Prova scritta di ANALISI MATEMATICA T-A 8/1/19

(Ingegneria meccanica)

COGNOME E NOME ....

Desidero sostenere la prova orale in questo appello ☐ nel prossimo appello ☐

---

(1) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \big(4 + x^2\big)^{\log(5x)} .$$

Allora $f'(1)$ è uguale a:

- [x] $5^{\log 5}\,\dfrac{7}{5}\,\log 5$
- [b] $5^{\log 5 - 1}\log 5$
- [c] $5^{\log 5 - 1}$
- [d] $5^{\log 5}\,\dfrac{3}{5}\,\log 5$
- [e] $5^{\log 5}\,\dfrac{2}{5}$

Si ha

$$f(x) = \exp\big(\log(4+x^2)\log(5x)\big) ,$$

pertanto

$$f'(x) = \exp\big(\log(4+x^2)\log(5x)\big)\left(\frac{2x}{4+x^2}\,\log(5x) + \log(4+x^2)\,\frac{5}{5x}\right) ,$$

quindi

$$f'(1) = \exp\big(\log 5 \log 5\big)\left(\frac{2}{5}\,\log 5 + \log 5\right) = 5^{\log 5}\,\frac{7}{5}\log 5 .$$

---

(2) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $f(2) = 3$, $f'(2) = 1$, $f(4) = 5$ e $f'(4) = -1$. Se

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} , \qquad g(x) = \frac{x^2}{f(x^2)} ,$$

allora $g'(2)$ è uguale a:

- [a] $-\dfrac{4}{9}$
- [b] $\dfrac{8}{9}$
- [c] $\dfrac{4}{25}$
- [d] $\dfrac{24}{25}$
- [x] $\dfrac{36}{25}$

Si ha

$$g'(x) = \frac{2xf(x^2) - x^2 f'(x^2)2x}{\big(f(x^2)\big)^2}\,,$$

quindi

$$g'(2) = \frac{4f(4) - 16f'(4)}{\big(f(4)\big)^2} = \frac{4 \cdot 5 - 16 \cdot (-1)}{5^2} = \frac{36}{25}\,.$$

---

(3) Per quale valore del numero reale α il seguente limite esiste ed è reale e diverso da 0:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+2x^3)\sin(x^2+x^3)}{x^\alpha}\,?$$

a 0

~~b~~ 5

c 6

d 2

e 8

Per $x \to 0^+$ si ha

$$\log(1+2x^3) \sim 2x^3\,,$$

$$\sin(x^2+x^3) \sim x^2 + x^3 \sim x^2\,.$$

Pertanto

$$\log(1+2x^3)\sin(x^2+x^3) \sim 2x^3x^2 = 2x^5\,.$$

---

(4)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{4}{x+x^3}\right) - 1\right)\log\big(1 + 2\exp(x^3)\big)$$

è uguale a:

a 0

b $+\infty$

~~c~~ 4

d 8

e 1

Per $x \to +\infty$ si ha

$$\exp\left(\frac{4}{x+x^3}\right) - 1 \sim \frac{4}{x+x^3} \sim \frac{4}{x^3}\,,$$

$$\begin{aligned}\log\bigl(1+2\exp(x^3)\bigr) &= \log\left(2\exp(x^3)\left(\frac{1}{2\exp(x^3)}+1\right)\right) = \\ &= \log 2 + \log\bigl(\exp(x^3)\bigr) + \log\left(\frac{1}{2\exp(x^3)}+1\right) \sim \log\bigl(\exp(x^3)\bigr) = x^3\,.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\left(\exp\left(\frac{4}{x+x^3}\right) - 1\right)\log\bigl(1+2\exp(x^3)\bigr) \sim \frac{4}{x^3}\,x^3 = 4\,.$$

---

(5) Sapendo che

$$\begin{aligned} e^y &= 1 + y + \frac{1}{2}\,y^2 + \frac{1}{6}\,y^3 + o(y^3)\,, && \text{per } y \to 0\,, \\ \sin y &= y - \frac{1}{6}\,y^3 + o(y^4)\,, && \text{per } y \to 0\,, \\ \cosh y &= 1 + \frac{1}{2}\,y^2 + o(y^3)\,, && \text{per } y \to 0\,, \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\exp(-3\sin x) + \exp(3x) - 2\cosh(3x)}{x^3}$$

è uguale a:

- [a] $+\infty$
- [b] $-\infty$
- [c] 0
- [X] $\frac{1}{2}$
- [e] $-\frac{1}{2}$

Per $x \to 0^+$ si ha

$$\begin{aligned}
\exp(-3\sin x) &= \exp\left(-3\left(x - \frac{1}{6}\,x^3 + o(x^4)\right)\right) = \exp\left(-3x + \frac{1}{2}\,x^3 + o(x^4)\right) = \\
&= 1 + \left(-3x + \frac{1}{2}\,x^3 + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(-3x + \frac{1}{2}\,x^3 + o(x^4)\right)^2 + \\
&\qquad + \frac{1}{6}\left(-3x + \frac{1}{2}\,x^3 + o(x^4)\right)^3 + o\left(\left(-3x + \frac{1}{2}\,x^3 + o(x^4)\right)^3\right) = \\
&= 1 - 3x + \frac{1}{2}\,x^3 + o(x^4) + \frac{1}{2}\left(9x^2 - 3x^4 + o(x^5)\right) + \frac{1}{6}\left(-27x^3 + o(x^4)\right) + o(x^3) = \\
&= 1 - 3x + \frac{9}{2}\,x^2 - 4x^3 + o(x^3)\,,
\end{aligned}$$

$$\exp(3x) = 1 + 3x + \frac{9}{2}\,x^2 + \frac{9}{2}\,x^3 + o(x^3)\,,$$

$$2\cosh(3x) = 2 + 9x^2 + o(x^3)\,.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
&\frac{\exp(-3\sin x) + \exp(3x) - 2\cosh(3x)}{x^3} = \\
&= \frac{1 - 3x + \frac{9}{2}\,x^2 - 4x^3 + o(x^3) + 1 + 3x + \frac{9}{2}\,x^2 + \frac{9}{2}\,x^3 + o(x^3) - 2 - 9x^2 + o(x^3)}{x^3} = \\
&= \frac{\frac{1}{2}\,x^3 + o(x^3)}{x^3} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

---

(6) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 2 - |x^2 + x - 2|}}\,.$$

Il dominio naturale di f è uguale a:

a $\left]0, \frac{2}{3}\right[$

b $]-\infty, 2[$

c $]2, +\infty[$

$\boxed{\times}$ d $]-\infty, 0[\cup \left]\frac{2}{3}, 2\right[\cup]2, +\infty[$

e $]-\infty, 0[\cup \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$

Il dominio naturale di f è costituito dai numeri per cui è positivo l'argomento della radice, quindi deve essere

$$2x^2 - 3x + 2 > \left|x^2 + x - 2\right| ,$$

che equivale a

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 < 2x^2 - 3x + 2 , \\ x^2 + x - 2 > -(2x^2 - 3x + 2) , \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 > 0 , \\ 3x^2 - 2x > 0 . \end{cases}$$

La prima disequazione è verificata per $x \neq 2$, la seconda per $x > 2/3$ oppure $x < 0$.

---

(7) La funzione

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} , \qquad f(x) = (x+1)\sqrt{|x^2 - 4|}$$

è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, con derivata

$$f'(x) = \frac{|x^2 - 4| + (x+1)x \operatorname{sgn}(x^2 - 4)}{\sqrt{|x^2 - 4|}} .$$

Indicato con A l'insieme dei punti di minimo locale per f e con B l'insieme dei punti di massimo locale per f, risulta:

- [ ] a $A = B = \emptyset$
- [ ] b $A = \{2\} \quad B = \{-2\}$
- [x] c $A = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{33}}{4}, 2 \right\} \quad B = \left\{ -2, \frac{-1 + \sqrt{33}}{4} \right\}$
- [ ] d $A = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{33}}{4} \right\} \quad B = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{33}}{4} \right\}$
- [ ] e $A = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{33}}{4} \right\} \quad B = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{33}}{4} \right\}$

Si ha

$$f'(x) = \frac{(x^2-4)\operatorname{sgn}(x^2-4) + (x+1)x\operatorname{sgn}(x^2-4)}{\sqrt{|x^2-4|}} = \frac{(2x^2+x-4)\operatorname{sgn}(x^2-4)}{\sqrt{|x^2-4|}}\,.$$

Il trinomio $2x^2+x-4$ si annulla per

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2+4\cdot 2\cdot(-4)}}{2\cdot 2} = \frac{-1\pm\sqrt{33}}{4}\,.$$

Il polinomio x^2-4 si annulla per $x=\pm 2$. Il denominatore è sempre positivo. Pertanto il segno di f' risulta dal seguente schema

		-2		$\frac{-1-\sqrt{33}}{4}$		$\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$		2	
$2x^2+x-4$	$+\ +\ +$		$+$		$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$		$+\ +$		$+\ +\ +$
$\operatorname{sgn}(x^2-4)$	$+\ +\ +$		$-$		$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$		$-\ -$		$+\ +\ +$
$f'(x)$	$+\ +\ +$		$-$		$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$		$-\ -$		$+\ +\ +$

Quindi -2 e $\big(-1+\sqrt{33}\big)/4$ sono punti di massimo locale, mentre $\big(-1-\sqrt{33}\big)/4$ e 2 sono punti di minimo locale.

---

(8)

$$\int_0^1 \frac{x^2+5}{(x+1)^2}\,dx$$

è uguale a:

[X] $4-2\log 2$

[b] $3-2\log 2$

[c] $\dfrac{7}{2}-2\log 2$

[d] $\dfrac{7}{2}$

[e] 1

Si ha

$$\frac{x^2+5}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1-2x+4}{(x+1)^2} = 1 + \frac{-2x-2+6}{(x+1)^2} = 1 - \frac{2}{x+1} + \frac{6}{(x+1)^2}\,,$$

pertanto

$$\int_0^1 \frac{x^2+5}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+1} + \frac{6}{(x+1)^2}\right)dx = \left[x - 2\log|x+1| - \frac{6}{x+1}\right]_0^1 =$$

$$= 1 - 2\log 2 - \frac{6}{2} - 0 + 2\log 1 + 6 = 4 - 2\log 2\,.$$

(9) Integrando per parti,

$$\int_1^2 x^5 \log(3+x^2)\,dx$$

è uguale a:

a $\left[\frac{1}{6}\,x^6 \log(3+x^2)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^5}{3+x^2}\,dx$

b $\left[\frac{1}{6}\,x^6 \log(3+x^2)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{10x^5}{3+x^2}\,dx$

c $\left[\frac{1}{6}\,x^6 \log(3+x^2)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2x^6}{3+x^2}\,dx$

d $\left[\frac{1}{6}\,x^6 \log(3+x^2)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^6}{6(3+x^2)}\,dx$

~~e~~ $\left[\frac{1}{6}\,x^6 \log(3+x^2)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^7}{3(3+x^2)}\,dx$

Una primitiva della funzione $x \mapsto x^5$ è la funzione $x \mapsto x^6/6$, mentre la derivata di $\log(3+x^2)$ è $2x/(3+x^2)$, pertanto

$$\int_1^2 x^5 \log(3+x^2)\,dx \left[\frac{1}{6}\,x^6 \log(3+x^2)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{6}\,x^6\,\frac{2x}{3+x^2}\,dx\,.$$

---

(10) Effettuando la sostituzione $\sqrt{x} = t$, l'integrale

$$\int_1^4 x^2 \sin\bigl(\sqrt{x}\,\bigr)\,dx$$

risulta uguale a:

a $\int_1^2 t^4 \sin t\,dt$

~~b~~ $\int_1^2 2t^5 \sin t\,dt$

c $\int_1^{16} t^4 \sin t\,dt$

d $\int_1^{16} 2t^5 \sin t\,dt$

e $\int_1^{16} t^2 \sin t\,dt$

Da $\sqrt{x} = t$ si ricava $x = t^2$, quindi la derivata del cambiamento di variabile è $2t$. Inoltre per $x = 1$ si ha $t = 1$, mentre per $x = 4$ s ha $t = 2$. Pertanto

$$\int_1^4 x^2 \sin\bigl(\sqrt{x}\,\bigr)\,dx = \int_1^2 (t^2)^2 \sin t\; 2t\,dt\,.$$

---

(11) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da

$$f(x) = \frac{e^{1/x}}{|x^2 - 3x|}\,.$$

La funzione è definita per tutti gli x reali che non annullano i denominatori, quindi deve essere $x \neq 0$ e $x^2 - 3x \neq 0$, cioè $x \neq 0$ e $x \neq 3$. Pertanto $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$.

La funzione assume solo valori positivi, quindi il suo grafico non interseca l'asse delle ascisse. Poiché $0 \notin \operatorname{dom} f$ il grafico non interseca neppure l'asse delle ordinate.

Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,,$$

$$\lim_{x\to-3^-} f(x) = \lim_{x\to-3^+} f(x) = +\infty\,,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\,.$$

La funzione è continua e derivabile e si ha

$$\begin{aligned}
f'(x) =& \frac{-\dfrac{1}{x^2}\, e^{1/x}|x^2-3x| - e^{1/x} \operatorname{sgn}(x^2-3x)\,(2x-3)}{(x^2-3x)^2} = \\
=& \frac{e^{1/x}\big(-(x^2-3x)\operatorname{sgn}(x^2-3x) - x^2 \operatorname{sgn}(x^2-3x)\,(2x-3)\big)}{x^2(x^2-3x)^2} = \\
=& \frac{e^{1/x}\operatorname{sgn}(x^2-3x)\,(-2x^3+2x^2+3x)}{x^2(x^2-3x)^2}\,.
\end{aligned}$$

Il denominatore e il fattore $e^{1/x}$ sono sempre positivi. Si ha $-2x^3+2x^2+3x = x(-2x^2+2x+3)$ e il trinomio $-2x^2+2x+3$ si annulla per

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 2\cdot 3}}{-2} = \frac{1 \mp \sqrt{7}}{2}\,,$$

pertanto tale trinomio è positivo se e solo se $x \in \big]\big(1-\sqrt{7}\big)/2, \big(1+\sqrt{7}\big)/2\big[$. Osserviamo inoltre che il segno del prodotto $x\operatorname{sgn}(x^2-3x)$ coincide con quello di $x-3$. Pertanto il segno di f' risulta dal seguente schema

		$\frac{1-\sqrt{7}}{2}$	0	$\frac{1+\sqrt{7}}{2}$	3
$-2x^2+2x+3$	$-\ -\ -\ -$	$+\ +$	$+\ +\ +\ +\ +\ +$	$-\ -\ -\ -$	$-\ -\ -$
$x\operatorname{sgn}(x^2-3x)$	$-\ -\ -\ -$	$-\ -$	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	$-\ -\ -\ -$	$+\ +\ +$
$f'(x)$	$+\ +\ +\ +$	$-\ -$	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	$+\ +\ +\ +$	$-\ -\ -$

Pertanto f è crescente negli intervalli $\big]-\infty, \big(1-\sqrt{7}\big)/2\big]$ e $\big[\big(1+\sqrt{7}\big)/2, 3\big[$ ed è decrescente negli intervalli $\big[\big(1-\sqrt{7}\big)/2, 0\big[$, $\big]0, \big(1+\sqrt{7}\big)/2\big]$ e $]3, +\infty[$; $\big(1-\sqrt{7}\big)/2$ è punto di massimo locale e $\big(1+\sqrt{7}\big)/2$ è punto di minimo locale.

Il grafico di f è quindi, approssimativamente, il seguente: