Esercizi di cinematica del punto

1. Determinare la traiettoria e la legge oraria di un punto P che si muove nel piano Ox_1x_2 secondo le equazioni cartesiane
$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10} + R\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}t^2 + \omega t\right) \\[2ex] x_2(t) = x_{20} + R\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}t^2 + \omega t\right) \end{cases}$$
con α, ω e R costanti positive.

2. Determinare la traiettoria e la legge oraria di un punto P che si muove nel piano Ox_1x_2 secondo le equazioni cartesiane
$$\begin{cases} x_1(t) = R\,\sin\omega t\,\cos\omega t \\ x_2(t) = R\,\cos^2\omega t \end{cases}$$
con ω e R costanti positive.

3. Determinare la traiettoria un punto P che si muove nel piano Ox_1x_2 secondo le equazioni cartesiane
$$\begin{cases} x_1(t) = a\,\cos\omega t \\ x_2(t) = b\,\sin\omega t \end{cases}$$
con a, b e ω costanti positive.

4. Determinare la traiettoria e la legge oraria di un punto P che si muove in un piano secondo le equazioni polari
$$\begin{cases} \varrho(t) = R\cos\omega t \\ \vartheta(t) = \omega t \end{cases}$$
con ω e R costanti positive.

5. Un punto materiale P si muove con velocità
$$\mathbf{v}(t) = -\omega R\,\sin\omega t\,\hat{\boldsymbol{\imath}}_1 + \omega R\,\cos\omega t\,\hat{\boldsymbol{\imath}}_2 + h\omega\,\hat{\boldsymbol{\imath}}_3$$
con R, ω e h costanti positive.

   Sapendo che inizialmente P si trova nella posizione di coordinate $(R, 0, 0)$ determinare le equazioni del moto, la traiettoria e la legge oraria.

6. Un punto P si muove nel piano Ox_1x_2 con velocità
$$\mathbf{v}(t) = 3bt^2\,\hat{\boldsymbol{\imath}}_1 + 2ct\,\hat{\boldsymbol{\imath}}_2$$
con b e c costanti positive.

   Sapendo che inizialmente P si trova nella posizione di coordinate $(0, 0)$ determinare le equazioni del moto e la traiettoria.

7. Determinare la legge oraria del moto di un punto P che si muove su una retta sapendo che accelerazione e velocità soddisfano la seguente relazione
$$\mathbf{a}(t) = -k\mathbf{v}(t)\,,$$
con k costante positiva.

8. Determinare la equazioni del moto di un punto P che si muove nel riferimento $Ox_1x_2x_3$ sapendo che accelerazione e velocità soddisfano la seguente relazione
$$\mathbf{a}(t) = \alpha\mathbf{v}(t) \wedge \hat{\boldsymbol{\imath}}_3\,,$$
con α costante non nulla.

9. Determinare le equazioni del moto di un punto P che si muove di moto circolare sapendo che il rapporto tra accelerazione tangenziale e accelerazione centripeta si mantiene costantemente uguale a k.

10. Determinare la traiettoria di un punto P che si muove in un piano sapendo che durante il moto il rapporto tra velocità radiale e la velocità trasversa rispetto a un polo O si mantiene costantemente uguale a k.

    Supponendo successivamente il moto di P uniforme, determinare le equazioni polari del moto.

11. Un punto P si muove di moto centrale rispetto al polo O sulla curva di equazione

$$\varrho = Re^{h\vartheta}$$

    con R e h costanti positive.

    Determinare le equazioni polari del moto a partire dalle condizioni iniziali

$$\vartheta(0) = 0\,, \qquad \dot{\vartheta}(0) = \omega_0.$$

Soluzioni

1. * *traiettoria*: $(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 = R^2$, circonferenza di centro (x_{10}, x_{20}) e raggio R.
   * *legge oraria*: $s(t) = R\left(\frac{\alpha}{2}t^2 + \omega t\right) + s_0$, moto uniformemente vario.
2. * *traiettoria*: $x_1^2 + \left(x_2 - \frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$, circonferenza di centro $(0, \frac{R}{2})$ e raggio $\frac{R}{2}$.
   * *legge oraria*: $s(t) = R\omega t + s_0$, moto uniforme.
3. * *traiettoria*: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$, ellisse di centro $(0, 0)$ e semiassi a e b.
4. * *traiettoria*: $\left(x_1 - \frac{R}{2}\right)^2 + x_2^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$, circonferenza di centro $\left(\frac{R}{2}, 0\right)$ e raggio $\frac{R}{2}$.
   * *legge oraria*: $s(t) = R\omega t + s_0$, moto uniforme.
5. * *equazioni del moto*: $x_1(t) = R\cos\omega t$, $x_2(t) = R\sin\omega t$, $x_3(t) = ht$.
   * *traiettoria*: elica circolare sul cilindro di raggio R.
   * *legge oraria*: $s(t) = \sqrt{R^2 + h^2}\omega t + s_0$, moto uniforme.
6. * *equazioni del moto*: $x_1(t) = bt^3$, $x_2(t) = ct^2$.
   * *traiettoria*: $x_2 = c\sqrt[3]{\frac{x_1^2}{b^2}}$.
7. * *legge oraria*: $x(t) = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) + x_0$.
8. * *equazioni del moto*: $x_1(t) = C\cos(\alpha t + \phi_0) + a_1$, $x_2(t) = C\sin(\alpha t + \phi_0) + a_2$, $x_3(t) = \dot{x}_{03}t + x_{03}$.
9. * *equazioni del moto*: $\varrho(t) = R$, $\vartheta(t) = -\frac{1}{k}\log\left(1 - k\dot{\vartheta}_0 t\right) + \vartheta_0$.
10. * *traiettoria*: $\varrho(t) = \varrho_0 e^{k(\vartheta - \vartheta_0)}$.
    * *equazioni del moto*: $\varrho(t) = \dot{\varrho}_0 t + \varrho_0$, $\vartheta(t) = \frac{1}{k}\log\left(\frac{\dot{\varrho}_0 t + \varrho_0}{\varrho_0}\right) + \vartheta_0$.
11. * *equazioni del moto*: $\varrho(t) = R\sqrt{2h\omega_0 t + 1}$, $\vartheta(t) = \frac{1}{2h}\log\left(2h\omega_0 t + 1\right)$.