Esercizi di calcolo vettoriale

1. Nel piano Oxy sono dati i vettori

   * $(P-O)$ di modulo 4 e formante un angolo di $\frac{\pi}{6}$ con la direzione positiva dell'asse x,
   * $(Q-O)=\sqrt{3}\hat{\imath}-3\hat{\jmath}$,
   * $(P-R)=2\sqrt{3}\hat{\imath}$.

   Determinare

   $|Q-O|$, $\quad$ vers$(Q-O)$, $\quad |(P-O)+(Q-O)|$, $\quad (P-Q)$, $\quad (R-O)$, $\quad |R-Q|$

   e l'angolo che il vettore $(R-Q)$ forma con la direzione positiva dell'asse x.

2. Nel piano Oxy sono dati i vettori

   * $(P-O)$ di modulo 6 e formante un angolo di $\frac{2\pi}{3}$ con la direzione positiva dell'asse x,
   * $(Q-O)$ di modulo 2 e formante un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con la direzione positiva dell'asse x.

   Determinare

   $|(P-O)+2(Q-O)|$ e $|P-Q|$.

3. In un riferimento cartesiano $0xyz$ sono dati i punti P, Q e R di coordinate rispettivamente $(1,2,0)$, $(-1,1,1)$ e $(0,0,3)$. Determinare le componenti e i moduli dei vettori

   $(P-Q)$, $(Q-P)$, $(P-R)$ e $(Q-R)$.

4. In un riferimento cartesiano $0xyz$ sono dati i vettori

   $(P-O)=2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}-\hat{k}$, $(Q-O)=\hat{\imath}-\hat{\jmath}$ e $(R-O)=4\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+\hat{k}$.

   Scrivere le componenti del vettore

   $2(P-O)+(Q-O)+3(R-Q)$.

5. In un riferimento cartesiano $0xyz$ sono dati i vettori

   $(P-O)=2\hat{\imath}+2\sqrt{3}\hat{\jmath}$ e $(Q-O)=-\sqrt{3}\hat{\jmath}$.

   Calcolare

   $|P-O|$, $\quad |Q-O|$, $\quad (P-O)\cdot(Q-O)$ e $|(P-O)\wedge(Q-O)|$.

6. In un riferimento cartesiano $0xyz$ sono dati i vettori

   $(P-O)=2\hat{\imath}-3\hat{\jmath}$, $\quad (Q-O)=\sqrt{2}\hat{\imath}-\sqrt{3}\hat{\jmath}$ e $(R-O)=-2\sqrt{2}\hat{\imath}+\hat{\jmath}$.

   Calcolare

   $(P-O)\cdot(Q-O)$, $\quad (P-O)\wedge(Q-O)$, $\quad (Q-O)\wedge(P-O)$,
   $(P-O)\cdot(Q-O)\wedge(R-O)$, $\quad [(P-O)\wedge(Q-O)]\wedge(R-O)$, $\quad (P-O)\wedge[(Q-O)\wedge(R-O)]$.

7. In un riferimento cartesiano $0xyz$ sono dati i vettori

   $(P-O)=2\hat{\imath}+\hat{\jmath}$, $\quad (Q-O)=\sqrt{2}\hat{\imath}+2\sqrt{2}\hat{\jmath}-\hat{k}$ e $(R-O)=-2\hat{\imath}-\hat{\jmath}+\sqrt{2}\hat{k}$.

   Calcolare

   $(P-O)\cdot(Q-O)$, $\quad (Q-O)\cdot(R-O)$, $\quad (Q-O)\wedge(R-O)$, $\quad (P-O)\wedge(Q-O)\cdot(R-O)$,
   $(R-O)\cdot(Q-O)\wedge(P-O)$, $\quad [(P-O)\wedge(Q-O)]\wedge(R-O)$, $\quad (P-O)\wedge[(Q-O)\wedge(R-O)]$.

8. Dati i vettori
   $(P-O)=-\hat{\imath}+\hat{\jmath}$ e $(Q-O)=3\hat{\imath}+3\hat{\jmath}$,
   determinare, se esistono, vettori $\mathbf{v}$ tali che
   $\mathbf{v}\wedge(P-O)=(Q-O)$.

9. Dati i vettori
   $(P-O)=2\hat{\imath}+\hat{\jmath}-\hat{k}$ e $(Q-O)=3\hat{\imath}+3\hat{\jmath}+\hat{k}$,
   determinare, se esistono, vettori $\mathbf{v}$ tali che
   $\mathbf{v}\wedge(P-O)=(Q-O)$.

10. Dati i vettori
$(P-O)=2\hat{\boldsymbol{\imath}}+\hat{\boldsymbol{\jmath}}-\hat{\boldsymbol{k}}$ e $(Q-O)=3\hat{\boldsymbol{\imath}}+3\hat{\boldsymbol{\jmath}}+9\hat{\boldsymbol{k}}$,
determinare, se esistono, vettori $\mathbf{v}$ tali che
$\mathbf{v}\wedge(P-O)=(Q-O)$.

Soluzioni

1. * $|Q-O|=2\sqrt{3}$, $\quad \mathrm{vers}(Q-O)=\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\imath}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, $\quad |(P-O)+(Q-O)|=2\sqrt{7}$, $\quad (P-Q)=\sqrt{3}\hat{\boldsymbol{\imath}}+5\hat{\boldsymbol{\jmath}}$,
$(R-O)=2\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, $\quad |R-Q|=2\sqrt{7}$ $\quad \alpha=\pi-\arctan\frac{5}{\sqrt{3}}$.

2. * $|(P-O)+2(Q-O)|=2\sqrt{13-3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$, $\quad |P-Q|=\sqrt{40-6(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$

3. * $(P-Q)=2\hat{\boldsymbol{\imath}}+\hat{\boldsymbol{\jmath}}-\hat{\boldsymbol{k}}$, $|P-Q|=\sqrt{6}$, $(Q-P)=-2\hat{\boldsymbol{\imath}}-\hat{\boldsymbol{\jmath}}+\hat{\boldsymbol{k}}$, $|Q-P|=\sqrt{6}$,
$(P-R)=\hat{\boldsymbol{\imath}}+2\hat{\boldsymbol{\jmath}}-3\hat{\boldsymbol{k}}$, $|P-R|=\sqrt{14}$, $(Q-R)=-\hat{\boldsymbol{\imath}}+\hat{\boldsymbol{\jmath}}-2\hat{\boldsymbol{k}}$, $|Q-R|=\sqrt{6}$

4. * $2(P-O)+(Q-O)+3(R-Q)=14\hat{\boldsymbol{\imath}}+2\hat{\boldsymbol{\jmath}}+\hat{\boldsymbol{k}}$.

5. * $|P-O|=4$, $\quad |Q-O|=\sqrt{3}$, $\quad (P-O)\cdot(Q-O)=-6$, $\quad |(P-O)\wedge(Q-O)|=2\sqrt{3}$.

6. * $(P-O)\cdot(Q-O)=2\sqrt{2}+3\sqrt{3}$, $\quad (P-O)\wedge(Q-O)=(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})\hat{\boldsymbol{k}}$,
$(Q-O)\wedge(P-O)=-(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})\hat{\boldsymbol{k}}$, $\quad (P-O)\cdot(Q-O)\wedge(R-O)=0$ (i tre vettori sono complanari),
$[(P-O)\wedge(Q-O)]\wedge(R-O)=(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(\hat{\boldsymbol{\imath}}+2\sqrt{2}\hat{\boldsymbol{\jmath}})$,
$(P-O)\wedge[(Q-O)\wedge(R-O)]=\sqrt{2}(2\sqrt{3}-1)(3\hat{\boldsymbol{\imath}}+2\hat{\boldsymbol{\jmath}})$.

7. * $(P-O)\cdot(Q-O)=4\sqrt{2}$, $\quad (Q-O)\cdot(R-O)=-5\sqrt{2}$, $\quad (Q-O)\wedge(R-O)=3(\hat{\boldsymbol{\imath}}+\sqrt{2}\hat{\boldsymbol{k}})$,
$(P-O)\wedge(Q-O)\cdot(R-O)=6$, $\quad (R-O)\cdot(Q-O)\wedge(P-O)=-6$,
$[(P-O)\wedge(Q-O)]\wedge(R-O)=5(\sqrt{2}\hat{\boldsymbol{\imath}}-\sqrt{2}\hat{\boldsymbol{\jmath}}+\hat{\boldsymbol{k}})$,
$(P-O)\wedge[(Q-O)\wedge(R-O)]=3(\sqrt{2}\hat{\boldsymbol{\imath}}-2\sqrt{2}\hat{\boldsymbol{\jmath}}-\hat{\boldsymbol{k}})$

8. * $\mathbf{v}=-3\hat{\boldsymbol{k}}+\lambda(\hat{\boldsymbol{\imath}}-\hat{\boldsymbol{\jmath}})$, $\qquad \lambda\in\mathcal{R}$

9. * non esiste alcun vettore $\mathbf{v}$.

10. * $\mathbf{v}=2\hat{\boldsymbol{\imath}}-\frac{7}{2}\hat{\boldsymbol{\jmath}}+\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{k}}+\lambda(2\hat{\boldsymbol{\imath}}+\hat{\boldsymbol{\jmath}}-\hat{\boldsymbol{k}})$, $\qquad \lambda\in\mathcal{R}$