1. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito come segue:

$$f((x, y, z)) = (9x - 5y - 3z, 5x - 2y - 2z, 9x - 6y - 2z).$$

i. Si stabilisca se f è diagonalizzabile.

ii. Si trovi una rappresentazione cartesiana del sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ ottenuto come somma di tutti gli autospazi relativi a f.

iii. Si determini una base di W ortonormale rispetto al prodotto scalare canonico.

iv. Si studi la dimensione del $Ker(f^k)$ al variare di $k \in \mathbb{N}$.

v. Detta A la matrice canonicamente associata a f, si stabilisca il valore di $det(\alpha \cdot A)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, sapendo che $\alpha \cdot A$ è la matrice che si ottiene moltiplicando ciascuno elemento di A per α.

vi. Si dimostri che A è invertibile e si determini la matrice A^{-1}.

2. Nello spazio Euclideo tridimensionale si considerino il piano π di equazione $x + y - 2z = 1$ e la retta r di equazioni

$$\begin{cases} 2x + 3y + (k-1)z = 2 \\ x + ky - 3z = 0 \end{cases}$$

con k parametro reale.

i. Si discuta la posizione reciproca di π e r al variare di k.

ii. Si determini l'equazione delle retta s perpendicolare a π passante per $P(2, 1, 0)$.

iii. Si determinino le equazioni di due rette complanari t e v perpendicolari a r tali che $t \cap r \neq v \cap r$.

iv. Posto $k = 0$, si determini l'equazione del piano ρ contenente r e passante per P.

v. Si determini l'area del triangolo di vertici P, $R(1, 1, 3)$ e $S(3, 0, -1)$.