1. Sia A una matrice 2016×2016 a elementi reali tale che $\det(A) = 3$.

i. È possibile calcolare il determinante della matrice $A + A + A$? In caso affermativo, determinarne il valore.

ii. Qual è il massimo numero di zeri che possono apparire in A?

iii. Stabilire se A può ammettere contemporaneamente come autovalori tutti gli interi compresi tra 1 e 2015.

iv. Supponendo che A sia simmetrica, a quante diverse classi di congruenza potrebbe appartenere?

v. Supponendo che A sia diagonale, stabilire se possibile dedurre il valore di $\det(A + I_{2016})$.

2. Si consideri la forma bilineare $\varphi_k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ canonicamente associata alla seguente matrice di Gram:

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & k^3 + 4k^2 + k - 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

al variare del parametro reale k.

i. Determinare i valori di k per cui φ_k è un prodotto scalare.

ii. Posto $k = -2$, determinare un vettore isotropo di φ_{-2}.

iii. Posto $k = -3$, determinare una base del coniugato rispetto a φ_{-3} del sottospazio $U : x + 2y - 3z = 0$.

iv. Si consideri l'endomorfismo $f_k \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ tale che $M_E^E(f_k) = A_k$. Determinare un valore di k per cui f_k non sia diagonalizzabile.

3. Nello spazio euclideo tridimensionale, si consideri il fascio di quadriche di equazione

$$x^2 + y^2 + 3z^2 + 2kyz + 2kx + 4z = 0.$$

i. Si classifichino le quadriche di tale fascio.

ii. Si classifichino le coniche ottenute intersecando il fascio assegnato con il piano di equazione $x - y = 0$.