Note iniziali:
- fattorizzazione della differenza di cubi: $(A^3 \pm B^3) = (A \pm B)(A^3 \mp AB + B^3)$
- la funzione valore assoluto è derivabile in $\mathbb{R}^*$, la sua derivata è $sgn\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$
- se una funzione è definita a tratti, anche la derivata è definita a tratti, ma gli estremi sono esclusi
- sviluppo di $\sqrt{f(x)} \gtreqless g(x)$: $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) \gtreqless [g(x)]^2 \end{cases} \wedge \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$

Successioni

Sia X un insieme, si dice <u>successione</u> in X ogni funzione f del tipo $f: \mathbb{N} \to X$ che associa ad ogni valore di $\mathbb{N}$ un valore di X. Il corrispondente di $n \in \mathbb{N}$, a_n, è l'n-esimo <u>termine</u> della successione.
La successione si indica con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Se $X \equiv \mathbb{R}$, la successione si dice <u>reale</u>, a termini reali.
L'insieme dei termini $\{a_n |\, n \in \mathbb{N}\}$ si dice <u>insieme delle immagini</u>. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è <u>limitata</u>, $\{a_n |\, n \in \mathbb{N}\}$ è un insieme limitato, e viceversa.

*Limiti di successione

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+_*, \;\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \; |a_n - \ell| \leq \varepsilon \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; | \;\; n \geq n_\varepsilon$$

ovvero

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$$

Si ha che tutti i termini della successione sono definitivamente compresi in un <u>intervallo</u>: $\ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon$
Se $\ell = 0$, la successione si dice <u>infinitesima</u>.
Nel caso di un limite uguale a $\pm\infty$, $\forall M \in \mathbb{R}, \;\; \exists\, n_M \in \mathbb{N} : \; a_n \gtreqless M \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; | \;\; n \geq n_M$.
Una successione che ammette limite è <u>regolare</u>; se il limite appartiene a $\mathbb{R}$, la successione è <u>convergente</u>, se invece il limite è $\pm\infty$ la successione è <u>divergente</u>. Le successioni costanti sono convergenti. L'insieme dei termini di una successione convergente è limitato.

Insieme $\overline{\boldsymbol{R}}$ esteso

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Si definiscono anche in $\overline{\mathbb{R}}$ la relazione d'ordine totale $\leq$, prodotto e somma, l'unicità del limite, ...

Verifica definitiva

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali in $\mathbb{R}$; $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$,
se $a_n \to \ell$ e $\exists\, q \in \mathbb{N} : \; \forall n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq q \quad b_n = a_n$, allora anche $b_n \to \ell$

*Teorema

Sia $x \in \mathbb{R}$. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+_*$, $x \leq \varepsilon \iff x \leq 0$

per assurdo, sia $x \leq \varepsilon$ $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+_*$ e $x > 0$, allora $\frac{x}{2} > 0$. Quindi se si scegliesse $\varepsilon = \frac{x}{2}$ si avrebbe $x \leq \frac{x}{2}$ (assurdo).

*Teorema: unicità del limite

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$; $\ell, m \in \mathbb{R}$. $a_n \to \ell \wedge a_n \to m \implies \ell = m$

Dim: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+,\ \exists\, p_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \mid n \geq p_\varepsilon \quad |a_n - \ell| \leq \varepsilon$ e anche $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+,\ \exists\, q_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \mid n \geq q_\varepsilon \quad |a_n - \ell| \leq \varepsilon$
Scegliendo $n \geq max\{p_{\frac{\varepsilon}{2}}, q_{\frac{\varepsilon}{2}}\}$, $|\ell - m| = |(\ell - a_n) + (a_n - m)| \leq |\ell - a_n| + |a_n - m| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$
Per il teorema precedente se $|\ell - m| \leq \varepsilon$, allora $|\ell - m| \leq 0$ quindi $|\ell - m| = 0 \implies \ell = 0$

*Teorema: limite e valore assoluto

- Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente, allora $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente ed il suo limite è $|\ell|$, dove ℓ è il limite di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente, allora $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$
- $|a_n| \to \ell \Rightarrow a_n \to |\ell|$

*Teorema del confronto

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali in $\mathbb{R}$; $\ell, m \in \overline{\mathbb{R}}$.
$a_n \to \ell$; $b_n \to m$; $a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\implies \ell \leq m$

se $m = +\infty$, $x < +\infty\ \forall x \in \overline{\mathbb{R}}$;
se $m < +\infty$, allora $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente limitata, quindi per ipotesi anche $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lo è;
se $\ell = -\infty$, allora la tesi è verificata;
se $\ell > -\infty$, allora $m > -\infty$
se $\ell, m \in \mathbb{R}$, per assurdo, si supponga $\ell > m$, quindi $\ell - m > 0$, quindi $\frac{\ell - m}{2} > 0$. Se si pone $\varepsilon = \frac{\ell - m}{2}$ nella definizione di limite, definitivamente si ha $\ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon$ ed in particolare $a_n \geq \ell - \varepsilon > \ell - \frac{\ell - m}{2} = \frac{\ell + m}{2}$. Ugualmente, da $m - \varepsilon \leq b_n \leq m + \varepsilon$ si ottiene $b_n \leq m + \varepsilon < m + \frac{\ell - m}{2} = \frac{\ell + m}{2}$. Si avrebbe che $\frac{\ell + m}{2} < a_n \leq b_n < \frac{\ell + m}{2}$ ovvero $\frac{\ell + m}{2} < \frac{\ell + m}{2}$ (assurdo).

Teorema della permanenza del segno

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$; $a_n \to \ell \mid \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. $\ell \gtrless 0 \Longrightarrow \exists\, q \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \mid n \geq q \quad a_n \gtrless 0$.
Questo è verificato per ogni numero naturale, non solo 0.

*Teorema dei due carabinieri

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali in $\mathbb{R}$; $\ell \in \mathbb{R}$.
Se $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n \leq c_n$, $a_n \to \ell$, $c_n \to \ell$, allora $\exists \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$
Dimostrazione: sia $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$, definitivamente si ha che $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$ quindi $a_n \geq \ell - \varepsilon$ e allo stesso modo anche $c_n \geq \ell - \varepsilon$.
Quindi $\ell - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq \ell + \varepsilon$, quindi $|b_n - \ell| \leq \varepsilon$, che è la definizione di limite.

Inoltre, $a_n \to +\infty \implies b_n \to +\infty$ e, allo stesso modo, $b_n \to -\infty \implies b_n \to -\infty$.

*Teorema: limite della somma

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali in $\mathbb{R}$; $\ell, m \in \overline{\mathbb{R}}$. Se $a_n \to \ell$, $b_n \to m$ e se $\ell + m$ è definito, allora $(a_n + b_n)$ è regolare e $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \ell + m$

Dimostrazione: nel caso di $a_n \to +\infty$, $b_n \to \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$ si ha che $\forall \ell \in \mathbb{R},\ \exists\, n_\ell \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N}\ |\ n \geq n_\ell \quad a_n \geq M$. Inoltre, si sa che $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare e convergente, quindi limitata, quindi $\exists\, b \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}\ b_n \geq b$, quindi $a_n \geq M - b \Longrightarrow a_n + b_n \geq M - b + b = M$.

Teorema: limite del prodotto

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni regolari in $\mathbb{R}$, $\ell, m \in \mathbb{R}$, se $a_n \to \ell$, $b_n \to m$ e se $\ell \cdot m$ è definito, allora $(a_n \cdot b_n)$ è regolare e $\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = \ell \cdot m$.

Forme indeterminate

$$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad 0\cdot\infty;\quad 1^{\infty};\quad 0^0;\quad \infty^0;\quad (\infty - \infty)$$

Teorema: limite del reciproco

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione regolare in $\mathbb{R}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0$,

- se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \neq 0$, allora $\frac{1}{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ è convergente e $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\ell}$
- se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$
- se $a_n \to 0$ e a_n è definitivamente positiva, allora $\frac{1}{a_n} \to +\infty$
- se $a_n \to 0$ e a_n è definitivamente negativa, allora $\frac{1}{a_n} \to -\infty$

Successioni trascurabili

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali in $\mathbb{R}$, tali che $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \neq 0$, si dice che a_n è trascurabile rispetto a b_n se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, ed in tal caso si scrive $a_n = o(b_n)$. Questo metodo consente di confrontare due infiniti, e di risolvere alcune forme indeterminate.

Successioni equivalenti

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali in $\mathbb{R}$, si dice che a_n è equivalente a b_n se esiste una successione in $\mathbb{R}$ $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che:
- $h_n \to 1$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n \cdot h_n$

Quindi $\frac{a_n}{b_n} \to 1$, ed in tal caso si scrive $a_n \sim b_n$. "$\sim$" è una relazione d'equivalenza. È importante notare che l'equivalenza si conserva per prodotti o quozienti, ma non si può affermare lo stesso per somme e differenze.

Ogni successione polinomiale è equivalente al suo termine di grado più alto.

Successioni crescenti e decrescenti

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$, si dice che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è <u>crescente</u> (decrescente) se $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_{n+1} \underset{\leq}{\geq} a_n$; <u>strettamente crescente</u> (decrescente) se $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_{n+1} \underset{<}{>} a_n$. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente o decrescente si dice che la stessa è <u>monotona</u>: $n < m \Longrightarrow a_n < a_m$. Se una funzione è monotona, essa <u>ammette limite</u> (è regolare).

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$:
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente $\Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = sup.\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente $\Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = inf.\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

*Criterio del rapporto

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}_*^+$ tale che $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}^+$, si ha che $\ell < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, o anche, altrimenti, $\ell > 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, mentre non è possibile affermare niente negli altri casi. Il criterio del rapporto consente di risolvere, in alcuni casi, forme indeterminate del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

<u>Dimostrazione</u>: L'idea è di dimostrare che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è maggiore di una successione infinita (infinitesima nel secondo caso). Se $\ell < 1$, $\exists\, m \in \mathbb{R} \mid 0 < m < 1$, allora $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq p$. Per il teorema della permanenza del segno si ha che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq m$, cioè $a_{n+1} \leq m \cdot a_n$. Ripetendo all'infinito il procedimento: $\frac{a_{p+1}}{a_p} \leq m,\ \ a_{p+1} \leq a_0 m^{p+1}$ dove a_0 è il primo termine della successione. Quindi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leq a_0 m^n$. Poiché $m < 1$, $m^n \to 0$, per il teorema dei due carabinieri, anche $a_n \to 0$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$, ponendo $\ell <\ m < 1$, per il teorema della permanenza del segno $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq m$ definitivamente: quindi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima. La dimostrazione se $\ell > 1$ è analoga, ma in questo caso $1 <\ m < \ell$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq m$ e $m^n \to +\infty$.

Funzioni elementari

Funzione esponenziale

$$exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$$
$$exp_a(x) = a^x \quad \text{con } a \in \mathbb{R}_*^+ - \{1\}$$

Proprietà:
- $a^x > 0$ — $\forall x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}_*^+ - \{1\}$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ — $\forall x, y \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}_*^+ - \{1\}$
- $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$ — $\forall x, y \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}_*^+ - \{1\}$
- $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ — $\forall x \in \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{R}_*^+ - \{1\}$
- $f(x)$ è strettamente monotona, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$

Funzione logaritmo

$$log\colon \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \log_a x \quad \text{con } x \in \mathbb{R}_*^+,\ a \in \mathbb{R}_*^+ - \{1\}$$

Proprietà:
- $\log_a b = c \Longrightarrow b = a^c$ — $\forall b \in \mathbb{R}_*^+,\ \forall a \in \mathbb{R}_*^+ - \{1\},\ \forall c \in \mathbb{R}$
- $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $a^{\log_a x} = x$ — $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ \forall a \in \mathbb{R}_*^+ - \{1\}$
- $\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$ — $\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+,\ \forall a \in \mathbb{R}_*^+ - \{1\}$
- $\log_a x - \log_a y = \log_a(x/y)$ — $\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+,\ \forall a \in \mathbb{R}_*^+ - \{1\}$
- $\log_a x^b = b \cdot \log_a x$ — $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ \forall a \in \mathbb{R}_*^+ - \{1\},\ \forall b \in \mathbb{R}$

- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ $\forall x \in \mathbb{R}^+_*,\ \forall a, b \in \mathbb{R}^+_* - \{1\}$
- $f(x)$ è strettamente monotona, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$

Funzioni trigonometriche

$$sen: \mathbb{R} \to [-1, +1] \quad cos: \mathbb{R} \to [-1, +1]$$
$$tan: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R} \quad cotg: \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

Relazioni e formule:

- $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$ *Formule di addizione*
- $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \operatorname{sen} b$
- $\tan(a \mp b) = \frac{\tan a \mp \tan b}{1 \pm \tan a \cdot \tan b}$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ *Formule di duplicazione*
- $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$
- $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ *Formule di bisezione*
- $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$
- $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ *per il calcolo di integrali*
- $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
- $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ *Archi associati*
- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Formule parametriche:

- $t = \tan\frac{x}{2}$
- $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$
- $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Formule di Werner:

- $\operatorname{sen} a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)]$
- $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

Formule di Prostaferesi:

- $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen}\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a-b}{2}$
- $\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen}\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{a+b}{2}$
- $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a-b}{2}$
- $\cos a - \cos b = -2\operatorname{sen}\frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{a-b}{2}$

Funzioni iperboliche

$$senh: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad cosh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$tanh: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad coth: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}; \quad \coth x = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x} - 1}$$

Relazioni e formule:
- $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\cosh x \geq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\cosh x > \operatorname{senh} x$; $\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Funzioni

Una funzione è un tipo di relazione che associa ad un elemento di un insieme di partenza (dominio) uno ed uno solo elemento di un insieme di arrivo (codominio). Geometricamente, una retta verticale che interseca il grafico di f lo interseca in un unico punto: non esistono due ascisse con la stessa ordinata.
Siano X, Y insiemi e f una relazione da X a Y, si dice che f è una funzione da $X \to Y$ se:
$\forall x \in X \;\; \exists\, y \in Y \mid (x, y) \in f$ e anche $\forall x \in X \;\; \forall y_1, y_2 \in Y, \;\; [(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f] \implies y_1 = y_2$
È equivalente la definizione: $\forall x \in X, \; \exists!\, y \in Y \; : \; (x, y) \in f$.

Se $f: X \to Y$, X è dominio di f e si indica con $dom\, f$, allo stesso modo Y è codominio di f. Mentre il dominio è individuato univocamente, il codominio può variare. Si definisce poi un sottoinsieme del codominio, l'insieme delle immagini di f, ovvero l'insieme di tutti i valori assunti da f, come $Im\, f = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X : y = f(x)\}$.

Funzione identità

Sia X un insieme, si dice identità, o funzione identica, in X, la funzione $id_x: X \to X$, $id_x(x) = x$.

Funzione composta

Siano $f: X \to Y$ e $g: W \to Z$ tali che $f(x) \subseteq W$, si dice composizione di f e g, o anche funzione composta di f e g, la funzione $g \circ f: X \to Z$ tale che $\forall x \in X, (g \circ f)(x) = g(f(x))$.
La composizione di funzioni è possibile solo se le immagini della prima funzione appartengono al dominio della seconda.

Funzione iniettiva

Sia $f: X \to Y$, si dice che f è iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in X, \;\; f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$, e si scrive $f: X \underset{1-1}{\longrightarrow} Y$.
Una funzione iniettiva associa ad ogni elemento del dominio un solo elemento del codominio. Geometricamente, una retta orizzontale che interseca il grafico di f lo interseca in un unico punto: non esistono due ascisse con la stessa ordinata. La funzione composta di due funzioni iniettive è un'altra funzione iniettiva.
Una funzione strettamente monotona è sempre iniettiva.

Funzione suriettiva

Sia $f: X \rightarrow Y$, si dice che f è suriettiva su Y se il codominio coincide con l'insieme delle immagini, ovvero $f(X) = Y$, e si scrive $f: X \overset{su}{\rightarrow} Y$. È importante notare che ogni funzione è suriettiva in un apposito codominio. Una funzione che sia iniettiva e suriettiva è detta biunivoca o biiettiva.

La funzione composta di due funzioni suriettive è un'altra funzione suriettiva (sull'insieme di arrivo) solo se il codominio della prima funzione coincide con il dominio della seconda.

Funzione inversa

Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione sia invertibile è che essa sia biunivoca. Condizione sufficiente affinché una funzione sia invertibile è che essa sia strettamente monotona.
Sia $f: X \underset{1-1}{\longrightarrow} Y$, si dice funzione inversa di f la funzione $f^{-1}: f(x) \rightarrow X$ tale che $f^{-1} = \{\, (f(x), x) \mid x \in X\}$.
La funzione inversa è simmetrica della funzione di partenza per simmetria assiale rispetto a $y = x$.
La funzione composta $f^{-1}\ o\ f$, ovvero $f^{-1}(f(x))$, costituisce un'identità.

Intervallo

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$, I è un intervallo se ha più di un elemento e $\forall x, y \in I \mid x < y\ ,\ z \in \mathbb{R} \mid x < z < y \Rightarrow z \in I$, ovvero un qualsiasi insieme senza vuoti. Un intervallo che contenga un solo elemento è detto degenere. Un intervallo è individuato dai suoi estremi, e può essere limitato o illimitato. Si impiegano le notazioni seguenti $[a, b] = \{a \leq x \leq b \mid x \in \mathbb{R}\}$; $]a, b[= \{a < x < b \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Funzioni pari e dispari

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, A si dice un insieme simmetrico rispetto all'origine se $\forall x \in A\ , -x \in A$, ovvero $x \in A \Leftrightarrow -x \in A$.

Sia A simmetrico rispetto all'origine e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$,

- f è pari $\Leftrightarrow$ $f(-x) = f(x)$
- f è dispari $\Leftrightarrow$ $f(-x) = -f(x)$

Se f è dispari e $0 \in A$ (dominio di f), allora $f(0) = 0$.

Funzioni periodiche

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $T \in \mathbb{R}_*^+$, si dice che l'insieme A è T-periodico se $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in A \Leftrightarrow x + T \in A$.

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $T \in \mathbb{R}_*^+$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, f è T-periodica, o periodica di periodo T, se $\forall x \in A,\ f(x + T) = f(x)$.

Funzioni crescenti e decrescenti

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$; $f: A \rightarrow \mathbb{R}$; $\forall x_1, x_2 \in A$.

$x_1 \leq x_x \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ *f è monotona crescente*
$x_1 < x_x \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ *f è monotona strettamente crescente*
$x_1 \leq x_x \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ *f è monotona decrescente*
$x_1 < x_x \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ *f è monotona strettamente decrescente*

La funzione composta di due funzioni monotone è ancora monotona, ed è crescente se le due funzioni sono dello stesso tipo (entrambe crescenti/decrescenti), mentre è decrescente se le due funzioni sono di tipo diverso.

Se una funzione è strettamente monotona, è iniettiva, quindi invertibile, e la sua inversa è strettamente monotona dello stesso tipo.

Continuità

Funzioni continue

Siano $A \subseteq \mathbb{R}; f: A \to \mathbb{R}; c \in A$, si dice che f è continua in c se, per ogni successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A e convergente in c, la successione trasformata secondo f converge a $f(c)$, ovvero $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}} \to f(c)$. Una funzione è propriamente continua quando è continua in tutto il suo dominio.

Data una funzione definita in un intervallo. Se questa è strettamente monotona, e quindi iniettiva, se ne deduce la continuità e viceversa.

Si dice che f è discontinua se esiste una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A e convergente in c tale che il limite di $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$, se esiste, non tende a $f(c)$. Una discontinuità in un punto si traduce graficamente in un "buco" nell'insieme immagine della funzione.

Con $C(A, \mathbb{R})$ si indica l'insieme delle funzioni continue da $A \subseteq \mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}$. Questo è uno spazio vettoriale di dimensione infinita, infatti è sempre continua la somma di due funzioni (operazione binaria) e la moltiplicazione di una funzione per uno scalare.

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq A$ $f: A \to \mathbb{R}$, $c \in B$, se f è continua in c, allora è continua in c anche considerando ogni qualsiasi restrizione B del suo dominio A.

Intorno

Sia $c \in \mathbb{R}$, si dice intorno di c qualunque intervallo chiuso $[c - r, c + r]$ simmetrico rispetto a c, con $r \in \mathbb{R}^+$.

Un sottoinsieme U di $\mathbb{R}$ è un intorno di c se e solo $\exists\, r \in \mathbb{R} \mid x \in U \iff |x - c| \leq r$.
Quindi U è formato da tutti e soli i punti che distano da c al massimo r.

Si dice intorno di $+\infty$ ogni insieme del tipo $[M, +\infty[$ e si dice intorno di $-\infty$ ogni insieme del tipo $]-\infty, M]$ con $M \in \mathbb{R}$.

*Teorema: località della continuità

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}; f: A \to \mathbb{R}; g: B \to \mathbb{R}; c \in A \cap B$. Se esiste un intorno I di c tale che $A \cap I = B \cap I$ e $\forall x \in A \cap I,\ f(x) = g(x)$, allora f è continua in c se e solo se g è continua in c.

Se $I \subseteq A \cap B$ è un intervallo e $\forall x \in I, f(x) = g(x)$, allora f è continua in I se e solo anche g è continua.

Dimostrazione: supponendo f continua in c, anche g deve essere continua in c. Sia$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in B convergente a c, allora definitivamente $a_n \in I$, quindi definitivamente $a_n \in B \cap I = A \cap I$. Modificando opportunamente i primi termini di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si può costruire una successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A che coincide definitivamente con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Allora si ha che $c_n \to c$, quindi $f(c_n) \to f(c)$ perché è continua, quindi definitivamente $c_n = a_n$, ovvero definitivamente $f(a_n) = g(a_n)$, perciò $g(a_n) \to f(c) = g(c)$, quindi g è continua in c.

*Teorema: caratterizzazione della continuità

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$; $f: A \to \mathbb{R}$; $c \in A$, sono equivalenti:
- f è continua in c
- per ogni intorno U di $f(c)$ esiste un intorno V_U di c tale che $\forall x \in A \cap V_U, f(x) \in V_U$
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+,\ \exists\, \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+ : \forall x \in A \ \text{ t.c. } \ |x - c| \leq \delta_\varepsilon, \ \ |f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$

Dimostrazione: i punti 2 e 3 sono equivalenti, si dimostra che 1 implica 3, ovvero che $\overline{3}$ implica $\overline{1}$.
Quindi $\exists\, \bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}_*^+$ t.c. $\forall \delta \in \mathbb{R}_*^+,\ \exists\, x_\delta \in A \mid |x_\delta - c| \leq \delta : |f(x) - f(c)| > \bar{\varepsilon}$.
Posto $\delta = \frac{1}{n}$, considerando la successione $(a_n = x_{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in A$, $|a_n - c| = \left|x_{\frac{1}{n}} - c\right| \leq \frac{1}{n}$, quindi $|a_n - c| \to 0$ ovvero $a_n \to c$.
Inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f(a_n) - f(c)| = \left|f\left(x_{\frac{1}{n}}\right) - f(c)\right| > \bar{\varepsilon}$, quindi non è vero che $f(a_n) \to f(c)$.
Si dimostra, poi, che 3 implica 1.
Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in A convergente a c, allora $\forall \eta \in \mathbb{R}_*^+\ \exists\, n_\eta \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_\eta, |a_n - c| \leq \eta$. Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$, se $\eta = \delta_\varepsilon$, se $n \geq \delta_\varepsilon$ allora $|a_n - c| \leq \delta_\varepsilon$, quindi $|f(a_n) - f(c)| \leq \varepsilon$ e quindi $f(a_n) \to f(c)$.

*Teorema: esistenza degli zeri

Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, se f è continua e $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $\exists\, c \in [a, b] \mid f(c) = 0$. (*esiste almeno un* c)

Dimostrazione: dato l'intervallo limitato e chiuso $[a, b]$, questo verrà ridotto continuamente della metà fino a che lo zero della funzione non coincide con il punto medio di una frazione di intervallo considerata. Posto $a_0 = a, b_0 = b, c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$, si sceglie $[a_0, c_0]$ oppure $[c_0, b_0]$ a seconda di dove la funzione assume valori di segno opposto. Se $f(c_0) = 0$ la tesi è verificata, altrimenti si continua definendo i nuovi estremi come $a_1 = a_0$ e $b_0 = c_0$ oppure $a_1 = c_0$ e $b_1 = b_0$ a seconda di dove la funzione assume valori di segno opposto.
Si ripete il procedimento fino a che la funzione si annulla nel punto medio dell'intervallo. Se questo è infinito, si definiscono due successioni $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tali che: $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq a_{n+1}$(crescente) e $b_n \geq b_{n+1}$(decrescente); $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2^n}$; $f(a_n) < 0 < f(b_n)$. Esse sono limitate, infatti $a \leq a_n < b_n \leq b$, quindi hanno limite reale. $\lim_{n \to +\infty} a_n = c$, quindi se $\forall n \in \mathbb{N}$, $a < a_n < b$, per il teorema del confronto $a \leq c \leq b$. Inoltre, anche $\lim_{n \to +\infty} b_n = c$, perché $\lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} a_n + \frac{b - a}{2^n} = c$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) < 0$, ma siccome f è continua, $f(c) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n) \leq 0$. Lo stesso per b_n, ovvero $f(b_n) < 0$ e $f(c) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n) \geq 0$.
Dal momento che $f(a_n) \to f(c)$ e anche $f(b_n) \to f(c)$, $f(c) = 0$. Il risultato ottenuto dipende dalla completezza del campo $\mathbb{R}$.

Teorema dei valori intermedi

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$; $f: I \to \mathbb{R}$. Se f è continua e se I è un intervallo, allora la funzione è limitata ed assume valori unicamente in $f(I)$, che è un intervallo (immagine della funzione), eventualmente degenere (ovvero è solo un punto, se la funzione è costante).

Teorema di Weierstrass

Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Se f è continua allora ha massimo e minimo all'interno dell'intervallo limitato e chiuso $[a, b]$.
Massimo e minimo della funzione sono valori dell'insieme immagine, quindi f è limitata.

Teorema: proprietà algebriche delle funzioni continue

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$; $f, g: A \to \mathbb{R}$; $c \in A$; f e g continue nel punto c:
- la funzione somma $f + g$ è continua in c;
- la funzione prodotto $f \cdot g$ è continua in c;
- se $g(x) \neq 0\ \forall x \in A$, $\frac{f}{g}$ è continua in c.

*Teorema: permanenza del segno per funzioni continue

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$; $f: A \to \mathbb{R}$; $c \in A$; $\alpha \in \mathbb{R}$; f continua in c.
$f(c) \gtrless \alpha \implies \exists\, W$ intorno di c t.c. $\forall x \in A \cap W,\ f(x) \gtrless \alpha$.

Dimostrazione $f(c) > 0$: preso l'intorno $\left[\frac{1}{2}f(c), \frac{3}{2}f(c)\right]$ di $f(c)$ incluso in $\mathbb{R}^+_*$, f è continua, quindi, per il teorema di caratterizzazione della continuità, esiste un intorno W di c tale che $x \in A \cap W \implies f(x) \in \left[\frac{1}{2}f(c), \frac{3}{2}f(c)\right]$, quindi $f(c) > 0$.

*Teorema: continuità della funzione composta

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$; $f: A \to \mathbb{R}$; $g: B \to \mathbb{R}$; $c \in A$; $f(A) \subseteq B$. Se f è continua in c e g è continua in $f(c)$, allora la funzione composta $g \circ f$ è continua in c.

Dimostrazione: sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in A convergente in c. Poiché f è continua in c, $f(a_n) \to f(c)$. $f(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in B, dato che B è l'insieme immagine di f. Per la continuità di g in $f(c)$, $g(f(a_n)) \to g(f(c))$, cioè $(g \circ f)(a_n) \to (g \circ f)(c)$ che è la condizione di continuità.

Teorema

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$; $f: I \to \mathbb{R}$. Se I è un intervallo, e f è continua e strettamente monotona (quindi iniettiva, condizione per l'esistenza dell'inversa) allora anche la sua inversa è continua.

Limiti

Limite di una funzione

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$, anche forato; $f: I \to \mathbb{R}$; $c \in [\inf I, \sup I]$; $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si dice che $f(x)$ ha limite ℓ, per $x \to c$, ovvero $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ se, comunque presa una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A - \{c\}$, convergente a c, la successione trasformata $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente a ℓ.

Sono equivalenti:
- $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$
- Per ogni intorno U di ℓ, esiste un intorno V_U di c tale che $\forall x \in V_U \cap A - \{c\}, f(x) \in U$

Il limite, per $x \to c$, di una funzione continua in c è definito come $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Questo può anche essere usato per verificare la continuità della funzione in un punto.

Non è richiesto che c appartenga propriamente al dominio della funzione.

Note:
- se una costante moltiplicativa tende ad un valore preciso (non 0), la si può sostituire con tale valore.
- se una costante moltiplicativa tende ad un valore preciso, la si può portare fuori dall'operatore di limite
- può risultare utile cambiare variabile, ponendo $y = x - \ell$, oppure y uguale ad una funzione, aggiustando opportunamente il limite.
- la gerarchia di infiniti (composta di potenza ed esponenziale, fattoriale, esponenziale, potenza, logaritmo) si applica, risolvendole, anche alle forme indeterminate del tipo $\frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty$.
- ogni polinomio si comporta come il suo termine di grado più alto (per limite a ∞), o come il suo termine di grado più basso, incluso il termine noto (per limite a 0).

Teoremi sul limite di funzione

- Unicità del limite: se $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ e anche $\lim_{x\to c} f(x) = m$ con $\ell, m \in \mathbb{R}$, allora $\ell = m$
- Teorema del confronto: se $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$; $\lim_{x\to c} g(x) = m$; $\ell, m \in \overline{\mathbb{R}}$, e se $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, allora $\ell \leq m$

Teorema della permanenza del segno

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$, anche forato; $f: I \to \mathbb{R}$; $c \in [\inf I, \sup I]$; $\ell, m \in \overline{\mathbb{R}}$; $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$,
se $\ell \gtrless m$, allora esiste un opportuno intorno V di c tale che $\forall x \in V \cap I - \{c\}$, $f(x) \gtrless m$.

Teorema

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$, anche forato; $f: I \to \mathbb{R}$; $c \in [\inf I, \sup I]$; $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$; $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$:

- $\ell \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ esiste un intorno V di c tale che $f(V \cap I)$ è limitato;
- $\ell = +\infty \Longrightarrow$ esiste un intorno V di c tale che $f(V \cap I)$ è inferiormente limitato, e per ogni intorno U di c, $f(U \cap I)$ è superiormente illimitato;
- $\ell = -\infty \Longrightarrow$ esiste un intorno V di c tale che $f(V \cap I)$ è superiormente limitato, e per ogni intorno U di c, $f(U \cap I)$ è inferiormente illimitato.

*Teorema: limite di una restrizione

Siano I, J due intervalli di $\mathbb{R}$, anche forati, tali che $I \subseteq J$; inoltre sia $f: J \to \mathbb{R}$, $c \in [\inf I, \sup I]$.
Se esiste $\lim_{x\to c} f(x)$, allora esiste anche $\lim_{x\to c} f|_I(x)$ e questi coincidono. L'implicazione non è valida nel senso opposto.

Teorema: limite di una composizione

Siano I, J due intervalli di $\mathbb{R}$, anche forati; $f: J \to \mathbb{R}$; $g: I \to \mathbb{R}$; $c \in [\inf J, \sup J]$; $\ell, m \in \overline{\mathbb{R}}$; $f(J) \subseteq I$.
Se:
- $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$;
- $\lim_{y\to \ell} g(x) = m$;
- $\ell \in I$ e g è continua in ℓ, oppure $\exists\ U$ intorno di c t.c. $\forall x \in U \cap J - \{c\}, f(x) \neq \ell$ $(\ell = \pm\infty, \ell \notin I)$

Allora $\lim_{x\to \ell} (g \circ f)(x) = m$.

Limite da destra e da sinistra

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$, anche forato; $f: I \to \mathbb{R}$; $c \in \mathbb{R}$:

- Se $c \in [\inf I, \sup I[$ ed esiste $\lim_{x\to c} f_{| I \cap]c,+\infty[}(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, si ha che $f(x)$ ammette limite destro uguale a ℓ per $x \to c$, ovvero $\lim_{x\to c^+} f(x) = \ell$.

- Se $c \in \,]\inf I\,,\sup I]$ ed esiste $\lim_{x\to c} f_{|\,I\,\cap\,]-\infty,c\,[}(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, si ha che $f(x)$ ammette limite sinistro uguale a ℓ per $x \to c$, ovvero $\lim_{x\to c^-} f(x) = \ell$.

Sono equivalenti:
- $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$
- $\lim_{x\to c+} f(x) = \ell$ e $\lim_{x\to c-} f(x) = \ell$

Per una funzione continua in un punto, $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c+} f(x) = \lim_{x\to c-} f(x) = f(c) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Il limite da destra e da sinistra sono limiti normali, calcolati su due diverse restrizioni del dominio della funzione.

Le notazioni $c \in [\inf I\,,\sup I\,[$ e $c \in \,]\inf I\,,\sup I]$ specificano che il limite da destra o da sinistra può essere calcolato solo se esistono valori del dominio della funzione rispettivamente a destra o a sinistra di c. Come per ogni limite normale, non è richiesto che c appartenga propriamente al dominio della funzione. Se c non è incluso nel dominio della funzione, non vale la definizione di continuità $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Il limite può non esistere, oppure rappresentare un asintoto, oppure assumere valori diversi da destra e da sinistra.

Nei casi particolari in cui $c = \inf I$ oppure $c = \sup I$, rispettivamente $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c} f(x)$ e $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c} f(x)$.

Teorema sul limite di funzioni monotone

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$, anche forato; $f\colon I \to \mathbb{R}$ con f monotona:

- Se $c \in \,]\inf I\,,\sup I]$, allora si ha che $\lim_{x\to c-} f(x) = \begin{cases} \sup f(\,I \cap\,]-\infty,\ c\,[\,) \\ \inf f\,(\,I \cap\,]-\infty,\ c\,[\,) \end{cases}$

- Se $c \in [\inf I\,,\sup I\,[$, allora si ha che $\lim_{x\to c+} f(x) = \begin{cases} \inf f\,(\,I \cap\,]\,c,+\infty\,[\,) \\ \sup f\,(\,I \cap\,]\,c,+\infty\,[\,) \end{cases}$

Limiti notevoli

- $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\qquad \ln(1+x) \sim x$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ $\qquad e^x - 1 \sim x$
- $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ $\qquad a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ $\qquad \operatorname{sen} x \sim x$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\qquad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x}{x} = 1$ $\qquad \operatorname{senh} x \sim x$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\qquad \cosh x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^k-1}{x} = k$ $\qquad (1+x)^k - 1 \sim k \cdot x$

Derivate

Rapporto incrementale

Siano I un intervallo di ℝ, anche forato; $f: I \to \mathbb{R}$; $c, d \in$ I con $c \neq d$, si chiama rapporto incrementale di f fra i punti c e d il numero $R_f(d,c) = \frac{f(d)-f(c)}{d-c}$. Il rapporto incrementale può essere positivo o negativo.

Geometricamente, il rapporto incrementale fra due punti fornisce il coefficiente angolare, quindi la pendenza, quindi la tangente dell'angolo con l'asse x positivo, della retta che li congiunge.

In generale, se f è derivabile $n-1$ volte (con $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$), e la sua derivata $(n-1)$esima è ancora derivabile in c, allora si dice che f è derivabile n volte in c, e la sua n-esima derivata ha ordine di derivazione pari a n.

Derivata

Siano I un intervallo di ℝ, anche forato; $f: I \to \mathbb{R}$; $c \in$ I.
Si dice che f è derivabile in c quando esiste ed è reale il limite del rapporto incrementale definito come $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ oppure $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$. Il limite così definito si chiama derivata di f in c e si indica con $f'(c)$, $D[f(c)]$, $\frac{df(x)|\, x=c}{dx}$.

Funzione derivabile

Siano I un intervallo di ℝ, anche forato; $f: I \to \mathbb{R}$; $A \subseteq I$.
f è detta "derivabile in A" se $\forall c \in A$, f è derivabile in c; f è detta "derivabile" se $\forall c \in I$, f è derivabile in c.

La funzione derivata fa corrispondere, ad ogni punto del dominio di una funzione, il valore della derivata della funzione stessa in quel punto.

*Teorema: caratterizzazione delle funzioni derivabili

Siano I un intervallo di ℝ; $f: I \to \mathbb{R}$; $c \in$ I. Sono equivalenti:
- f è derivabile in c;
- $\exists\, \ell \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = f(c) + \ell \cdot (x-c) + o(x-c)$ per $x \to c$;
- $\exists\, \varphi: I \to \mathbb{R}$ continua in c e tale che $\forall x \in I,\ f(x) = f(c) + \varphi(x) \cdot (x-c)$;

Se tali affermazioni sono vere, allora $f'(c) = \ell = \varphi(c)$.

La notazione $o(x-c)$, al punto 2, fornisce informazioni sulla differenza fra $f(x)$ ed il polinomio di primo grado $f(c) + \ell \cdot (x-c)$, affermando che questa è molto piccola (e tende a 0 più velocemente di $x-c$), per $x \to c$. In simboli: $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x) - f(c) - \ell\cdot(x-c)}{x-c} = 0$.

Dal punto 3, $f(x) = f(c) + \varphi(x) \cdot (x-c) = f(c) + \varphi(c) \cdot (x-c) + [\varphi(x) - \varphi(c)] \cdot (x-c)$, dove l'ultimo termine è uguale a $o(x-c)$, perché φ è continua in c.
Quindi, $f(x) = f(c) + \varphi(c) \cdot (x-c) + o(x-c)$, che, ponendo la costante $\varphi(c)$ uguale a ℓ, è la definizione del punto 2.

Dal punto 2, $\ell \cdot (x-c) + o(x-c) = \ell \cdot (x-c) + o(1) \cdot (x-c) = [\ell + o(1)] \cdot (x-c)$, che risulta uguale a $\varphi(x) \cdot (x-c)$ con $\varphi(x) \to \ell$ per $x \to c$.

Dal punto 2 si conclude l'esistenza (ed unicità) di una retta tangente al grafico della funzione nel punto c, ovvero quella retta, passante per $(c, f(c))$ e di pendenza $\ell = f'(c)$, che meglio di ogni altra approssima l'andamento della funzione nel punto c. L'equazione della retta tangente è quindi $f(x) - f(c) = f'(c) \cdot (x-c)$.

Dimostrazione: $1 \Longrightarrow 2$. Supposta vera la proposizione 1, si ha che $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$, cioè $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) + o(1)$ per $x \to c$. Quindi $f(x) - f(c) = f'(c) \cdot (x-c) + o(1) \cdot (x-c) = f'(c)(x-c) + o(x-c)$. Verificato.

$2 \Longrightarrow 1$. Se $f(x) = f(c) + \ell \cdot (x-c) + o(x-c)$ per $x \to c$, allora per $x \to c$, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{f(c)+\ell\cdot(x-c)+o(x-c)-f(c)}{x-c} = \frac{\ell\cdot(x-c)+o(x-c)}{x-c} = \ell + \frac{o(x-c)}{x-c} = \ell = f'(c)$. Verificato.

*Teorema: continuità delle funzioni derivabili

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$; $f: I \to \mathbb{R}$; $c \in$ I. Se f è derivabile in c, allora f è continua in c. Non è vero il contrario.

Dimostrazione: se f è derivabile, allora vale il punto 3 del Teorema sulla caratterizzazione delle funzioni derivabili, quindi $\exists\ \varphi: I \to \mathbb{R}$ continua in c e tale che $\forall x \in I,\ f(x) = f(c) + \varphi(x) \cdot (x-c)$. In particolare, $f(c) + \varphi(x) \cdot (x-c)$ è una funzione di x continua in c, quindi anche $f(x)$ è continua in c.

*Teorema: algebra delle derivate

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$; $f: I \to \mathbb{R}$; $g: I \to \mathbb{R}$; $c \in$ I; $k \in \mathbb{R}^*$; f e g derivabili in c.

- $f + g$ è derivabile in c, e $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$
- $k \cdot f$ è derivabile in c, e $(k \cdot f)'(c) = k \cdot f'(c)$
- $f \cdot g$ è derivabile in c, e $(f \cdot g)'(c) = f'(c) \cdot g(c) + f(c) \cdot g'(c)$
- Se $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$, allora $\frac{1}{g}$ è derivabile in c, e $\left(\frac{1}{g}\right)'(c) = \frac{-g'(c)}{[g(x)]^2}$
- Se $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$, allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in c, e $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)\cdot g(c) - f(c)\cdot g'(c)}{[g(x)]^2}$

Se una funzione h è ottenuta mediante composizione algebrica delle funzioni derivabili f e g, anche h è derivabile. Se f o g non sono derivabili, non si può trarre alcuna conclusione.

*Teorema: derivata di una composizione

Siano I, J due intervalli di $\mathbb{R}$; $f: I \to \mathbb{R}$; $g: J \to \mathbb{R}$; $c \in$ I; $f(I) \subseteq J$. Se f è derivabile in c, e g è derivabile in $f(c)$, allora $g\ o\ f$ è derivabile in c e $(g\ o\ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$.

Dimostrazione: per il terzo punto del teorema di caratterizzazione delle funzioni derivabili, $\exists\ \varphi_f: I \to \mathbb{R}$ continua in c e tale che $\forall x \in I,\ f(x) = f(c) + \varphi_f(x) \cdot (x-c)$, con $\varphi_f(c) = f'(c)$. Allo stesso modo, $\exists\ \varphi_g: J \to \mathbb{R}$ continua in c e tale che $\forall y \in J,\ g(y) = g(f(c)) + \varphi_g(y) \cdot (y - f(c))$, con $\varphi_g(c) = g'f((c))$.

Dallo stesso teorema si ha che $(g\ o\ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\big(f(c)\big) + \varphi_g\big(f(x)\big) \cdot \big(f(x) - f(c)\big) = (g\ o\ f)(c) + \varphi_g\big(f(x)\big) \cdot [f(c) + \varphi_f(x) \cdot (x-c) - f(c)] = (g\ o\ f)(c) + \varphi_g\big(f(x)\big) \cdot \varphi_f(x) \cdot (x-c)$. Questo assicura che la funzione composta sia derivabile se $\varphi_g\big(f(x)\big) \cdot \varphi_f(x) \cdot (x-c)$ è continua: φ_g è continua in $f(c)$, f è continua in c, quindi $f(x) = \varphi_g\big(f(x)\big) \cdot \varphi_f(x)$ è continua in c. Quindi, per lo stesso teorema, $(g\ o\ f)'^{(c)} = \varphi_g\big(f(c)\big) \cdot \varphi_f(c) = g'(f(x)) \cdot f'(c)$.

Teorema: derivata della funzione inversa

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$; $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona; $c \in$ I.
Se f è derivabile in c e $f'(c) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile in $f(c)$: $(f^{-1})'\big(f(c)\big) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(f(c)))}$.

Infatti, se g è funzione inversa di f, $g\big(f(c)\big) = c$, quindi $g'\big(f(c)\big) \cdot f'(c) = 1$, quindi $g'\big(f(c)\big) = \frac{1}{f'(c)}$.

Teorema: test di monotonia

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$; $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I e derivabile in $int(I)$.

- f è crescente $\iff \forall x \in int(I),\ f'(x) \geq 0$
- f è decrescente $\iff \forall x \in int(I),\ f'(x) \leq 0$

Il teorema è valido solo per funzioni definite e continue in un intervallo.

La dimostrazione è una conseguenza del teorema di Lagrange.

Se la derivata di una funzione in un punto è nulla, la tangente al grafico è orizzontale. Se la derivata è nulla in ogni punto, la funzione è costante (una retta orizzontale).

Teorema: test di monotonia stretta

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$; $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I e derivabile in $int(I)$.

- $\forall x \in int(I),\ f'(x) > 0 \implies f$ è strettamente crescente
- $\forall x \in int(I),\ f'(x) < 0 \implies f$ è strettamente decrescente

Massimi, minimi e punti estremanti

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$; $f: I \to \mathbb{R}$; $c \in I$.

- c è punto di massimo locale o relativo se, $\forall x$ appartenente ad un opportuno intorno di c, $f(x) \leq f(c)$;
  $\exists\, \delta \in \mathbb{R}^+_* :\ \forall x \in I \cap [c-\delta, c+\delta],\ f(x) \leq f(c)$. $f(c)$ è massimo locale o relativo.
- c è punto di minimo locale o relativo se, $\forall x$ appartenente ad un opportuno intorno di c, $f(x) \geq f(c)$;
  $\exists\, \delta \in \mathbb{R}^+_* :\ \forall x \in I \cap [c-\delta, c+\delta],\ f(x) \geq f(c)$. $f(c)$ è minimo locale o relativo.
- c è punto di massimo locale forte se, $\forall x \neq c$ appartenente ad un opportuno intorno di c, $f(x) < f(c)$;
  $\exists\, \delta \in \mathbb{R}^+_* :\ \forall x \in I \cap [c-\delta, c+\delta] - \{c\},\ f(x) < f(c)$.
- c è punto di minimo locale forte se, $\forall x \neq c$ appartenente ad un opportuno intorno di c, $f(x) > f(c)$;
  $\exists\, \delta \in \mathbb{R}^+_* :\ \forall x \in I \cap [c-\delta, c+\delta] - \{c\},\ f(x) > f(c)$.

Se c è un punto di massimo o minimo relativo, c si dice punto estremante locale, e $f(c)$ è un estremo locale.

I punti di massimo e minimo sono definiti anche dove f non è derivabile.

Notare come massimo e minimo siano elementi dell'immagine della funzione, mentre i punti di massimo e minimo sono elementi del dominio della funzione.

Il massimo o minimo assoluto di una funzione, se esiste, è anche massimo o minimo locale, ma non viceversa.

Ogni punto di massimo o minimo locale forte è anche punto di massimo o minimo locale.

*Teorema di Fermat

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$; $f: I \to \mathbb{R}$; $c \in \text{int}\,(I)$. Se f è derivabile in c, e c è estremante locale per f, allora $f'(c) = 0$.

Questa è solo una condizione necessaria, non vale il viceversa.

c deve essere un punto interno all'intervallo e non può essere un estremo.

Dimostrazione: supponendo c un punto di massimo, $\exists\, \delta \in \mathbb{R}^+_*$ tale che $\forall x \in I \cap [c-\delta, c+\delta]$, $f(x) \leq f(c)$, per la definizione di punto di massimo. Scegliendo δ opportunamente piccolo, si può supporre che l'intervallo sia incluso in I: $[c-\delta, c+\delta] \in I$. Si distinguono due casi. Da sinistra, ovvero se $c \in [c-\delta, c[$, si ha che $\lim\limits_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) \geq 0$, perché il numeratore è negativo, come il denominatore. Da destra, ovvero se $c \in]c, c+\delta]$, si ha che $\lim\limits_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) \leq 0$, perché il numeratore è negativo, mentre il denominatore è positivo. L'unica possibilità è che $f'(c) = 0$.

Teorema di esistenza di un estremante locale (condizione sufficiente)

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$; $f: I \to \mathbb{R}$; $c \in I$; $a, b \in I$ t.c. $a < c < b$; f continua in c e derivabile in $I - \{c\}$.

- se $\forall x \in [a, c[\ \ f'(x) \geq 0$ e $\forall x \in [a, c[\ \ f'(x) \leq 0$, allora c è un punto di massimo locale e $f(c)$ è max;
- se $\forall x \in]c, b]\ \ f'(x) \leq 0$ e $\forall x \in]c, b]\ \ f'(x) \geq 0$, allora c è un punto di minimo locale e $f(c)$ è minimo.

Non è richiesta la derivabilità nel punto c. I punti dove f non è derivabile sono estremanti locali.

*Teorema di Rolle

Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, se f è continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$, derivabile nell'intervallo aperto $]a, b[$, e se $f(a) = f(b)$, allora $\exists\ c \in]a, b[$ t.c. $f'(c) = 0$.

Esiste almeno un punto c dove la funzione ha tangente orizzontale, e $f(c)$ è un massimo o un minimo.

Dimostrazione: si applica il teorema di Weierstrass, di cui f soddisfa le ipotesi, quindi f ammette massimo e minimo appartenenti all'intervallo $[a, b]$. Risulta vera almeno una delle seguenti:

1) $M = m = f(a) = f(b)$, ovvero il massimo e il minimo coincidono con gli estremi, la funzione è costante e ha sempre derivata nulla:
2) $M > f(a) = f(b)$ e quindi $\exists\ c \in [a, b]$ tale che $f(c) = M$, poiché $f(c) \neq f(a)$ e $f(c) \neq f(b)$, si ha che $c \neq a$ e $c \neq b$, quindi $c \in]a, b[$. In tal caso, c verifica il teorema di Fermat, quindi $f'(c) = 0$.
3) $m < f(a) = f(b)$

*Teorema di Lagrange, del valor medio

Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, se f è continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$, derivabile nell'intervallo aperto $]a, b[$, allora $\exists\ c \in]a, b[$ t.c. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Ovvero esiste almeno un punto c tale per cui la retta tangente al grafico della funzione in c sia parallela alla retta che congiunge gli estremi a e b dell'intervallo.

Dal teorema segue che:

1. Se una funzione ha derivata nulla, allora è costante e viceversa;
2. Due funzioni che hanno la stessa derivata prima differiscono per una costante;
3. Se la derivata è positiva (negativa), la funzione è crescente (decrescente).

Dimostrazione: sia $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$, in tal caso g verifica il teorema di Rolle, infatti è la differenza fra f ed un polinomio di primo grado: è quindi continua, derivabile e $g(b) = g(a) = 0$. Per Rolle, $\exists\ c \in]a, b[$ t.c. $g'(c) = 0$. $g'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Teorema sul limite della funzione derivata

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$; $f: I \rightarrow \mathbb{R}$; $c \in I$; f continua in c e derivabile in $I - \{c\}$.
Se esiste $\lim_{x \to c} f'(x) = \ell$, e se $\ell \in \mathbb{R}$, allora f è derivabile in c e $f'(c) = \lim_{x \to c} f'(x)$, ovvero, per definizione, la derivata è continua in c.

La derivabilità può essere studiata attraverso il limite di $f'(x)$, anziché del rapporto incrementale.

Il teorema consente di dedurre i punti c tali per cui f non è derivabile in c, ovvero gli stessi punti dove la derivata prima, $f'(x)$, non è continua. Questo si ha in ogni caso dove $f'(c) \neq \lim_{x \to c} f'(x)$: il limite è divergente e/o i limiti destro e sinistro non coincidono.

Polinomio di Taylor

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$; $f: I \rightarrow \mathbb{R}$; $c \in I$; $n \in \mathbb{N}^*$. Supposto f derivabile $n - 1$ volte in I, e n volte in c, si dice polinomio di Taylor, di ordine n e punto iniziale c, per f il polinomio $T_{c,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \cdot (x - c)^k$.

Il polinomio di Taylor calcolato in c coincide con il valore che la funzione assume in c, ovvero $f(c)$.

Se $n = 1$, si ottiene l'equazione della retta tangente ad f in c, mentre con $n = 2$ della parabola osculatrice.

Il polinomio di Taylor consente di approssimare, con precisione sempre maggiore al crescere di n, il comportamento della funzione attorno al punto c, attraverso un polinomio.

Formula di Taylor con resto nella forma di Peano

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$; $f: I \rightarrow \mathbb{R}$; $c \in I$; $n \in \mathbb{N}^*$. Supposto f derivabile $n - 1$ volte in I, e n volte in c, allora $f(x) = T_{c,n}(x) + o((x - c)^n)$ per $x \rightarrow c$, ovvero $f(x) - T_{c,n}(x) = o((x - c)^n)$, ovvero $\lim_{x \to} \frac{f(x)-T_{c,n}(x)}{(x-c)^n} = 0$.

Formula di Taylor con resto nella forma di Peano

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$; $f: I \rightarrow \mathbb{R}$; $c \in I$; $n \in \mathbb{N}^*$. Supposto f derivabile $n + 1$ volte, allora $\forall x \in I,\ \exists\ d_x$ compreso fra x e c e tale che $f(x) = T_{c,n}(x) + \frac{f^{(n+1)}(d_x)}{(n+1)!} \cdot (x - c)^{n+1}$.

Teorema di De L'Hopital

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$; $f: I \rightarrow \mathbb{R}$; $c \in [\inf I, \sup I]$. Se:
- f e g sono derivabili in $I - \{c\}$;
- $\lim_{x \to} f(x) = \lim_{x \to} g(x) = 0$ oppure $\pm\infty$
- $\forall x \in I - \{c\},\ g'(x) \neq 0$
- $\exists\ \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Allora si ha che $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Integrali

Somma di Riemann

Sia $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$; $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$; $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Si dice somma di Riemann per f, relativa alla scelta di punti $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, il numero reale $S_R = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(c_i)$.

Esiste ed è reale il limite per $n \to +\infty$ della somma di Riemann, e tale limite non dipende dalla scelta di punti, il limite è chiamato integrale di f in $[a,b]$.

Teorema: linearità dell'integrale

Siano $f, g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$; $k \in \mathbb{R}$.

- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$

L'integrale è una trasformazione lineare dallo spazio vettoriale $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$.

Funzione integrale

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo; $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$; $a \in I$. Si dice funzione integrale di f la funzione $F: I \to \mathbb{R}$ tale che $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Primitiva di una funzione

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo; $f, F: I \to \mathbb{R}$. F è una primitiva di f se F è derivabile e $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

Se una funzione è continua ammette infinite primitive, che differiscono per una costante. L'integrale indefinito di una funzione è l'insieme di tutte le sue primitive.

*Teoremi

Siano $f, g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ due funzioni tali che $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq g(x)$, allora $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Sia $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$; $c \in]a,b[$; $\int_a^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Sia $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$; si ha che $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Dimostrazione: $\forall x \in [a,b],\quad -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, quindi $-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$ e quindi $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

*Teorema: media integrale

Sia $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$,

- $\min f \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx \leq \max f$
- $\exists\, c \in [a,b] :\ f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$

Dimostrazione: 1) $\forall x \in [a,b]$, $\min f \leq f(x) \leq \max f$, quindi $\int_a^b \min f \, dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \max f \, dx$, quindi $(b-a)\min f \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)\max f$.
2) f è continua nell'intervallo $[a,b]$, per il teorema dei valori intermedi, anche $Im\, f$ è un intervallo, ovvero $[\min f, \max f]$, quindi $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx \in Im\, f$.

*Teorema fondamentale del calcolo integrale (1)

Sia $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ una funzione derivabile con derivata continua, allora $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

Allo stesso modo, siano $f, G \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, se G è una primitiva di f, allora $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

Dimostrazione: siano $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$; $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ la scomposizione di $[a,b]$; $i = 1,2,\dots,n$. Per il teorema di Lagrange $\exists\, c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tale che $f'(c_i) = \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$, quindi la somma di Riemann è uguale a $S_R = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(c_i) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)$.

*Teorema fondamentale del calcolo integrale (2)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo; $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$. Se $F: I \to \mathbb{R}$ è funzione integrale per f, allora F è una primitiva di f.

Dimostrazione: sia $c \in \{\max I\}$, la dimostrazione è analoga per $\min I$. $\lim_{h\to 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c)$ quindi $\lim_{h\to 0^+} \frac{\int_a^{c+h} f(t)dt \, - \, \int_a^c f(t)dt}{h} = \frac{\int_a^c f(t)dt + \int_c^{c+h} f(t)dt \, - \, \int_a^c f(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \cdot \int_c^{c+h} f(t)dt = f(d_n)$, dove $d_n \in [c, c+h]$ è un valore la cui esistenza è garantita dal teorema della media integrale. Per la continuità di f, se $h \to 0^+$, $\int_c^{c+h} f(t)dt \to f(c)$.

*Teorema: integrazione per parti

Siano $f, g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, con g funzione derivabile con derivata continua; $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di f.

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = [F(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b F(x) \cdot g'(x)dx$$

Dimostrazione: ricordando che $D[F \cdot g] = [F' \cdot g + F \cdot g' = f \cdot g + F \cdot g']$, $\int_a^b (F \text{ o } g)'(x)dx = \int_a^b f(x) \cdot g(x)dx + \int_a^b F(x) \cdot g'^{(x)}dx$, per poi sostituire a $\int_a^b (F \text{ o } g)'^{(x)}dx$, $[F(x) \cdot g(x)]_a^b$.

*Teorema: integrazione per sostituzione

Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ due intervalli; $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$; $\varphi \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$; φ derivabile con derivata continua. Supposto $\varphi(J) \subseteq I$,

- $\forall \alpha, \beta \in J$, $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$
- Se φ è iniettiva, $\forall a, b \in I$, $\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$

Dimostrazione 1: sia $F: I \to \mathbb{R}$ una primitiva di f. Si ha che $\forall t \in J$, $(F \text{ o } \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, quindi $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta (F \text{ o } \varphi)'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} F'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$.

Tecniche di integrazione

Riconduzione ad integrali elementari

$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\int \frac{f'(x)}{f(x)^n} dx = \frac{1}{(n-1) \cdot [f(x)]^{(n-1)}}$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$

$\int \frac{1}{1+(x)^2} dx = arctg(x)$ $\int \frac{1}{1+ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot arctg(x\sqrt{a})$ $\int \frac{1}{a+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot arctg\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$

Se il numeratore è di grado maggiore o uguale al denominatore

Divisione fra polinomi: $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$

Funzioni razionali fratte (tutti i casi)

Fattorizzare il denominatore $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A(x)}{(x+2)(x^2+1)(x+3)^2}$ poi scomporre come $\frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+3)} + \frac{C}{(x+3)^2} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)}$

Integrazione per parti

$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$

Seno e coseno elevati a potenza

Abbassare di grado le potenze pari con $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

Sostituzioni

- $\sqrt[n]{ax+b} = t$ $\sqrt{x} = t$ $\sqrt{\frac{x \pm a}{x \pm b}} = t$
- $\ln x = t$ $a^x = t$
- $\sqrt{a^2 - b^2x^2} \to x = \frac{a}{b} \cdot \operatorname{sen} t$ $\sqrt{a^2 + b^2x^2} \to x = \frac{a}{b} \cdot \tan t$
- $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} \cdot x + t$
- $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx = \int \frac{\tan x}{\tan x + 1} dx \to t = \tan x\,;\ x = \arctan x$

Insiemi

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Ogni elemento di A appartiene a B e viceversa. Due insiemi con gli stessi elementi costituiscono lo stesso insieme: un insieme è definito solo dai suoi elementi.

$$A \times B = \{(a, b) |\ a \in A, b \in B\}$$

Il prodotto cartesiano di due insiemi forma coppie ordinate di elementi, non è commutativo.

Una qualsiasi operazione che fa corrispondere un valore ad una coppia ordinata è detta <u>operazione binaria</u> se:
$\mathbb{N} = \{0,1,\dots\}$ $\quad f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Massimo e minimo

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$; $m \in \mathbb{R}$,

m è <u>massimo</u> di A se:
- $m \in A$
- $\forall x \in A,\ x \leq m$

m è <u>minimo</u> di A se:
- $m \in A$
- $\forall x \in A,\ x \geq m$

max e min, se esistono, sono sempre elementi dell'insieme.
Gli insiemi inclusi in $\mathbb{R}$ che hanno un numero finito di elementi hanno sicuramente un massimo e minimo.
Per gli insiemi infiniti può non essere sempre possibile determinare il massimo o il minimo o entrambi.

Maggiorante e minorante

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$; $m \in \mathbb{R}$,

m è <u>un maggiorante</u> di A se $\forall x \in A, x \leq m$
m è <u>un minorante</u> di A se $\forall x \in A, x \geq m$

Un insieme può non ammettere maggiorante o minorante, ma se ne ammette, questi sono infiniti.

Insiemi limitati

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, A è <u>superiormente (inferiormente) limitato</u> se esistono maggioranti (minoranti) di A, altrimenti A è <u>superiormente (inferiormente) illimitato</u>. A è limitato se è <u>limitato</u> sia superiormente che inferiormente.

*Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, se A è superiormente (inferiormente) limitato, allora l'insieme dei maggioranti (minoranti) di A <u>ammette un minimo</u> (massimo).

Affermare che una funzione $A \to \mathbb{R}$ è limitata (sup. o inf.) equivale a dire che l'insieme delle immagini $f(A)$ è limitato.

Estremo superiore ed inferiore

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, se A è superiormente limitato, si chiama <u>estremo superiore</u> di A ($sup.A$) il minimo dell'insieme dei maggioranti di A. Viceversa, se A è inferiormente limitato, si chiama <u>estremo inferiore</u> di A ($inf.A$) il massimo dell'insieme dei minoranti di A.
Se esiste un massimo (minimo), questo coincide con l'estremo superiore (inferiore) di A.
A è superiormente illimitato $\Leftrightarrow sup.A = +\infty$
A è inferiormente illimitato $\Leftrightarrow inf.A = -\infty$

*Principio di induzione

Sia $p(n)$ una proposizione che ha senso $\forall n \in \mathbb{N}$ (si conosce se è vera o falsa), se $p(0)$ è vera o, alternativamente, $p(1)$ è vera, e, supposta vera $p(n)$, questa è vera anche per $p(n+1)$, si ha che $p(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Relazioni

Siano $A,\ B \neq \emptyset$ si dice relazione $(\mathcal{R})$ da A a B qualunque sottoinsieme di $A \times B$. Se $A = B$, si dice che la relazione è "in / su A".

1. $\mathcal{R}$ è <u>riflessiva</u> se $\forall x \in A,\ x\,\mathcal{R}\,x$ — *ad. Es.: relazione di divisione*
2. $\mathcal{R}$ è <u>simmetrica</u> se $\forall x, y \in A,\ x\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow y\,\mathcal{R}\,x$ — *ad. Es.: "la differenza è pari"*
3. $\mathcal{R}$ è <u>antisimmetrica</u> se $\forall x, y \in A,\ (x\,\mathcal{R}\,y, y\,\mathcal{R}\,x) \Rightarrow x = y$ — *ad. Es.: "m divide n"*
4. $\mathcal{R}$ è <u>transitiva</u> se $\forall x, y, z \in A,\ (x\,\mathcal{R}\,y, y\,\mathcal{R}\,z) \Rightarrow x\,\mathcal{R}\,z$ — *ad. Es.: relazione di inclusione*

Siano A un insieme e $\mathcal{R}$ una relazione,
$\mathcal{R}$ è una <u>relazione di equivalenza</u> se $\mathcal{R}$ è riflessiva, simmetrica e transitiva; $(\leq)$
$\mathcal{R}$ è una <u>relazione d'ordine</u> se $\mathcal{R}$ è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. $(\subseteq)$
$\mathcal{R}$ è una <u>relazione d'ordine totale (o lineare)</u> se è definita su tutto A (per ogni elemento di A)

Numeri reali

Il sistema dei numeri reali è una quadrupla ordinata $(\mathbb{R},\ +,\ \cdot,\ \leq)$ dove $\mathbb{R}$ è un insieme; $+$ e $\cdot$ sono operazioni binarie in $\mathbb{R}$; $\leq$ è una relazione d'ordine in $\mathbb{R}$. Inoltre:

- $\mathbb{R}$ è un <u>campo</u>:
  - C1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x+y)+z = x+(y+z)$ — *associatività*
  - C2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ — *associatività*
  - C3) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x$ — *commutatività*
  - C4) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \cdot y = y \cdot x$ — *commutatività*
  - C5) $\exists\, 0 : \forall x \in \mathbb{R},\ x + 0 = 0 + x = 0$ — *el. neutro additivo*
  - C6) $\exists\, 1 : \forall x \in \mathbb{R},\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ — *el. neutro moltiplicativo*
  - C7) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists -x :\ -x + x = 0$ — *inverso additivo*
  - C8) $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\},\ \exists\, x^{-1} :\ x^{-1} \cdot x = 1$ — *inverso moltiplicativo*
  - C9) $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x(y+z) = xy + xz$ — *distributività*

- $\mathbb{R}$ è <u>ordinato</u>:
  - O0) $\leq$ è una relazione d'ordine totale
  - O1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ — *compatibilità*
  - O2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y, 0 \leq z) \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$ — *compatibilità*

- $\mathbb{R}$ è <u>completo</u>: siano $A, B \in \mathbb{R}$, A e B sono insiemi separati se $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leq b$
  se A e B sono insiemi separati allora $\exists\, c \in \mathbb{R}: \forall a \in A, \forall b \in B \quad a \leq c$ e $c \leq b$

*Non esiste l'inverso moltiplicativo di 0.
*<u>Legge di annullamento del prodotto</u>: $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \lor y = 0$

*Teorema sull'elevamento al quadrato

Siano $x, y \in \mathbb{R}^+$, • $x = y \Leftrightarrow x^2 = y^2$

- $x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$
- $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$

Parte intera di un numero reale

Sia $x \in \mathbb{R}$, si chiama parte intera di x il numero intero $max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$, e lo si indica con $[x]$. Conseguentemente, si ha che $\forall x \in \mathbb{R}, [x] \leq x \leq [x] + 1$.

Disuguaglianza di Bernoulli

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$$

*Radice n-esima in $\mathbb{R}^+$

Siano $\forall a, b \in \mathbb{R}^+;\ n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, esiste ed è unica la radice n-esima di a "b" se $b^n = a$ e quindi $b = \sqrt[n]{a}$.

Valore assoluto

Geometricamente, il valore assoluto di un numero reale è la sua distanza dall'origine, ovvero la lunghezza del segmento che lo separa dall'origine. Una distanza è sempre positiva ed è uguale a 0 solo se il numero scelto è 0. Due punti simmetrici rispetto all'origine hanno lo stesso valore assoluto. Anche il valore assoluto di una differenza è una distanza dall'origine.

Sia $x \in \mathbb{R}$, si definisce il valore assoluto di x il numero reale $|x|$ tale che:

$$|x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ x & se\ x < 0 \end{cases}$$

$$|x - a| \leq r \quad \Leftrightarrow \quad a - r \leq x \leq a + r$$

Sia $x \in \mathbb{R}$, si ha che:
- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x| = |-x|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$

*Siano $x, y \in \mathbb{R}$,
- $|x|^2 = x^2$
- $|xy| = |x| \cdot |y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ *disuguaglianza triangolare*
- $|x + y| \geq ||x| - |y||$