Corso di Analisi Matematica T-A
Docente prof. G. Dore
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2016/2017

Esercizi

---

(1) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \sin\bigl(3e^{x^2-2}\bigr)\,.$$

Calcolare $f'(2)$.

---

(2) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \bigl(\sin(5x)\bigr)^{\sin(7x)}\,.$$

Calcolare $f'\Bigl(\dfrac{3}{7}\,\pi\Bigr)$.

---

(3) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = (x+1)\,\sqrt{|x+2|}\,.$$

Calcolare $f''(x)$ per $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

---

(4) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \bigl(\sin(3x)\cosh(4x)\bigr)^{x^4}\,.$$

Calcolare $f'\Bigl(\dfrac{\pi}{6}\Bigr)$.

---

(5) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \frac{\cos x\,\sin(6x)}{\sin(x^4)}.$$

Calcolare $f'\Bigl(\dfrac{\pi}{4}\Bigr)$.

(6) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = x\, e^{\sqrt{x^2-3}-2}\,.$$

Calcolare $f'\big(\sqrt{7}\,\big)$.

---

(7) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{\sin(5x^2)+10}\,.$$

Calcolare $f'\left(\sqrt{\frac{3}{5}\,\pi}\,\right)$.

---

(8) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = x^6 \log\big(2+\sin(5x)\big)\,.$$

Calcolare $f'(\pi)$.

---

(9) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = e^{x^4} \sin\sqrt{x^2+4x+3}\,.$$

Calcolare $f'(1)$.

---

(10) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \log\frac{|x^2-3x-10|}{x+5}\,.$$

Calcolare $f'(0)$.

---

(11) Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x^4}-\cos(5x^2)}{x^4}\,.$$

---

(12) Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\log\frac{x^2-4x}{x^2-7x}\,.$$

(13) Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\exp\Big(\frac{x-5}{x-9}\Big)-e\right).$$

(14) Calcolare
$$\lim_{x\to1}\frac{\log\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)}{\log(x^2-2x+2)}.$$

(15) Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sinh(4x)\big(\log\big(\sinh(2x)\big)+\log 2-2x\big)}{\log\big(\cos(1/x)\big)\left(\sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^2+1}\,\right)}.$$

(16) Calcolare
$$\lim_{x\to0+}\frac{\sin\sqrt{x^4+3x^6}}{1-\cos\sqrt{x^2+5x^4}}.$$

(17) Calcolare
$$\lim_{x\to0+}\frac{\log\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4x^4}}}{1-\cos(4x)}.$$

(18) Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+4x^2}\right)\left(\exp\Big(\frac{4x}{x^2+2x}\Big)-1\right).$$

(19) Calcolare
$$\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{x^4+6x^2}\ \log\dfrac{x+4}{x+3}\ \log\dfrac{4x+1}{3x+1}}{1-\cos\big(4\sin(3x)\big)}.$$

(20) Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2+x^2+4x^4}\ \sqrt{2+x^{-2}+4x^{-4}}\ \log\frac{x^2+5}{x^2+5x}\ \sin\frac{x+6}{x^2+6}.$$

(21) Ricordando che

$$\sin y = y - \frac{1}{6}\,y^3 + o(y^4)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}\,y^2 + \frac{1}{24}\,y^4 + o(y^5)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{(\cos x - 1)(4+x^2)} + \frac{1}{2x\,\sin x + x^4}\right).$$

---

(22) Ricordando che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{8}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\dfrac{x^3+4}{x^3+2}\,\log\dfrac{4x^3+1}{2x^3+1}}{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+2}-\dfrac{1}{2x}}\,.$$

---

(23) Ricordando che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{8}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{e^2x^2 - 2x^4 + 2x^6} - ex\log(e - x^2/e)}{x\log(1+3x^4)}\,.$$

---

(24) Ricordando che

$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}\,y^2 + \frac{1}{24}\,y^4 + o(y^5)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2\cos x - x^2} - e^2 + 2e^2x^2}{\cos(2x) - e^{-2x^2}}\,.$$

(25) Ricordando che

$$\sqrt[3]{1+y} = 1 + \frac{1}{3}\,y - \frac{1}{9}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+9x^2} - x - 3}{\log\big(3\cosh(5x)\big)\left(\log\left(\dfrac{3+x}{x}\right) - \dfrac{3}{x+5}\right)}\,.$$

---

(26) Ricordando che

$$\sin y = y - \frac{1}{6}\,y^3 + o(y^4)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\sinh y = y + \frac{1}{6}\,y^3 + o(y^4)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}\,y^2 + \frac{1}{6}\,y^3 + o(y^3)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(e^{2x}-1) - \sin(e^{2x}-1)}{\cos(6x)\log(1+2x)\big(\sqrt{1-x^2}-1\big)}\,.$$

---

(27) Ricordando che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{8}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\sqrt[3]{1+y} = 1 + \frac{1}{3}\,y - \frac{1}{9}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}\,y^2 + o(y^3)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x^2+2x^3} - \sqrt[3]{x^3+3x^4}}{\sqrt{x^2-4x^4} - \cos(3x^2)}\,.$$

(28) Ricordando che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{8}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\sqrt[3]{1+y} = 1 + \frac{1}{3}\,y - \frac{1}{9}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} x\big(\sqrt{x^6+4x^4} - \sqrt[3]{x^9+6x^7}\,\big)\,.$$

---

(29) Ricordando che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{8}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} x\log\big(e^{x^2} + e^{3x}\big)\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}}\right)\,.$$

---

(30) Ricordando che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{8}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\sin y = y - \frac{1}{6}\,y^3 + o(y^4)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^6+4x^5+6x^4} - x^3 - 2x^2\big)\left(\sin\frac{x+4}{x^4+1} - \frac{1}{x^3}\right)\exp\big(6+3\log x\big)\,.$$

---

(31) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \arcsin\left(1 - \sqrt{6\,\frac{x-5}{x-6}}\right)\,.$$

Scrivere sotto forma di intervallo o di unione di intervalli il dominio naturale di f .

---

(32) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \log\frac{2x+5}{x+1}\,.$$

Scrivere sotto forma di intervallo o di unione di intervalli il dominio naturale di f .

(33) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4x+3}}{x+2}\,.$$

Scrivere sotto forma di intervallo o di unione di intervalli il dominio naturale di f.

---

(34) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2-2x}{|x-3|}+x}}\,.$$

Scrivere sotto forma di intervallo o unione di intervalli il dominio naturale di f.

---

(35) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \log\bigl(\sqrt{x^2+2x-3}-2x+2\bigr)\,.$$

Scrivere sotto forma di intervallo o di unione di intervalli il dominio naturale di f.

---

(36) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \sqrt{-\log 3 - \log(x+4)}\,.$$

Scrivere sotto forma di intervallo o di unione di intervalli il dominio naturale di f.

---

(37) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \sqrt{\log\left|\frac{3}{x-2}\right|}\,.$$

Scrivere sotto forma di intervallo o di unione di intervalli il dominio naturale di f.

---

(38) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \sqrt{x^2-9} - \frac{1}{\sqrt{5-x}}\,.$$

Scrivere sotto forma di intervallo o di unione di intervalli il dominio naturale di f.

---

(39) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \frac{\log(x^2 - 4x)}{\log(x^2 - 8)}\,.$$

Scrivere sotto forma di intervallo o di unione di intervalli il dominio naturale di f.

---

(40) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \log\big(|x|(x+1)^2 + 4x\big)\,.$$

Scrivere sotto forma di intervallo o di unione di intervalli il dominio naturale di f.

---

(41) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = 4\arctan(x^3 - x^2 - 8x + 12) - \arctan\big(4(x^3 - x^2 - 8x + 12)\big)\,.$$

f è derivabile con derivata

$$f'(x) = \frac{60(3x^2 - 2x - 8)(x^3 - x^2 - 8x + 12)^2}{\big(1 + (x^3 - x^2 - 8x + 12)^2\big)\big(1 + 16(x^3 - x^2 - 8x + 12)^2\big)}\,.$$

Determinare i punti di massimo e di minimo locale per f.

---

(42) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \log(x^2 + 2x) - |x + 4|\,.$$

Determinare i punti di massimo e di minimo locale per f.

---

(43) Sia $f\colon]-\infty, -2/3] \cup [2, +\infty[\to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = (x + 4)\sqrt{3x^2 - 4x - 4}\,.$$

Determinare i punti di massimo e di minimo locale per f.

---

(44) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = x\,e^{-2x^2 + 3x}\,.$$

Determinare gli intervalli in cui f è crescente e quelli in cui è decrescente.

(45) Sia $f\colon]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[\to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \sqrt{2x^2+56} - \sqrt{x^2-4}\,.$$

f è derivabile in $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$ con derivata

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+56}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,.$$

Determinare gli intervalli in cui f è crescente e quelli in cui è decrescente.

---

(46) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \sqrt{x^2-3} - 2x^2\,.$$

Determinare gli intervalli in cui f è crescente.

---

(47) Sia $f\colon]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \frac{|x^2-4x+3|}{x+1}\,.$$

Determinare gli intervalli in cui f è crescente, quelli in cui f è decrescente e i punti di massimo e di minimo locale per f.

---

(48) Sia $f\colon [-4,-1] \cup]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2+5x+4}{x}}\,.$$

Determinare gli intervalli in cui f è crescente, quelli in cui f è decrescente e i punti di massimo e di minimo locale per f.

---

(49) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = |x+1|\,\sqrt{x+2}\,.$$

Determinare gli intervalli in cui f è crescente e quelli in cui f è decrescente e i punti di massimo e di minimo locale per f.

(50) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = |4x^2 - 8x + 3|\, e^x\,.$$

Determinare gli intervalli in cui f è crescente e quelli in cui f è decrescente e i punti di massimo e di minimo locale per f.

---

(51) Calcolare

$$\int_1^4 \frac{x+3}{x(4x+3)}\,dx\,.$$

---

(52) Calcolare

$$\int_1^2 \frac{\log x}{3x(\log^2 x + 4)}\,dx\,.$$

---

(53) Calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{\cos x + 2}\,dx\,.$$

---

(54) Calcolare

$$\int_0^{\pi/6} 2x\,\frac{-2\sin x + 5\cos x}{(5\sin x + 2\cos x)^3}\,dx\,.$$

---

(55) Calcolare

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{-x^2+4}}{x}\,dx\,.$$

---

(56) Calcolare

$$\int_1^2 (x+1)\,\frac{e^x - 3\,e^{-x}}{(e^x + 4 + 3\,e^{-x})^2}\,dx\,.$$

---

(57) Calcolare

$$\int_2^5 \frac{x+3}{x^2+9}\,dx\,.$$

---

(58) Calcolare

$$\int_0^{1/2} (6x^2+2)\,\arcsin x\,dx\,.$$

(59) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{x\sqrt{1+8x^2}}{1+4x^2}\,dx\,.$$

---

(60) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{\cosh x + 4\sinh x}{\cosh x - \sinh x}\,dx\,.$$

Soluzioni

(1) Utilizzando la formula di derivazione di funzione composta, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha

$$f'(x) = \cos\bigl(3e^{x^2-2}\bigr)3e^{x^2-2}2x\,;$$

perciò

$$f'(2) = \cos\bigl(3e^{2^2-2}\bigr)3e^{2^2-2}2\cdot 2 = 12e^2\cos\bigl(3e^2\bigr)\,.$$

(2) Per calcolare la derivata di f è utile riscrivere la formula che la definisce sotto forma di esponenziale; abbiamo quindi

$$f(x) = \exp\bigl(\sin(7x)\log\bigl(\sin(5x)\bigr)\bigr)\,.$$

Perciò, per x appartenente al dominio naturale di tale funzione, si ha

$$f'(x) = \exp\bigl(\sin(7x)\log\bigl(\sin(5x)\bigr)\bigr)\left(7\cos(7x)\log\bigl(\sin(5x)\bigr) + \sin(7x)\,\frac{5\cos(5x)}{\sin(5x)}\right)\,.$$

Da ciò segue

$$\begin{aligned}
f'\Bigl(\frac{3}{7}\,\pi\Bigr) &= \exp\left(\sin(3\pi)\log\left(\sin\Bigl(\frac{15}{7}\,\pi\Bigr)\right)\right)\cdot \\
&\quad\cdot\left(7\cos(3\pi)\log\left(\sin\Bigl(\frac{15}{7}\,\pi\Bigr)\right) + \sin(3\pi)\,\frac{5\cos\bigl(\frac{15}{7}\,\pi\bigr)}{\sin\bigl(\frac{15}{7}\,\pi\bigr)}\right) = \\
&= \exp(0)\left(-7\log\left(\sin\Bigl(\frac{15}{7}\,\pi\Bigr)\right) + 0\right) = \\
&= -7\log\left(\sin\Bigl(\frac{15}{7}\,\pi\Bigr)\right)\,.
\end{aligned}$$

(3) Ricordando che la derivata della funzione valore assoluto, in $\mathbb{R}^*$, è la funzione segno, si ha, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sqrt{|x+2|} + (x+1)\,\frac{1}{2\sqrt{|x+2|}}\,\operatorname{sgn}(x+2) = \frac{2|x+2| + (x+1)\operatorname{sgn}(x+2)}{2\sqrt{|x+2|}} = \\
&= \frac{2(x+2)\operatorname{sgn}(x+2) + (x+1)\operatorname{sgn}(x+2)}{2\sqrt{|x+2|}} = \frac{(3x+5)\operatorname{sgn}(x+2)}{2\sqrt{|x+2|}}\,.
\end{aligned}$$

Dovendo calcolare la derivata seconda di f, cioè la derivata di f', è utile raccogliere nell'espressione di f' le costanti moltiplicative; tra queste comprendiamo anche la funzione segno; infatti ai fini del calcolo delle derivate essa si comporta come una costante, visto che fissato un qualunque punto in cui è derivabile essa è costante in un opportuno intorno di tale punto. Si ha

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x+2)}{2}\,\frac{3x+5}{\sqrt{|x+2|}}\,;$$

perciò, utilizzando la formula di derivazione di un quoziente, si ha

$$f''(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x+2)}{2} \, \frac{3\sqrt{|x+2|} - (3x+5)\,\dfrac{1}{2\sqrt{|x+2|}}\operatorname{sgn}(x+2)}{\left(\sqrt{|x+2|}\,\right)^2} =$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}(x+2)}{2} \, \frac{6|x+2| - (3x+5)\operatorname{sgn}(x+2)}{2|x+2|^{3/2}} =$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}(x+2)}{2} \, \frac{6(x+2)\operatorname{sgn}(x+2) - (3x+5)\operatorname{sgn}(x+2)}{2|x+2|^{3/2}} = \frac{3x+7}{4|x+2|^{3/2}}\,.$$

(4) Riscrivendo f sotto forma di esponenziale in base e si ha

$$f(x) = \exp\big(x^4 \log\big(\sin(3x)\cosh(4x)\big)\big),$$

quindi, per x appartenente al dominio naturale di questa funzione, si ha

$$f'(x) = \exp\big(x^4 \log\big(\sin(3x)\cosh(4x)\big)\big)\cdot$$

$$\cdot\left(4x^3 \log\big(\sin(3x)\cosh(4x)\big) + x^4\,\frac{3\cos(3x)\cosh(4x) + 4\sin(3x)\sinh(4x)}{\sin(3x)\cosh(4x)}\right).$$

Pertanto

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \exp\left(\frac{\pi^4}{6^4}\log\left(\sin\frac{\pi}{2}\,\cosh\frac{2\pi}{3}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(4\,\frac{\pi^3}{6^3}\log\left(\sin\frac{\pi}{2}\,\cosh\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\pi^4}{6^4}\,\frac{3\cos\dfrac{\pi}{2}\,\cosh\dfrac{2\pi}{3} + 4\sin\dfrac{\pi}{2}\,\sinh\dfrac{2\pi}{3}}{\sin\dfrac{\pi}{2}\cosh\dfrac{2\pi}{3}}\right) =$$

$$= \left(\cosh\frac{2\pi}{3}\right)^{\pi^4/6^4}\,\frac{\pi^3}{54}\left(\log\left(\cosh\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6}\,\frac{\sinh\dfrac{2\pi}{3}}{\cosh\dfrac{2\pi}{3}}\right).$$

(5) Si ha, per x appartenente al dominio naturale di f,

$$f'(x) = \frac{\big(-\sin x\,\sin(6x) + 6\cos x\,\cos(6x)\big)\sin(x^4) - \cos x\,\sin(6x)\,4x^3\cos(x^4)}{\sin^2(x^4)}\,,$$

quindi

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{\left(-\sin\dfrac{\pi}{4}\,\sin\dfrac{3\pi}{2} + 6\cos\dfrac{\pi}{4}\,\cos\dfrac{3\pi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi^4}{4^4}\right) - \cos\dfrac{\pi}{4}\,\sin\dfrac{3\pi}{2}\,4\,\dfrac{\pi^3}{4^3}\,\cos\left(\dfrac{\pi^4}{4^4}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi^4}{4^4}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sin\left(\dfrac{\pi^4}{4^4}\right) + \dfrac{\pi^3}{16}\,\cos\left(\dfrac{\pi^4}{4^4}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi^4}{4^4}\right)}\,.$$

(6) $\quad f'\big(\sqrt{7}\big) = \dfrac{9}{2}\,.$

(7) $\quad f'\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}\,\pi}\,\right) = \sqrt{\dfrac{3\pi}{3\pi+20}}\;\dfrac{25+3\pi}{50}\,.$

(8) $\quad f'(\pi) = 6\pi^5\log 2 - \dfrac{5}{2}\,\pi^6\,.$

(9) $\quad f'(1) = 5e\sin\big(2\sqrt{2}\,\big) + \dfrac{3e}{2\sqrt{2}}\,\cos\big(2\sqrt{2}\,\big)\,.$

(10) $\quad f'(0) = \dfrac{1}{10}\,.$

(11) Il limite è nella forma indeterminata $0/0$.

Cerchiamo di calcolarlo riconducendoci a limiti notevoli; a tal fine è opportuno scrivere la funzione di cui dobbiamo calcolare il limite nella forma

$$\frac{\sqrt{1+2x^4}-1+1-\cos(5x^2)}{x^4} = \frac{\sqrt{1+2x^4}-1}{x^4} + \frac{1-\cos(5x^2)}{x^4}\,.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+2x^4}-1}{x^4} &= \frac{\big(\sqrt{1+2x^4}-1\big)\big(\sqrt{1+2x^4}+1\big)}{x^4\big(\sqrt{1+2x^4}+1\big)} = \\ &= \frac{2x^4}{x^4\big(\sqrt{1+2x^4}+1\big)} = \frac{2}{\sqrt{1+2x^4}+1} \xrightarrow[x\to 0]{} 1\,.\end{aligned}$$

Inoltre per $y \to 0$ è $1-\cos y \sim y^2/2$, quindi si ha

$$\frac{1-\cos(5x^2)}{x^4} \sim \frac{(5x^2)^2}{2x^4} = \frac{25}{2}\,.$$

Perciò

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x^4}-\cos(5x^2)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x^4}-1}{x^4} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(5x^2)}{x^4} = 1 + \frac{25}{2} = \frac{27}{2}\,.$$

(12) Visto che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x}{x^2-7x} = 1$, il limite è nella forma indeterminata $0\cdot\infty$. Utilizzando il fatto che, per $y \to 1$, $\log y \sim y-1$, per $x \to +\infty$, si ha

$$\log\frac{x^2-4x}{x^2-7x} \sim \frac{x^2-4x}{x^2-7x} - 1 = \frac{3x}{x^2-7x} \sim \frac{3x}{x^2} = \frac{3}{x}\,;$$

perciò

$$x\,\log\frac{x^2-4x}{x^2-7x} \sim x\,\frac{3}{x} = 3\,.$$

Quindi il limite cercato è uguale a 3.

(13) Il primo fattore ha limite $+\infty$, mentre il secondo ha limite $e^1 - e = 0$, quindi il limite è nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$.

Si ha

$$\exp\Big(\frac{x-5}{x-9}\Big) - e = e\left(\exp\Big(\frac{x-5}{x-9} - 1\Big) - 1\right) = e\left(\exp\Big(\frac{4}{x-9}\Big) - 1\right) ;$$

ma $4/(x-9) \to 0$ per $x \to +\infty$ e $e^y - 1 \sim y$, per $y \to 0$, quindi, per $x \to +\infty$, si ha

$$x\left(\exp\Big(\frac{x-5}{x-9}\Big) - e\right) = ex\left(\exp\Big(\frac{4}{x-9}\Big) - 1\right) \sim \frac{4ex}{x-9} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 4e ;$$

perciò il limite cercato è uguale a $4e$.

(14) Numeratore e denominatore sono funzioni continue che si annullano in 1, quindi il limite è nella forma indeterminata $0/0$.

Trasformiamo il limite in modo che la variabile tenda a 0, ponendo $x = 1 + y$. Otteniamo

$$\frac{\log\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}\right)}{\log(x^2 - 2x + 2)} = \frac{\log\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}\,y\right)\right)}{\log\big((y+1)^2 - 2(y+1) + 2\big)} =$$

$$= \frac{\log\left(\sin\dfrac{\pi}{2}\,\cos\dfrac{\pi y}{2} + \cos\dfrac{\pi}{2}\,\sin\dfrac{\pi y}{2}\right)}{\log(y^2 + 2y + 1 - 2y - 2 + 2)} = \frac{\log\left(\cos\dfrac{\pi y}{2}\right)}{\log(1+y^2)} .$$

Poiché $\log z \sim z - 1$ per $z \to 1$, si ha $\log(1+y^2) \sim y^2$, per $y \to 0$. Analogamente, sempre per $y \to 0$,

$$\log\left(\cos\frac{\pi y}{2}\right) \sim \cos\frac{\pi y}{2} - 1 \sim -\frac{1}{2}\Big(\frac{\pi y}{2}\Big)^2 ,$$

dove si è utilizzato il fatto che $\cos z - 1 \sim -z^2/2$, per $z \to 0$. Perciò, per $y \to 0$, si ha

$$\frac{\log\left(\cos\dfrac{\pi y}{2}\right)}{\log(1+y^2)} \sim \frac{-\dfrac{\pi^2}{8}\,y^2}{y^2} = -\frac{\pi^2}{8} .$$

Quindi il limite cercato è uguale a $-\pi^2/8$.

(15) Esaminiamo il comportamento per $x \to +\infty$ dei vari fattori che compaiono a numeratore.

Poiché $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{4x} = +\infty$ mentre $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-4x} = 0$, si ha, per $x \to +\infty$,

$$\sinh(4x) = \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2} \sim \frac{1}{2}\,e^{4x} .$$

Analogamente $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$, quindi si ha, per $x \to +\infty$,

$$\log\big(\sinh(2x)\big) + \log 2 - 2x = \log\left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\right) + \log 2 - 2x =$$

$$= \log\left(e^{2x}(1 - e^{-4x})\right) - \log 2 + \log 2 - 2x =$$

$$= \log e^{2x} + \log(1 - e^{-4x}) - 2x = \log(1 - e^{-4x}) \sim -e^{-4x} .$$

Perciò il numeratore è equivalente a $-e^{-4x}e^{4x}/2 = -1/2$.

Passiamo ora a studiare il comportamento del denominatore per $x \to +\infty$. In tal caso $1/x \to 0$, perciò $\cos(1/x) \to 1$, quindi abbiamo

$$\log\left(\cos\frac{1}{x}\right) \sim \cos\frac{1}{x} - 1 \sim -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} .$$

Inoltre, raccogliendo il termine dominante, si ottiene, per $x \to +\infty$,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^4+x^2} - \sqrt{x^2+1} &= \sqrt{x^4(1+x^{-2})} - \sqrt{x^2(1+x^{-2})} = \\ &= x^2\sqrt{1+x^{-2}} - |x|\sqrt{1+x^{-2}} \sim x^2\end{aligned}$$

Il denominatore è quindi equivalente a $-\dfrac{1}{2x^2}\,x^2 = -1/2$.

Perciò numeratore e denominatore hanno limite reale, quindi il limite cercato è uguale al quoziente tra limite del numeratore e limite del denominatore, che è 1 .

(16) $\displaystyle \lim_{x\to 0+} \frac{\sin\sqrt{x^4+3x^6}}{1-\cos\sqrt{x^2+5x^4}} = 2 .$

(17) $\displaystyle \lim_{x\to 0+} \frac{\log\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4x^4}}}{1-\cos(4x)} = -\frac{1}{4} .$

(18) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \Big(\sqrt{x^4+2x^3} - \sqrt{x^4+4x^2}\Big)\Big(\exp\Big(\frac{4x}{x^2+2x}\Big) - 1\Big) = 4 .$

(19) $\displaystyle \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x^4+6x^2}\ \log\dfrac{x+4}{x+3}\ \log\dfrac{4x+1}{3x+1}}{1-\cos\big(4\sin(3x)\big)} = \frac{\sqrt{6}}{72}\log\frac{4}{3} .$

(20) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \sqrt{2+x^2+4x^4}\ \sqrt{2+x^{-2}+4x^{-4}}\ \log\frac{x^2+5}{x^2+5x}\ \sin\frac{x+6}{x^2+6} = -10\sqrt{2} .$

(21) La funzione di cui vogliamo calcolare il limite è somma di due funzioni, ciascuna delle quali ha numeratore uguale a 1 e denominatore che tende a 0 . Per stabilire il limite di ciascun addendo occorre studiare il segno dei denominatori vicino a 0 . Evidentemente per x in un opportuno intorno di 0 , escluso 0 , si ha $\cos x - 1 < 0$ e $4 + x^2 > 0$, perciò $(\cos x - 1)(4 + x^2) < 0$ e dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{(\cos x - 1)(4+x^2)} = -\infty ;$$

inoltre (sempre per x in un intorno di 0 , ma diverso da 0) si ha $2x\,\sin x + x^4 > 0$, perché somma di numeri maggiori di 0 , e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2x\,\sin x + x^4} = +\infty ;$$

perciò il limite è nella forma indeterminata $-\infty + \infty$.

Per calcolare il limite occorre studiare il comportamento per $x \to 0$ dei due denominatori. Si ha

$$
\begin{aligned}
(\cos x - 1)(4 + x^2) &= \Big(-\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + o(x^5)\Big)(4 + x^2) = \\
&= -2\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^4 + o(x^5) - \frac{1}{2}\,x^4 + \frac{1}{24}\,x^6 + o(x^7) = -2x^2 - \frac{1}{3}\,x^4 + o(x^5)
\end{aligned}
$$

e

$$
2x\,\sin x + x^4 = 2x\Big(x - \frac{1}{6}\,x^3 + o(x^4)\Big) + x^4 = 2x^2 + \frac{2}{3}\,x^4 + o(x^5)\,.
$$

Perciò

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(\cos x - 1)(4 + x^2)} + \frac{1}{2x\,\sin x + x^4} = \frac{1}{-2x^2 - \frac{1}{3}\,x^4 + o(x^5)} + \frac{1}{2x^2 + \frac{2}{3}\,x^4 + o(x^5)} = \\
&\qquad = \frac{2x^2 + \frac{2}{3}\,x^4 + o(x^5) - 2x^2 - \frac{1}{3}\,x^4 + o(x^5)}{\left(-2x^2 - \frac{1}{3}\,x^4 + o(x^5)\right)\left(2x^2 + \frac{2}{3}\,x^4 + o(x^5)\right)} = \\
&\qquad = \frac{\frac{1}{3}\,x^4 + o(x^5)}{\left(-2x^2 - \frac{1}{3}\,x^4 + o(x^5)\right)\left(2x^2 + \frac{2}{3}\,x^4 + o(x^5)\right)} \sim \frac{\frac{1}{3}\,x^4}{-4x^4} = -\frac{1}{12}\,.
\end{aligned}
$$

Quindi il limite cercato è uguale a $-\dfrac{1}{12}$.

(22) Per $x \to +\infty$ l'argomento del primo logaritmo a numeratore tende a 1, mentre l'argomento del secondo logaritmo tende a 2, quindi il numeratore ha limite $\log 1 \log 2 = 0$. Il denominatore è invece in forma indeterminata, perché ciascuna delle due radici tende a $+\infty$.

Studiamo anzitutto il numeratore. Si ha, per $x \to +\infty$,

$$
\log\frac{x^3 + 4}{x^3 + 2} \sim \frac{x^3 + 4}{x^3 + 2} - 1 = \frac{2}{x^3 + 2} \sim 2x^{-3}\,,
$$

$$
\log\frac{4x^3 + 1}{2x^3 + 1} \to \log 2\,,
$$

quindi il numeratore è equivalente a $2 \log 2\, x^{-3}$.

Il denominatore, per $x \to +\infty$, è uguale a

$$
\begin{aligned}
&|x|\sqrt{1 + 3x^{-2}} - |x|\sqrt{1 + 2x^{-2}} - \frac{1}{2x} = \\
&\quad = x\left(1 + \frac{3}{2}\,x^{-2} - \frac{9}{8}\,x^{-4} + o(x^{-4})\right) - x\left(1 + x^{-2} - \frac{1}{2}\,x^{-4} + o(x^{-4})\right) - \frac{1}{2}\,x^{-1} = \\
&\quad = x + \frac{3}{2}\,x^{-1} - \frac{9}{8}\,x^{-3} + o(x^{-3}) - x - x^{-1} + \frac{1}{2}\,x^{-3} - \frac{1}{2}\,x^{-1} \sim -\frac{5}{8}\,x^{-3}\,.
\end{aligned}
$$

Perciò la funzione di cui stiamo calcolando il limite, per $x \to +\infty$, è equivalente a

$$\frac{2\log 2\, x^{-3}}{-\dfrac{5}{8}\, x^{-3}} = -\frac{16}{5}\,\log 2\,;$$

quindi il limite cercato è uguale a $-\dfrac{16}{5}\,\log 2$.

(23) Il limite è nella forma indeterminata $0/0$. Poiché $\log(1+y) \sim y$, per $y \to 0$, il denominatore è equivalente a $x \cdot 3x^4 = 3x^5$.

Studiamo il primo addendo a numeratore. Per il calcolo del limite possiamo supporre $x > 0$, quindi si ha

$$\sqrt{e^2x^2 - 2x^4 + 2x^6} = e|x|\sqrt{1 - \frac{2}{e^2}\,x^2 + \frac{2}{e^2}\,x^4} = ex\,\sqrt{1 - \frac{2}{e^2}\,x^2 + \frac{2}{e^2}\,x^4}\,.$$

Poiché $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\Big(-\frac{2}{e^2}\,x^2 + \frac{2}{e^2}\,x^4\Big) = 0$, per la formula di Taylor abbiamo

$$\sqrt{e^2x^2 - 2x^4 + 2x^6} =$$
$$= ex\left(1 + \frac{1}{2}\Big(-\frac{2}{e^2}\,x^2 + \frac{2}{e^2}\,x^4\Big) - \frac{1}{8}\Big(-\frac{2}{e^2}\,x^2 + \frac{2}{e^2}\,x^4\Big)^2 + o\bigg(\Big(-\frac{2}{e^2}\,x^2 + \frac{2}{e^2}\,x^4\Big)^2\bigg)\right) =$$
$$= ex\Big(1 - \frac{1}{e^2}\,x^2 + \frac{1}{e^2}\,x^4 - \frac{1}{2e^4}\,x^4 + o(x^4)\Big) = ex - \frac{1}{e}\,x^3 + \frac{2e^2-1}{2e^3}\,x^5 + o(x^5)\,.$$

Inoltre, utilizzando la formula di Taylor, si ha

$$\log\Big(e - \frac{1}{e}\,x^2\Big) = \log\left(e\Big(1 - \frac{1}{e^2}\,x^2\Big)\right) = \log e + \log\Big(1 - \frac{1}{e^2}\,x^2\Big) =$$
$$= 1 - \frac{1}{e^2}\,x^2 - \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{e^2}\,x^2\Big)^2 + o\left(\Big(-\frac{1}{e^2}\,x^2\Big)^2\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{e^2}\,x^2 - \frac{1}{2e^4}\,x^4 + o(x^4)\,.$$

Quindi si ha

$$\sqrt{e^2x^2 - 2x^4 + 2x^6} - ex\log\Big(e - \frac{1}{e}\,x^2\Big) =$$
$$= ex - \frac{1}{e}\,x^3 + \frac{2e^2-1}{2e^3}\,x^5 + o(x^5) - ex + \frac{1}{e}\,x^3 + \frac{1}{2e^3}\,x^5 + o(x^5) =$$
$$= \frac{1}{e}\,x^5 + o(x^5) \sim \frac{1}{e}\,x^5\,.$$

Perciò la funzione di cui stiamo calcolando il limite è equivalente, per $x \to 0+$, a

$$\frac{\dfrac{1}{e}\,x^5}{3x^5} = \frac{1}{3e}\,;$$

quindi il limite cercato è uguale a $\dfrac{1}{3e}$.

(24) Il limite è nella forma indeterminata $0/0$.
Studiamo il denominatore. Si ha

$$\begin{aligned}
&\cos(2x) - e^{-2x^2} = \\
&\quad = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{24}(2x)^4 + o\big((2x)^5\big) - \Big(1 - 2x^2 + \frac{1}{2}(-2x^2)^2 + o\big((-2x^2)^2\big)\Big) = \\
&\quad = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5) - \big(1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4)\big) \sim \\
&\quad \sim -\frac{4}{3}x^4 .
\end{aligned}$$

Studiamo ora il numeratore. Si ha

$$2\cos x - x^2 = 2\Big(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\Big) - x^2 = 2 - 2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5);$$

perciò

$$e^{2\cos x - x^2} = \exp\Big(2 - 2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\Big).$$

L'esponente tende a 2 per $x \to 0$, quindi è utile scomporre l'esponenziale nel prodotto di due esponenziali, il primo con esponente 2, il secondo con esponente che tende a 0, cioè

$$e^{2\cos x - x^2} = e^2 \exp\Big(-2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\Big).$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
&\exp\Big(-2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\Big) = \\
&\quad = 1 + \Big(-2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\Big) + \frac{1}{2}\Big(-2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\Big)^2 + \\
&\qquad + o\left(\Big(-2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\Big)^2\right) = \\
&\quad = 1 - 2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + 2x^4 + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{25}{12}x^4 + o(x^4),
\end{aligned}$$

perciò

$$e^{2\cos x - x^2} - e^2 + 2e^2x^2 = e^2\Big(1 - 2x^2 + \frac{25}{12}x^4 + o(x^4)\Big) - e^2 + 2e^2x^2 \sim \frac{25e^2}{12}x^4 .$$

Quindi per $x \to 0$ si ha

$$\frac{e^{2\cos x - x^2} - e^2 + 2e^2x^2}{\cos(2x) - e^{-2x^2}} \sim \frac{\frac{25e^2}{12}x^4}{-\frac{4}{3}x^4} = -\frac{25e^2}{16};$$

pertanto il limite cercato è uguale a $-\dfrac{25e^2}{16}$.

(25) Per $x \to +\infty$ si ha

$$\sqrt[3]{x^3+9x^2} = x\,\sqrt[3]{1+\frac{9}{x}} = x\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{9}{x}-\frac{1}{9}\left(\frac{9}{x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x+3-9x^{-1}+o(x^{-1})\,,$$

pertanto

$$\sqrt[3]{x^3+9x^4}-x-3 = x+3-9x^{-1}+o(x^{-1})-x-3 \sim -9x^{-1}\,.$$

Inoltre

$$\log\bigl(3\cosh(5x)\bigr) = \log\left(\frac{3}{2}\bigl(e^{5x}+e^{-5x}\bigr)\right) = \log\left(\frac{3}{2}\,e^{5x}\bigl(1+e^{-10x}\bigr)\right) =$$
$$= \log\frac{3}{2}+5x+\log\bigl(1+e^{-10x}\bigr) \sim 5x\,.$$

Infine

$$\log\left(\frac{3+x}{x}\right) = \log\left(1+\frac{3}{x}\right) = \frac{3}{x}-\frac{1}{2}\,\frac{9}{x^2}+o(x^{-2})\,,$$

da cui segue

$$\log\left(\frac{3+x}{x}\right)-\frac{3}{x+5} = \frac{3}{x}-\frac{1}{2}\,\frac{9}{x^2}+o(x^{-2})-\frac{3}{x+5} =$$
$$= \frac{3(x+5)-3x}{x(x+5)}-\frac{1}{2}\,\frac{9}{x^2}+o(x^{-2}) = \frac{15}{x^2+5x}-\frac{1}{2}\,\frac{9}{x^2}+o(x^{-2}) =$$
$$= \frac{15}{x^2\bigl(1+o(1)\bigr)}-\frac{1}{2}\,\frac{9}{x^2}+o(x^{-2}) = \frac{15}{x^2}\bigl(1+o(1)\bigr)-\frac{1}{2}\,\frac{9}{x^2}+o(x^{-2}) =$$
$$= \frac{30-9}{2x^2}+o(x^{-2}) \sim \frac{21}{2}\,x^{-2}\,.$$

Perciò

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+9x^2}-x-3}{\log\bigl(3\cosh(5x)\bigr)\left(\log\left(\frac{3+x}{x}\right)-\frac{3}{x+5}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-9x^{-1}}{5x\,\frac{21}{2}\,x^{-2}} = -\frac{18}{105} = -\frac{6}{35}\,.$$

(26) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh(e^{2x}-1)-\sin(e^{2x}-1)}{\cos(6x)\log(1+2x)\bigl(\sqrt{1-x^2}-1\bigr)} = -\frac{8}{3}\,.$$

(27) $$\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x^2+2x^3}-\sqrt[3]{x^3+3x^4}}{\sqrt{x^2-4x^4}-\cos(3x^2)} = \frac{1}{5}\,.$$

(28) $$\lim_{x\to+\infty} x\bigl(\sqrt{x^6+4x^4}-\sqrt[3]{x^9+6x^7}\,\bigr) = 2\,.$$

(29) $$\lim_{x\to+\infty} x\log\bigl(e^{x^2}+e^{3x}\bigr)\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{\sqrt{x^2+4x}}\right) = -2\,.$$

(30) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^6+4x^5+6x^4}-x^3-2x^2\right)\left(\sin\frac{x+4}{x^4+1}-\frac{1}{x^3}\right)\exp\left(6+3\log x\right)=4e^6\,.$$

(31) Il dominio naturale di f è costituito dagli $x\in\mathbb{R}$ per cui il denominatore $x-6$ non è nullo, il numero sotto radice è non negativo e l'argomento dell'arcoseno appartiene a $[-1,1]$; quindi $\operatorname{dom} f$ è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases}\dfrac{x-5}{x-6}\geq 0\\ 1-\sqrt{6\,\dfrac{x-5}{x-6}}\geq -1\\ 1-\sqrt{6\,\dfrac{x-5}{x-6}}\leq 1\end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases}\dfrac{x-5}{x-6}\geq 0\\ \sqrt{6\,\dfrac{x-5}{x-6}}\leq 2\\ \sqrt{6\,\dfrac{x-5}{x-6}}\geq 0\,.\end{cases}$$

L'ultima disequazione è verificata da tutti gli x che verificano la prima disequazione. La seconda disequazione è verificata per gli x che soddisfano la prima disequazione e tali che

$$6\,\frac{x-5}{x-6}\leq 4\,,$$

che, successivamente, equivale a

$$\begin{gathered}3\,\frac{x-5}{x-6}-2\leq 0\\ \frac{3(x-5)-2(x-6)}{x-6}\leq 0\\ \frac{x-3}{x-6}\leq 0\,.\end{gathered}$$

Il sistema è quindi equivalente a

$$\begin{cases}\dfrac{x-5}{x-6}\geq 0\\ \dfrac{x-3}{x-6}\leq 0\,.\end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni della prima disequazione è $]-\infty,5]\cup]6,+\infty[$, quello della seconda è $[3,6[$; l'intersezione di tali insiemi è $[3,5]$, che costituisce il dominio di f.

(32) Il dominio naturale di f è costituito dagli $x \in \mathbb{R}$ per cui il denominatore $x+1$ è diverso da 0 e che rendono positivo l'argomento del logaritmo. Perciò abbiamo

$$\operatorname{dom} f = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \;\middle|\; \frac{2x+5}{x+1} > 0 \right\}.$$

Dobbiamo quindi risolvere la disequazione

$$\frac{2x+5}{x+1} > 0 .$$

Il segno del quoziente si ricava dal seguente schema

		$-5/2$		-1	
$2x+5$	$- - - - -$	|	$+ + + + + + +$	|	$+ + + + +$
$x+1$	$- - - - -$	|	$- - - - - - -$	|	$+ + + + +$
$\dfrac{2x+5}{x+1}$	$+ + + + +$	|	$- - - - - - -$	|	$+ + + + +$

Perciò $\operatorname{dom} f = \left]-\infty, -5/2\right[\cup \left]-1, +\infty\right[$.

(33) Il dominio naturale di f è costituito dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che la quantità sotto radice è non negativa e il denominatore $x+2$ è diverso da 0. Quindi

$$\operatorname{dom} f = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \;\middle|\; x^2+4x+3 \geq 0 \right\}.$$

Il trinomio x^2+4x+3 si annulla per

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \cdot 3} = -2 \pm 1 = \begin{cases} -1 \\ -3 , \end{cases}$$

quindi è non negativo per $x \in \left]-\infty, -3\right] \cup \left[-1, +\infty\right[$. Pertanto

$$\operatorname{dom} f = \left(\left]-\infty, -3\right] \cup \left[-1, +\infty\right[\right) \setminus \{-2\} = \left]-\infty, -3\right] \cup \left[-1, +\infty\right[.$$

(34) Il dominio naturale di f è costituito dagli x diversi da 3 e tali che

$$\frac{x^2-2x}{|x-3|} \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \sqrt{\frac{x^2-2x}{|x-3|}} \neq -x .$$

Se $x \neq 3$ allora il denominatore del primo membro della prima disequazione è positivo, quindi essa è verificata se e solo se $x^2-2x \geq 0$. Pertanto la prima disequazione è verificata se e solo se $x \in \left]-\infty, 0\right] \cup \left[2, 3\right[\cup \left]3, +\infty\right[$.

Inoltre

$$\sqrt{\frac{x^2-2x}{|x-3|}} = -x \iff x \leq 0 \wedge \frac{x^2-2x}{|x-3|} = x^2 .$$

Se $x \leq 0$ si ha $|x-3| = 3-x$, perciò

$$\sqrt{\frac{x^2-2x}{|x-3|}} = -x \iff x \leq 0 \wedge \frac{x^2-2x}{3-x} = x^2 .$$

Se $x \neq 3$ si ha

$$\frac{x^2-2x}{3-x} = x^2 \iff x^2-2x = x^2(3-x) \iff x(x^2-2x-2)=0\,.$$

Il trinomio x^2-2x-2 si annulla per $x = 1\pm\sqrt{3}$, quindi l'equazione $x(x^2-2x-2)=0$ ha le soluzioni 0 e $1\pm\sqrt{3}$. Pertanto

$$\sqrt{\frac{x^2-2x}{|x-3|}} = -x \iff x \le 0 \wedge x \in \left\{0, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right\} \iff x \in \left\{0, 1-\sqrt{3}\right\}.$$

Perciò

$$\operatorname{dom} f = \left]-\infty, 1-\sqrt{3}\right[\cup \left]1-\sqrt{3}, 0\right[\cup [2,3[\cup]3,+\infty[\ .$$

(35) Il dominio naturale di f è costituito dagli x tali che

$$x^2+2x-3 \ge 0 \qquad \text{e} \qquad \sqrt{x^2+2x-3}-2x+2>0\,.$$

Il trinomio x^2+2x-3 si annulla per

$$x = -1\pm\sqrt{1+3} = -1\pm 2 = \begin{cases} -3 \\ 1\,; \end{cases}$$

perciò la prima disequazione è verificata per $x \in]-\infty,-3] \cup [1,+\infty[$.

La seconda disequazione è verificata quando

$$\sqrt{x^2+2x-3} > 2x-2\ :$$

che è vero se $2x-2<0$, cioè $x<1$, oppure

$$x^2+2x-3 > (2x-2)^2$$

cioè

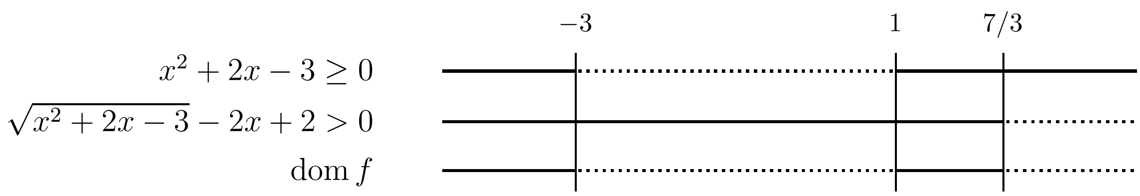
$$3x^2-10x+7<0\,.$$

Questo trinomio si annulla per

$$x = \frac{5\pm\sqrt{5^2-3\cdot 7}}{3} = \frac{5\pm 2}{3} = \begin{cases} 1 \\ \dfrac{7}{3}\,. \end{cases}$$

e quindi è negativo per $x \in]1, 7/3[$.

Perciò il dominio naturale di f si ricava dal seguente schema



Quindi

$$\operatorname{dom} f =]-\infty,-3] \cup \left]1, \frac{7}{3}\right[\ .$$

(36) $\quad \operatorname{dom} f = \left]-4, -\dfrac{11}{3}\right]$

(37) $\quad \operatorname{dom} f = [-1, 2[\cup]2, 5]$

(38) $\quad \operatorname{dom} f =]-\infty, -3] \cup [3, 5[$

(39) $\quad \operatorname{dom} f =]-\infty, -3[\cup \left]-3, -2\sqrt{2}\right[\cup]4, +\infty[$

(40) $\quad \operatorname{dom} f =]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[\,.$

(41) Per determinare gli estremanti locali di f occorre studiare il segno di f'. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ il denominatore di f' è positivo e il fattore $(x^3 - x^2 - 8x + 12)^2$ è non negativo, quindi il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $3x^2 - 2x - 8$. Tale trinomio si annulla per

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 3 \cdot 8}}{3} = \frac{1 \pm 5}{3} = \begin{cases} -\dfrac{4}{3} \\ 2\,. \end{cases}$$

Perciò $3x^2 - 2x - 8$ è positivo se $x \in]-\infty, -4/3[\cup]2, +\infty[$, mentre è negativo se $x \in]-4/3, 2[$. Quindi il segno di f' risulta dal seguente schema

		$-4/3$		2	
$f'(x)$	$+ \quad + \quad + \quad +$	$\vert$	$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$	$\vert$	$+ \quad + \quad + \quad +$

Perciò $-4/3$ è punto di massimo locale per f, mentre 2 è punto di minimo locale.

(42) Per determinare gli estremanti locali di f studiamo il segno della sua derivata

Il dominio di f è costituito dagli x per cui è positivo l'argomento del logaritmo, cioè tali che $x^2 + 2x > 0$, quindi è $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$. Inoltre f è derivabile in ogni punto del dominio in cui non si annulla l'argomento del valore assoluto, cioè in ogni punto del dominio escluso -4. Se $x \in \operatorname{dom} f \setminus \{-4\}$ si ha

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x} - \operatorname{sgn}(x + 4)\,.$$

Per determinare il segno di f' è necessario distinguere a seconda che $\operatorname{sgn}(x+4)$ sia uguale a -1 o a 1, cioè a seconda che x sia minore o maggiore di -4. Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+2}{x^2+2x} + 1 = \dfrac{2x + 2 + x^2 + 2x}{x^2 + 2x} = \dfrac{x^2 + 4x + 2}{x^2 + 2x} & \text{se } x < -4\,, \\[2ex] \dfrac{2x+2}{x^2+2x} - 1 = \dfrac{2x + 2 - x^2 - 2x}{x^2 + 2x} = \dfrac{-x^2 + 2}{x^2 + 2x} & \text{se } x > -4\,. \end{cases}$$

Se $x \in \operatorname{dom} f$ si ha $x^2 + 2x > 0$, pertanto il segno di $f'(x)$ dipende solo dal segno del numeratore. Il trinomio $x^2 + 4x + 2$ si annulla per

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2 - 2} = -2 \pm \sqrt{2}\,,$$

pertanto è positivo per $x < -4$. Il trinomio $-x^2 + 2$ è non negativo se e solo se $x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, quindi in $\operatorname{dom} f \cap]-4, +\infty[$ si ha $f'(x) \geq 0$ se e solo se

$x \in \left]0, \sqrt{2}\,\right]$. Perciò il segno di f' è quello riportato nel seguente schema

$$\begin{array}{lccccccc}
 & & -4 & & -2 & & 0 & & \sqrt{2} & \\
f'(x) & + \; + \; + & | & - \; - \; - & | & \qquad & | & + \; + & | & - \; - \; -
\end{array}$$

Quindi -4 e $\sqrt{2}$ sono punti di massimo locale per f e non esistono punti di minimo locale.

(43) -2 è punto di massimo locale per f, $-2/3$ e 2 sono punti di minimo locale.

(44) La funzione f è derivabile; per il Test di monotonia, cerchiamo gli intervalli in cui essa è crescente o decrescente studiando il segno di f'.

Si ha, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = e^{-2x^2+3x} + x\, e^{-2x^2+3x}(-4x+3) = (-4x^2+3x+1)\, e^{-2x^2+3x}\,;$$

quindi, visto che l'esponenziale è sempre non negativo, abbiamo

$$f'(x) \geq 0 \iff -4x^2+3x+1 \geq 0\,.$$

Il trinomio $-4x^2+3x+1$ si annulla per

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2+4\cdot 4}}{-8} = \frac{-3 \pm 5}{-8} = \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{1}{4}\,. \end{cases}$$

Perciò il trinomio è non negativo per $x \in [-1/4, 1]$ mentre è non positivo per $x \in \left]-\infty, -1/4\right] \cup \left[1, +\infty\right[$.

Pertanto f è decrescente in $[-1/4, 1]$ ed è decrescente in $\left]-\infty, -1/4\right]$ e in $\left[1, +\infty\right[$.

(45) Per il Test di monotonia, possiamo studiare la monotonia di f determinando il segno di f'.

Se $x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]2, +\infty\right[$ allora

$$f'(x) = \frac{x\big(2\sqrt{x^2-4} - \sqrt{2x^2+56}\,\big)}{\sqrt{2x^2+56}\,\sqrt{x^2-4}}\,.$$

Il denominatore è positivo, perciò il segno di f' è determinato dal segno di x e da quello di $2\sqrt{x^2-4} - \sqrt{2x^2+56}$. Per $x \in \operatorname{dom} f'$ si ha

$$2\sqrt{x^2-4} - \sqrt{2x^2+56} \geq 0 \iff 2\sqrt{x^2-4} \geq \sqrt{2x^2+56} \iff 4x^2-16 \geq 2x^2+56\,;$$

tale disuguaglianza equivale a $2x^2 \geq 72$, quindi

$$2\sqrt{x^2-4} - \sqrt{2x^2+56} \geq 0 \iff x \in \left]-\infty, -6\right] \cup \left[6, +\infty\right[\,.$$

Perciò il segno di f' risulta dal seguente schema

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|}
 & & -6 & & -2 \quad\quad 2 & & 6 & \\
x & - \; - \; - & | & - \; - \; - & | \qquad | & + \; + \; + & | & + \; + \; + \\
2\sqrt{x^2-4} - \sqrt{2x^2+56} & + \; + \; + & | & - \; - \; - & | \qquad | & - \; - \; - & | & + \; + \; + \\
f'(x) & - \; - \; - & | & + \; + \; + & | \qquad | & - \; - \; - & | & + \; + \; +
\end{array}$$

Perciò f è crescente in $[-6, -2]$ e $\left[6, +\infty\right[$ ed è decrescente in $\left]-\infty, -6\right]$ e in $[2, 6]$.

(46) f è crescente in $\left]-\infty, -\dfrac{7}{4}\right]$ e $\left[\sqrt{3}, \dfrac{7}{4}\right]$.

(47) Nei punti del dominio che non annullano l'argomento del valore assoluto a numeratore f è derivabile. Tale numeratore si annulla per

$$x = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} = 2 \pm 1 = \begin{cases} 1 \\ 3\,; \end{cases}$$

perciò f è derivabile in $\operatorname{dom} f \setminus \{1, 3\}$. Per x in tale insieme si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\operatorname{sgn}(x^2 - 4x + 3)\,(2x - 4)(x + 1) - |x^2 - 4x + 3|}{(x + 1)^2} = \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(x^2 - 4x + 3)\,(2x^2 - 2x - 4) - (x^2 - 4x + 3)\operatorname{sgn}(x^2 - 4x + 3)}{(x + 1)^2} = \\ &= \operatorname{sgn}(x^2 - 4x + 3)\,\frac{x^2 + 2x - 7}{(x + 1)^2}\,. \end{aligned}$$

Visto che il denominatore è positivo in tutto il dominio della funzione, si ha

$$f'(x) \geq 0 \iff \operatorname{sgn}(x^2 - 4x + 3)\,(x^2 + 2x - 7) \geq 0 \iff (x^2 - 4x + 3)(x^2 + 2x - 7) \geq 0\,.$$

Il trinomio $x^2 + 2x - 7$ si annulla per

$$x = -1 \pm \sqrt{1^2 + 7} = -1 \pm \sqrt{8},$$

quindi $x^2 + 2x - 7 \geq 0$ per $x \in \left]-\infty, -1 - \sqrt{8}\right] \cup \left[-1 + \sqrt{8}, +\infty\right[$. Sappiamo che il trinomio $x^2 - 4x + 3$ si annulla per $x = 1$ e $x = 3$, perciò

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \iff x \in \left]-\infty, 1\right] \cup \left[3, +\infty\right[\,.$$

Il segno di f' risulta quindi dal seguente schema

		$-1-\sqrt{8}$		-1		1		$-1+\sqrt{8}$		3	
x^2+2x-7	$+\ +$		$-\ -\ -\ -\ -$		$-\ -\ -$		$-$		$+\ +$		$+\ +$
x^2-4x+3	$+\ +$		$+\ +\ +\ +\ +$		$+\ +\ +$		$-$		$-\ -$		$+\ +$
$f'(x)$	$+\ +$		$-\ -\ -\ -\ -$		$-\ -\ -$		$+$		$-\ -$		$+\ +$

Quindi f è crescente in $\left]-\infty, -1 - \sqrt{8}\right]$, $\left[1, -1 + \sqrt{8}\right]$ e $\left[3, +\infty\right[$, è decrescente in $\left[-1 - \sqrt{8}, -1\right[$, $\left]-1, 1\right]$ e $\left[-1 + \sqrt{8}, 3\right]$; $-1 - \sqrt{8}$ e $-1 + \sqrt{8}$ sono punti di massimo locale per f, 1 e 3 sono punti di minimo locale.

(48) La funzione f è derivabile in tutti i punti del dominio che non annullano $x^2 + 5x + 4$; tale trinomio si annulla per

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ -4\,, \end{cases}$$

perciò $\left]-4, -1\right[\cup \left]0, +\infty\right[\subseteq \operatorname{dom} f'$.

Per $x \in]-4,-1[\cup]0,+\infty[$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+5x+4}{x}\right)^{-1/2} \frac{(2x+5)x-(x^2+5x+4)}{x^2} = \left(\frac{x}{x^2+5x+4}\right)^{1/2} \frac{x^2-4}{2x^2}\,.$$

Perciò, per $]-4,-1[\cup]0,+\infty[$, si ha $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2-4 \geq 0$; quest'ultima disequazione è verificata se e solo se $x \in]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$. Pertanto segno di f' è riportato nel seguente schema

	-4		-2		-1	0		2	
$f'(x)$	|	$+\ +\ +$	|	$-$	|	|	$-\ -\ -$	|	$+\ +\ +\ +\ +\ +$

Perciò f è crescente in $[-4,-2]$ e in $[2,+\infty[$ ed è decrescente in $[-2,-1]$ e in $]0,2]$; -2 è punto di massimo locale per f, -4, -1 e 2 sono punti di minimo locale.

(49) f è crescente in $\left[-2,-\frac{5}{3}\right]$ e in $[-1,+\infty[$; è decrescente in $\left[-\frac{5}{3},-1\right]$; $-\frac{5}{3}$ è punto di massimo locale per f, -2 e -1 sono punti di minimo locale.

(50) f è crescente in $\left]-\infty,-\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$, in $\left]\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\right[$ e in $\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$, è decrescente in $\left[-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{1}{2}\right]$ e in $\left[\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{3}{2}\right]$; $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{\sqrt{5}}{2}$ sono punti di massimo locale, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$ sono punti di minimo locale.

(51) Scomponiamo la funzione integranda nella somma di frazioni più semplici. La scomposizione può essere fatta con un semplice trucco

$$\frac{x+3}{x(4x+3)} = \frac{4x+3-3x}{x(4x+3)} = \frac{4x+3}{x(4x+3)} + \frac{-3x}{x(4x+3)} = \frac{1}{x} - \frac{3}{4x+3}\,.$$

Quindi una primitiva della funzione integranda è

$$x \mapsto \log|x| - \frac{3}{4}\log|4x+3|\,;$$

Pertanto l'integrale è uguale a

$$\left[\log|x| - \frac{3}{4}\log|4x+3|\right]_1^4 = \log|4| - \frac{3}{4}\log|4\cdot 4+3| - \log|1| + \frac{3}{4}\log|1\cdot 4+3| =$$
$$= \log 4 - \frac{3}{4}\log 19 + \frac{3}{4}\log 7\,.$$

(52) La funzione integranda è il prodotto tra una funzione in cui la variabile x compare solo come argomento del logaritmo e la derivata della funzione logaritmo, cioè, posto $\phi(x) = \log x$, si ha

$$\frac{\log x}{3x(\log^2 x + 4)} = \frac{\phi(x)}{3\big((\phi(x))^2 + 4\big)}\,\phi'(x)\,.$$

Pertanto, effettuando la sostituzione $t = \phi(x) = \log x$; si ottiene

$$\int_1^2 \frac{\log x}{3x(\log^2 x + 4)}\,dx = \int_0^{\log 2} \frac{t}{3(t^2+4)}\,dt\,.$$

A meno di costanti moltiplicative, il numeratore della funzione integranda è la derivata del denominatore, quindi si trova facilmente un primitiva. Si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 2} \frac{t}{3(t^2+4)}\,dt &= \int_0^{\log 2} \frac{1}{6}\,\frac{2t}{t^2+4}\,dt = \left[\frac{1}{6}\log(t^2+4)\right]_0^{\log 2} = \\ &= \frac{1}{6}\log(\log^2 2 + 4) - \frac{1}{6}\log 4\,.\end{aligned}$$

(53) La derivata della funzione coseno è la funzione $x \mapsto -\sin x$, quindi la funzione integranda è il prodotto tra una funzione in cui la variabile compare solo come argomento del coseno e la derivata di tale funzione. È allora evidente che la sostituzione $t = \cos x$ porta trasforma l'integrale in uno più semplice. Abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{\cos x + 2}\,dx &= -\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + 2}(-\sin x)\,dx = -\int_{\cos 0}^{\cos(\pi/2)} \frac{t}{t+2}\,dt = \\ &= -\int_1^0 \frac{t+2-2}{t+2}\,dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{t+2}\right)dt = \\ &= \big[t - 2\log|t+2|\big]_0^1 = 1 - 2\log 3 + 2\log 2\,.\end{aligned}$$

(54) La funzione integranda è il prodotto di due funzioni di ciascuna delle quali si trova facilmente una primitiva: il primo fattore ammette la primitiva x^2 , mentre il secondo fattore si presenta nella forma $\phi'(x)(\phi(x))^{-3}$ (con $\phi(x) = 5\sin x + 2\cos x$) e quindi una sua primitiva è $-(\phi(x))^{-2}/2$. Si può quindi integrare per parti in due modi diversi; evidentemente è opportuno derivare il fattore $2x$, perché con tale scelta rimane da integrare una funzione in cui la variabile x compare esclusivamente come argomento delle funzioni seno e coseno, cosa che non accade nell'altro caso.

Si ottiene dunque:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi/6} 2x\,\frac{-2\sin x + 5\cos x}{(5\sin x + 2\cos x)^3}\,dx = \\ &\qquad = \left[2x\,\frac{-1}{2(5\sin x + 2\cos x)^2}\right]_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} 2\,\frac{-1}{2(5\sin x + 2\cos x)^2}\,dx = \\ &\qquad = \left[\frac{-x}{(5\sin x + 2\cos x)^2}\right]_0^{\pi/6} + \int_0^{\pi/6} \frac{1}{(5\sin x + 2\cos x)^2}\,dx\,.\end{aligned}$$

Il primo addendo è uguale a:

$$\frac{-\pi/6}{\big(5\sin(\pi/6)+2\cos(\pi/6)\big)^2}-0=\frac{-\pi/6}{\left(\dfrac{5}{2}+2\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=-\frac{\pi}{6}\left(\frac{2}{5+2\sqrt{3}}\right)^2=$$

$$=-\frac{\pi}{6}\,\frac{4}{25+20\sqrt{3}+12}=-\frac{2\pi}{111+60\sqrt{3}}\,.$$

Consideriamo ora l'integrale ancora da calcolare. La funzione integranda è quoziente tra una costante e una funzione omogenea di grado 2 in seno e coseno. È quindi possibile esprimerla tramite la funzione tangente, visto che l'intervallo di integrazione è incluso nel dominio di tale funzione. Si ha

$$\frac{1}{(5\sin x+2\cos x)^2}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{(5\sin x+2\cos x)^2}=\frac{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1}{\left(5\,\dfrac{\sin x}{\cos x}+2\right)^2}=\frac{\tan^2 x+1}{(5\tan x+2)^2}\,;$$

è quindi opportuno effettuare la sostituzione $\tan x=t$. Visto che x varia tra 0 e $\pi/6$, quindi appartiene all'immagine della funzione arcotangente, si ha $x=\arctan t$ e quindi la derivata del cambiamento di variabile è $1/(1+t^2)$. Perciò

$$\int_0^{\pi/6}\frac{1}{(5\sin x+2\cos x)^2}\,dx=\int_0^{\pi/6}\frac{\tan^2 x+1}{(5\tan x+2)^2}\,dx=$$

$$=\int_{\tan 0}^{\tan(\pi/6)}\frac{t^2+1}{(5t+2)^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt=\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{1}{(5t+2)^2}\,dt=$$

$$=\left[\frac{-1}{5(5t+2)}\right]_0^{1/\sqrt{3}}=\frac{-1}{5\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}}+2\right)}+\frac{1}{5\cdot 2}=\frac{-\sqrt{3}}{25+10\sqrt{3}}+\frac{1}{10}\,.$$

Quindi

$$\int_0^{\pi/6}2x\,\frac{-2\sin x+5\cos x}{(5\sin x+2\cos x)^3}\,dx=\left[\frac{-x}{(5\sin x+2\cos x)^2}\right]_0^{\pi/6}-\left[\frac{1}{5(5t+2)}\right]_0^{1/\sqrt{3}}=$$

$$=-\frac{2\pi}{111+60\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{25+10\sqrt{3}}+\frac{1}{10}\,.$$

(55) Nella funzione integranda compare la radice quadrata del polinomio $-x^2+4$; occorre innanzitutto effettuare una sostituzione che elimini tale radice. Per questo effettuiamo la sostituzione $x=\phi(t)=2\sin t$; poiché $x/2\in[1/2,1]\subseteq\operatorname{dom}\arcsin$, si ottiene $t=\phi^{-1}(t)=\arcsin(x/2)$. Poiché $t\in[\pi/6,\pi/2]$ si ha $\cos t\ge 0$, quindi

$$\int_1^2\frac{\sqrt{-x^2+4}}{x}\,dx=\int_{\arcsin 1}^{\arcsin 2}\frac{\sqrt{4-(2\sin t)^2}}{2\sin t}\,2\cos t\,dt=$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{2\cos t}{2\sin t}\,2\cos t\,dt=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{2\cos^2 t}{\sin t}\,dt\,.$$

La funzione integranda può essere facilmente scritta come prodotto tra una funzione razionale di $\cos t$ e $\sin t$; quindi la sostituzione $\cos t = s$ trasforma l'integrale in quello di in una funzione razionale. Si ha infatti

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2\cos^2 t}{\sin t}\, dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2\cos^2 t}{\sin^2 t} \sin t\, dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2\cos^2 t}{1-\cos^2 t} \sin t\, dt$$

e con la sostituzione $\cos t = s$, tenuto conto che la derivata della funzione coseno è l'opposto della funzione seno, si ottiene

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2\cos^2 t}{1-\cos^2 t} \sin t\, dt = -\int_{\cos(\pi/6)}^{\cos(\pi/2)} \frac{2s^2}{1-s^2}\, ds = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{2s^2}{1-s^2}\, ds\,.$$

Il polinomio a numeratore ha lo stesso grado di quello a denominatore, quindi bisogna anzitutto scrivere la frazione come somma di un polinomio e di una frazione il cui numeratore abbia grado minore di quello del denominatore. Si ha:

$$\frac{2s^2}{1-s^2} = \frac{2s^2-2+2}{1-s^2} = -2 + \frac{2}{1-s^2}\,.$$

Inoltre

$$\frac{2}{1-s^2} = \frac{(1+s)+(1-s)}{1-s^2} = \frac{1+s}{1-s^2} + \frac{1-s}{1-s^2} = \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s}\,.$$

Pertanto si ha

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\sqrt{-x^2+4}}{x}\, dx &= \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{2s^2}{1-s^2}\, ds = \int_0^{\sqrt{3}/2} \left(-2 + \frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s}\right) ds = \\ &= \bigl[-2s + \log|1+s| - \log|1-s|\bigr]_0^{\sqrt{3}/2} = \\ &= -\sqrt{3} + \log\frac{\sqrt{3}+2}{2} - \log\frac{2-\sqrt{3}}{2} = \\ &= -\sqrt{3} + \log\frac{\sqrt{3}+2}{2-\sqrt{3}} = -\sqrt{3} + \log\bigl(7+4\sqrt{3}\bigr)\,.\end{aligned}$$

(56) $\displaystyle\int_1^2 (x+1)\,\frac{e^x - 3\,e^{-x}}{(e^x+4+3\,e^{-x})^2}\, dx =$

$$= \left[-(x+1)\,\frac{1}{e^x+4+3\,e^{-x}} + \frac{1}{2}\log(e^x+1) - \frac{1}{2}\log(e^x+3)\right]_1^2 =$$

$$= -3\,\frac{1}{e^2+4+3\,e^{-2}} + 2\,\frac{1}{e+4+3\,e^{-1}} + \frac{1}{2}\log\frac{(e^2+1)(e+3)}{(e^2+3)(e+1)}\,.$$

(57) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x+3}{x^2+9}\, dx = \left[\frac{1}{2}\,\log(x^2+9) + \arctan\frac{x}{3}\right]_2^5 =$

$$= \frac{1}{2}\,\log\frac{34}{13} + \arctan\frac{5}{3} - \arctan\frac{2}{3}\,.$$

(58) $\displaystyle\int_0^{1/2} (6x^2+2)\ \arcsin x\, dx =$

$$= \left[(2x^3+2x)\arcsin x + \frac{2}{3}\, x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{10}{3}\, \sqrt{1-x^2}\right]_0^{1/2} = \frac{5}{24}\,\pi + \frac{7\sqrt{3}}{4} - \frac{10}{3}\,.$$

(59) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\sqrt{1+8x^2}}{1+4x^2}\, dx = \left[\frac{1}{4}\sqrt{1+8x^2} - \frac{1}{4}\ \arctan\bigl(\sqrt{1+8x^2}\,\bigr)\right]_0^1 =$

$$= 1 - \frac{1}{4}\ \arctan 5 + \frac{\pi}{16}\,.$$

(60) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cosh x + 4\sinh x}{\cosh x - \sinh x}\, dx = \left[\frac{5}{4}\, e^{2x} - \frac{3}{2}\, x\right]_0^1 = \frac{5}{4}\, e^2 - \frac{11}{4}\,.$