



## CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

### ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA

#### PROVA SCRITTA - 12 gennaio 2015

1. Si consideri l'endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^3$  definito come segue:

$$f((x, y, z)) = (6x - 2y - z, 5x - y - z, 10x - 4y - z).$$

- Stabilire se l'endomorfismo è diagonalizzabile.
  - Trovare una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico) di ciascun autospazio di  $f$ .
  - Si consideri il sottospazio  $W$  di  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $W : x + y - z = 0$ . Determinare una rappresentazione cartesiana del sottospazio  $f(W)$ .
2. Nello spazio ordinario  $\mathbb{R}^3$  si consideri il punto  $P(1, 2, 0)$  e la retta  $r$  di equazioni

$$r : \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

- Scrivere una rappresentazione cartesiana del piano  $\pi$  che contiene il punto  $P$  e la retta  $r$ .
  - Scrivere una rappresentazione cartesiana della retta  $s$  che contiene il punto  $P$  e parallela alla retta  $r$ .
  - Scrivere una rappresentazione cartesiana di una retta  $t$  perpendicolare alla retta  $r$  a scelta del candidato.
3. Si considerino due sottospazi  $V, W$  di  $\mathbb{R}^{200}$  tali che  $\dim(V) = 120$  e  $\dim(W) = 140$ .
- Quali valori può assumere la dimensione del sottospazio  $V \cap W$ ?
  - Quante equazioni compaiono in una rappresentazione cartesiana di  $V$ ?
  - Sia  $g$  un endomorfismo suriettivo di  $\mathbb{R}^{200}$ . Quali valori può assumere la dimensione di  $g(W)$ ?
  - Sia  $h$  un endomorfismo di  $\mathbb{R}^{200}$  per cui  $W$  sia l'autospazio relativo all'autovalore 5. Quali valori può assumere la molteplicità algebrica dell'autovalore 5?
  - Sia  $\varphi : \mathbb{R}^{200} \times \mathbb{R}^{200} \rightarrow \mathbb{R}$  un prodotto interno. Quali valori può assumere la dimensione del sottospazio coniugato di  $W$  rispetto a  $\varphi$ ?

Motivare le risposte in modo esauriente.