

1. Rispondere alle domande seguenti, motivando la risposta:
 - i. Quanti sono gli autospazi di un endomorfismo di \mathbb{R}^3 che ha per polinomio caratteristico $-\lambda^3 + 3\lambda + 1$?
 - ii. Quante sono le righe non nulle di una matrice 201×201 di rango 8?
 - iii. Quante sono le matrici diagonali 2×2 con traccia e determinante entrambi pari a 1?
 - iv. Quante sono le matrici diagonali simili a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$?
 - v. Quante sono le classi di equivalenza in cui la relazione di congruenza divide l'insieme delle matrici simmetriche di ordine 3?
2. Si consideri il prodotto interno $\varphi_k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ canonicamente associato alla seguente matrice di Gram:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & k & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro reale k .

- i. Determinare i valori di k per cui φ_k è un prodotto scalare.
 - ii. Posto $k = 6$, determinare una base ortonormale rispetto a φ_6 del sottospazio di equazione $x + 3y + z = 0$.
 - iii. Posto $k = 5$, determinare una base B del radicale di φ_5 . In seguito, completare B in una base di \mathbb{R}^3 .
 - iv. Per quali valori di k il vettore $(1, 1, 0)$ è isotropo per φ_k ?
3. Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino i punti $P(1, 2, 3)$ e $Q(0, 1, 2)$ e il piano π_k di equazione $x + y + kz = 2$, al variare del parametro reale k .
 - i. Si determini l'equazione della retta r passante per P e per Q .
 - ii. Si discuta la posizione reciproca di r e π_k al variare del parametro k .
 - iii. Posto $k = 1$, si scriva l'equazione della retta passante per P e perpendicolare a π_1 .