‌گوییم.

نمایش استاندارد چندجمله‌ای	چندجمله‌ای
$۳x^۲-۵x+۱۰$	$-۵x+۱۰+۳x^۲$
$-y^۵+۴y^۳+y-۳$	$۴y^۳-۳-y^۵+y$
$-b^۹-۴b^۶-b^۳+۲b^۲+۷$	$۷-b^۳+۲b^۲-۴b^۶-b^۹$

ضرب یک‌جمله‌ای‌ها

به تساوی‌های مقابل دقت کنید.

الف) $۳a^۲b^۳ \times ۷ab^۴ = (۳\times۷)a^۲ab^۳b^۴ = ۲۱a^{۲+۱}b^{۳+۴} = ۲۱a^۳b^۷$

ب) $-\frac{۱}{۴}x^۲y^۳z \times ۸xy^۵z^۳ = (-\frac{۱}{۴}\times۸)x^۲xy^۳y^۵zz^۳ = -۲x^۳y^۸z^۴$

ضرب چندجمله‌ای‌ها

به تساوی‌های روبه‌رو دقت کنید.

الف) $(x+۲)(x+۷) = x(x+۷)+۲(x+۷) = x^۲+۷x+۲x+۱۴ = x^۲+۹x+۱۴$

برای ضرب دو چندجمله‌ای در یکدیگر، تک‌تک جمله‌های یکی از چندجمله‌ای‌ها را در چندجمله‌ای دیگر ضرب می‌کنیم و سپس عبارت حاصل را به ساده‌ترین صورت ممکن می‌نویسیم.

حاصل‌ضرب چندجمله‌ای $x^۲y+yz-۳$ را در چندجمله‌ای $x^۳-y^۲+۴$ به دست آورید.

$$(x^۳-y^۲+۴)(x^۲y+yz-۳) = x^۳(x^۲y+yz-۳)-y^۲(x^۲y+yz-۳)+۴(x^۲y+yz-۳)$$
$$= x^۵y+x^۳yz-۳x^۳-x^۲y^۳-y^۳z+۳y^۲+۴x^۲y+۴yz-۱۲$$

اتحاد

به جدول زیر دقت کنید.

x	$(x+۵)^۲$	$x^۲+۱۰x+۲۵$	x	$(x+۵)^۲$	$x^۲+۱۰x+۲۵$
-۲	$(-۲+۵)^۲=۳^۲=۹$	$(-۲)^۲+۱۰(-۲)+۲۵=۹$	۰	$(۰+۵)^۲=۲۵$	$۰^۲+۱۰\times۰+۲۵=۲۵$
۷	$(۷+۵)^۲=۱۲^۲=۱۴۴$	$۷^۲+۱۰\times۷+۲۵=۱۴۴$	$\frac{۱}{۲}$	$(\frac{۱}{۲}+۵)^۲=(\frac{۱۱}{۲})^۲=\frac{۱۲۱}{۴}$	$(\frac{۱}{۲})^۲+۱۰\times\frac{۱}{۲}+۲۵=\frac{۱۲۱}{۴}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، تساوی $(x+۵)^۲ = x^۲+۱۰x+۲۵$ به ازای هر مقدار دلخواه x همواره درست است. این‌گونه تساوی‌ها را اتحاد می‌گوییم.

به طور کلی اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقداری برای متغیرهایشان، مقدار یکسانی داشته باشند، در این صورت برابری جبری حاصل از آن‌ها را یک اتحاد جبری می‌نامیم.

آیا $(x+۳)^۲ = x^۲+۹$ یک اتحاد است؟

خیر. زیرا:

$$(x+۳)^۲ = (x+۳)(x+۳) = x^۲+۳x+۳x+۹ = x^۲+۶x+۹ \neq x^۲+۹$$

اتحاد مربع دوجمله‌ای

برای هر دو عدد حقیقی a و b همواره داریم:

الف) $(a+b)^۲ = a^۲+۲ab+b^۲$

ب) $(a-b)^۲ = a^۲-۲ab+b^۲$

به هر یک از تساوی‌های بالا، اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌گویند. تساوی قسمت «ب» را اثبات می‌کنیم.

$$(a-b)^۲ = (a-b)(a-b) = a^۲-ab-ab+b^۲ = a^۲-۲ab+b^۲$$

پس همواره داریم:

$$(a-b)^۲ = a^۲-۲ab+b^۲$$

تجزیه

اگر ضرب مقابل را انجام دهیم، داریم:

$$x(y+z) = x(y+z) = xy+xz$$

این ضرب را توزیع‌پذیری یا خاصیت پخشی عمل ضرب نسبت به جمع می‌گوییم، اکنون اگر عبارت $xy+xz$ را به صورت ضرب دو عبارت جبری بنویسیم، داریم:

$$xy+xz = x(y+z)$$

این عمل، یعنی تبدیل جمع یا تفریق یک عبارت جبری به صورت ضرب را، تجزیه می‌گویند.

سه‌جمله‌ای $x^۲+۱۲x+۳۶$ را تجزیه کنید.

روش اول:

$$x^۲+۱۲x+۳۶=\underline{x^۲+۶x}+\underline{۶x+۳۶}=x(x+۶)+۶(x+۶)=(x+۶)(x+۶)=(x+۶)^۲$$

روش دوم: در این عبارت دو جمله‌ی $x^۲$ و ۳۶ مربع کامل هستند و جمله‌ی ۱۲x، مساوی دو برابر جذر جملات مربع کامل است. پس می‌توان عبارت را با اتحاد مربع کامل تجزیه کرد. یعنی:

$$x^۲+۱۲x+۳۶=(x+۶)^۲$$

جذر جذر

درس دوم: چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها

اتحاد مزدوج

این اتحاد به صورت مقابل است:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$(x+2)(x-2)=x^2-2^2=x^2-4$$

$$(2a-3b)(2a+3b)=(2a)^2-(3b)^2=4a^2-9b^2$$

این اتحاد در عین سادگی، کاربردهای زیادی در محاسبات عددی، سهولت در ساده‌کردن عبارت‌های جبری و تجزیه‌ی عبارت‌های جبری دارد.

حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

الف) $202\times 198=(200+2)(200-2)=40000-4=39996$

ب) $\underbrace{(x-1)(x+1)}_{(x^2-1)}(x^2+1)(x^4+1)=\underbrace{(x^2-1)(x^2+1)}_{(x^4-1)}(x^4+1)=(x^4-1)(x^4+1)=x^8-1$

استفاده از اتحاد مزدوج برای تجزیه‌ی عبارت‌های جبری

به این مثال‌ها دقت کنید:

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y) \qquad a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$t^2-\frac{1}{4}=(t-\frac{1}{2})(t+\frac{1}{2}) \qquad a^2-4=(a+2)(a-2)$$

اتحاد جمله‌مشترک

در این اتحاد یک جمله‌ی مشترک و دو جمله‌ی غیرمشترک داریم:

$$(x+a)(x+b)=x^2+\underbrace{(a+b)}_{\text{مجموع دو جمله‌ی غیرمشترک}}x+\underbrace{ab}_{\text{حاصل‌ضرب دو جمله‌ی غیرمشترک}}$$

جمله‌ی مشترک

جمله‌های غیرمشترک

حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحاد جمله‌مشترک حساب کنید.

الف) $(x+2)(x+3)=$ ب) $(x-8)(x+5)=$

الف) $(x+2)(x+3)=x^2+(2+3)x+2\times 3=x^2+5x+6$

ب) $(x-8)(x+5)=x^2+(-8+5)x+(-8)(5)=x^2-3x-40$

استفاده از اتحاد جمله‌مشترک برای تجزیه‌ی عبارت‌های جبری

با چند مثال، کاربرد این اتحاد را در تجزیه‌ی عبارت‌های جبری نشان می‌دهیم.

عبارت‌های روبه‌رو را تجزیه کنید. ب) $x^2-8x+15=$ الف) $x^2+8x+12=$

الف) باید دو عدد بیابیم که حاصل‌ضرب آن‌ها $+12$ و مجموع آن‌ها $+8$ باشد. چون حاصل‌ضرب دو عدد مثبت است $(+12)$، پس دو عدد هم‌علامت هستند و چون حاصل‌جمع نیز مثبت است $(+8)$، بنابراین دو عدد مثبت هستند، از روی حاصل‌ضرب، دو عدد را می‌یابیم.

$\underline{2\times 6}=12$ $\qquad 1\times 12=12$ $\qquad x^2+\underbrace{8}_{\text{مجموع دو عدد}}x+\underbrace{12}_{\text{حاصل‌ضرب دو عدد}}=$

دو عدد موردنظر چون مجموع آن‌ها $+8$ است.

درس سوم: نابرابری‌ها و نامعادله‌ها

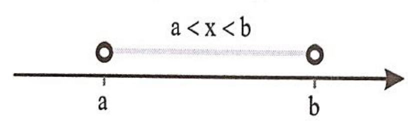
هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، یکی از سه حالت زیر برای دو عدد وجود دارد:

الف) a بزرگ‌تر از b است که به صورت ریاضی می‌نویسیم: $a > b$

ب) a مساوی b است که به صورت ریاضی می‌نویسیم: $a = b$

ج) a کوچک‌تر از b است که به صورت ریاضی می‌نویسیم: $a < b$

- اگر عدد حقیقی a منفی نباشد، یعنی a یا مثبت است یا صفر، که می‌نویسیم: $a \geq ۰$ (می‌خوانیم: a بزرگ‌تر یا مساوی صفر است).
- اگر عدد حقیقی a مثبت نباشد، یعنی a یا منفی است یا صفر که می‌نویسیم: $a \leq ۰$
- برای سه عدد حقیقی a، b و x؛ اگر x بین a و b باشد $(a < b)$، آن‌گاه می‌نویسیم: $a < x < b$ (به محور زیر توجه کنید).



خواص نابرابری‌ها (نامساوی‌ها)

۱- اگر دو طرف یک نابرابری (نامساوی) را با عددی مانند m جمع کنیم، جهت نابرابری (نامساوی) تغییر نمی‌کند.

$$a < b \Rightarrow a + m < b + m \xrightarrow{\text{مثال}} -۴ < -۱ \Rightarrow \overbrace{-۴+۵}^{۱} < \overbrace{-۱+۵}^{۴}$$

۲- اگر دو طرف یک نابرابری را در عددی مثبت ضرب و یا بر عددی مثبت تقسیم کنیم، جهت نابرابری تغییر نمی‌کند.

$$a < b \ , \ m > ۰ \Rightarrow \begin{cases} am < bm \\ a \div m < b \div m \end{cases}$$

$$۴<۶ \Rightarrow \begin{cases} ۴\times ۲<۶\times ۲ \Rightarrow ۸<۱۲ \\ ۴\div ۲<۶\div ۲ \Rightarrow ۲<۳ \end{cases}$$

۳- اگر دو طرف یک نابرابری را در عددی منفی ضرب و یا بر عددی منفی تقسیم کنیم، جهت نابرابری تغییر می‌کند.

$$a<b\ ,\ m<۰ \Rightarrow \begin{cases} am>bm \\ \dfrac{a}{m}>\dfrac{b}{m} \end{cases}$$

$$۱۲<۱۸ \Rightarrow \begin{cases} \underbrace{۱۲\times(-۲)}_{-۲۴}>\underbrace{۱۸\times(-۲)}_{-۳۶} \\ \underbrace{۱۲\div(-۳)}_{-۴}>\underbrace{۱۸\div(-۳)}_{-۶} \end{cases}$$

نامعادله

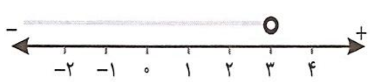
اگر یک نابرابری شامل متغیر (مجهول) باشد، به آن نامعادله می‌گوییم، مانند نابرابری‌های مقابل: $۲x>۳\ ,\ ۴x-۱<۷$

● به مجموعه‌ی مقادیر (عددهایی) که به ازای آن‌ها نامعادله به یک نابرابری درست، تبدیل شود، مجموعه‌جواب نامعادله می‌گوییم و این مجموعه‌جواب را با حرف D نمایش می‌دهیم. مجموعه‌جواب یک نامعادله را روی محور اعداد حقیقی می‌توان نشان داد. به مثال‌های زیر دقت کنید.

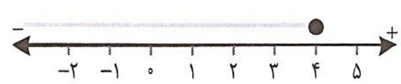
نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه‌جواب آن‌ها را مشخص کنید و مجموعه‌جواب هر نامعادله را روی محور نیز نمایش دهید.

الف) $۲x<۶$ ب) $۳x\le ۱۲$ ج) $x+۲\ge ۳$

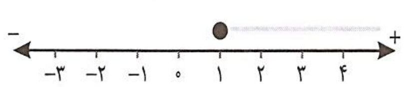
الف) $۲x<۶ \Rightarrow x<\frac{۶}{۲} \Rightarrow x<۳ \Rightarrow D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<۳\}$



ب) $۳x\le ۱۲ \Rightarrow x\le\frac{۱۲}{۳} \Rightarrow x\le ۴ \Rightarrow D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le ۴\}$



ج) $x+۲\ge ۳ \Rightarrow x\ge ۳-۲ \Rightarrow x\ge ۱ \Rightarrow D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge ۱\}$

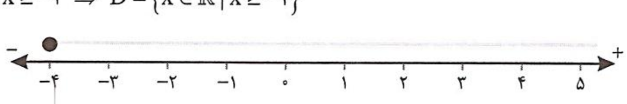


همان‌طور که در سه مثال بالا مشاهده کردید، روش حل نامعادله دقیقاً مانند روش‌های حل معادله است، فقط به جای علامت مساوی، علامت نامساوی داریم و این نکته را فراموش نکنید که اگر ضریب متغیر عدد منفی باشد و طرفین نامساوی را بر عدد منفی تقسیم کنیم، جهت نامساوی تغییر می‌کند. به مثال‌های زیر دقت کنید.

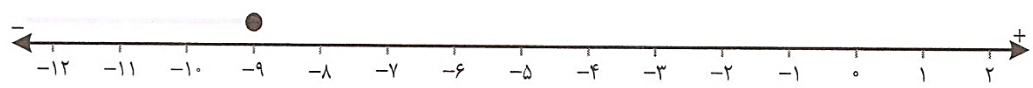
نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه‌جواب را بنویسید و روی محور نیز مشخص کنید.

الف) $-۲x\le ۸$ ب) $-\frac{۲}{۳}x\ge ۶$

الف) $-۲x\le ۸ \Rightarrow x\ge\frac{۸}{-۲} \Rightarrow x\ge -۴ \Rightarrow D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge -۴\}$

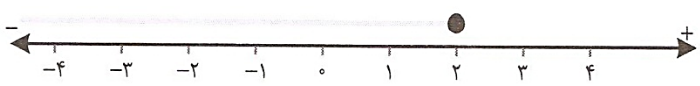


ب) $-\frac{2}{3}x \underbrace{\ge 6 \Rightarrow x \le}_{\text{توجه}} 6 \div (-\frac{2}{3}) \Rightarrow x \le 6 \times (-\frac{3}{2}) \Rightarrow x \le -9 \Rightarrow D=\{x \in \mathbb{R} | x \le -9\}$



نامعادله‌ی مقابل را حل کنید و مجموعه‌جواب را روی محور نمایش دهید. $-2x+1 \ge -3$

$-2x+1 \ge -3 \Rightarrow -2x \ge \underbrace{-3-1}_{-4} \Rightarrow -2x \underbrace{\ge -4 \Rightarrow x \le}_{\text{توجه}} \frac{-4}{-2} \Rightarrow x \le 2 \Rightarrow D=\{x \in \mathbb{R} | x \le 2\}$



بسم الله الرحمن الرحیم

درس اول: معادله‌ی خط

پدیده‌های گوناگونی در زندگی روزمره می‌توان یافت که بین آن‌ها رابطه وجود دارد. برای مثال، بین زمان حرکت یک اتومبیل و مسافت طی‌شده‌ی آن، یا بین مسافت طی‌شده و میزان سوختی که مصرف می‌کند و یا بین زمان حرکت اتومبیل و مقدار مصرفی بنزین آن، رابطه‌هایی وجود دارد.

اتومبیلی با سرعت ثابت ۲ کیلومتر در دقیقه در حال حرکت است. در جدول زیر رابطه‌ی بین زمان حرکت و مسافت طی‌شده توسط این اتومبیل را بررسی می‌کنیم.

زمان (دقیقه) x	۱	۲	۳	۴	۵	...	۷۴	...	۱۰۸
مسافت (کیلومتر) y	۲	۴	۶	۸	۱۰	...	۱۴۸	...	۲۱۶

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، عدد مربوط به مسافت در هر زمان خاصی، دو برابر عدد مربوط به زمان است.

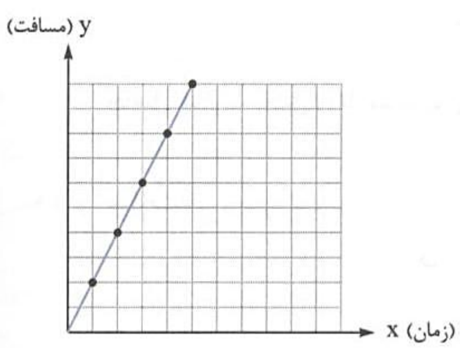
الف) این اتومبیل پس از ۷۴ دقیقه چه مسافتی را طی کرده است؟ $۷۴\times ۲=۱۴۸$ کیلومتر

ب) پس از چند دقیقه، این اتومبیل مسافت ۲۱۶ کیلومتر را طی کرده است؟ $۲۱۶\div ۲=۱۰۸$ دقیقه

اکنون اگر عددهای زمان و مسافت مربوط به هم را به صورت زوج عدد نمایش دهیم، داریم:

$$\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۲\\۴\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۳\\۶\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۴\\۸\end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix}۱۰۸\\۲۱۶\end{bmatrix}$$

این نقطه‌ها را روی نمودار مقابل مشخص می‌کنیم. اگر این نقطه‌ها را به هم وصل کنیم، می‌بینیم که همه‌ی آن‌ها روی یک خط راست قرار دارند، به همین دلیل می‌گوییم رابطه‌ی بین زمان حرکت و مسافت طی‌شده توسط این اتومبیل، یک رابطه‌ی خطی است.



برای رابطه‌ی بین زمان حرکت اتومبیل و مسافت طی‌شده‌ی آن می‌توانیم یک معادله بنویسیم.

معادله به صورت کلامی: دو برابر زمان طی‌کردن مسافت = مسافت طی‌شده

معادله به صورت ریاضی: $y=۲x$ (y: مسافت طی‌شده، x: زمان طی‌کردن)

تساوی بالا اتحاد نیست به دلیل این‌که در اتحاد، هر مقدار دلخواهی که به جای x و y قرار دهیم، همواره دو طرف تساوی برابر می‌شوند. اما در تساوی بالا اگر به جای x یا به جای y یک عدد دلخواه قرار دهیم، مقدار متغیر دیگر را باید از راه معادله حساب کنیم.

برای مثال: برای $x=۱۷$ داریم: $y=۲\times۱۷=۳۴ \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۷\\۳۴\end{bmatrix}$

یا برای $y=۵۶$ داریم: $۵۶=۲x \Rightarrow x=\frac{۵۶}{۲}=۲۸ \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲۸\\۵۶\end{bmatrix}$

معادلاتی مانند $y=۲x$ که دارای بیش از یک متغیر هستند، دارای بی‌شمار جواب هستند.

برای معادله‌ی $۲x+y=۲۴$ سه پاسخ مختلف بیابید.

x	۱	۲	۵
y	$۲\times۱+y=۲۴$	$۲\times۲+y=۲۴$	$۲\times۵+y=۲۴$
	$y=۲۴-۲$	$y=۲۴-۴$	$۱۰+y=۲۴$
	$y=۲۲$	$y=۲۰$	$y=۲۴-۱۰=۱۴$

بنابراین سه پاسخ برای معادله‌ی $۲x+y=۲۴$ به صورت زیر است:

x	۱	۲	۵
y	۲۲	۲۰	۱۴

یا $\begin{bmatrix}۱\\۲۲\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۲\\۲۰\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۵\\۱۴\end{bmatrix}$

معادله‌ی خط: صورت کلی معادله‌ی خط راست، به شکل $y=ax+b$ است. این معادله دارای بی‌شمار جواب است و هر یک از جواب‌های آن مختصات یک نقطه است که اگر این نقاط را به هم وصل کنیم یک خط راست به دست می‌آید، به همین دلیل می‌گوییم که در این‌گونه معادلات x و y رابطه‌ی خطی دارند.

در معادله‌ی $y=ax+b$، a و b اعداد ثابت هستند.

هر یک از معادله‌های $y=-۲x+۱$، $y=\frac{۵}{۲}x+\frac{۳}{۴}$ و $y=-\frac{۳}{۴}x+۲$ معادله‌ی یک خط راست هستند.

اگر در معادله‌ی خط $y=ax+b$، $b=۰$ باشد، آن‌گاه معادله‌ی خط به صورت $y=ax$ درمی‌آید، که این خط از مبدأ مختصات (یعنی نقطه‌ی $\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$) می‌گذرد.

خط‌های $y=۲x$، $y=-\frac{۱}{۳}x$ و $y=\frac{۷}{۵}x$ همگی از مبدأ مختصات، یعنی نقطه‌ی $\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$ می‌گذرند.

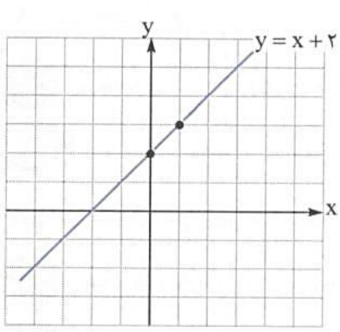
- می‌دانیم که از دو نقطه فقط یک خط راست می‌گذرد، پس برای رسم یک خط راست، فقط کافی است که مختصات دو نقطه از آن خط را داشته باشیم. به مثال‌های زیر دقت کنید.

معادله‌ی دو خط به صورت زیر داده شده، آن‌ها را رسم کنید.

الف) $y=x+۲$ ب) $y=-۳x$

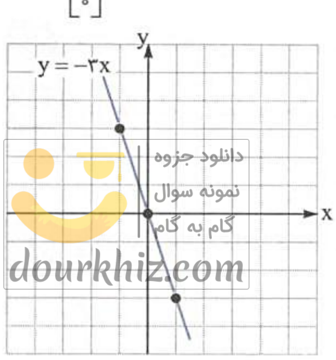
الف) مختصات دو نقطه از خط را به دست می‌آوریم.

x	۰	۱
y	$y=۰+۲=۲$	$y=۱+۲=۳$
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۰\\۲\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۱\\۳\end{bmatrix}$



ب) ابتدا مختصات دو نقطه از خط را به دست می‌آوریم. می‌دانیم که این خط از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس مختصات یک نقطه‌ی آن $\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$ است.

x	۰	۱
y	۰	-۳
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۱\\-۳\end{bmatrix}$



معادله‌ی خط در واقع، رابطه‌ی بین طول و عرض نقاط یک خط است. برای مثال وقتی‌که می‌گوییم معادله‌ی خط d به صورت $y=۲x$ است، یعنی عرض هر نقطه روی خط d، دو برابر طول آن نقطه است یا وقتی می‌گوییم معادله‌ی خط b به صورت $y=x+۳$ است، یعنی عرض هر نقطه روی خط b، ۳ واحد بیشتر از طول آن نقطه است.

معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix}۱\\۴\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}۲\\۸\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-۳\\-۱۲\end{bmatrix}$ بگذرد.

اگر به مختصات نقطه‌ها دقت کنیم، می‌بینیم که عرض هر نقطه، ۴ برابر طول آن نقطه است. پس می‌توان نوشت:

عرض = چهار برابر طول $\Rightarrow y=۴x$

معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix}۷\\۴\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}۴\\۱\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۰\\-۳\end{bmatrix}$ بگذرد.

با کمی دقت درمی‌یابیم که عرض هر نقطه، سه واحد کم‌تر از طول آن است، پس می‌نویسیم:

عرض = سه واحد کم‌تر از طول $\Rightarrow y=x-۳$

اگر نسبت عرض به طول در دو نقطه ثابت باشد، آن خط حتماً از مبدأ مختصات می‌گذرد.

معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $\begin{bmatrix}۳\\-۶\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-۱\\۲\end{bmatrix}$ بگذرد.

نسبت عرض به طول در هر دو نقطه ۲- است، پس معادله‌ی خط می‌شود:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\text{عرض}}{\text{طول}}=\frac{y}{x}=\frac{-۶}{۳}=-۲\\ \frac{\text{عرض}}{\text{طول}}=\frac{y}{x}=\frac{۲}{-۱}=-۲\end{aligned}\right\}\Rightarrow y=-۲x$$

برای این‌که دریابیم نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ روی خط d به معادله‌ی $y=ax+b$ قرار دارد یا خط d از نقطه‌ی A می‌گذرد، دو روش وجود دارد:

۱- روش رسم: خط d را به طور دقیق رسم کنیم و بعد ببینیم که آیا از نقطه‌ی A می‌گذرد یا خیر.

۲- روش محاسبه یا تحلیلی: مختصات نقطه‌ی A را در معادله‌ی خط جایگزین می‌کنیم، اگر دو طرف تساوی برابر شوند، بنابراین نقطه‌ی A روی خط d قرار دارد.

آیا نقطه‌ی $\begin{bmatrix}۲\\-۵\end{bmatrix}$ روی خط $y=-۳x+۱$ قرار دارد؟

مختصات نقطه را در معادله‌ی خط جایگزین می‌کنیم:

$$-۵=\underbrace{-۳\times ۲}_{-۶}+۱\Rightarrow -۵=-۵$$

چون دو طرف تساوی برابر شدند، بنابراین نقطه روی خط قرار دارد.

مختصات نقطه‌ای از خط $y=\frac{۲}{۳}x+۱$ را به دست آورید که طول آن ۳ باشد.

به جای x در معادله‌ی خط، عدد ۳ را قرار می‌دهیم و مقدار y را به دست می‌آوریم.

$$y=\frac{۲}{\cancel{۳}}\times\cancel{۳}+۱=۳\Rightarrow y=۳\Rightarrow\begin{bmatrix}۳\\۳\end{bmatrix}\qquad \text{مختصات نقطه‌ی موردنظر}$$

مختصات نقطه‌ای از خط $y=-۲x+۷$ را به دست آورید که عرض آن ۵- باشد.

در معادله‌ی خط به جای y، ۵- قرار می‌دهیم تا مقدار x به دست آید.

$$-۵=-۲x+۷\Rightarrow -۲x=-۱۲\Rightarrow x=۶\Rightarrow\begin{bmatrix}۶\\-۵\end{bmatrix}\qquad \text{مختصات نقطه‌ی موردنظر}$$

می‌دانیم که اگر طول نقطه‌ای صفر باشد، آن نقطه روی محور عرض‌ها قرار دارد و اگر عرض نقطه‌ای صفر باشد، آن نقطه روی محور طول‌ها قرار دارد.

نقاط $\begin{bmatrix}۲\\۰\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}-۷\\۰\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳}\\۰\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-۲/۵\\۰\end{bmatrix}$ همگی روی محور طول قرار دارند و نقاط $\begin{bmatrix}۰\\-۱\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}۰\\\frac{۲}{۳}\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۰\\-\sqrt{۳}\end{bmatrix}$ همگی روی محور عرض قرار دارند.

اگر در معادله‌ی خط به جای x صفر قرار دهیم، می‌توانیم مختصات نقطه‌ی برخورد خط با محور عرض را به دست آوریم و اگر به جای y صفر قرار دهیم، می‌توانیم مختصات نقطه‌ی برخورد خط را با محور طول به دست آوریم.

محل برخورد خط $-۳x+۴y=۱۲$ را با محورهای مختصات به دست آورید.

مختصات نقطه‌ی برخورد خط با محور عرض‌ها

$$\begin{cases}-۳x+۴y=۱۲\\x=۰\end{cases} \Rightarrow -۳\times۰+۴y=۱۲ \Rightarrow ۴y=۱۲ \Rightarrow y=۳ \Rightarrow \begin{bmatrix}۰\\۳\end{bmatrix}$$

مختصات نقطه‌ی برخورد خط با محور طول‌ها

$$\begin{cases}-۳x+۴y=۱۲\\y=۰\end{cases} \Rightarrow -۳x+۴\times۰=۱۲ \Rightarrow -۳x=۱۲ \Rightarrow x=\frac{۱۲}{-۳}=-۴ \Rightarrow \begin{bmatrix}-۴\\۰\end{bmatrix}$$

درس دوم: شیب خط و عرض از مبدأ

اگر معادله‌ی خط d به صورت $y=ax+b$ باشد (توجه کنید که y در یک طرف تساوی و بقیه‌ی اجزای معادله در طرف دیگر هستند و ضریب y، مساوی ۱ است). آن‌گاه عدد a را شیب خط و عدد b را عرض از مبدأ خط می‌گویند.

جدول زیر را کامل کنید.

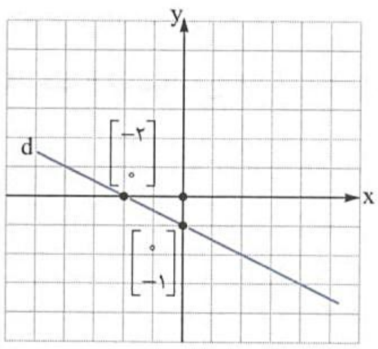
$y=\frac{x}{۳}-۱$	$y=-x+۱$	$y=\frac{۴}{۵}x$	$y=-۲x+\frac{۱}{۳}$	**معادله‌ی خط**
$\frac{۱}{۳}$	-۱	$\frac{۴}{۵}$	-۲	**شیب خط**
-۱	۱	۰	$\frac{۱}{۳}$	**عرض از مبدأ**

اگر طول نقطه‌ای از یک خط صفر باشد، عدد عرض مربوط به آن نقطه را، عرض از مبدأ خط می‌گویند.

اگر عرض نقطه‌ای از یک خط صفر باشد، عدد طول مربوط به آن نقطه را، طول از مبدأ آن خط می‌گویند.

خط d به معادله‌ی $x + 2y = -2$ را رسم کنید.

ابتدا جدول را تشکیل می‌دهیم.



x	0	-2
y	-1	0
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}$

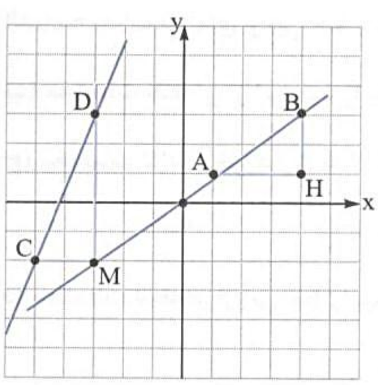
طول از مبدأ ← $\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}$

عرض از مبدأ ← -1

می‌دانیم معادله‌ی کلیه‌ی خطوطی که از مبدأ مختصات می‌گذرند، به صورت $y = ax$ است. در این معادله a شیب خط است و می‌توان مقدار شیب را در این خطوط از رابطه‌ی $a = \frac{y}{x}$ محاسبه کرد.

خطی از مبدأ مختصات و نقطه‌ی $\begin{bmatrix}3\\12\end{bmatrix}$ می‌گذرد، شیب این خط چه‌قدر است؟

شیب خط $\qquad a = \frac{y}{x} = \frac{12}{3} = 4$



به طور کلی نسبت تغییر ارتفاع به مسافت افقی طی‌شده را شیب خط می‌گوییم.

برای مثال دو نقطه‌ی A و B در نمودار مقابل را در نظر بگیرید، اگر بخواهیم از نقطه‌ی A به B برویم، نسبت ارتفاع BH به مسافت افقی AH را شیب خطی می‌گوییم که از دو نقطه‌ی A و B می‌گذرد.

$\frac{BH}{AH} = \frac{2}{3} =$ شیب خطی که از نقطه‌های A و B می‌گذرد.

- در صفحه‌ی مختصات مقابل، شیب خطی که از دو نقطه‌ی C و D می‌گذرد، برابر است با:

$\frac{MD}{MC} = \frac{5}{2} = 2/5 =$ شیب خطی که از نقطه‌های C و D می‌گذرد.

شیب و عرض از مبدأ خط‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $2y = 4x - 8$ $\qquad$ ب) $\frac{1}{2}x + y = -3$

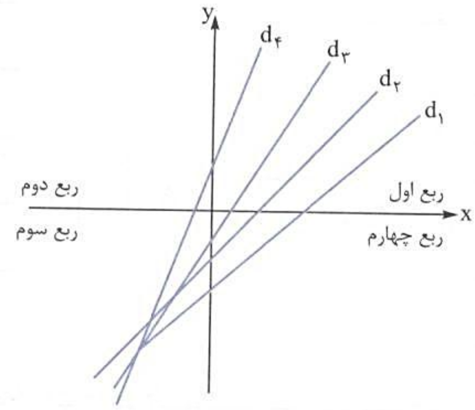
الف) دقت کنید که در این مثال عدد ۴ یعنی ضریب x شیب خط نیست و عدد ۸- عرض از مبدأ نیست، چون معادله به صورت $y = ax + b$ نیست. (ضریب y، عدد ۱ نیست). پس ابتدا باید معادله را به صورت $y = ax + b$ درآوریم، بنابراین دو طرف تساوی را بر ضریب y تقسیم می‌کنیم:

$$2y = 4x - 8 \xrightarrow{\div 2} \frac{2y}{2} = \frac{4x}{2} - \frac{8}{2} \Rightarrow y = 2x - 4 \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب خط} = 2 \\ \text{عرض از مبدأ خط} = -4 \end{cases}$$

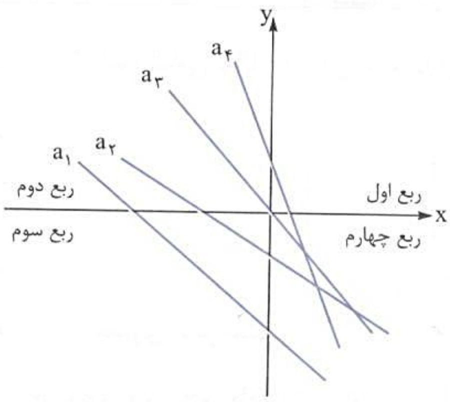
ب) ابتدا باید معادله به صورت $y = ax + b$ تبدیل شود.

$$\frac{1}{2}x + y = -3 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 3 \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب خط} = -\frac{1}{2} \\ \text{عرض از مبدأ خط} = -3 \end{cases}$$

می‌دانیم که محورهای مختصات، صفحه‌ی مختصات را به چهار ناحیه یا چهار ربع تقسیم می‌کنند. تمامی خطوطی که از ربع اول شروع و به ربع سوم رسم می‌شوند دارای شیب مثبت و تمامی خطوطی که از ربع دوم شروع و به ربع چهارم رسم می‌شوند، دارای شیب منفی هستند.



شیب خطوط d_1، d_2، d_3 و d_4 مثبت است.



شیب خطوط a_1، a_2، a_3 و a_4 منفی است.

شرط موازی‌بودن دو خط: اگر دو خط، دارای شیب‌های برابر باشند، آن دو خط با هم موازی هستند.

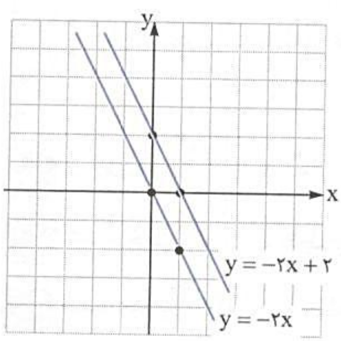
دو خط $y = 2x + \frac{1}{3}$ و $y = 2x - 7$ با یکدیگر موازی هستند، چون شیب هر دو خط مساوی ۲ است.

نمودار دو خط $y = -2x$ و $y = -2x + 2$ را رسم کنید.

ابتدا جدول را تشکیل می‌دهیم.

x	0	1
$y = -2x + 2$	2	0
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

x	0	1
$y = -2x$	0	-2
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$



دقت کنید که چون دو خط دارای شیب‌های برابر هستند، با هم موازی‌اند و چون شیب آن‌ها منفی است از ربع دوم به چهارم رسم شده‌اند.

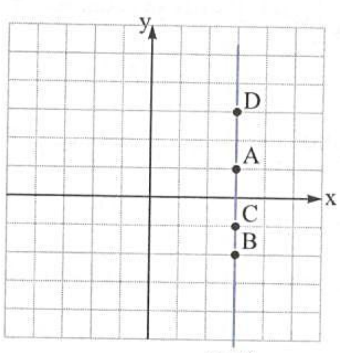
شرط عمودبودن دو خط: اگر شیب‌های دو خط، قرینه‌ی معکوس یکدیگر باشند یا حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط مساوی -1 باشد، آن‌گاه دو خط بر هم عمودند. برای مثال خطوط $y = -3x$ و $y = \frac{1}{3}x + 2$ بر هم عمودند، زیرا: $-3 \xrightarrow{\text{قرینه‌ی معکوس}} \frac{1}{3}$

● صورت دیگر معادله‌ی خط: گاهی اوقات معادله‌ی خط را به صورت $ax + by = c$ نشان می‌دهند که در این معادله a، b و c اعداد حقیقی هستند. برای مثال معادله‌ی $y = 3x + 4$ را می‌توان به صورت $y - 3x = 4$ یا $-3x + y = 4$ نوشت که در آن، $a = -3$، $b = 1$ و $c = 4$ است.

● اگر در معادله‌ی خط $ax + by = c$، $a = 1$ و $b = 0$ باشد، آن‌گاه معادله‌ی خط به صورت $x = c$ درمی‌آید که این خط موازی محور عرض است و بر محور طول‌ها عمود می‌شود. تمامی نقاط روی این خط، دارای طولی برابر c هستند.

مختصات چهار نقطه از خط $x = 3$ را بنویسید و سپس این خط را رسم کنید.

همان‌طور که گفتیم، تمامی نقاط روی این خط دارای طولی مساوی ۳ هستند.



$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

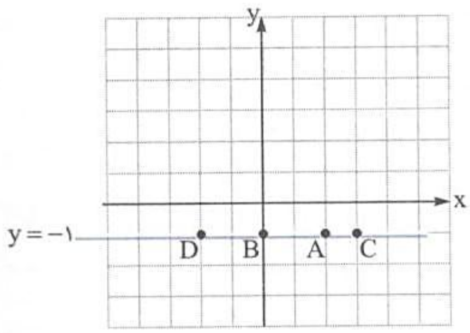
شیب خط $x = c$ تعریف نشده (نامعین) است.

● اگر در معادله‌ی خط $ax + by = c$، $a = 0$ و $b = 1$ باشد، آن‌گاه معادله‌ی خط به صورت $y = c$ درمی‌آید، این خط موازی محور طول‌ها است و بر محور عرض‌ها عمود می‌شود. تمامی نقاط روی این خط دارای عرضی برابر c هستند.

مختصات چهار نقطه از خط $y=-۱$ را بنویسید و سپس این خط را رسم کنید.

همان‌طور که گفتیم، تمامی نقاط روی این خط دارای عرضی مساوی ۱− هستند.

$$A=\begin{bmatrix}۲\\-۱\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}۰\\-۱\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}۳\\-۱\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}-۲\\-۱\end{bmatrix}$$



شیب خط $y=c$، مساوی صفر است.

چون عرض هر نقطه روی محور طول‌ها، مساوی صفر است، بنابراین معادله‌ی محور طول‌ها به صورت $y=۰$ است.

چون طول هر نقطه روی محور عرض‌ها، مساوی صفر است، بنابراین معادله‌ی محور عرض‌ها به صورت $x=۰$ است.

می‌دانیم هر نقطه مانند A در صفحه‌ی مختصات دارای یک طول و یک عرض است. برای مثال مختصات نقطه‌ی A را به صورت $A=\begin{bmatrix}x_A\\y_A\end{bmatrix}$ و مختصات نقطه‌ی B را به صورت $B=\begin{bmatrix}x_B\\y_B\end{bmatrix}$ نشان می‌دهیم. x_A یعنی طول نقطه‌ی A و y_A یعنی عرض نقطه‌ی A.

در نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}-۴\\۲\end{bmatrix}$، $x_A=-۴$ و $y_A=۲$ است.

شیب خطی که از دو نقطه‌ی A و B می‌گذرد، از رابطه‌ی مقابل محاسبه می‌شود.

$$\text{شیب}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\text{تفاضل عرض‌های دو نقطه}}{\text{تفاضل طول‌های دو نقطه}}$$

شیب خطی را که از دو نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱\\-۵\end{bmatrix}$ می‌گذرد، به دست آورید.

$$\text{شیب خط}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-۵-۳}{-۱-۲}=\frac{-۸}{-۳}=\frac{۸}{۳}$$

درس سوم: دستگاه معادله‌های خطی

پیش از این در مورد حل معادله‌های یک‌مجهولی و استفاده از معادله برای حل مسئله‌ها صحبت کردیم. برای یادآوری به مثال زیر دقت کنید.

مریم ۴ مکعب چوبی هم‌اندازه دارد. اگر وزن آن‌ها روی هم ۶۰ گرم باشد، وزن هر مکعب را حساب کنید.

x : وزن هر مکعب چوبی (گرم) $\Rightarrow ۴x=۶۰ \Rightarrow x=\frac{۶۰}{۴}=۱۵$ گرم $\Rightarrow x=۱۵$

اکنون به مثال زیر دقت کنید:

مریم دو نوع مکعب چوبی کوچک و بزرگ دارد، وزن ۵ مکعب کوچک و ۷ مکعب بزرگ روی هم ۳۱۰ گرم و وزن دو مکعب بزرگ و ۳ مکعب کوچک ۱۲۰ گرم است. وزن هر یک از مکعب‌ها را حساب کنید.

برای حل این مسئله، چون دو نوع مکعب با وزن‌های متفاوت داریم، باید از دو مجهول استفاده کنیم.

x : وزن مکعب کوچک y : وزن مکعب بزرگ

برای حل این مسئله، باید دو معادله‌ی مقابل هم‌زمان حل شوند.

چون اگر هر معادله را به تنهایی بخواهیم حل کنیم، بی‌شمار جواب خواهیم داشت.
$$\begin{cases}5x+7y=310\\3x+2y=120\end{cases}$$

اگر چند معادله با چند مجهول داشته باشیم، به آن دستگاه معادلات می‌گوییم. برای مثال برای حل مسئله‌ی بالا، یک دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی داریم.

برای حل دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی، روش‌های متفاوتی وجود دارد که ما سه روش را برای شما توضیح می‌دهیم.

۱- روش رسم　　　　۲- روش حذفی　　　　۳- روش جایگزینی

دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی بالا را به روش حذفی حل می‌کنیم، یعنی ابتدا ضریب یکی از مجهول‌ها را قرینه می‌کنیم و سپس مقدار مجهول دیگر را حساب می‌کنیم.

$$\begin{array}{r}-3\\5\end{array}\begin{cases}5x+7y=310\\3x+2y=120\end{cases}\Rightarrow +\begin{cases}\cancel{-15x}-21y=-930\\\cancel{15x}+10y=600\end{cases}$$

$$-11y=-330 \Rightarrow y=\frac{-330}{-11}=30 \Rightarrow y=30$$

اکنون در یکی از معادلات (به طور دلخواه) مقدار y را قرار می‌دهیم و مقدار x را می‌یابیم.

$$3x+2y=120 \Rightarrow 3x+2\times 30=120 \Rightarrow 3x+60=120 \Rightarrow 3x=120-60=60 \Rightarrow x=\frac{60}{3}=20 \Rightarrow x=20$$

روش رسم برای حل دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی: اگر معادله‌های یک دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی را به عنوان معادله‌های دو خط در نظر بگیریم، مختصات نقطه‌ی برخورد این دو خط، همان جواب دستگاه معادلات است. فقط باید توجه داشت که نمودارهای دو خط، کاملاً دقیق رسم شوند، چون در غیر این صورت جواب درست نخواهد بود.

دستگاه مقابل را به روش رسم حل کنید.
$$\begin{cases}x+y=3\\-2x+y=-3\end{cases}$$

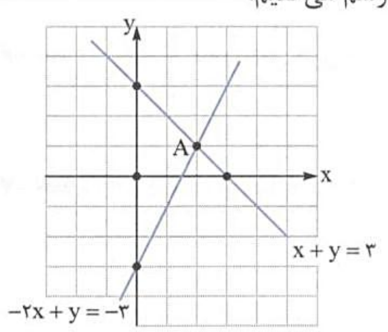
هر یک از معادلات دستگاه را معادله‌ی یک خط راست در نظر گرفته و روی صفحه‌ی مختصات رسم می‌کنیم.

$-2x+y=-3$

x	0	2
y	-3	1
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

$x+y=3$

x	0	3
y	3	0
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$



همان‌طور که در نمودار مشاهده می‌شود، نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$، محل برخورد دو خط و جواب دستگاه است، یعنی: $x=2, y=1$

اگر معادلات دو خط را داشته باشیم و بخواهیم نقطه‌ی برخورد دو خط را بیابیم، فقط کافی است که معادلات دو خط را در یک دستگاه قرار دهیم و دستگاه معادلات را حل کنیم، پاسخ دستگاه، مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط است.

مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط $3x+2y=1$ و $x+5y=9$ را بیابید.

معادلات دو خط را در یک دستگاه قرار می‌دهیم و سپس دستگاه معادلات را حل می‌کنیم.
$$\begin{cases}3x+2y=1\\x+5y=9\end{cases}$$

این دستگاه را به روش حذفی حل می‌کنیم:

$$-3\begin{cases}3x+2y=1\\x+5y=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cancel{3x}+2y=1\\\cancel{-3x}-15y=-27\end{cases}$$

$$-13y=-26 \Rightarrow y=\frac{-26}{-13}=2 \Rightarrow y=2$$

$$x+5y=9 \Rightarrow x+5\times 2=9 \Rightarrow x=9-10 \Rightarrow x=-1$$

بنابراین نقطه‌ی برخورد دو خط، نقطه‌ی $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ است.

در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$:

الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$، آن‌گاه دستگاه دارای یک جواب است. یعنی یک نقطه‌ی برخورد برای دو خط وجود دارد. در واقع دو معادله‌ی دستگاه، معادلات دو خط متقاطع هستند.

در دستگاه $\begin{cases} ۲x+۳y=۵ \\ ۵x-۲y=۱۱ \end{cases}$ نسبت ضرایب x، $\frac{۲}{۵}$ و نسبت ضرایب y، $-\frac{۳}{۲}$ است و $-\frac{۳}{۲} \neq \frac{۲}{۵}$؛ بنابراین این دستگاه دارای یک جواب است. یعنی معادلات مربوط به دو خط متقاطع‌اند.

ب) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$، آن‌گاه دستگاه جواب ندارد یعنی دو معادله‌ی خط داده‌شده، مربوط به دو خط موازی هستند، بنابراین نقطه‌ی برخورد ندارند.

در دستگاه معادلات $\begin{cases} ۳x-۲y=۶ \\ ۶x-۴y=۵ \end{cases}$ نسبت ضرایب x، مساوی $\frac{۳}{۶}$ یا $\frac{۱}{۲}$ و نسبت ضرایب y، $\frac{-۲}{-۴}$ یا $\frac{۱}{۲}$ است و چون این دو نسبت مساوی‌اند (و مخالف $\frac{۶}{۵}$ هستند) بنابراین این دستگاه جواب ندارد و دو معادله‌ی دستگاه مربوط به دو خط موازی است.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲} \\ \frac{-۳}{-۴}=\frac{۱}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲} \neq \boxed{\frac{۶}{۵}} \Rightarrow \text{دستگاه جواب ندارد}$$

نسبت اعداد سمت راست تساوی‌ها

حل دستگاه به روش جایگزینی (روش جای‌گذاری یا روش تبدیلی): در این روش، با استفاده از یکی از معادله‌ها، یکی از متغیرها را برحسب متغیر دیگر حساب می‌کنیم. سپس با جایگزینی آن متغیر در معادله‌ی دیگر، به یک معادله‌ی یک‌مجهولی می‌رسیم و آن را حل می‌کنیم و سپس متغیر دوم را حساب می‌کنیم.

دستگاه معادلات مقابل را حل کنید. $\begin{cases} x-y=۵ \\ ۲x+۳y=۱۵ \end{cases}$

مرحله‌ی اول: از معادله‌ی بالایی مقدار x را برحسب y حساب می‌کنیم.
$x-y=۵ \Rightarrow x=۵+y$

مرحله‌ی دوم: در معادله‌ی پایینی به جای x، مقدار مساویش یعنی «$۵+y$» را قرار می‌دهیم تا معادله‌ی پایینی، یک‌مجهولی شود و سپس آن را حل می‌کنیم.
$$۲x+۳y=۱۵ \Rightarrow ۲(۵+y)+۳y=۱۵ \Rightarrow ۱۰+۲y+۳y=۱۵ \Rightarrow ۵y=۱۵-۱۰=۵ \Rightarrow y=\frac{۵}{۵}=۱ \Rightarrow y=۱$$

مرحله‌ی سوم: در یکی از معادلات (به دلخواه) مقدار y (یعنی عدد ۱) را قرار می‌دهیم و سپس مقدار x را حساب می‌کنیم.
$$x-y=۵ \Rightarrow x-۱=۵ \Rightarrow x=۶$$

معادله‌ی توانی: اگر در یک معادله، مجهول در توان عدد باشد، آن را معادله‌ی توانی می‌گوییم. برای حل معادله‌ی توانی، باید سعی کنیم که پایه‌های دو عدد مساوی شوند و سپس پایه‌ها را حذف کنیم و توان‌ها را مساوی هم قرار دهیم و معادله را حل کنیم.

معادله‌ی مقابل را حل کنید. $۲^{x+۳}=۲^{۱۱}$

$$\cancel{۲}^{x+۳}=\cancel{۲}^{۱۱} \Rightarrow x+۳=۱۱ \Rightarrow x=۱۱-۳ \Rightarrow x=۸$$

معادله‌ی مقابل را حل کنید. $۳^{۲x+۱}=۲۷$

ابتدا عدد ۲۷ را تجزیه می‌کنیم تا پایه‌ها برابر شوند.
$۲۷=۳^۳$
$$\Rightarrow \cancel{۳}^{۲x+۱}=\cancel{۳}^{۳} \Rightarrow ۲x+۱=۳ \Rightarrow ۲x=۳-۱=۲ \Rightarrow x=\frac{۲}{۲}=۱ \Rightarrow x=۱$$

اگر در معادلات توانی، پایه‌ها دو عدد اول متفاوت و غیرقابل تجزیه باشند، توان‌های دو عدد باید مساوی صفر باشند.

معادله‌ی توانی مقابل را حل کنید. $2^{3x+1} = 5^{5x+y}$

چون پایه‌ها عددهای اول متفاوت هستند، بنابراین باید توان‌ها مساوی صفر باشند.

$$3x+1=0 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$$

$$5x+y=0 \Rightarrow 5\times(-\frac{1}{3})+y=0 \Rightarrow y=\frac{5}{3}$$

بسم الله الرحمن الرحیم

درس اول: معرفی و ساده‌کردن عبارت‌های گویا

به طور کلی یک عبارت گویا، به کسری گفته می‌شود که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشند.

- این عبارت‌ها گویا هستند.

$$\frac{-x^2}{2x+1}, \frac{-3}{7}, \frac{x}{y}, \frac{a^3-b^3}{b+1}, \frac{5}{x+2}, \frac{1}{y}, \frac{\sqrt{3}}{x}, \frac{-3x}{\sqrt{5}}$$

- این عبارت‌ها گویا نیستند:

$$\sqrt{ab}, \frac{x}{\sqrt{y}}, \frac{3}{\sqrt{xy-5}}$$

زیرا $\sqrt{xy-5}$ و $\sqrt{y}$ و $\sqrt{ab}$ طبق تعریف چندجمله‌ای نیستند.

می‌دانیم کسرهای $\frac{7}{0}$، $\frac{-3}{0}$ و $\frac{0}{0}$ نامعین (تعریف‌نشده) هستند، یعنی مقدار مشخصی ندارند. بنابراین یک عبارت گویا هنگامی تعریف‌شده است که مخرج آن مخالف صفر باشد. برای مثال عبارت $\frac{x}{x+1}$ یک عبارت گویا است که اگر به جای x هر عدد حقیقی قرار دهیم، مقدار آن مشخص است به‌جز عدد ۱-، زیرا مقدار عبارت به ازای $x=-1$ می‌شود: $\frac{-1}{-1+1}=\frac{-1}{0}$

چون $\frac{-1}{0}$ جواب مشخصی ندارد، بنابراین می‌گوییم عبارت $\frac{x}{x+1}$ به ازای $x=-1$ تعریف نشده است، یا دامنه‌ی تعریف عبارت برابر است با:

$$D=\underbrace{\mathbb{R}-\{-1\}}_{\text{یعنی هر عدد حقیقی به جز ۱-}}$$

بنابراین تعیین دامنه‌ی یک عبارت گویا، یعنی مشخص‌کردن مقادیری که به ازای آن‌ها عبارت گویا تعریف شده باشد.

برای تعیین دامنه‌ی یک عبارت گویا، باید مخرج کسر را مساوی صفر قرار دهیم و مقادیری که مخرج را مساوی صفر می‌کنند، مشخص کنیم و سپس آن‌ها را از مجموعه‌ی اعداد حقیقی کم کنیم.

دامنه‌ی تعریف هر یک از عبارت‌های گویای زیر را مشخص کنید.

الف) $\frac{2x}{x^2-4}$　　ب) $\frac{3x-1}{x+3}$　　ج) $\frac{\sqrt{3}}{2x(x-\frac{1}{2})}$

الف) $x^2-4=0 \Rightarrow (x-2)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2} \\ x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-2} \end{cases}$

$\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

یعنی در عبارت گویای مثال (الف) x هر عدد حقیقی می‌تواند باشد به‌جز ۲- و ۲.

ب) $x+3=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-3\}$

ج) $2x(x-\frac{1}{2})=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{0,\frac{1}{2}\}$

در تمامی مسائل مربوط به عبارت‌های گویا، مخرج عبارت مخالف صفر فرض می‌شود.

مقدار عددی یک عبارت گویا: به جای متغیر، مقدار داده‌شده را قرار می‌دهیم و سپس حاصل کسر را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

مقدار عددی عبارت $\frac{x-۴}{۲x+۱}$ را به ازای $x=۱۳$ حساب کنید.

$$\frac{x-۴}{۲x+۱}=\frac{۱۳-۴}{۲\times۱۳+۱}=\frac{۹}{۲۷}=\frac{۱}{۳}$$

ساده‌کردن عبارت‌های گویا: در کسرها، می‌توان صورت و مخرج کسر را در عددی مخالف صفر ضرب یا بر آن تقسیم کرد و با این عمل، مقدار کسر تغییر نخواهد کرد.

$$\frac{۲}{۵}=\frac{۲\times۳}{۵\times۳}=\frac{۶}{۱۵}\Rightarrow\frac{۲}{۵}=\frac{۶}{۱۵}$$

$$\frac{۳۶}{۴۸}=\frac{۳۶\div۱۲}{۴۸\div۱۲}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{۳۶}{۴۸}=\frac{۳}{۴}$$

چون عبارت‌های گویا به صورت کسر هستند، اگر عامل مشترکی به شکل ضرب در صورت و مخرج باشد، می‌توان آن را از صورت و مخرج حذف کرد و عبارت گویای ساده‌تری به دست آورد که با عبارت اولیه مساوی است. به این عمل ساده‌کردن عبارت گویا می‌گویند.

عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{x^۲+۵x+۶}{x^۲-۴}=$

ب) $\frac{x^۳+۳x^۲}{x^۲+۳x}=$

الف) $\frac{x^۲+۵x+۶}{x^۲-۴}=\frac{\cancel{(x+۲)}(x+۳)}{\cancel{(x+۲)}(x-۲)}=\frac{x+۳}{x-۲}$

ب) $\frac{x^۳+۳x^۲}{x^۲+۳x}=\frac{x^۲\cancel{(x+۳)}}{x\cancel{(x+۳)}}=\frac{x^۲}{x}=x$

درس دوم: محاسبات عبارت‌های گویا

ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا: ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا مانند ضرب و تقسیم اعداد گویا است. فقط قبل از انجام عمل ضرب و تقسیم، در صورت امکان ابتدا کسرها را ساده می‌کنیم و سپس عمل ضرب و تقسیم را انجام می‌دهیم.

حاصل‌ضرب مقابل را انجام دهید.

$\frac{۴}{۸}\times\frac{۶}{۹}=$

$\frac{۴}{۸}\times\frac{۶}{۹}=\frac{۱}{\cancel{۲}}\times\frac{\cancel{۲}}{۳}=\frac{۱}{۳}$

حاصل‌ضرب‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=$

ب) $\frac{x^۲y}{x^۳y^۳}\times\frac{y^۲z^۳}{yz^۴}=$

الف) $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

ب) $\frac{\cancel{x^۲}\cancel{y}}{\underbrace{\cancel{x^۳}\cancel{y^۳}}_{xy^۲}}\times\frac{\cancel{y^۲}\cancel{z^۳}}{\underbrace{\cancel{y}\cancel{z^۴}}_{z}}=\frac{۱}{x^۲\underbrace{\cancel{y^۲}}_{y}}\times\frac{y}{z}=\frac{۱}{x^۲yz}$

برای تقسیم عبارت‌های گویا نیز مانند تقسیم اعداد گویا، پس از ساده‌کردن کسرها، کسر اول را نوشته و تقسیم را به ضرب تبدیل کرده و کسر دوم را معکوس می‌کنیم و یا از قاعده‌ی دور در دور استفاده می‌کنیم.

حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\frac{۲}{۳}\div\frac{۵}{۶}=$

ب) $\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۳}{۵}}=$

$$\frac{۲}{۳}\div\frac{۵}{۶}=\frac{۲}{\cancel{۳}_{۱}}\times\frac{\cancel{۶}^{۲}}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

$$\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۳}{۵}}=\frac{۱\times ۵}{۳\times ۴}=\frac{۵}{۱۲}$$

● قاعده‌ی دور در دور

حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=$

ب) $\frac{\frac{۶x^۲}{۸y^۳}}{\frac{-۲x^۳}{۱۲y^۲z}}=$

الف) $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

ب) $\frac{\frac{۶x^۲}{۸y^۳}}{\frac{-۲x^۳}{۱۲y^۲z}}=\frac{۶x^۲\times ۱۲y^۲z}{۸y^۳\times(-۲x^۳)}=\frac{\cancel{۶}^{۳}\cancel{x^۲}\times\cancel{۱۲}^{۳}\cancel{y^۲}z}{-\cancel{۸}_{۲}\cancel{y^۳}_{y}\times\cancel{۲}\cancel{x^۳}_{x}}=\frac{-۹z}{۲xy}$

جمع و تفریق عبارت‌های گویا

جمع و تفریق عبارت‌های گویا، مانند جمع و تفریق اعداد گویا است، یعنی پس از ساده‌کردن کسرها در صورت امکان، کسرها را هم‌مخرج کرده و سپس عمل جمع یا تفریق را انجام می‌دهیم.

حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۵}=$

ب) $\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۳}=$

ج) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=$

د) $a-\frac{b}{c}=$

الف) $\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۵}=\frac{۱۰}{۱۵}+\frac{۱۲}{۱۵}=\frac{۲۲}{۱۵}$

ب) $\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۳}=\frac{۹}{۱۲}-\frac{۴}{۱۲}=\frac{۵}{۱۲}$

ج) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$

د) $a-\frac{b}{c}=\frac{a}{۱}-\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}$

ساده‌کردن عبارت‌های مرکب: کسری که صورت و مخرج آن عبارت‌های گویا باشند، آن کسر را عبارت گویای مرکب می‌نامند. برای محاسبه‌ی حاصل یک عبارت مرکب، صورت و مخرج را جداگانه ساده می‌کنیم و سپس حاصل صورت را بر حاصل مخرج تقسیم می‌کنیم.

حاصل عبارت مرکب مقابل را حساب کنید.

$$\frac{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}{\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}}=$$

$$\frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{a(a+b)+b(a+b)}{ab}}=\frac{(a+b)\cancel{ab}}{\cancel{ab}(a(a+b)+b(a+b))}=\frac{\cancel{a+b}}{(\cancel{a+b})(a+b)}=\frac{۱}{a+b}$$

ثابت کنید که اگر متحرکی مسافت x متر را با سرعت ثابت v_1 برود و همین مسافت را با سرعت ثابت v_2 برگردد، سرعت متوسط آن برابر است با : $\bar{v} = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$

می‌دانیم که $\underset{\text{مسافت}}{x} = \underset{\text{سرعت}}{v}\ \underset{\text{زمان}}{t}$ بنابراین:

t_2 زمان برگشت $= \frac{x}{v_2}$ $\qquad$ t_1 زمان رفت $= \frac{x}{v_1}$

$$\bar{v} = \frac{2x}{t_1+t_2} = \frac{2x}{\frac{x}{v_1}+\frac{x}{v_2}} = \frac{2x}{\frac{xv_1+xv_2}{v_1v_2}} = \frac{2\cancel{x}}{\frac{\cancel{x}(v_1+v_2)}{v_1v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2} \Rightarrow \bar{v} = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$$

درس سوم: تقسیم چندجمله‌ای

تقسیم یک‌جمله‌ای بر یک‌جمله‌ای

برای تقسیم دو یک‌جمله‌ای بر یکدیگر از قوانین ساده‌کردن کسرها و قوانین مربوط به ساده‌کردن جمله‌های توان‌دار استفاده می‌کنیم.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad , \quad (a\neq 0)$$

حاصل تقسیم‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\frac{-24x^3y^2z}{6xy^3z} =$

ب) $\frac{-68a^2b^3c^4}{-17ab^2c^3} =$

الف) $\frac{-24x^3y^2z}{6xy^3z} = -\frac{\overset{4}{\cancel{24}}\,\overset{x^2}{\cancel{x^3}}\,\cancel{y^2}\,\cancel{z}}{\cancel{6}\,\cancel{x}\,\underset{y}{\cancel{y^3}}\,\cancel{z}} = -\frac{4x^2}{y}$

ب) $\frac{-68a^2b^3c^4}{-17ab^2c^3} = +\frac{\overset{4}{\cancel{68}}\,\overset{a}{\cancel{a^2}}\,\overset{b}{\cancel{b^3}}\,\overset{c}{\cancel{c^4}}}{\cancel{17}\,\cancel{a}\,\cancel{b^2}\,\cancel{c^3}} = 4abc$

تقسیم چندجمله‌ای بر یک‌جمله‌ای

به مثال زیر توجه کنید.

$$\frac{4+2}{4} = \frac{4}{4}+\frac{2}{4} = 1+\frac{1}{2}$$

به این قاعده، قاعده‌ی تفکیک یا جداکردن می‌گویند.

برای تقسیم چندجمله‌ای بر یک‌جمله‌ای، می‌توان از قاعده‌ی بالا استفاده کرد.

حاصل تقسیم مقابل را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{18a^3-24a^2+12a}{3a} =$$

$$\frac{18a^3-24a^2+12a}{3a} = \frac{\overset{6}{\cancel{18}}\,\overset{a^2}{\cancel{a^3}}}{\cancel{3}\,\cancel{a}} - \frac{\overset{8}{\cancel{24}}\,a^2}{\cancel{3}\,a} + \frac{\overset{4}{\cancel{12}}\,\cancel{a}}{\cancel{3}\,\cancel{a}} = 6a^2-8a+4$$

تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای

اگر تقسیمی درست انجام شده باشد، باید رابطه‌های زیر، برای آن تقسیم درست باشد.

$$\begin{array}{l|l} \text{مقسوم} & \text{مقسوم‌علیه} \\ \cline{2-2} & \text{خارج‌قسمت} \\ \hline \text{باقی‌مانده} & \end{array}$$

مقسوم‌علیه > باقی‌مانده : رابطه‌ی (۱)

مقسوم = باقی‌مانده + مقسوم‌علیه × خارج‌قسمت : رابطه‌ی (۲)

اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم صفر باشد، می‌گوییم مقسوم بر مقسوم‌علیه، بخش‌پذیر است.

در تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای باید به ۲ نکته دقت کنیم:

۱- قبل از انجام عمل تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه برحسب توان‌های نزولی متغیر مرتب شده باشند.

۲- تقسیم را تا جایی باید ادامه دهیم که، یا باقی‌مانده صفر شود و یا درجه‌ی باقی‌مانده از درجه‌ی مقسوم‌علیه کم‌تر باشد.

اکنون با یک مثال، تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای را توضیح می‌دهیم.

حاصل تقسیم چندجمله‌ای $-x^2+2x^3+4+x$ را بر چندجمله‌ای $1-x$ حساب کنید و باقی‌مانده را مشخص کنید.

$$\begin{array}{l|l} -x^2+2x^3+4+x & 1-x \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

در مرحله‌ی اول، مقسوم و مقسوم‌علیه را برحسب توان‌های نزولی x مرتب می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-x^2+x+4 & -x+1 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

سپس اولین جمله‌ی مقسوم را بر اولین جمله‌ی مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{2x^3}{-x}=-2x^2$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-x^2+x+4 & -x+1 \\ \cline{2-2} & -2x^2 \end{array}$$

خارج‌قسمت به دست آمده (جمله‌ی $-2x^2$) را در مقسوم‌علیه $(-x+1)$ ضرب می‌کنیم و حاصل‌ضرب را زیر مقسوم می‌نویسیم. چون عبارت به دست آمده را باید از مقسوم کم کنیم، بنابراین علامت جمله‌های آن را قرینه می‌کنیم.

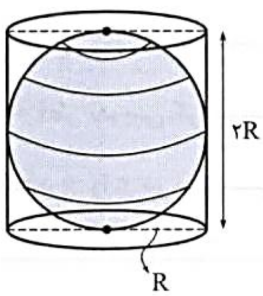
اکنون چندجمله‌ای باقی‌مانده را نیز مانند مرحله‌ی قبل بر مقسوم‌علیه، تقسیم می‌کنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا عمل تقسیم پایان یابد.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^3}-x^2+x+4 & -x+1 \\ \cline{2-2} \pm\cancel{2x^3}\mp 2x^2 & -2x^2-x-2 \\ \cline{1-1} \quad \cancel{x^2}+x+4 & \\ \quad -\cancel{x^2}\mp x & \\ \cline{1-1} \qquad 2\cancel{x}+4 & \\ \qquad -2\cancel{x}\mp 2 & \\ \cline{1-1} \qquad\quad 6 \rightarrow \text{باقی‌مانده} & \end{array}$$

بسم الله الرحمن الرحیم

درس اول: حجم و مساحت کره

یک توپ فوتبال، یک کره‌ی جغرافیایی و یک پرتقال، نمونه‌هایی از حجم‌های کروی هستند. به طورکلی، کره به مجموعه‌ی نقطه‌هایی از فضا گفته می‌شود که همه‌ی آن نقطه‌ها از یک نقطه‌ی ثابت به نام مرکز کره، به یک فاصله‌ی ثابت باشند. به این فاصله‌ی ثابت شعاع کره می‌گوییم.



اگر مانند شکل مقابل، کره‌ای به شعاع R را در داخل استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی R و ارتفاع $2R$ قرار دهیم، کره در داخل استوانه محاط می‌شود یعنی نقطه‌های بالایی، پایینی و اطراف کره بر استوانه مماس می‌شود. در این حالت فضای خالی بین استوانه و کره، برابر حجم نصف کره است. بنابراین:

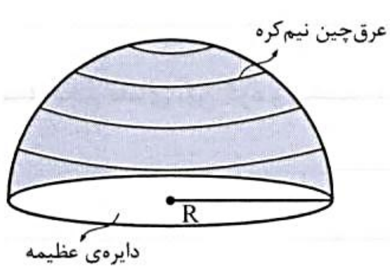
$$\text{حجم استوانه} = \frac{3}{2} \times \text{حجم کره} \Rightarrow \text{حجم کره} = \frac{2}{3}\text{حجم استوانه} \Rightarrow V_{\text{کره}} = \frac{2}{3} \times \underbrace{\pi R^2 h}_{\text{حجم استوانه}} = \frac{2}{3} \times \pi R^2 \times 2R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

پس حجم کره‌ای به شعاع R، برابر است با: $\frac{4}{3}\pi R^3$

و حجم نیم‌کره‌ای به شعاع R، برابر است با: $\frac{2}{3}\pi R^3$

$$V_{\text{نیم‌کره}} = \frac{1}{2} \times V_{\text{کره}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3$$

- اگر یک کره‌ی چوبی توپُر را به طور دقیق به دو نیم‌کره تبدیل کنیم، سطح مقطع این نیم‌کره‌ها به شکل یک دایره است که شعاع این دایره، با شعاع کره برابر است. به این دایره، دایره‌ی عظیمه‌ی کره می‌گویند و رویه‌ی گنبدی‌شکل نیم‌کره را عرق‌چین نیم‌کره می‌گویند.



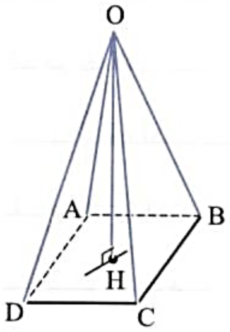
- مساحت کره چهار برابر مساحت دایره‌ی عظیمه‌ی آن است.

$$S_{\text{دایره‌ی عظیمه}} = \pi R^2 \Rightarrow S_{\text{کره}} = 4\pi R^2 \Rightarrow S_{\text{عرق‌چین نیم‌کره}} = \frac{1}{2} \times 4\pi R^2 = 2\pi R^2$$

و مساحت کل نیم‌کره‌ی توپُر برابر است با:

$$S_{\text{کل نیم‌کره‌ی توپُر}} = \underbrace{2\pi R^2}_{\text{مساحت عرق‌چین نیم‌کره}} + \underbrace{\pi R^2}_{\text{مساحت دایره‌ی عظیمه}} = 3\pi R^2$$

درس دوم: حجم هرم و مخروط



● هرم، یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است. قاعده‌ی هرم به شکل چندضلعی است.

در شکل مقابل هرم OABCD را مشاهده می‌کنید. چهارضلعی ABCD قاعده‌ی هرم است. وجه‌های جانبی هرم به شکل مثلث هستند که همگی در یک نقطه به نام رأس هرم مشترک‌اند.

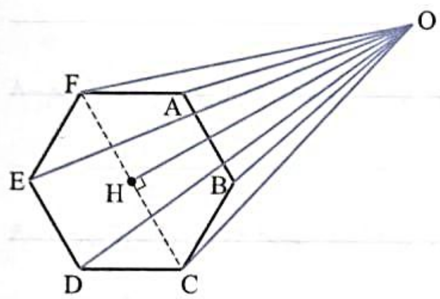
در هرم شکل مقابل، نقطه‌ی O رأس هرم و مثلث‌های $\overset{\Delta}{OAB}$، $\overset{\Delta}{OBC}$، $\overset{\Delta}{OCD}$ و $\overset{\Delta}{OAD}$ وجه‌های جانبی هرم هستند.

به فاصله‌ی رأس هرم تا قاعده، یعنی طول عمودی که از رأس بر قاعده رسم می‌شود، ارتفاع هرم می‌گویند. در هرم شکل بالا، OH ارتفاع هرم است.

● اگر چندضلعی قاعده‌ی هرم، یک چندضلعی منتظم (مانند مثلث متساوی‌الاضلاع یا مربع) باشد و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های همنهشت باشند، آن‌گاه هرم را منتظم می‌گویند.

● اگر قاعده‌ی هرم، مرکز تقارن داشته باشد (مانند مربع یا شش‌ضلعی منتظم)، در این صورت، پای ارتفاع هرم (نقطه‌ی برخورد ارتفاع و قاعده) روی مرکز تقارن قاعده قرار می‌گیرد.

قاعده‌ی هرم شکل زیر، شش‌ضلعی منتظم است و نقطه‌ی H مرکز تقارن شش‌ضلعی است. OH ارتفاع هرم است.



● اگر دو هرم دارای قاعده‌های هم‌مساحت و ارتفاع‌های مساوی باشند، حجم‌های آن‌ها با هم برابر است.

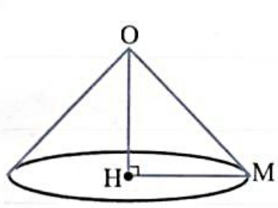
حجم هرم: حجم هرم از دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{\text{هرم}} = \frac{۱}{۳}\underbrace{S}_{\text{مساحت قاعده}}.\underbrace{h}_{\text{ارتفاع هرم}}$$

هرمی داریم که قاعده‌ی آن مربعی به ضلع ۶ سانتی‌متر و ارتفاع هرم ۷ سانتی‌متر است. حجم هرم را حساب کنید.

$$V=\frac{۱}{۳}Sh=\frac{۱}{\cancel{۳}}\times\overset{۲}{\cancel{۶}}\times۶\times۷=۸۴\ cm^۳$$

مخروط: مخروط شکلی فضایی مانند هرم منتظم است با این تفاوت که قاعده‌ی آن به جای چندضلعی، دایره است. مرکز این دایره، پای ارتفاع مخروط است.



برای مثال در مخروط شکل مقابل نقطه‌ی O رأس مخروط، OH ارتفاع مخروط، نقطه‌ی H پای ارتفاع و مرکز قاعده‌ی مخروط و HM شعاع قاعده‌ی مخروط است.

● حجم مخروط از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود: (R شعاع قاعده‌ی مخروط است)

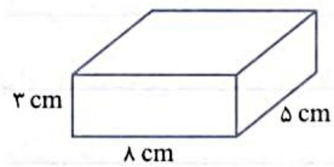
$$V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳}S.h = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$$

حجم مخروطی را حساب کنید که شعاع قاعده‌ی آن ۵ cm و ارتفاع آن ۶ cm باشد.

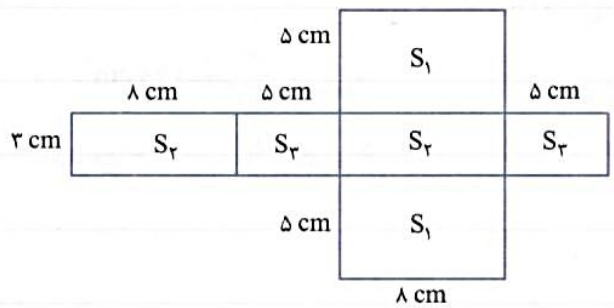
$$V=\frac{۱}{۳}\pi R^۲h=\frac{۱}{۳}\times۳/۱۴\times۵^۲\times۶^۲=۵۰\times۳/۱۴=۱۵/۷\ cm^۳$$

درس سوم: سطح و حجم

به مکعب‌مستطیل شکل مقابل دقت کنید.



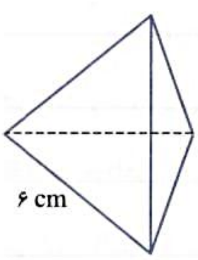
می‌خواهیم شکل گسترده‌ی این مکعب‌مستطیل را رسم کنیم و سپس با استفاده از آن، مساحت کل مکعب‌مستطیل را به دست آوریم. گسترده‌ی مکعب‌مستطیل به صورت زیر است:



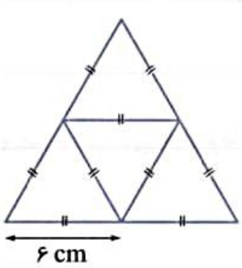
اگر مساحت‌های سه وجه مختلف مکعب‌مستطیل را با S_1، S_2 و S_3 نمایش دهیم، مساحت کل مکعب‌مستطیل برابر است با:

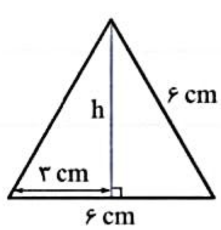
$$S_{\text{کل}} = 2S_1 + 2S_2 + 2S_3 = 2(S_1 + S_2 + S_3) = 2 \times (8 \times 5 + 8 \times 3 + 5 \times 3) \Rightarrow S_{\text{کل}} = 158\ \text{cm}^2$$

- هرم منتظم شکل مقابل از چهار مثلث متساوی‌الاضلاع هم‌اندازه تشکیل شده است. به این هرم، چهاروجهی منتظم نیز می‌گویند. گسترده‌ی این هرم از چهار مثلث متساوی‌الاضلاع به شکل زیر تشکیل شده است.



برای محاسبه‌ی مساحت کل این هرم، باید مساحت یک وجه آن را حساب کنیم و سپس آن را چهار برابر کنیم. پس ابتدا مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۶ سانتی‌متر را حساب می‌کنیم.





$$S_{\text{مثلث}} = \frac{\cancel{6} \times 3\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

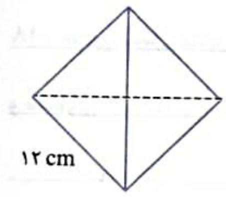
$$h^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow h = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}\ \text{cm}$$

بنابراین مساحت کل هرم بالا برابر است با:

$$S_{\text{کل هرم}} = 4 \times S_{\text{یک مثلث}} = 4 \times 9\sqrt{3} = 36\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

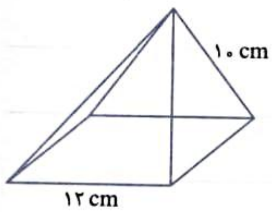
مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a، از رابطه‌ی $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ به دست می‌آید.

مساحت کل هرم منتظم چهاروجهی (چهاروجهی منتظم) به ضلع a، از رابطه‌ی $a^2\sqrt{3}$ به دست می‌آید.

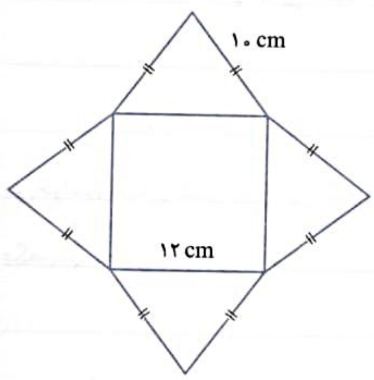


مساحت کل چهاروجهی منتظم شکل مقابل را حساب کنید.

$$S_{\text{کل}} = a^{۲}\sqrt{۳} = ۱۲^{۲} \times \sqrt{۳} = ۱۴۴\sqrt{۳}$$



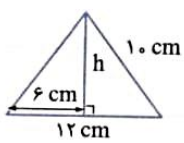
● قاعده‌ی هرم منتظم شکل مقابل، یک مربع است. شکل گسترده‌ی آن را رسم کنید و سپس مساحت کل آن را حساب کنید.



گسترده‌ی هرم به صورت زیر است:

برای محاسبه‌ی مساحت کل هرم باید مساحت مربع قاعده را با مجموع مساحت‌های مثلث‌های چهار وجه جانبی حساب کنیم. مساحت یک مثلث به صورت زیر حساب می‌شود:

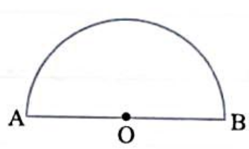
$$h^{۲} = ۱۰^{۲} - ۶^{۲} = ۶۴ \Rightarrow h = ۸\,cm$$



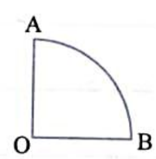
$$S_{\text{مثلث}} = \frac{\overset{۶}{\cancel{۱۲}} \times ۸}{\cancel{۲}} = ۴۸\,cm^{۲}$$

$$S_{\text{کل هرم}} = S_{\text{مربع}} + ۴ \times S_{\text{یک مثلث}} = ۱۲ \times ۱۲ + ۴ \times ۴۸ = ۳۳۶\,cm^{۲}$$

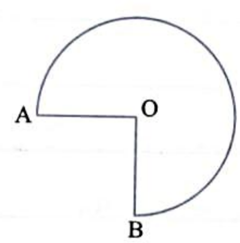
● به شکل‌های زیر توجه کنید.



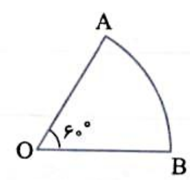
نیم‌دایره ($\frac{۱}{۲}$ دایره)



ربع دایره ($\frac{۱}{۴}$ دایره)



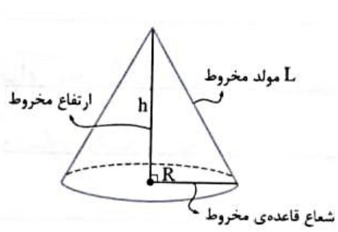
$\frac{۳}{۴}$ دایره



$\frac{۱}{۶}$ دایره ($\frac{۱}{۶} = \frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ}$)

هر یک از شکل‌های بالا، کسری یا قسمتی از دایره هستند که به آن‌ها قطاع دایره می‌گوییم. در تمامی شکل‌ها، O مرکز دایره است.

● با هر قطاعی از دایره، می‌توان یک مخروط درست کرد که قسمت منحنی شکل قطاع ($\overset{\frown}{AB}$) محیط قاعده‌ی مخروط و شعاع دایره، مولد مخروط می‌شود. البته توجه کنید که این مخروط‌ها فقط سطح جانبی دارند، (قاعده ندارند).



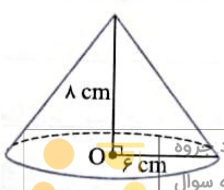
● مساحت جانبی مخروط از رابطه‌ی روبه‌رو حساب می‌شود:

$$S_{\text{جانبی مخروط}} = \pi RL$$

و مساحت کل مخروط برابر است با:

$$S_{\text{کل مخروط}} = \underbrace{\pi RL}_{S\,\text{جانبی}} + \underbrace{\pi R^{۲}}_{S\,\text{قاعده}}$$

مساحت جانبی و مساحت کل مخروط شکل مقابل را حساب کنید.



ابتدا طول مولد مخروط را حساب می‌کنیم.

$$L^{۲} = ۶^{۲} + ۸^{۲} = ۱۰۰ \Rightarrow L = ۱۰$$

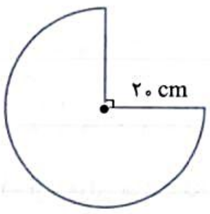
$$S_{\text{جانبی مخروط}} = \pi RL = ۳/۱۴ \times ۶ \times ۱۰ = ۱۸۸/۴\,cm^{۲}$$

$$S_{\text{کل مخروط}} = \pi RL + \pi R^{۲} = ۱۸۸/۴ + ۳/۱۴ \times ۳۶ = ۳۰۱/۴۴\,cm^{۲}$$

اگر با قطاعی از دایره به شعاع R، بخواهیم مخروطی به شعاع قاعده‌ی r بسازیم، اندازه‌ی شعاع قاعده‌ی مخروط از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود. (اندازه‌ی $\overset{\frown}{AB}$ باید برحسب درجه باشد).

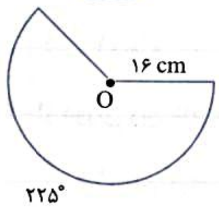
$$r=\frac{\overset{\frown}{AB}}{360^\circ}\times R$$

می‌خواهیم با $\frac{3}{4}$ دایره‌ای به شعاع ۲۰ cm یک سطح مخروطی درست کنیم. شعاع قاعده‌ی این مخروط را حساب کنید.



$$\frac{3}{\cancel{4}}\times \overset{5}{\cancel{20}}=15\ \text{cm}$$

می‌خواهیم با قطاع دایره‌ی مقابل، مخروطی بسازیم. شعاع قاعده‌ی مخروط را حساب کنید.



$$r=\frac{\overset{\frown}{AB}}{360^\circ}\times R=\frac{225^\circ}{360^\circ}\times 16=\frac{5}{\underset{1}{\cancel{8}}}\times \overset{2}{\cancel{16}}=10\ \text{cm}$$

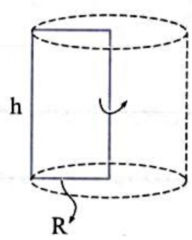
توجه داشته باشید که مساحت قطاع دایره با مساحت جانبی مخروط برابر است. یعنی اگر در شکل بالا، بخواهیم مساحت جانبی مخروطی را که ساخته‌ایم حساب کنیم، فقط کافی است که مساحت قطاع را حساب کنیم.

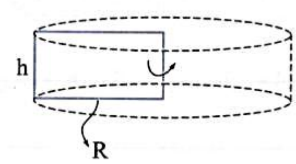
$$S_{\text{قطاع}}=\frac{225^\circ}{360^\circ}\times 16^2\times\pi=\frac{5}{\underset{1}{\cancel{8}}}\times \overset{2}{\cancel{16}}\times 16\pi=160\pi$$

و اگر بخواهیم با استفاده از فرمول مساحت جانبی مخروط، سطح جانبی مخروط حاصل را حساب کنیم، داریم:

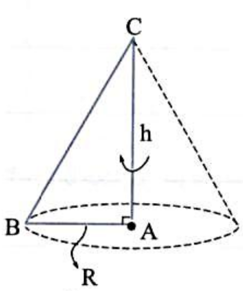
$$S_{\text{جانبی مخروط}}=\pi RL=\pi\times 10\times 16=160\pi$$ (شعاع قطاع، مولد مخروط است.)

● پیش از این آموختید که از دوران یک مستطیل، حول یک ضلع آن، یک استوانه حاصل می‌شود.

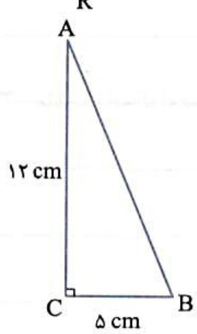




● از دوران مثلث قائم‌الزاویه، حول یکی از اضلاع قائم آن، یک مخروط حاصل می‌شود. ضلعی که مثلث را حول آن دوران می‌دهیم، ارتفاع مخروط و ضلع قائم دیگر شعاع قاعده‌ی مخروط می‌شود. در مخروط شکل مقابل، مثلث قائم‌الزاویه حول ضلع AC دوران داده شده است. AC ارتفاع مخروط و AB شعاع قاعده‌ی مخروط است.



مثلث قائم‌الزاویه‌ی شکل مقابل را حول ضلع AC دوران می‌دهیم. حجم و مساحت کل شکل حاصل را حساب کنید.



$$AB^2=5^2+12^2=169 \Rightarrow AB=13 \Rightarrow L_{\text{مولد مخروط}}=13\ \text{cm}$$

$$R=5 \qquad h=12\ \text{cm}$$

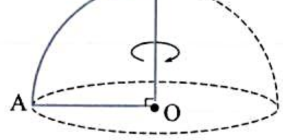
$$V_{\text{مخروط}}=\frac{1}{3}\pi R^2 h=\frac{1}{\cancel{3}}\times\pi\times 5^2\times \overset{4}{\cancel{12}}=100\pi$$

$$S_{\text{کل مخروط}}=\pi RL+\pi R^2=\pi\times 5\times 13+25\pi=65\pi+25\pi=90\pi$$

● از دوران نیم‌دایره یا دایره حول قطر آن، یک کره حاصل می‌شود.

● از دوران ربع دایره، حول شعاعش، یک نیم‌کره حاصل می‌شود.

کره



نیم‌کره

ربع دایره‌ای به شعاع ۹ سانتی‌متر را حول شعاعش دوران می‌دهیم. حجم و مساحت کل شکل حاصل را حساب کنید.

شکل حاصل نیم‌کره است.

$$V_{\text{نیم‌کره}} = \frac{۲}{۳}\pi R^۳ = \frac{۲}{۳}\times\pi\times ۹^۳ = \frac{۲}{\cancel{۳}}\times\pi\times \overset{۳}{\cancel{۹}}\times ۹^۲ = ۴۸۶\pi$$

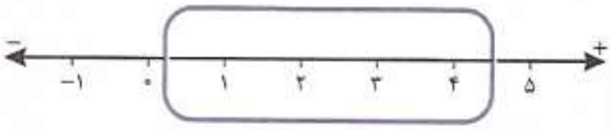
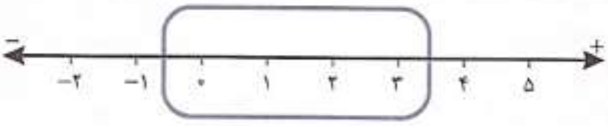
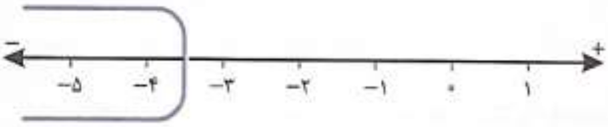
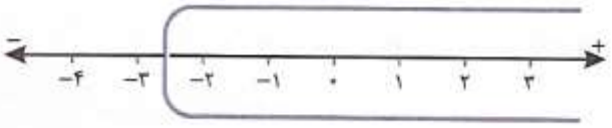
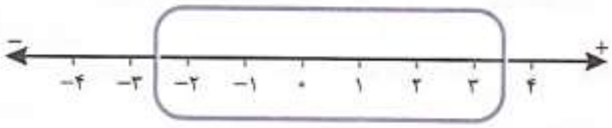
$$S_{\text{کل نیم‌کره}} = ۳\pi R^۲ = ۳\pi\times ۹^۲ = ۲۴۳\pi$$

بسم الله الرحمن الرحیم

درس اول: عددهای گویا

در فصل پیش با صورت‌های مختلف نمایش یک مجموعه آشنا شدید. در این‌جا علاوه بر یادآوری روش‌های مختلف نمایش یک مجموعه، نمایش هندسی یا نمایش روی محور، زیرمجموعه‌های مجموعه‌های اعداد طبیعی، حسابی و صحیح را برای شما بیان می‌کنیم.

به جدول زیر دقت کنید که چگونه یک مجموعه را به روش‌های مختلف نمایش داده‌ایم.

به روش توصیفی (بیان کلامی)	با نوشتن عضوها	زبان نمادین (روش ریاضی)	نمایش هندسی (روی محور)
مجموعه‌ی عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۵	$\{۱,۲,۳,۴\}$	$\{x \mid x\in\mathbb{N}, x<۵\}$	
مجموعه‌ی عددهای حسابی کوچک‌تر یا مساوی ۳	$\{۰,۱,۲,۳\}$	$\{x \mid x\in\mathbb{W}, x\le ۳\}$	
مجموعه‌ی عددهای صحیح کوچک‌تر از ۳−	$\{...,-۶,-۵,-۴\}$	$\{x \mid x\in\mathbb{Z}, x<-۳\}$	
مجموعه‌ی عددهای صحیح بزرگ‌تر یا مساوی ۲−	$\{-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$	$\{x \mid x\in\mathbb{Z}, x\ge -۲\}$	
مجموعه‌ی عددهای صحیح بین ۳− و ۴+	$\{-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$	$\{x \mid x\in\mathbb{Z}, -۳<x<۴\}$	

روش نوشتن چند کسر بین دو کسر:

بعضی وقت‌ها نوشتن چند کسر بین دو کسر به سادگی قابل انجام است.

بین دو کسر $\frac{۱}{۸}$ و $\frac{۷}{۸}$، پنج کسر بنویسید.

$$\frac{۱}{۸}<\frac{۲}{۸}<\frac{۳}{۸}<\frac{۴}{۸}<\frac{۵}{۸}<\frac{۶}{۸}<\frac{۷}{۸}$$

بین دو کسر $\frac{۵}{۷}$ و $\frac{۵}{۱۴}$، شش کسر بنویسید.

$$\frac{۵}{۱۴}<\frac{۵}{۱۳}<\frac{۵}{۱۲}<\frac{۵}{۱۱}<\frac{۵}{۱۰}<\frac{۵}{۹}<\frac{۵}{۸}<\frac{۵}{۷}$$

اما بعضی وقت‌ها نوشتن چند کسر بین دو کسر به این سادگی نیست و باید با انجام عملیاتی این کار را انجام داد، به چهار روش داریم:

۱- هم‌مخرج کردن برای نوشتن کسرهای بین دو کسر:

با یک مثال این روش را توضیح می‌دهیم.

بین دو کسر $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$، پنج کسر بنویسید.

ابتدا با استفاده از ک.م.م مخرج‌ها، دو کسر را هم‌مخرج می‌کنیم.

$$\frac{۴}{۵}=\frac{۴\times۴}{۵\times۴}=\frac{۱۶}{۲۰} \qquad \frac{۳}{۴}=\frac{۳\times۵}{۴\times۵}=\frac{۱۵}{۲۰}$$

چون می‌خواهیم بین دو کسر، پنج کسر بنویسیم، صورت و مخرج دو کسر را در ۶، $(۶=۱+۵)$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۴}{۵}=\frac{۱۶}{۲۰}=\frac{۱۶\times۶}{۲۰\times۶}=\frac{۹۶}{۱۲۰} \qquad \frac{۳}{۴}=\frac{۱۵}{۲۰}=\frac{۱۵\times۶}{۲۰\times۶}=\frac{۹۰}{۱۲۰}$$

اکنون باید بین دو کسر $\frac{۹۰}{۱۲۰}$ و $\frac{۹۶}{۱۲۰}$ پنج کسر بنویسیم.

$$\frac{۹۰}{۱۲۰}<\frac{۹۱}{۱۲۰}<\frac{۹۲}{۱۲۰}<\frac{۹۳}{۱۲۰}<\frac{۹۴}{۱۲۰}<\frac{۹۵}{۱۲۰}<\frac{۹۶}{۱۲۰}$$

۲- هم‌صورت کردن کسرها: با یک مثال این روش را توضیح می‌دهیم.

بین دو کسر $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$، چهار کسر بنویسید.

ابتدا با استفاده از ک.م.م. صورت‌های دو کسر را یکسان می‌کنیم.

$$\frac{۴}{۵}=\frac{۴\times۳}{۵\times۳}=\frac{۱۲}{۱۵} \qquad \frac{۳}{۴}=\frac{۳\times۴}{۴\times۴}=\frac{۱۲}{۱۶}$$

اکنون چون می‌خواهیم چهار کسر بین دو کسر بنویسیم، صورت و مخرج کسرهای به دست آمده را در ۵، $(۵=۱+۴)$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۳}{۴}=\frac{۱۲}{۱۶}=\frac{۱۲\times۵}{۱۶\times۵}=\frac{۶۰}{۸۰} \qquad \frac{۴}{۵}=\frac{۱۲}{۱۵}=\frac{۱۲\times۵}{۱۵\times۵}=\frac{۶۰}{۷۵}$$

و سپس می‌توان نوشت:

$$\frac{۶۰}{۸۰}<\frac{۶۰}{۷۹}<\frac{۶۰}{۷۸}<\frac{۶۰}{۷۷}<\frac{۶۰}{۷۶}<\frac{۶۰}{۷۵}$$

۳- استفاده از میانگین دو کسر: می‌دانیم که میانگین دو عدد، همواره بین دو عدد قرار دارد و از دو عدد نیز، به یک فاصله است.

بین دو کسر $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$ یک کسر بنویسید.

میانگین دو کسر را حساب می‌کنیم.

$$\frac{\frac{۳}{۴}+\frac{۴}{۵}}{۲}=\frac{\frac{۱۵}{۲۰}+\frac{۱۶}{۲۰}}{۲}=\frac{\frac{۳۱}{۲۰}}{۲}=\frac{۳۱}{۴۰}$$

و روش چهارم: این روش بسیار ساده‌تر و بهتر برای نوشتن چند کسر بین دو کسر است.

اگر $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ و $b,d\neq ۰$ باشند، آن‌گاه همواره داریم:

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

بین دو کسر $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$ یک کسر بنویسید.

$$\frac{۳}{۴}<\frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{۳}{۴}<\frac{۳+۴}{۴+۵}<\frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{۳}{۴}<\frac{۷}{۹}<\frac{۴}{۵}$$

بین دو کسر $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$ هفت کسر بنویسید.

۳+۴   ۴+۷   ۴+۱۱   ۱۵+۴   ۱۹+۴   ۲۳+۴

$$\frac{۳}{۴}<\frac{۷}{۹}<\frac{۱۱}{۱۴}<\frac{۱۵}{۱۹}<\frac{۱۹}{۲۴}<\frac{۲۳}{۲۹}<\frac{۲۷}{۳۴}<\frac{۳۱}{۳۹}<\frac{۴}{۵}$$

۴+۵   ۹+۵   ۱۴+۵   ۱۹+۵   ۲۴+۵   ۲۹+۵

نتیجه‌ی ۱: بین هر دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

نتیجه‌ی ۲: با توجه به نتیجه‌ی ۱، مجموعه‌ی اعداد گویا را نمی‌توان با نوشتن اعضا مشخص کرد و فقط باید به صورت کلامی یا به صورت نمادین (زبان ریاضی) بیان کرد.

هر کسر متعارفی (معمولی) که صورت و مخرج آن عدد صحیح و مخرج آن مخالف صفر باشد، عدد گویا نامیده می‌شود و مجموعه‌ای که تمامی این عددها را شامل می‌شود، مجموعه‌ی عددهای گویا نام دارد.

مجموعه‌ی عددهای گویا به صورت نمادین:

$\mathbb{Q}=\{\frac{p}{q} | p,q\in \mathbb{Z}, q\neq ۰\}$

انواع اعداد اعشاری:
هر عدد گویا را می‌توان به صورت یک عدد اعشاری نوشت.

دو نوع عدد اعشاری داریم:

۱- عددهای اعشاری متناهی یا مختوم.

۲- عددهای اعشاری متناوب، که این عددها نیز دو دسته هستند:

الف) عددهای اعشاری متناوب ساده

ب) عددهای اعشاری متناوب مرکب

عددهای اعشاری متناهی (مختوم)

اگر مخرج یک کسر ساده‌نشدنی را تجزیه کنیم و در تجزیه‌ی آن فقط عامل‌های ۲ یا ۵ و یا هر دو عامل باشد، عدد اعشاری مربوط به این کسرها را مختوم یا متناهی می‌گویند. (مختوم یعنی رقم‌های اعشاری عدد، دارای خاتمه یا پایان باشند.)

عدد اعشاری مربوط به کسرهای زیر را بنویسید.
$\frac{۳}{۴},\frac{۲}{۵},\frac{۷}{۲},\frac{۹}{۸},\frac{۱۱}{۲۵},\frac{۱۷}{۵۰},\frac{۱۹}{۴۰},\frac{۲۶}{۶۵}$

اگر مخرج هر یک از کسرهای فوق، به‌جز $\frac{۲۶}{۶۵}$ را تجزیه کنیم، در آن‌ها فقط عامل ۲ یا ۵ یا هر دو عامل هست. فقط کسر $\frac{۲۶}{۶۵}$ را باید ابتدا ساده کنیم و سپس عدد اعشاری آن را بنویسیم.

$\frac{۳}{۴}=۰/۷۵ \quad , \quad \frac{۲}{۵}=۰/۴ \quad , \quad \frac{۷}{۲}=۳/۵ \quad , \quad \frac{۹}{۸}=۱/۱۲۵$

$\frac{۱۱}{۲۵}=۰/۴۴ \quad , \quad \frac{۱۷}{۵۰}=۰/۳۴ \quad , \quad \frac{۱۹}{۴۰}=۰/۴۷۵ \quad , \quad \frac{۲۶}{۶۵}=\frac{۲}{۵}=۰/۴$

عددهای اعشاری متناوب:

اگر در تجزیه‌ی مخرج یک کسر ساده‌نشدنی، به طور کلی عامل‌های ۲ و ۵ نباشد و در تجزیه‌ی مخرج، عددهای اول دیگری به‌جز ۲ و ۵ باشد، عدد اعشاری مربوط به این‌گونه کسرها را متناوب ساده می‌گویند؛ یعنی بعد از اعشار، بلافاصله رقم یا رقم‌هایی، پیوسته تکرار می‌شوند و این تکرار بی‌پایان است. به این تکرار ارقام، دوره‌ی گردش می‌گویند. اعداد زیر متناوب ساده هستند.

این علامت نشان‌دهنده‌ی دوره‌ی گردش است، یعنی رقم ۳ به طور بی‌پایانی تکرار می‌شود.

$\frac{۱}{۳}=۰/۳۳۳۳\cdots=۰/\overline{۳}$

$\frac{۷}{۱۱}=۰/۶۳۶۳۶۳۶۳\cdots=۰/\overline{۶۳}$

$\frac{۱}{۷}=۰/۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷\cdots=۰/\overline{۱۴۲۸۵۷}$

اگر در تجزیه‌ی مخرج یک کسر ساده‌نشدنی، عامل‌های ۲ یا ۵ و یا هر دو باشند و علاوه بر آن‌ها اعداد اول دیگری هم در این تجزیه باشند، عدد اعشاری مربوط به این کسرها را متناوب مرکب می‌گویند، یعنی دوره‌ی گردش بلافاصله بعد از ممیز شروع نمی‌شود، بلکه، یک یا چند رقم غیرتکراری بعد از ممیز قرار می‌گیرند و سپس بعد از آن‌ها رقم‌های تکراری یا دوره‌ی گردش شروع می‌شود.

عددهای اعشاری مربوط به کسرهای روبه‌رو را بنویسید.
$\frac{۵}{۶},\frac{۱۹}{۲۲},\frac{۴۱}{۳۵}$

$\frac{۵}{۶}=۰/۸۳۳۳۳\cdots=۰/۸\overline{۳}$ (در تجزیه‌ی مخرج یعنی عدد ۶، عامل‌های ۲ و ۳ هست)

$\frac{۱۹}{۲۲}=۰/۸۶۳۶۳۶۳۶\cdots=۰/۸\overline{۶۳}$

$\frac{۴۱}{۳۵}=۱/۱۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷\cdots=۱/۱\overline{۷۱۴۲۸۵}$

درس دوم: عددهای حقیقی

به عددهای اعشاری کسرهای زیر دقت کنید.

$\frac{۱۷}{۶}=۲/۸۳۳۳۳۳\cdots=۲/۸\overline{۳}$ $\qquad$ $\frac{۵۲}{۷}=۷/۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱\cdots=۷/\overline{۴۲۸۵۷۱}$ $\qquad$ $\frac{۳}{۱۱}=۰/۲۷۲۷۲۷۲۷\cdots=۰/\overline{۲۷}$

◉ تعداد رقم‌های هر یک از اعداد اعشاری فوق نامتناهی (بی‌پایان)، اما دارای تناوب یا تکرار با نظم خاصی است، به همین دلیل این اعداد را گویا می‌گوییم.

اکنون به عددهای اعشاری زیر دقت کنید.

$\sqrt{۲}=۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲۳۷۳۰۹۵۰۴۸۸۰۱۶۸۸۷۲۴۰۹۷\cdots$ $\qquad$ $\sqrt{۳}=۱/۷۳۲۰۵۰۸۰۷۵۶۸۸۷۷۲۹۳۵۲۷۴۴۶۳۴۱۵۰۵۹\cdots$

$\sqrt{۸}=۲/۸۲۸۴۲۷۱۲۴۷۴۶۱۹۰۰۹۷۶۰۳۳۷۷۴۴۸۴۱۹۴\cdots$ $\qquad$ $\pi=۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹۵\cdots$

عدد اعشاری هر یک از اعداد $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۸}$ و π دارای تعداد رقم‌های اعشاری نامتناهی است و این رقم‌های اعشاری دارای دوره‌ی تناوب یا دارای نظم خاصی در تکرار رقم‌ها نیستند، به این عددها، عددهای گنگ یا اَصَم می‌گویند. مجموعه‌ی عددهای گنگ را با حرف $\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^c$ نمایش می‌دهیم. به طور کلی جذر اعدادی که مربع کامل نیستند، گنگ می‌باشد. مانند: $\sqrt{۷}$، $\sqrt{۵۰}$، $\sqrt{۰/۹}$ و ...

از اجتماع مجموعه‌ی اعداد گویا و مجموعه‌ی اعداد گنگ، مجموعه‌ی اعداد حقیقی به وجود می‌آید که با حرف $\mathbb{R}$ نشان داده می‌شود. یعنی:

$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

$\mathbb{Q}'=\{x \mid x\notin\mathbb{Q}\}$

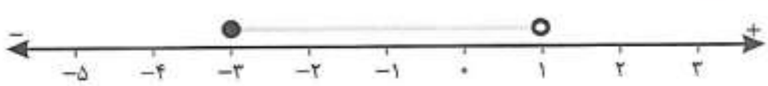
نتیجه: هر عدد حقیقی که گویا نباشد، گنگ است و برعکس، هر عدد اعشاری که گنگ نباشد، گویا است.

محور اعداد حقیقی: تمام عددهای حقیقی را می‌توان روی یک محور نمایش داد یعنی هر نقطه از محور متناظر با یک عدد حقیقی است.

نمایش زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی عددهای حقیقی روی محور: چون مجموعه‌ی عددهای حقیقی شامل تمامی عددها می‌باشد، بنابراین هر زیرمجموعه از آن را می‌توان روی محور نمایش داد.

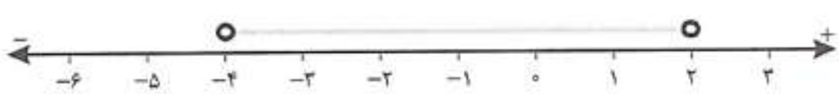
مجموعه‌های زیر را روی محور نمایش دهید.

$A=\{x \mid x\in\mathbb{R}, -۳\le x<۱\}$



مجموعه‌ی A شامل عدد ۳− می‌باشد، اما عدد ۱ را شامل نمی‌شود، بنابراین روی محور، عدد ۳− را با دایره‌ی توپُر و روی عدد ۱، دایره‌ی توخالی رسم می‌کنیم.

$B=\{x \mid x\in\mathbb{R}, -۴<x<۲\}$



چون عدد $\sqrt{۳}$ گنگ است، پس عددهای $۲\sqrt{۳}$، $۱+\sqrt{۳}$، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $۵-\sqrt{۳}$ نیز گنگ هستند.

مجموع دو عدد گنگ، ممکن است عددی گویا شود.

اعداد $۲-\sqrt{۵}$ و $۷+\sqrt{۵}$ گنگ هستند، اما مجموع آن‌ها عددی گویا است.

$۲-\cancel{\sqrt{۵}}+۷+\cancel{\sqrt{۵}}=۹\in\mathbb{Q}$

حاصل تفریق دو عدد گنگ، ممکن است عددی گویا شود.

اعداد $۱۱-\sqrt{۳}$ و $-\sqrt{۳}+۵$ دو عدد گنگ هستند، اما حاصل تفریق آن‌ها عددی گویا است.

$۱۱-\sqrt{۳}-(-\sqrt{۳}+۵)=۱۱-\cancel{\sqrt{۳}}+\cancel{\sqrt{۳}}-۵=۶\in\mathbb{Q}$

حاصل‌ضرب دو عدد گنگ، ممکن است عددی گویا شود.

اعداد $\sqrt{۱۸}$ و $\sqrt{۲}$ گنگ هستند. اما:

$\sqrt{۱۸}\times\sqrt{۲}=\sqrt{۳۶}=۶\in\mathbb{Q}$

حاصل تقسیم دو عدد گنگ، ممکن است عددی گویا شود.

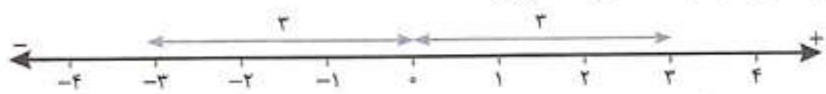
دو عدد $\sqrt{۱۸}$ و $\sqrt{۲}$ گنگ هستند. اما:

$\frac{\sqrt{۱۸}}{\sqrt{۲}}=\frac{\cancel{\sqrt{۲}}\times\sqrt{۹}}{\cancel{\sqrt{۲}}}=\sqrt{۹}=۳\in\mathbb{Q}$

درس سوم: قدرمطلق و محاسبه‌ی تقریبی

قدرمطلق

فاصله‌ی نقطه‌ی نظیر یک عدد حقیقی روی محور اعداد تا مبدأ را قدرمطلق آن عدد می‌نامند. برای مثال؛ فاصله‌ی نقاط نظیر دو عدد ۳ و ۳- تا مبدأ برابر ۳ واحد است، پس قدرمطلق هر دو عدد ۳ و ۳-، برابر عدد ۳ است.



قدرمطلق عدد a را با $|a|$ نشان می‌دهیم. (این نماد $|\ |$، نشانه‌ی قدرمطلق است.) در حالت کلی قدرمطلق هر عدد غیر صفر، عددی مثبت است.

$|-\sqrt{5}|=|\sqrt{5}|=\sqrt{5}$ $\qquad |-\pi|=|\pi|=\pi$ $\qquad |-\frac{4}{3}|=|\frac{4}{3}|=\frac{4}{3}$

اگر a عددی حقیقی باشد، $|a|$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} a\geq 0 \Rightarrow |a|=a \\ a<0 \Rightarrow |a|=-a \end{cases}$$

اگر a یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه: $\sqrt{a^2}=|a|$

$\sqrt{(-7)^2}=|-7|=7$ $\qquad \sqrt{7^2}=|7|=7$

حاصل هر قدرمطلقی همیشه یا صفر است یا یک عدد مثبت. (هیچ‌گاه منفی نمی‌شود)

قدرمطلق حاصل‌ضرب دو عدد، مساوی حاصل‌ضرب قدرمطلق‌های آن‌ها است. یعنی: $|xy|=|x|\times|y|$

اگر $x=-3$ و $y=2$ باشد، داریم: $|(-3)(2)|=|-3|\times|2| \Rightarrow |-6|=3\times 2 \Rightarrow 6=6$

یا اگر $x=-5$ و $y=-7$ باشد، داریم: $|(-5)(-7)|=|-5|\times|-7| \Rightarrow |35|=5\times 7 \Rightarrow 35=35$

قدرمطلق مجموع دو عدد، کوچک‌تر یا مساوی مجموع قدرمطلق‌های آن دو عدد است. یعنی: $|x+y|\leq|x|+|y|$

اگر $x=-7$ و $y=2$ باشد، داریم: $|(-7)+2|\leq|-7|+|2| \Rightarrow |-5|\leq 7+2 \Rightarrow 5\leq 9$

یا اگر $x=-11$ و $y=-5$ باشد، داریم: $|(-11)+(-5)|\leq|-11|+|-5| \Rightarrow |-16|\leq 11+5 \Rightarrow 16\leq 16$

برای هر عدد حقیقی مانند x همواره داریم: $x+|x|\geq 0$

فرض کنیم $x>0$، برای مثال $x=4$ باشد، آن‌گاه داریم: $4+|4|\geq 0 \Rightarrow 4+4\geq 0 \Rightarrow 8\geq 0$ ✓

فرض کنیم $x=0$ باشد، آن‌گاه داریم: $0+|0|\geq 0 \Rightarrow 0+0\geq 0 \Rightarrow 0\geq 0$ ✓

فرض کنیم $x<0$ باشد، برای مثال $x=-6$ باشد، آن‌گاه داریم: $-6+|-6|\geq 0 \Rightarrow -6+6\geq 0 \Rightarrow 0\geq 0$ ✓

تساوی $\sqrt{a^2}=a$ همیشه درست نیست. (بعضی مواقع درست و بعضی مواقع نادرست است.) اگر $a\geq 0$ باشد، درست است و اگر $a<0$ باشد، نادرست است.

$a=-8 \Rightarrow \sqrt{(-8)^2}=-8$ ✗ $\qquad a=5 \Rightarrow \sqrt{5^2}=5$ ✓

حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=$ $\qquad$ ب) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=$ $\qquad$ ج) $|(\frac{1}{2})^3-(\frac{1}{2})^2|=$

الف) می‌دانیم: $\sqrt{3}>1$ است، بنابراین: $\sqrt{3}-1>0$ و داریم: $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=|\sqrt{3}-1|=\sqrt{3}-1$

ب) می‌دانیم: $\sqrt{2}>1$ است، بنابراین: $1-\sqrt{2}<0$ و داریم: $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=|1-\sqrt{2}|=-(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$

ج) $(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$، $(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}<0$، بنابراین داریم: $|(\frac{1}{2})^3-(\frac{1}{2})^2|=|\frac{1}{8}-\frac{1}{4}|=|-\frac{1}{8}|=-(-\frac{1}{8})=\frac{1}{8}$

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، می‌دانیم که $a-b$ قرینه‌ی $b-a$ است. بنابراین داریم: $|a-b|=|b-a|$