« آنچه از مباحث فصل هفتم ریاضی هفتم آموخته ام »

توان و جذر

نکته ۱- دشواری نوشتن و خواندن اعداد بزرگ مانند: $\underbrace{۱۰۰۰\ ...\ ۰}_{۵۰\ تا}$ ، ریاضی دانان را به استفاده از توان ترغیب کرد.

مثال: $۱۰^{۵۰} = \underbrace{۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ... \times ۱۰}_{۵۰\ بار} = \underbrace{۱۰۰۰\ ...\ ۰}_{۵۰\ بار}$

نماد $۱۰^{۵۰}$ یک عدد توان دار است که در آن ۱۰ را پایه و ۵۰ را توان یا نما می نامند.

نکته ۲- عبارتی مانند $۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$ را در ریاضیات برای ساده تر شدن به صورت $۲^{۵}$ می نویسیم و آن را چنین می خوانیم: ۲ به توان ۵ . در عبارت $۲^{۵}$، ۲ را پایه و ۵ را توان می نامیم. درست شبیه همان کاری که در ساده کردن و خلاصه کردن جمع انجام می دادیم.

مثال: $(۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ = ۵ \times ۲)$

نکته ۳- عدد ۱ به هر توانی برسد، حاصل خود ۱ می شود به عبارتی دیگر ۱ ضربدر یک یا چند تا از خودش می شود. مثال: $۱^{۱۰۰۰} = ۱ \quad ۱^{۵۰} = ۱$

نکته ۴- عدد صفر به هر توانی (به جز صفر) برسد، حاصل خود صفر می شود. مثال: $۰^{۹} = ۰$

نکته ۵- هر عددی که توان ندارد یعنی توانش ۱ است توان ۱ را می توانیم ننویسیم.

مثال: $۵^{۱} = ۵ \quad ۳ = ۳^{۱}$

نکته ۶- هر عددی به توان صفر غیر از خود صفر مساوی با ۱ است.

مثال: $۱۰۰۰^{۰} = ۱ \quad ۷^{۰} = ۱ \quad ۵^{۰} = ۱$

نکته ۷= اعداد منفی اگر به توان زوج برسند، حاصلشان مثبت و اگر به توان فرد برسد، حاصلشان منفی می شود. مثال: $(-۳)^{۳} = -۲۷ \quad (-۳)^{۲} = +۹$

نکته ۸- به توان دوّم یک عدد، مجذور یا مربع گفته می شود.

مثال: مجذور (مربع) اعداد ۷ و ۱ و ۴ را به دست آورید. $۴^{۲} = ۱۶$ و $۱^{۲} = ۱$ و $۷^{۲} = ۴۹$

نکته ۹- به توان سوم یک عدد مکعب گفته می شود.

مثال: مکعب اعداد ۱۰ و ۲ و ۶ را به دست آورید. $۶^{۳} = ۲۱۶$ و $۲^{۳} = ۸$ و $۱۰^{۳} = ۱۰۰۰$

نکته ۱۰- اعدادی که رقم یکان آن ها ۰ و ۱ و ۵ و ۶ و توان آن عددی طبیعی باشد، رقم یکان تغییر نمی کند. مثال:

$۲۴۳۵^{۱۹۷} \Longrightarrow$ رقم یکان حاصل = ۵

$۹۸۷۶^{۱۲۳} \Longrightarrow$ رقم یکان حاصل = ۶

نکته ۱۱- اگر رقم یکان عدد پایه یکی از ارقام ۴ یا ۹ و توان آن عددی طبیعی باشد، با توجه به زوج یا فرد بودن توان، یکان را مشخص می کنیم. مثال:

رقم یکان پایه= ۹ $\Longrightarrow$
- توان فرد $\rightarrow$ رقم یکان حاصل =۹
- توان زوج $\rightarrow$ رقم یکان حاصل = ۱

رقم یکان پایه= ۴ $\Longrightarrow$
- توان فرد $\rightarrow$ رقم یکان حاصل = ۴
- توان زوج $\rightarrow$ رقم یکان حاصل = ۶

- رقم یکان این اعداد را به دست آورید.

$۱۲۳۴^{۵۸} \Longrightarrow$ رقم یکان حاصل = ۶

$۵۷۹^{۲۳} \Longrightarrow$ رقم یکان حاصل = ۹

نکته ۱۲- اگر رقم یکان عدد پایه، یکی از ارقام ۲ و ۳ و ۷ و ۸ و توان آن عددی طبیعی باشد به جای توان آن، باقی مانده ی تقسیم توانش بر ۴ را می گذاریم. اگر توان بر ۴ بخش پذیر بود به جای توان ۴ می گذاریم. سپس یکان عدد حاصل را به دست می آوریم.

مثال: رقم یکان این عدد را به دست آورید. $۷۸۳^{۲۵} \Longrightarrow$ رقم یکان $= ۳^{۱} = ۳$

۲۵	۴
۲۴ -	۶
۱	

نکته ۱۳- هر گاه در تجزیهٔ عددی توان تمام عوامل، اوّل زوج باشد، آن عدد، مربع یعنی مجذور کامل است. مثال: ۲۲۵ را یک عدد مربعی می دانیم.

۲۲۵	۵
۴۵	۵
۹	۳
۳	۳
۱	

$۲۲۵ = ۳^{۲} \times ۵^{۲}$

نکته ۱۴- در ضرب اعداد توان دار اگر پایه ها مشترک و توان ها نا مشترک باشند، یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم.

مثال: $۵^{۲} \times ۵^{۶} = ۵^{۶+۲} = ۵^{۸}$ $\qquad a^{x} \times a^{y} = a^{x+y}$

نکته ۱۵- در ضرب اعداد توان دار هر گاه پایه ها نامشترک و توان ها مشترک باشند، پایه ها را ضرب کرده و یکی از توان ها را می نویسیم. مثال: $x^{۴} \times y^{۴} = (xy)^{۴}$

$۳^{۴} \times ۵^{۴} = (۳ \times ۵)^{۴} = ۱۵^{۴}$

نکته ۱۶- برای به دست آوردن ضلع مربع، مساحت مربع را در زیر رادیکال قرار دهیم (جذر می گیریم). حاصل ضلع مربع است.

مثال: مساحت مربعی ۴۹ است. ضلع آنرا بیابید. $\qquad$ ضلع مربع = $\sqrt{\text{مساحت مربع}}$

حل مسئله - $\qquad$ ضلع مربع $= ۷ = \sqrt{۴۹}$

نکته ۱۷- در تساوی $۳^{۲} = ۹$ ، ۹ را توان دوّم یا مجذور ۳ می نامیم و عدد ۳ را نیز ریشهٔ دوّم یا جذر ۹ می نامیم.

نکته ۱۸- توان دوّم یا مجذور عدد ۳ را با $۳^{۲}$ و توان دوّم یا مجذور عدد $(-۳)^{۲}$ نشان می دهیم. برای نمایش ریشهٔ دوّم مثبت از نماد $\sqrt{\ }$ (رادیکال) استفاده می کنیم.

ریشه های دوم عدد ۹ را با $\sqrt{۹}$ و $-\sqrt{۹}$ نشان می دهیم به عبارت دیگر $\sqrt{۹} = ۳$ $\qquad -\sqrt{۹} = -۳$

نکته ۱۹- تعریف توان:

در ریاضی برای ساده تر شدن جمع اعداد تکراری از ضرب استفاده می کنیم و در ریاضی برای ساده تر نوشتن عمل ضرب، از توان استفاده می کنیم. $\qquad ۵ + ۵ + ۵ = ۵ \times ۳$

مثال: $\qquad ۵ \times ۵ \times ۵ = ۵^{۳}$

نکته ۲۰- پایه می تواند هر چیزی باشد.

$۳^۲ = ۳ \times ۳ = ۹$

$(-۳)^۴ = (-۳)(-۳)(-۳)(-۳) = ۸۱$

$\left(\frac{۲}{۳}\right)^۳ = \frac{۲}{۳} \times$

$۱/۵^۳ = ۱/۵ \times ۱/۵ \times ۱/۵ = ۵/۰۶۲۵$

$\square^۲ = \square \times \square$

$a^۵ = a \times a \times a \times a \times a$

نکته ۲۱- توان می تواند هر عددی باشد.

$۴^۵ = ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴$

$۹^{\square} = \overbrace{۹ \times ۹ \times \ldots \times ۹}^{\square \text{بار}}$

$\square^{\triangle} = \overbrace{\square \times \square \times \ldots \times \square}^{\triangle \text{بار}}$

نکته ۲۲- پایه ها هم می تواند توان باشد.

$(۲^۳)^۳$

نکته ۲۳- اگر دو عدد توان دار با پایه های مساوی غیر از صفر و یک برابر باشد، حتماً توان ها نیز با هم مساوی اند. مثال: در عبارت زیر مقدار x را بیابید.

$۲^۴ = ۲^x \Longrightarrow x = ۴$

نکته ۲۴- تعریف جذر:

در ریاضی بر عکس مجذور کردن را جذر می گوییم. $\pm n$ و ... و ± ۴ و ± ۳ و ± ۲ و ± ۱

مجذور

$۱ \quad ۴ \quad ۹ \quad ۱۶ \quad n^۲$

جذر

$\pm ۱ \quad \pm ۲ \quad \pm ۳ \quad \pm ۴ \quad \pm n$

نکته ۲۵- مجذور هر عدد غیر از صفر عددی مثبت است.

مثال: $\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ = \frac{+۴}{۹}$ $\quad ۴^۲ = +۱۶$ $\quad (-۳)^۲ = +۹$

نکته۲۶- اعداد منفی جذر یا ریشهٔ دوّم ندارند چون هیچ وقت جذر عددی منفی نمی شود یا مجذور هیچ عددی منفی نمی شود.

نکته ۲۷- هر عدد مثبت یک ریشهٔ دوّم مثبت و یک ریشهٔ دوّم منفی دارد.

مثال: ریشه های دوم مثبت و منفی عدد ۱۶ را بنویسید.

$\sqrt{۱۶} = +۴$ و $-\sqrt{۱۶} = -۴$

نکته ۲۸- تنها ریشهٔ دوّم صفر، همان صفر است.

نکته۲۹- اگر در جذر، عمل جمع صورت گیرد، نمی توانیم تنها از هر عدد جذر بگیریم و آنها را با هم جمع کنیم فقط می توان جذر مجموع اعداد را گرفت.

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

نکته ۳۰- اگر در جذر عمل منها صورت گیرد، نمی توانیم تنها از هر عدد جذر بگیریم و عمل تفریق را انجام دهیم باید از حاصل تفریق اعداد جذر بگیریم.

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

نکته ۳۱- اگر عمل ضرب در رادیکال صورت گرفت، می توانیم هرعدد را به تنهایی جذر بگیریم و جواب هر جذر را در هم ضرب کنیم یا اینکه اوّل اعداد را ضرب می کنیم سپس جذر آنها را می گیریم.

$$\sqrt{a\,b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

نکته ۳۲- اگر در رادیکال عمل تقسیم صورت گیرد، می توانیم از هر عدد به تنهایی جذر بگیریم و سپس جواب آنها را تقسیم کنیم.

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a}{\sqrt{b}}}$ یا $\sqrt{a} \div \sqrt{b}$

نکته ۳۳- ۱۰ به توان هر عددی برسد برابر می شود با یک و به تعداد توان، صفر جلوی ۱.

۱۰^{n} = (رقمی n + ۱)

نکته ۳۴- در تقسیم اعداد توان دار، اگر پایه ها مساوی باشند، توان ها کم می شوند اما اگر توان ها مساوی باشند، پایه ها تقسیم می شوند. مثال:

$$a^x \div a^y = a^{x-y} \qquad ۲^۹ \div ۲^۵ = ۲^۴$$

$$a^x \div b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x \qquad ۱۰^۷ \div ۲^۷ = ۵^۷$$

نکته ۳۵- در تجزیهٔ اعدادی که در سمت راست آنها صفر وجود دارد، برای راحتی کارهای توان به جای هر صفر، یک جفت ۲ و ۵ نوشت و سپس باقی مانده ی عدد را تجزیه کرد.

مثال: عدد ۹۰۰ را تجزیه کنید؟

۹۰۰	۲
	۵
	۲
	۵
۹	۳
۳	۳
۱	

$$\Longrightarrow ۹۰۰ = ۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵^۲$$

در تجزیهٔ یک عدد، ترتیب تقسیم کردن، اهمیتی ندارد.

نکته ۳۶- در تجزیهٔ اعداد توان دار، ابتدا پایه ها را تجزیه کرده و سپس از قوانین توان استفاده می کنیم.

مثال: این عدد را تجزیه کنید؟ $۱۲^۳ \times ۱۰^۴$

$$\left\{\begin{array}{l} ۱۲ = ۲^۲ \times ۳ \\ ۱۰ = ۲ \times ۵ \end{array}\right. \Longrightarrow ۱۲^۳ \times ۱۰^۴ = (۲^۲ \times ۳)^۳ \times (۲ \times ۵)^۴ = ۲^۶ \times ۳^۳ \times ۲^۴ \times ۵^۴ = ۲^{۱۰} \times ۳^۳ \times ۵^۴$$

نکته ۳۷- برای مقایسهٔ اعداد توان دار، باید پایه ها یا توان های آنها را مساوی کرد.

مثال: $\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲۰} \boxed{>} \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۳۰} \qquad ۴^{۱۰} \boxed{<} ۵^{۱۰} \qquad ۳^{۱۰} \boxed{<} ۳^{۱۱}$

نکته ۳۸- اعداد بین ۰ و ۱ ، هر چه قدر توانشان بزرگتر باشد، کوچکتر می شوند. زیرا در حقیقت مخرج آنها از صورتشان بزرگتر است.

مثال: $۴^{۵۰} = (۲^۲)^{۵۰} = ۲^{۱۰۰}$ و $۸^{۴۰} = (۲^۳)^{۴۰} = ۲^{۱۲۰} \Longrightarrow ۴^{۵۰} < ۸^{۴۰}$

نکته ۳۹- در جمع و تفریق اعداد توان دار، اگر اعداد کوچک بودند،حاصل هر کدام را بدست می آوریم و جمع و تفریق می کنیم. اما اگر اعداد بزرگ بودند باید با پیدا کردن ب. م. م آنها و فاکتور گرفتن از آن، عبارتها را به ضرب تبدیل و سپس مسئله را حل می کنیم.

$۳ \times ۴ + ۳ \times ۵ = ۳ \times (۴ + ۵)$

فاکتورگیری بطور کلی با این رابطه بیان می شود. $ab + aC = a(b + C)$

مثال: حاصل این عبارت را به صورت یک عدد توان دار بنویسید. $۳^{۱۸} + ۹^{۹} + ۲۷^{۶}$

$$۳^{۱۸} + ۹^{۹} + ۲۷^{۶} = ۳^{۱۸} + (۳^{۲})^{۹} + (۳^{۳})^{۶} = ۳^{۱۸} + ۳^{۱۸} + ۳^{۱۸} = ۳^{۱۸} (۱ + ۱ + ۱) = ۳^{۱۸} \times ۳ = ۳^{۱۹}$$

نکته ۴۰- اگر پایۀ یک عدد توان دار را معکوس کنیم، توانش قرینه می شود. کسری که در صورت و مخرج آن بین اعداد توان دار ضرب است، می توان با جابه جا کردن اعداد از صورت به مخرج یا از مخرج به صورت، توان اعداد را قرینه کرد. همۀ قوانین توان برای توان منفی هم وجود دارد.

مثال: $a^{-x} = \frac{1}{a^{x}}$ و $a^{x} = \frac{1}{a^{-x}}$

۲^{-} : $\frac{۱}{۲^{۴}} =$

نکته۴۱- توان های مجهول:

در بعضی از مسائل، توان یک عدد، مجهول است و از ما می خواهند حاصل عبارت را به دست آوریم.

مثال: اگر $۷^{X} = ۳$ باشد، حاصل عبارت روبه رو را به دست آورید. $۴۹^{۲x-۱}$

$$۴۹^{۲x-۱} = (۷)^{۲x-۱} = ۷^{۴x-۲} = ۷^{۴x} \div ۷^{۲} = (۷^{x})^{۴} \div ۷^{۲} = ۳^{۴} \div ۷^{۲} = ۸۱ \div ۴۹ = \frac{۸۱}{۴۹}$$

نکته ۴۲- به دست آوردن تعداد شمارنده ها (یا مقسوم علیه های) یک عدد به کمک تجزیه:

اگر تجزیه شده ی عدد A به صورت روبه رو باشد: $A = a^{x} \times b^{y} \times C^{Z}$

تعداد شمارنده های آن برابر است با: $(x + ۱) \times (y + ۱) \times (Z + ۱)$

مثال: عدد ۲۴۰ چند شمارنده دارد؟

۲۴۰	۲
	۵
۲۴	۲
۱۲	۲
۶	۲
۳	۳
۱	

$240 = 2^4 \times 3^1 \times 5^1 \Rightarrow$ تعداد شمارنده ها $=(4+1) \times (1+1) \times (1+1) = 20$

نکته ۴۳- تعداد صفرهای سمت راست اعداد توان دار:

با مساوی کردن توان های ۲ و ۵ در تجزیهٔ اعداد توان دار و تبدیل آنها به توان هایی از عدد ۱۰می توان تعداد ارقام بعضی از اعداد را حساب کرد.

مثال: حاصل این عبارت چند رقمی است؟ $25^4 \times 8^3$

$$25^4 \times 8^3 = (5^2)^4 \times (2^3)^3 = 5^8 \times 2^9 = (5^8 \times 2^8) \times 2 = 2 \times 10^8 = 200000000$$

حاصل عبارت ۹ رقمی است.

نکته ۴۴- مکعب اعداد مثبت، مثبت و مکعب اعداد منفی، منفی می شود.

نکته ۴۵- هرگاه پس از تجزیهٔ یک عدد به حاصل ضرب عامل اوّل، توان همهٔ عامل ها زوج باشد، آن عدد مجذور کامل است و اگر توان همهٔ عامل ها، مضربی از ۳ باشد، آن عدد مکعب کامل است.

مثال: کدام یک از اعداد زیر مجذور کامل یا مکعب کامل می باشد؟

۱۷۲۸	۲	
۸۶۴	۲	
۴۳۲	۲	
۲۱۶	۲	
۱۸	۲	مکعب
۹	۳	
۳	۳	$6^2 \times 2^3$

۳۶۰۰	۲	
۱۸۰۰	۲	
۹۰۰	۲	
۴۵۰	۲	
۲۲۵	۵	مربع کامل است
۴۵	۵	
۹	۳	$2^4 \times 5^2 \times 3^2$
۳	۳	
۱		

۳۶۰	۲	
۱۸۰	۲	
۹۰	۲	
۴۵	۳	
۱۵	۵	نه مربع
۳	۳	نه مکعب
۱		$2^3 \times 3^2 \times 5^1$

نکته ۴۶- اگر در ضرب اعداد توان دار، هم پایه ها و هم توان ها برابر باشند، از دو روش استفاده می کنیم :

۱- یکی از پایه ها را نوشته و پایه ها را ضرب می کنیم

۲- یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را ضرب می کنیم.

$$۴^{۳} \times ۴^{۳} = \begin{cases} ۴^{۳+۳} = ۴^{۶} \\ ۱۶^{۳} \end{cases}$$

نکته ۴۷- اگر در ضرب توان ها نه پایه ها مساوی اند نه توان ها، از سه روش استفاده می کنیم:

۱- به کمک تجزیه، کاری می کنیم که پایه ها برابر شوند.

$$۸۱^{۲} \times ۲۷^{۵} = (۳^{۴})^{۲} \times (۳^{۳})^{۵} = ۳^{۸} \times ۳^{۱۵} = ۳^{۲۳}$$

۲- به کمک تجزیه، کاری می کنیم که توان ها مساوی شوند.

$$۱۲۵^{۲} \times ۴^{۳} = (۵^{۳})^{۲} \times (۲^{۲})^{۳} = ۵^{۶} \times ۲^{۶} = ۱۰^{۶}$$

۳- اگر نتوانیم به کمک تجزیه، پایه ها یا توان ها را مساوی کنیم، با محاسبهٔ مقدار هر عدد توان دار، حاصل را به دست می آوریم.

$$۲^{۳} \times ۳^{۲} = ۸ \times ۹ = ۷۲$$

نکته ۴۸- توان در توان (توان ضربی):

اگر یک عدد توان دار، خودش به توان عدد دیگری برسد، حالت توان در توان به وجود می آید. در این صورت پایه را نوشته و توان ها را در هم ضرب می کنیم.

$$(a^{n})^{m} = a^{n \times m}$$

مثال:

$$(۲^{۳})^{۲} = ۲^{۶} \qquad (۵^{۲})^{۵} = ۵^{۱۰}$$

داشتن پرانتز برای قاعده ی توان در توان الزامی است.

نکته ۴۹- قاعده توان در توان را می توان گسترش داد.

مثال:

$$[\,(۱۱^{۴})^{۲}\,]^{۵} = ۱۱^{۴۰} = ۱۱^{۴\times۲\times۵}$$

$$[\,[\,(۲^{۳})^{۲}\,]^{۲}\,]^{۲} = ۲^{۳\times۲\times۲\times۲} = ۲^{۲۴}$$

نکته ۵۰- توان توان:

اگر یک عدد به توان عددی توان دار برسد، عدد این حالت به وجود می آید.

$$۲^{\left(۵^{۲}\right)} = ۲^{۲۵}$$

$$۵^{۲^{۵}} = ۵^{\left(۲^{۵}\right)} = ۵^{۳۲}$$