1. Determinare, se è possibile:

i. una matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ con determinante 4 e traccia 3.

ii. Due matrici distinte $B, C \in M_3(\mathbb{R})$ a scala ridotta e equivalenti per righe.

iii. Due matrici $D, E \in M_3(\mathbb{R})$ aventi lo stesso determinante ma non lo stesso rango.

iv. Una matrice $F \in M_3(\mathbb{R})$ che possa essere la matrice di Gram associata (rispetto una base qualsiasi) a un prodotto interno φ che non ammette vettori isotropi e con $\mathrm{Rad}(\varphi) = \mathrm{Span}\{(2,3,4)\}$.

v. Una matrice $G \in M_3(\mathbb{R})$ priva di autovalori reali.

2. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$f((1,0,0)) = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \quad f((0,1,0)) = (6,2,3) \quad f((2,1,1)) = (4,2,2)$$

i. Determinare la matrice canonicamente associata a f.

ii. Stabilire se f è diagonalizzabile.

iii. Determinare una base del complemento ortogonale di $f(W)$ rispetto al prodotto scalare canonico, con $W = \mathrm{Span}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

iv. Determinare una rappresentazione cartesiana di uno degli autospazi di f^{2016}.

v. Stabilire se esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $f(v) = v + (4,2,0)$.

3. Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino i punti $P(1,1,0)$, $Q(1,0,1)$, $R(0,0,2)$ e $S(1,3,1)$. Si determini:

i. l'equazione del piano π contenente P, Q e R;

ii. l'equazione della retta t perpendicolare a π passante per S;

iii. la distanza di S dal piano π;

iv. la posizione reciproca di t e del piano $x - ay - z = 3$ al variare del parametro reale a.