1. Sia E l'insieme delle matrici 20×20 che hanno almeno 399 elementi uguali a π. Rispondere alle domande seguenti, motivando la risposta:

i. Quali valori può assumere il determinante di una matrice di questo insieme?

ii. L'insieme E contiene una matrice incompleta associata a un sistema impossibile?

iii. Sia $A \in E$. Si può essere certi che A sia la matrice canonicamente associata a un prodotto interno definito su $\mathbb{R}^{20} \times \mathbb{R}^{20}$?

iv. Trovare un numero reale che sia autovalore di ogni matrice dell'insieme E.

v. Sia B la matrice di E con tutti gli elementi uguali a π. Determinare un autovettore non nullo di B.

2. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ canonicamente associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ -10 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

i. Stabilire se f è diagonalizzabile.

ii. Siano U e V due autospazi di f a scelta del candidato. Si scriva una rapprestazione cartesiana di $U + V$.

iii. Sia $S = \{(1, 3, 1); (0, k, 3)\}$. Discutere la dimensione di $f(Span(S))$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

3. Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino i punti $P(-4, 1, 1)$, $Q(1, 0, 0)$ e $R(4, 0, -1)$.

i. Determinare l'equazione del piano π che contiene i tre punti assegnati.

ii. Determinare l'equazione della retta r che passa per R e per il punto $S(3, k, 0)$.

iii. Determinare, se possibile, k in modo che r sia perpendicolare a π.