Algebra e Geometria T - Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Esercizi consigliati sulle trasformazioni lineari

Tutti gli esercizi del testo: Barnabei, Bonetti, “Spazi vettoriali e trasformazioni lineari”, in particolare i seguenti esercizi: 5.10, 5.14, 6,3, 6.7, 6.8, 6.11 (assicurarsi di saper motivare le risposte)

Esercizio 1.
Sia $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + kx_2, 2x_1 + 6x_2 + kx_3, -x_1 + 2x_3).$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è iniettiva.

b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $(6, 1, 3) \in \text{Ker } F_k$.

c) Posto $k = 0$ si determini, se possibile, una applicazione lineare $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $F_k \circ G$ sia l'identità di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. (9 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$F_k(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + kx_2 + 4x_3, kx_1 - x_2 - 3x_3, 2x_1 - 2x_2 + 4x_3).$$

a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determini una base del nucleo di F_k.

b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $\mathbf{e}_1 - k\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_4 \in \text{Im } F_k$.

c) Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2\}$ un'altra base di $\mathbb{R}^3$. Posto $k = 0$, si determini la matrice $A_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ associata a F_0 rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^4$ nel codominio.

Esercizio 3.
Sia $H : \mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da:

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \mapsto (2r + t - u, s - 2t).$$

Si determini la matrice associata a H rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ e alla base $\mathcal{B}' = \{(0, -2),\ (-1, 0)\}$ di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 4.
Sia $F_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 2x_2 + kx_4, x_1 - 2x_3 + kx_4, x_1 + kx_2 + kx_3 - k^2x_4).$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è suriettiva.

b) Esistono valori di k tali che Ker F_k abbia dimensione 2?

c) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \in \text{Ker } F_k$.

d) Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2\}$ un'altra base di $\mathbb{R}^3$. Posto $k = 0$, si determini la matrice $A_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ associata a F_0 rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^4$ nel dominio e alla base $\mathcal{B}$ nel codominio.

Esercizio 5.
Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T_k(\mathbf{e}_1) = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + k\mathbf{e}_3, T_k(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_3,$$

$$T_k(\mathbf{e}_3) = -2\mathbf{e}_3$$

e sia A_k la matrice associata a T_k rispetto alla base canonica.

a) Si stabilisca per quali valori a di k si ha che T_k è diagonalizzabile.

b) Sia a un valore di k tovato al punto A. Si determinino tutte le matrici diagonali simili ad A_a.

c) Si determinino, se possibile, due autovettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di T_a linearmente indipendenti tali che $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ non sia un autovettore di T_a.

d) Sia r un valore di k tale che T_r non sia diagonalizzabile. Si determini, se possibile, una matrice avente gli stessi autovalori di A_r (contati con la loro molteplicità) e che non sia simile ad A_r.

Esercizio 6.
Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T_k(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_2, T_k(\mathbf{e}_2) = 6\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

$$T_k(\mathbf{e}_3) = 9\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 + (k+2)\mathbf{e}_3$$

e sia A_k la matrice associata a T_k rispetto alla base canonica.

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che T_k è diagonalizzabile.

b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$ è un autovettore di T_k.

c) Esistono valori di k tali che A_k sia simile alla matrice

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$