

Fisica Generale T-1 (soluzioni quesiti d'esame)

Urbinati Cristian

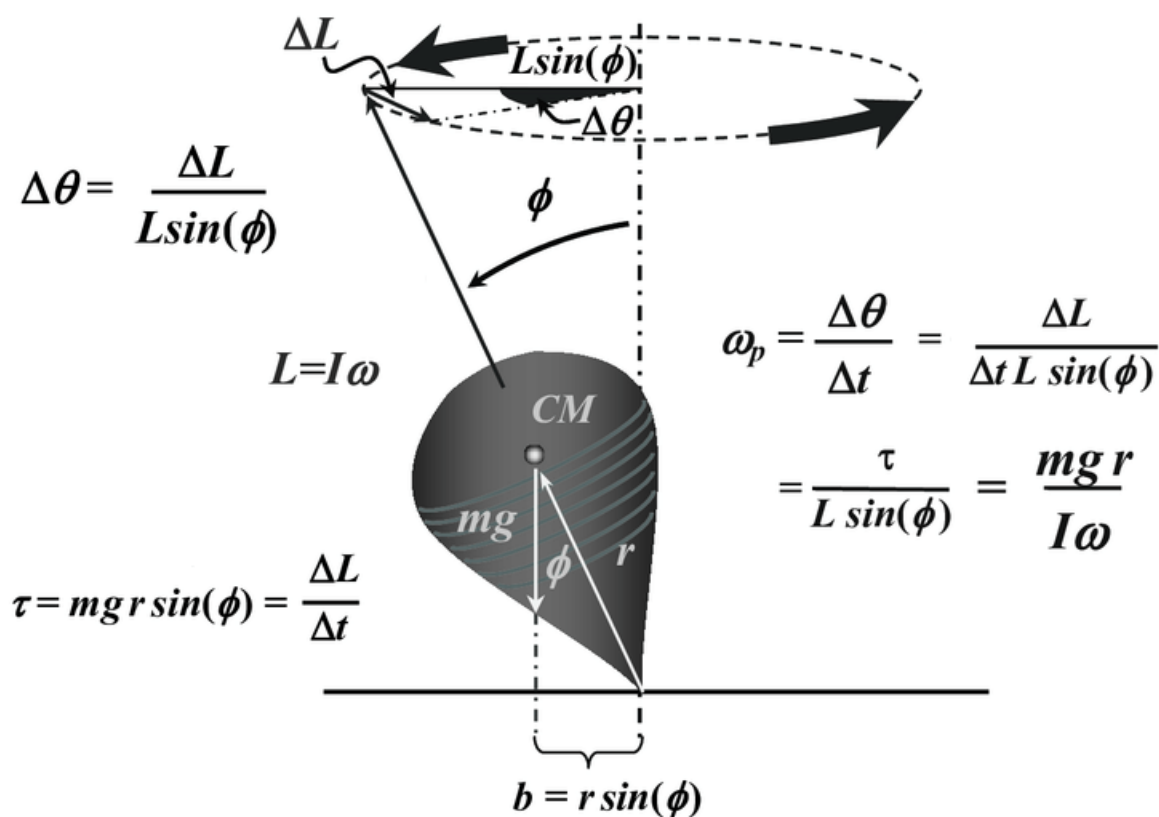
16/07/2018

e-mail: cristian.urbinati@studio.unibo.it

Altro : https://github.com/urbinaticri/Unibo_computerEngineeringNotes

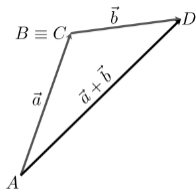
Materiale distribuito con licenza Creative Commons

Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 2.0 Italia (CC BY-NC-SA 2.0 IT)

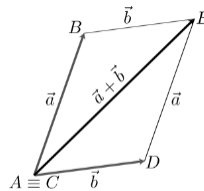


1 Calcolo vettoriale

1.0.1 v_df_01



Quesito v_df_01, fig. 1

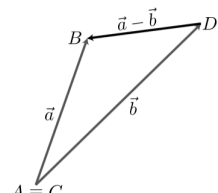


Quesito v_df_01, fig. 2

(a) La somma di due vettori può essere definita equivalentemente mediante la regola del triangolo (fig.1), oppure mediante la regola del parallelogrammo (fig.2).

$$(b) \begin{cases} \vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \\ \vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \hat{i} + (a_y + b_y) \hat{j} + (a_z + b_z) \hat{k}$$

1.0.2 v_df_02



Quesito v_df_02, Fig. 1

(a) La differenza di due vettori è definita mediante la regola del triangolo (fig. 1).

$$(b) \begin{cases} \vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \\ \vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x) \hat{i} + (a_y - b_y) \hat{j} + (a_z - b_z) \hat{k}$$

1.0.3 v_df_03

(a) Si definisce prodotto scalare di due vettori \vec{a} e \vec{b} il prodotto dei rispettivi moduli per il coseno dell'angolo compreso tra i due vettori posti con l'origine coincidente: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$

$$(b) \begin{cases} \vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \\ \vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

1.0.4 v_df_04

(a) Si definisce prodotto vettoriale di due vettori \vec{a} e \vec{b} il vettore che ha modulo pari all'area del parallelogramma formato dai due vettori, direzione perpendicolare a entrambi i vettori e verso determinato dalla regola della mano destra: $\vec{a} \wedge \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta$

$$(b) \begin{cases} \vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \\ \vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}$$

1.0.5 v_df_05

(a) Si definisce moltiplicazione scalare di un vettore \vec{a} per un numero reale α : $\vec{c} = \alpha \vec{a} = |\alpha| \|\vec{a}\|$, $\begin{cases} \vec{c} \nearrow \vec{a}, & \text{se } \alpha \geq 0 \\ \vec{c} \nearrow \searrow \vec{a}, & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$

$$(b) \vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \Rightarrow \alpha \vec{a} = (\alpha a_x) \hat{i} + (\alpha a_y) \hat{j} + (\alpha a_z) \hat{k}$$

1.0.6 v_df_06

Assegnati i versori della base intrinseca $\{\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}\}$ come funzioni della coordinata intrinseca s definiamo la curvatura di una traiettoria γ come: $\kappa = \left\| \frac{d\hat{t}}{ds} \right\|$. La torsione di una traiettoria γ è definita come: $\tau(s) = -\hat{n}(s) \cdot \frac{d\hat{b}(s)}{ds}$.

1.0.7 v_op_01

Dati i moduli fissati $a = 13$ e $b = 25$ di due vettori \vec{a} e \vec{b} , dalla disuguaglianza triangolare si ha che

$$\left| \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\| \right| \leq \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

e dunque:

- Il valore minimo del modulo $\|\vec{a} + \vec{b}\|$ è 12
- Il valore massimo del modulo $\|\vec{a} + \vec{b}\|$ è 38

1.0.8 v_op_02

Dati i moduli fissati $a = 15$ e $b = 27$ di due vettori \vec{a} e \vec{b} , dalla disuguaglianza triangolare si ha che

$$\left| \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\| \right| \leq \|\vec{a} - \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

e dunque:

- Il valore minimo del modulo $\|\vec{a} - \vec{b}\|$ è 12
- Il valore massimo del modulo $\|\vec{a} - \vec{b}\|$ è 42

1.0.9 v_op_03

Dati i moduli fissati $a = 15$ e $b = 27$ di due vettori \vec{a} e \vec{b} , essendo che

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta \quad \theta \in [0, \pi]$$

allora

- Il valore minimo del prodotto si avrà con $\theta = \pi$ e il valore sarà -405
- Il valore massimo del prodotto si avrà con $\theta = 0$ e il valore sarà 405

1.0.10 v_op_04

Dati i moduli fissati $a = 13$ e $b = 25$ di due vettori \vec{a} e \vec{b} , essendo che

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| |\sin \theta| \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

allora

- Il valore minimo del prodotto si avrà con $\theta = 0$ e il valore sarà 0
- Il valore massimo del prodotto si avrà con $\theta = \frac{\pi}{2}$ e il valore sarà 325

1.0.11 v_op_05

(a) Dato un vettore \vec{v} indichiamo il modulo $\|\vec{v}\|$ come la distanza tra l'origine e il vertice del vettore. Ricaviamo il versore associato dalla formula $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

(b) Sia dato $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$ un generico vettore espresso in base cartesiana. Esprimiamo il modulo di tale vettore $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ e il versore associato come $\hat{v} = \frac{v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$.

1.0.12 v_op_06

Dato un vettore \vec{v} e una direzione orientata \hat{u} esprimiamo la componente v_u del vettore \vec{v} rispetto alla direzione \hat{u} come $v_u = \vec{v} \cdot \hat{u}$. Esprimiamo invece il vettore componenete $\vec{v}_u = (\vec{v} \cdot \hat{u}) \hat{u}$.

1.0.13 v_rp_01

Gli intervalli di variabilità delle coordinate cartesiane sono:

$$x \in]-\infty, +\infty[\quad y \in]-\infty, +\infty[\quad z \in]-\infty, +\infty[$$

Gli intervalli di variabilità delle coordinate cilindriche sono:

$$r \in]0, +\infty[\quad \varphi \in]0, 2\pi[\quad z \in]-\infty, +\infty[$$

Gli intervalli di variabilità delle coordinate sferiche sono:

$$\rho \in]0, +\infty[\quad \theta \in]0, \pi[\quad \varphi \in]0, 2\pi[$$

L'intervallo di variabilità della coordinata intrinseca è:

$$s \in]-\infty, +\infty[$$

1.0.14 v_rp_02

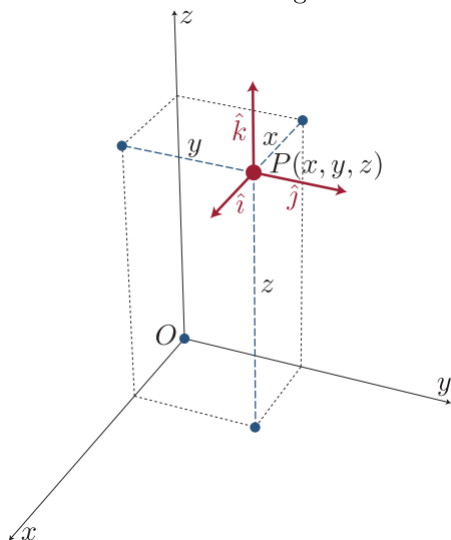
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan_2(y, x) \text{ dove } \arctan_2(y, x) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0, y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi & \text{se } x > 0, y < 0 \\ \frac{1}{2}\pi & \text{se } x = 0, y > 0 \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } x = 0, y < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, y = 0 \end{cases} \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

1.0.15 v_rp_03

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan_2(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \text{ dove } \arctan_2(y, x) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0, y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi & \text{se } x > 0, y < 0 \\ \frac{1}{2}\pi & \text{se } x = 0, y > 0 \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } x = 0, y < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, y = 0 \end{cases} \\ \varphi = \arctan_2(y, x) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

1.0.16 v_rp_04

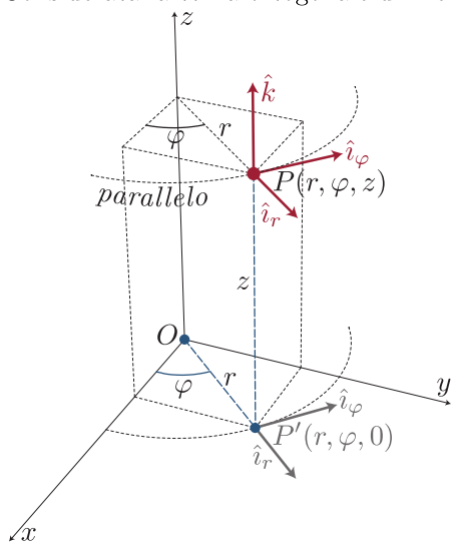
Considerata la terna ortogonale di riferimento $Oxyz$:



$$\begin{cases} \hat{i} \nearrow x \\ \hat{j} \nearrow y \\ \hat{k} \nearrow z \end{cases}$$

1.0.17 v_rp_05

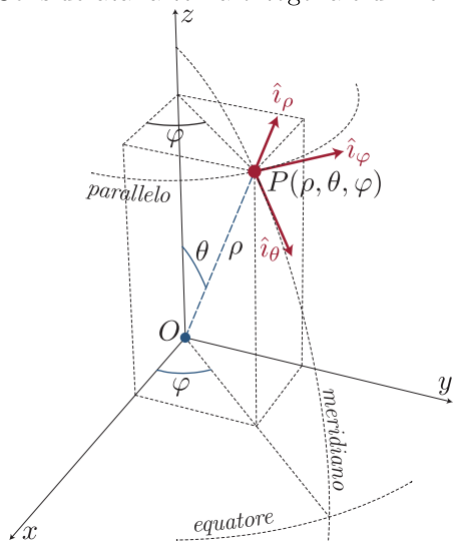
Considerata la terna ortogonale di riferimento $Oxyz$:



$$\begin{cases} \hat{i}_r = \text{vers}(\vec{r}_{OP'}) = \frac{\vec{r}_{OP'}}{\|\vec{r}_{OP'}\|} \\ \hat{i}_\varphi = \text{vers}(\hat{k} \wedge \hat{i}_r) = \hat{k} \wedge \hat{i}_r \\ \hat{k} \nearrow \nearrow z \end{cases}$$

1.0.18 v_rp_06

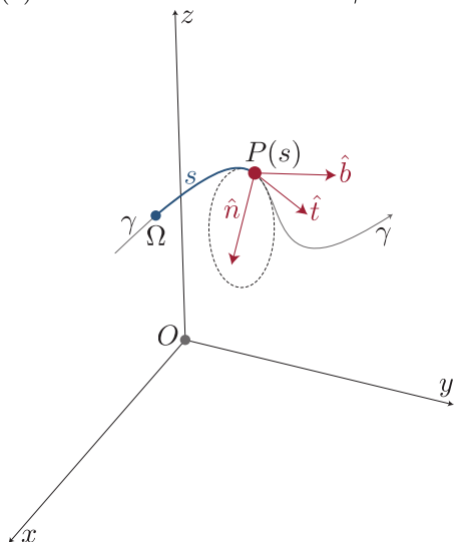
Considerata la terna ortogonale di riferimento $Oxyz$ e $\hat{k} \nearrow \nearrow z$:



$$\begin{cases} \hat{i}_\rho = \text{vers}(\vec{r}_{OP}) = \frac{\vec{r}_{OP}}{\|\vec{r}_{OP}\|} \\ \hat{i}_\theta = \text{vers}(\hat{i}_\varphi \wedge \hat{i}_\rho) = \hat{i}_\varphi \wedge \hat{i}_\rho \\ \hat{i}_\varphi = \text{vers}(\hat{k} \wedge \hat{i}_\rho) = \frac{\hat{k} \wedge \hat{i}_\rho}{\sin \theta} \end{cases}$$

1.0.19 v_rp_07

(a) Considerata la traiettoria γ



- Il versore \hat{t} è tangente alla traiettoria γ nel punto $P(s)$
- Il versore \hat{n} giace sul piano osculatore alla traiettoria γ nel punto $P(s)$, direzione del diametro e verso centripeto
- Il versore \hat{b} è perpendicolare sia a \hat{t} che a \hat{n} ed ha verso determinato dalla regola della mano destra

(b)

$$\begin{cases} \hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \\ \hat{n} = \rho \frac{d\hat{t}}{ds} \\ \hat{b} = \hat{t} \wedge \hat{n} \end{cases}$$

1.0.20 v_rp_08

$$\begin{cases} \hat{i}_r(\varphi) = (\cos \varphi)\hat{i} + (\sin \varphi)\hat{j} \\ \hat{i}_\varphi(\varphi) = -(\sin \varphi)\hat{i} + (\cos \varphi)\hat{j} \\ \hat{k} = \hat{k} \end{cases}$$

1.0.21 v_rp_09

$$\begin{cases} \hat{i} = (\cos \varphi)\hat{i}_r(\varphi) - (\sin \varphi)\hat{i}_\varphi(\varphi) \\ \hat{j} = (\sin \varphi)\hat{i}_r(\varphi) + (\cos \varphi)\hat{i}_\varphi(\varphi) \\ \hat{k} = \hat{k} \end{cases}$$

1.0.22 v_rp_10

(a) $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$

(b) $\vec{r}_{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

1.0.23 v_rp_11

(a) $\vec{v} = v_r\hat{i}_r(\varphi) + v_\varphi\hat{i}_\varphi(\varphi) + v_z\hat{k}$

(b) $\vec{r}_{OP} = r\hat{i}_r(\varphi) + z\hat{k}$

1.0.24 v_rp_12

- (a) $\vec{v} = v_\rho \hat{i}_\rho(\theta, \varphi) + v_\theta \hat{i}_\theta(\theta, \varphi) + v_\varphi \hat{i}_\varphi(\theta, \varphi)$
 (b) $\vec{r}_{OP} = \rho \hat{i}_\rho(\theta, \varphi)$

1.0.25 v_rp_13

Poichè i versori non dipendono dalle coordinate, essendo la base cartesiana una base globale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{i}}{\partial x} &= \vec{0}, & \frac{\partial \hat{j}}{\partial y} &= \vec{0}, & \frac{\partial \hat{k}}{\partial z} &= \vec{0} \\ \frac{\partial \hat{j}}{\partial x} &= \vec{0}, & \frac{\partial \hat{i}}{\partial y} &= \vec{0}, & \frac{\partial \hat{k}}{\partial z} &= \vec{0} \\ \frac{\partial \hat{k}}{\partial x} &= \vec{0}, & \frac{\partial \hat{k}}{\partial y} &= \vec{0}, & \frac{\partial \hat{k}}{\partial z} &= \vec{0} \end{aligned}$$

1.0.26 v_rp_14

Essendo:

$$\begin{cases} \hat{i}_r(\varphi) = (\cos \varphi) \hat{i} + (\sin \varphi) \hat{j} \\ \hat{i}_\varphi(\varphi) = -(\sin \varphi) \hat{i} + (\cos \varphi) \hat{j} \end{cases}$$

allora $\frac{\partial \hat{i}_r(\varphi)}{\partial \varphi} = -(\sin \varphi) \hat{i} + (\cos \varphi) \hat{j} = \hat{i}_\varphi$ e $\frac{\partial \hat{i}_\varphi(\varphi)}{\partial \varphi} = -(\cos \varphi) \hat{i} - (\sin \varphi) \hat{j} = -\hat{i}_r$ e dunque:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{i}_r(\varphi)}{\partial r} &= \vec{0}, & \frac{\partial \hat{i}_r(\varphi)}{\partial \varphi} &= \hat{i}_\varphi, & \frac{\partial \hat{i}_r(\varphi)}{\partial z} &= \vec{0} \\ \frac{\partial \hat{i}_\varphi(\varphi)}{\partial r} &= \vec{0}, & \frac{\partial \hat{i}_\varphi(\varphi)}{\partial \varphi} &= -\hat{i}_r, & \frac{\partial \hat{i}_\varphi(\varphi)}{\partial z} &= \vec{0} \\ \frac{\partial \hat{k}}{\partial r} &= \vec{0}, & \frac{\partial \hat{k}}{\partial \varphi} &= \vec{0}, & \frac{\partial \hat{k}}{\partial z} &= \vec{0} \end{aligned}$$

1.0.27 v_rp_15

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{t}(s)}{ds} &= \kappa \hat{n} \\ \frac{d\hat{n}(s)}{ds} &= -\kappa \hat{t} + \tau \hat{b} \\ \frac{d\hat{b}(s)}{ds} &= -\tau \hat{n} \end{aligned}$$

Ricaviamo la I dall'equazione $\hat{n} = \rho \frac{d\hat{t}}{ds} \Rightarrow \frac{d\hat{t}}{ds} = \underbrace{\frac{1}{\rho}}_{\kappa} \hat{n}$

Ricaviamo la III dalla scomposizione del vettore $\frac{d\hat{b}}{ds} = \left(\frac{d\hat{b}}{ds} \cdot \hat{t} \right) \hat{t} + \left(\frac{d\hat{b}}{ds} \cdot \hat{n} \right) \hat{n} + \left(\frac{d\hat{b}}{ds} \cdot \hat{b} \right) \hat{b} :$

$$1. \quad \frac{d\hat{b}}{ds} \cdot \hat{t} = \left[\frac{d}{ds} (\hat{t} \wedge \hat{n}) \right] \cdot \hat{t} = \left[\frac{d\hat{t}}{ds} \wedge \hat{n} + \hat{t} \wedge \frac{d\hat{n}}{ds} \right] \cdot \hat{t} = \underbrace{(\kappa \hat{n}) \wedge \hat{n}}_0 + \hat{t} \wedge \frac{d\hat{n}}{ds} \cdot \hat{t} = (\hat{t} \wedge \hat{t}) \cdot \frac{d\hat{n}}{ds} = 0$$

$$2. \quad \frac{d\hat{b}}{ds} \cdot \hat{n} = -\tau$$

$$3. \quad \frac{d\hat{b}}{ds} \cdot \hat{b} = \frac{d}{ds} (\underbrace{\hat{b} \cdot \hat{b}}_1) = 0$$

dunque $\frac{d\hat{b}}{ds} = 0\hat{t} - \tau\hat{n} + 0\hat{b} = -\tau\hat{n}$

Ricaviamo infine la II da $\frac{d\hat{n}}{ds} = \frac{d}{ds} (\hat{b} \wedge \hat{t}) = \frac{d\hat{b}}{ds} \wedge \hat{t} + \hat{b} \wedge \frac{d\hat{t}}{ds} = (-\tau\hat{n}) \wedge \hat{t} + \hat{b} \wedge (\kappa\hat{n}) = -\tau \underbrace{(\hat{n} \wedge \hat{t})}_{-\hat{b}} + \kappa \underbrace{(\hat{b} \wedge \hat{n})}_{-\hat{t}} = \tau\hat{b} - \kappa\hat{t}$

1.0.28 v__rp__16

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\hat{i} + \mathrm{d}y\hat{j} + \mathrm{d}z\hat{k}$$

$$\|\mathrm{d}\vec{r}\| = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}$$

1.0.29 v__rp__17

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\hat{i}_r + r\mathrm{d}\varphi\hat{i}_\varphi + \mathrm{d}z\hat{k}$$

$$\|\mathrm{d}\vec{r}\| = \sqrt{(\mathrm{d}r)^2 + r^2 (\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}z)^2}$$

1.0.30 v__rp__18

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\rho\hat{i}_\rho + \rho\mathrm{d}\theta\hat{i}_\theta + \rho(\sin\theta)\mathrm{d}\varphi\hat{i}_\varphi$$

$$\|\mathrm{d}\vec{r}\| = \sqrt{(\mathrm{d}\rho)^2 + \rho^2 (\mathrm{d}\theta)^2 + \rho^2 (\sin^2\theta) (\mathrm{d}\varphi)^2}$$

1.0.31 v__rp__19

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}s\hat{t}$$

$$\|\mathrm{d}\vec{r}\| = |\mathrm{d}s|$$

1.0.32 v__or__01

$$\begin{aligned} \hat{i} \cdot \hat{i} &= 1, & \hat{j} \cdot \hat{j} &= 1, & \hat{k} \cdot \hat{k} &= 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= 0, & \hat{j} \cdot \hat{k} &= 0, & \hat{k} \cdot \hat{i} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{i} \wedge \hat{i} &= \vec{0}, & \hat{j} \wedge \hat{j} &= \vec{0}, & \hat{k} \wedge \hat{k} &= \vec{0} \\ \hat{i} \wedge \hat{j} &= \hat{k}, & \hat{j} \wedge \hat{k} &= \hat{i}, & \hat{k} \wedge \hat{i} &= \hat{j} \end{aligned}$$

1.0.33 v__or__02

$$\begin{aligned} \hat{i}_r \cdot \hat{i}_r &= 1, & \hat{i}_\varphi \cdot \hat{i}_\varphi &= 1, & \hat{k} \cdot \hat{k} &= 1 \\ \hat{i}_r \cdot \hat{i}_\varphi &= 0, & \hat{i}_\varphi \cdot \hat{k} &= 0, & \hat{k} \cdot \hat{i}_r &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{i}_r \wedge \hat{i}_r &= \vec{0}, & \hat{i}_\varphi \wedge \hat{i}_\varphi &= \vec{0}, & \hat{k} \wedge \hat{k} &= \vec{0} \\ \hat{i}_r \wedge \hat{i}_\varphi &= \hat{k}, & \hat{i}_\varphi \wedge \hat{k} &= \hat{i}_r, & \hat{k} \wedge \hat{i}_r &= \hat{i}_\varphi \end{aligned}$$

1.0.34 v__or__03

$$\begin{aligned} \hat{i}_\rho \cdot \hat{i}_\rho &= 1, & \hat{i}_\theta \cdot \hat{i}_\theta &= 1, & \hat{i}_\varphi \cdot \hat{i}_\varphi &= 1 \\ \hat{i}_\rho \cdot \hat{i}_\theta &= 0, & \hat{i}_\theta \cdot \hat{i}_\varphi &= 0, & \hat{i}_\varphi \cdot \hat{i}_\rho &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{i}_\rho \wedge \hat{i}_\rho &= \vec{0}, & \hat{i}_\theta \wedge \hat{i}_\theta &= \vec{0}, & \hat{i}_\varphi \wedge \hat{i}_\varphi &= \vec{0} \\ \hat{i}_\rho \wedge \hat{i}_\theta &= \hat{i}_\varphi, & \hat{i}_\theta \wedge \hat{i}_\varphi &= \hat{i}_\rho, & \hat{i}_\varphi \wedge \hat{i}_\rho &= \hat{i}_\theta \end{aligned}$$

1.0.35 v__or__04

$$\begin{aligned} \hat{t} \cdot \hat{t} &= 1, & \hat{n} \cdot \hat{n} &= 1, & \hat{b} \cdot \hat{b} &= 1 \\ \hat{t} \cdot \hat{n} &= 0, & \hat{n} \cdot \hat{b} &= 0, & \hat{b} \cdot \hat{t} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{t} \wedge \hat{t} &= \vec{0}, & \hat{n} \wedge \hat{n} &= \vec{0}, & \hat{b} \wedge \hat{b} &= \vec{0} \\ \hat{t} \wedge \hat{n} &= \hat{b}, & \hat{n} \wedge \hat{b} &= \hat{t}, & \hat{b} \wedge \hat{t} &= \hat{n} \end{aligned}$$

1.0.36 v_di_01

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) = \\
 &= (a_x b_x) \cdot \left(\underbrace{\hat{i} \cdot \hat{i}}_1 \right) + (a_x b_y) \cdot \left(\underbrace{\hat{i} \cdot \hat{j}}_0 \right) + (a_x b_z) \cdot \left(\underbrace{\hat{i} \cdot \hat{k}}_0 \right) \\
 &+ (a_y b_x) \cdot \left(\underbrace{\hat{j} \cdot \hat{i}}_0 \right) + (a_y b_y) \cdot \left(\underbrace{\hat{j} \cdot \hat{j}}_1 \right) + (a_y b_z) \cdot \left(\underbrace{\hat{j} \cdot \hat{k}}_0 \right) \\
 &+ (a_z b_x) \cdot \left(\underbrace{\hat{k} \cdot \hat{i}}_0 \right) + (a_z b_y) \cdot \left(\underbrace{\hat{k} \cdot \hat{j}}_0 \right) + (a_z b_z) \cdot \left(\underbrace{\hat{k} \cdot \hat{k}}_1 \right) \\
 &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z
 \end{aligned}$$

1.0.37 v_di_02

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \wedge \vec{b} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \wedge (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) = \\
 &= (a_x b_x) \wedge \left(\underbrace{\hat{i} \wedge \hat{i}}_{\vec{0}} \right) + (a_x b_y) \wedge \left(\underbrace{\hat{i} \wedge \hat{j}}_{\hat{k}} \right) + (a_x b_z) \wedge \left(\underbrace{\hat{i} \wedge \hat{k}}_{-\hat{j}} \right) \\
 &+ (a_y b_x) \wedge \left(\underbrace{\hat{j} \wedge \hat{i}}_{-\hat{k}} \right) + (a_y b_y) \wedge \left(\underbrace{\hat{j} \wedge \hat{j}}_{\vec{0}} \right) + (a_y b_z) \wedge \left(\underbrace{\hat{j} \wedge \hat{k}}_{\hat{i}} \right) \\
 &+ (a_z b_x) \wedge \left(\underbrace{\hat{k} \wedge \hat{i}}_{\hat{j}} \right) + (a_z b_y) \wedge \left(\underbrace{\hat{k} \wedge \hat{j}}_{-\hat{i}} \right) + (a_z b_z) \wedge \left(\underbrace{\hat{k} \wedge \hat{k}}_{\vec{0}} \right) \\
 &= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}
 \end{aligned}$$

1.0.38 v_di_03

Presi due diversi centri di riduzione, O e O' , detti $\vec{\mathcal{M}}^{(O)}$ e $\vec{\mathcal{M}}^{(O')}$ i momenti risultanti rispetto a tali centri e osservando che $\vec{r}_{O'P_i} = \vec{r}_{O'O} + \vec{r}_{OP_i} \Rightarrow \vec{r}_{O'O} = \vec{r}_{O'P_i} - \vec{r}_{OP_i}$ si ha che:

$$\vec{\mathcal{M}}^{(O')} - \vec{\mathcal{M}}^{(O)} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{O'P_i} \wedge \vec{F}_i - \sum_{i=1}^n \vec{r}_{OP_i} \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_{O'P_i} - \vec{r}_{OP_i}] \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_{O'O} - \vec{r}_{O'O}] \wedge \vec{F}_i = \vec{r}_{O'O} \wedge \vec{\mathcal{R}}$$

Da qui si evince facilmente che se $\vec{\mathcal{R}} = \vec{0}$ allora si annulla il prodotto vettoriale e risulta $\vec{\mathcal{M}}^{(O')} = \vec{\mathcal{M}}^{(O)}$.

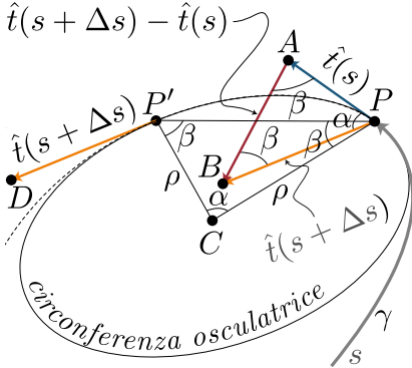
1.0.39 v_di_04

Sia $\vec{r} = \vec{r}(s)$, allora il versore tangente si esprimerà come $\frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(s+\Delta s) - \vec{r}(s)}{\Delta s}$. Il numeratore ha direzione della secante della traiettoria γ nei punti $\vec{r}(s + \Delta s)$ e $\vec{r}(s)$; tuttavia nel limite in cui $\Delta s \rightarrow 0$ la secante diviene la tangente e la sua lunghezza diviene pari alla lunghezza dell'arco cioè $\Delta \vec{r} = \vec{r}(s + \Delta s) - \vec{r}(s) = \|\Delta \vec{r}\| \text{ vers } (\Delta \vec{r}) \sim \Delta s \hat{t}$.

Sostituendo nel limite avremo dunque che $\frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \hat{t}(s)$.

1.0.40 v_di_05

Sia $\hat{t}(s)$ il versore tangente a una traiettoria γ e $\rho(s)$ il raggio di curvatura, allora il versore normale si esprimerà come $\frac{d\hat{t}(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\hat{t}(s+\Delta s) - \hat{t}(s)}{\Delta s}$.



Ora, da come possiamo osservare in figura, $\hat{A}PB = \hat{P}CP'$ in quanto $AP \perp CP$ e $BP \perp CP'$.

Tuttavia nel limite in cui $\Delta s \rightarrow 0$ l'angolo $\hat{A}PB$ tenderà a 0 mentre gli angoli alla base tenderanno a $\frac{\pi}{2}$, dunque $[\hat{t}(s+\Delta s) - \hat{t}(s)] \perp \hat{t}(s)$, 0 e allora $\text{vers}(\hat{t}(s+\Delta s) - \hat{t}(s)) \sim \hat{n}(s)$, $\Delta s \rightarrow 0$.

Inoltre possiamo dire con certezza che sia $\hat{P}AB$ che $\hat{P}CP'$ sono isosceli e tra loro simili in quanto hanno due lati uguali (nel caso di $\hat{P}AB$ perchè sono due versori e nel caso di $\hat{P}CP'$ perchè sono il raggio della circonferenza osculatrice), dunque angoli alla base uguali, e l'angolo al vertice in alto uguale.

Essendo simili allora hanno i lati proporzionali: $\frac{\overline{AB}}{\overline{PP'}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{CP}}$ e allora $\overline{AB} = \frac{\overline{PA}}{\overline{CP}} \overline{PP'}$.

Otteniamo quindi che $\Delta \hat{t} = \hat{t}(s+\Delta s) - \hat{t}(s) = \|\Delta \hat{t}\| \text{vers}(\Delta \hat{t}) = \frac{1}{\rho} \overline{PP'} \hat{n} \sim \frac{1}{\rho} \Delta s \hat{n}$, $\Delta s \rightarrow 0$

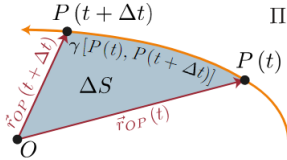
Sostituendo nel limite avremo dunque che $\frac{d\hat{t}(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\rho} \Delta s \hat{n}}{\Delta s} = \frac{1}{\rho} \hat{n}$

2 Cinematica

2.0.1 k_df_01

- (a) Il giorno solare è l'intervallo di tempo tra due successivi passaggi del Sole dal meridiano locale.
(b) Il giorno sidereo è l'intervallo di tempo tra due successivi passaggi di una stella fissa dal meridiano locale.
(c) In un anno solare, a causa del moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole, c'è un giorno in meno rispetto ad un anno sidereo. Infatti mentre $\tau_{sol} = 24h$, $\tau_{sid} \sim 23h\ 56m$. Dunque $\tau_{sol} - \tau_{sid} \sim 4m$.

2.0.2 k_df_02



Quesito k_df_02. fig. 1

- (a) Definiamo velocità areolare istantanea di un punto materiale P rispetto ad un centro di riduzione O l'area spazzata dal vettore posizionale \vec{r}_{OP} nell'unità di tempo, calcolata sulla base di un intervallo di tempo infinitesimo.
(b) L'espressione della velocità areolare in funzione del vettore posizionale e della velocità è: $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r}_{OP} \wedge \vec{v}_P$.
(c) L'espressione della velocità areolare nella base cilindrica è: $\vec{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \hat{k}$.

2.0.3 k_df_03

A partire dall'anno 1967 il secondo è definito come multiplo del periodo di oscillazione della radiazione elettromagnetica emessa dagli atomi di Cesio 133 nella transizione tra due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo.

2.0.4 k_df_04

A partire dall'anno 1983 il metro è definito come la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in $\approx \frac{1}{300000000}$ di secondo.

2.0.5 k_rp_01

Legge vettoriale del moto:

- (a) in forma vettoriale: $\vec{r} = \vec{r}(t)$
(b) nella base cartesiana: $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$
(c) nella base cilindrica: $\vec{r}(t) = r(t)\hat{i}_r(\varphi(t)) + z(t)\hat{k}$
(d) nella base sferica: $\vec{r}(t) = \rho(t)\hat{i}_\rho(\theta(t), \varphi(t))$
(e) nella base intrinseca: $\vec{r}(t) = \vec{r}(s(t))$

2.0.6 k_rp_02

Espressione della velocità vettoriale:

- (a) nella base cartesiana: $\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$
(b) nella base cilindrica: $\vec{v} = \dot{r}\hat{i}_r + r\dot{\varphi}\hat{i}_\varphi + \dot{z}\hat{k}$
(c) nella base intrinseca: $\vec{v} = \dot{s}\hat{t}$

2.0.7 k_rp_03

Espressione dell'accelerazione vettoriale:

- (a) nella base cartesiana: $\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$
(b) nella base cilindrica: $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{i}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\hat{i}_\varphi + \ddot{z}\hat{k}$
(c) nella base intrinseca: $\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{n}$

2.0.8 k_in_01

- (a) L'accelerazione è tangente alla traiettoria se il moto è rettilineo ($\rho \rightarrow \infty$)
(b) L'accelerazione è normale alla traiettoria se il moto è curvilineo uniforme ($\dot{s} \equiv cost.$)

2.0.9 k_in_02

In un moto rettilineo non uniforme di un punto materiale le componenti nulle sono la normale e la binormale poichè per $\rho \rightarrow +\infty$ la componente normale si annulla e non compare alcuna componente binormale nell'espressione intrinseca dell'accelerazione $\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{n}$.

2.0.10 k_in_03

In un moto curvilineo uniforme di un punto materiale le componenti dell'accelerazione nulle sono la tangente e la binormale poichè, essendo uniforme, la velocità è costante e dunque $\ddot{s} = 0$ e non compare alcuna componente binormale nell'espressione intrinseca dell'accelerazione $\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{n}$.

2.0.11 k_in_04

(a) Sì, la velocità di un punto materiale è sempre tangente alla sua traiettoria, come si può osservare derivando rispetto alla base intrinseca in cui emerge soltanto la componente tangente.

(b) No, L'accelerazione di un punto materiale non è sempre tangente alla sua traiettoria, un controesempio può essere il moto circolare uniforme in cui l'accelerazione ha solo componente normale alla traiettoria (accelerazione centripeta).

2.0.12 k_in_05

L'espressione della velocità nella base intrinseca è: $\vec{v} = \dot{s}\hat{t}$, quella dell'accelerazione invece è: $\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{n}$. Possiamo osservare come dall'espressione della velocità si evidenzia il fatto che la velocità è sempre tangente alla traiettoria mentre nel caso dell'accelerazione sono presenti sia la componente tangente che quella normale.

2.0.13 k_in_06

(a) La relazione $v = \|\vec{v}\| = \frac{ds}{dt}$ è corretta poichè $v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_t^2} = \sqrt{\dot{s}^2} = \dot{s}$.

(b) La relazione $a = \|\vec{a}\| = \frac{d^2s}{dt^2}$ è errata poichè in generale $a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\ddot{s}^2 + \frac{\dot{s}^4}{\rho^2}}$. La relazione corretta pertanto è $a \geq \frac{d^2s}{dt^2}$ e il segno di uguaglianza vale soltanto in caso di quiete ($\dot{s} = 0$) o di moto rettilineo ($\rho \rightarrow +\infty$).

2.0.14 k_cr_01

Si chiama numero dei gradi di libertà di un sistema meccanico il minimo numero di parametri necessari per individuare una sua generica configurazione.

2.0.15 k_cr_02

Un sistema di 2 punti materiali vincolati a mantenere distanza inalterata ha 5GdL: 3 coordinate per descrivere la posizione del primo punto + 2 per determinare raggio e coordinata intrinseca rispetto alla circonferenza con centro nel primo punto.

Un sistema di 3 punti materiali vincolati a mantenere distanza inalterata ha 6GdL: per descrivere il terzo punto basta la coordinata intrinseca sulla circonferenza di centro sul segmento che congiunge i primi due punti e giacente sul piano perpendicolare a tale segmento.

Un sistema di 4 o 5 punti materiali vincolati a mantenere distanza inalterata ha distanza 6GdL: fissati i primi tre punti tutti gli altri sono vincolati a questi dalla distanza.

2.0.16 k_cr_03

La formula fondamentale della cinematica dei corpi rigidi è: $\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{PQ}$.

In cui:

- \vec{v}_Q è la velocità del punto Q nel SdR esterno al corpo.
- \vec{v}_P è la velocità del punto P nel SdR esterno al corpo.
- $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo rigido nel SdR esterno ad esso.
- \vec{r}_{PQ} è il vettore posizionale che congiunge il punto P e Q .

2.0.17 k_cr_04

Il moto di un corpo rigido si dice:

- (a) traslatorio quando le velocità di tutti i punti del corpo sono uguali, ossia la velocità angolare è nulla.
- (b) rotatorio quando esiste almeno un punto O del corpo che rimane in quiete durante il moto.
- (c) roto-traslatorio quando nessuna delle due precedenti condizioni è soddisfatta.

2.0.18 k_cr_05

- (a) Il numero dei gradi di libertà di un punto materiale libero è 3 (coord. cartesiane, cilindriche o sferiche).
- (b) Il numero dei gradi di libertà di un punto materiale vincolato a giacere su una circonferenza è 1 (coordinata intrinseca sulla circonferenza).
- (c) Il numero dei gradi di libertà di un punto materiale vincolato a giacere su una superficie sferica è 2 (raggio da un centro O e coordinata intrinseca sulla circonferenza).

2.0.19 k_cr_06

- (a) Il numero dei gradi di libertà di un sistema costituito di 2 punti materiali liberi è 6 (3 coord. per ognuno).
- (b) Il numero dei gradi di libertà di un sistema costituito di 2 punti materiali vincolati a giacere su una circonferenza è 2 (coordinata intrinseca sulla circonferenza per ognuno dei punti).
- (c) Il numero dei gradi di libertà di un sistema costituito di 2 punti materiali vincolati a giacere su una superficie sferica è 4 (un raggio da un centro O e rispettiva coordinata intrinseca sulla circonferenza per ognuno).

2.0.20 k_cr_07

- a) Il numero dei gradi di libertà di un sistema costituito di 5 punti materiali liberi è 15 (3 coord. per ognuno).
- (b) Il numero dei gradi di libertà di un sistema costituito di 5 punti materiali vincolati a giacere su una circonferenza è 5 (coordinata intrinseca sulla circonferenza per ognuno dei punti).
- (c) Il numero dei gradi di libertà di un sistema costituito di 5 punti materiali vincolati a giacere su una superficie sferica è 10 (un raggio da un centro O e rispettiva coordinata intrinseca sulla circonferenza per ognuno).

2.0.21 k_mr_01

(a) L'accelerazione di trascinamento è definita dalla somma $\vec{a}_T = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$, in cui:

- \vec{a}_O è l'accelerazione del punto materiale O rispetto al riferimento $O'_{x'y'z'}$ fisso.
- $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del riferimento O_{xyz} in movimento rispetto al riferimento $O'_{x'y'z'}$ fisso.
- \vec{r} è il vettore posizionale di un punto materiale P nel riferimento O_{xyz} in movimento.

(b) L'accelerazione di Coriolis è definita dall'espressione $\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}$, in cui:

- $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del riferimento O_{xyz} in movimento rispetto al riferimento $O'_{x'y'z'}$ fisso.
- \vec{v} è la velocità del punto materiale P nel riferimento O_{xyz} in movimento.

2.0.22 k_mr_02

La relazione che lega le espressioni della velocità di uno stesso punto materiale P in due diversi sistemi di riferimento è:

$$\begin{cases} \vec{v}' = \vec{v} + \vec{v}_T \\ \vec{v}_T = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \end{cases}$$

in cui:

- \vec{v}' è la velocità del punto materiale P rispetto al riferimento $O'_{x'y'z'}$ fisso.
- \vec{v} è la velocità del punto materiale P rispetto al riferimento O_{xyz} in movimento.
- \vec{v}_O è la velocità del punto O rispetto al riferimento $O'_{x'y'z'}$ fisso.
- $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del riferimento O_{xyz} in movimento rispetto a $O'_{x'y'z'}$ fisso.
- \vec{r} è il vettore posizionale di un punto materiale P nel riferimento O_{xyz} in movimento.

2.0.23 k_mr_03

La relazione che lega le espressioni dell'accelerazione di uno stesso punto materiale P in due diversi sistemi di riferimento è:

$$\begin{cases} \vec{a}' = \vec{a} + \vec{a}_T + \vec{a}_C \\ \vec{a}_T = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \\ \vec{a}_C = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v} \end{cases}$$

in cui:

- \vec{a}' è l'accelerazione del punto materiale P rispetto al riferimento $O'_{x'y'z'}$ fisso.
- \vec{a} è l'accelerazione del punto materiale P rispetto al riferimento O_{xyz} in movimento.
- \vec{a}_O è l'accelerazione del punto O rispetto al riferimento $O'_{x'y'z'}$ fisso.
- $\dot{\vec{\omega}}$ è l'accelerazione angolare del riferimento O_{xyz} in movimento rispetto al riferimento $O'_{x'y'z'}$ fisso.
- \vec{r} è il vettore posizionale del punto materiale P rispetto al riferimento O_{xyz} in movimento.
- $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del riferimento O_{xyz} rispetto al riferimento $O'_{x'y'z'}$ fisso.
- \vec{v} è la velocità del punto materiale P nel riferimento O_{xyz} in movimento.

2.0.24 k_di_01

(a) Definiamo velocità areolare istantanea di un punto materiale P rispetto ad un centro di riduzione O l'area spazzata dal vettore posizionale \vec{r}_{OP} nell'unità di tempo, calcolata sulla base di un intervallo di tempo infinitesimo.

(b)

$$\Delta S \sim \frac{1}{2} \underbrace{\|\vec{r}_{OP}(t)\|}_{\text{base}} \underbrace{\|\vec{r}_{OP}(t + \Delta t) - \vec{r}_{OP}(t)\|}_{\text{altezza}} |\sin \alpha|$$

$$A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \left[\frac{1}{2} \|\vec{r}_{OP}(t)\| \left\| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_{OP}(t + \Delta t) - \vec{r}_{OP}(t)}{\Delta t} \right\| |\sin \alpha| \right] = \frac{1}{2} \|\vec{r}_{OP}\| \|\vec{v}_P\| |\sin(\pi - \alpha)| = \frac{1}{2} \|\vec{r}_{OP} \wedge \vec{v}_P\|$$

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r}_{OP} \wedge \vec{v}_P$$

2.0.25 k_di_02

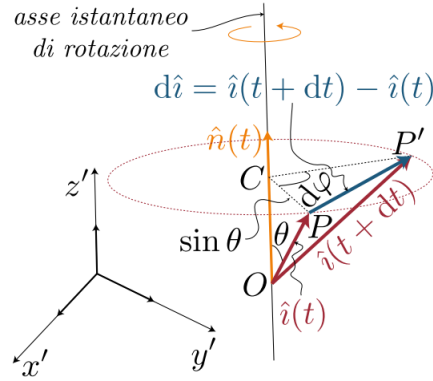
$$\vec{v}(t) = \dot{s}(t) \hat{t}(t) \quad \frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d\hat{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\hat{t}}{ds} \dot{s} \quad \frac{d\hat{t}(s)}{ds} = \frac{1}{\rho} \hat{n}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{s} \hat{t} + \dot{s}^2 \frac{d\hat{t}}{ds} = \ddot{s} \hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{n}$$

2.0.26 k_di_06

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r}_{OP} \wedge \vec{v}_P = \frac{1}{2} (r \hat{i}_r) \wedge (\dot{r} \hat{i}_r + r \dot{\varphi} \hat{i}_\varphi) = \frac{1}{2} \left[r \underbrace{\dot{r} (\hat{i}_r \wedge \hat{i}_r)}_{\vec{0}} + r^2 \dot{\varphi} \underbrace{(\hat{i}_r \wedge \hat{i}_\varphi)}_{\hat{k}} \right] = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \hat{k}$$

2.0.27 k_di_07



$$\left\| \frac{d\hat{i}}{dt} \right\|_{O'} = \|\hat{i}\| \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} = \sin \theta \dot{\varphi} \quad \text{e} \quad \text{vers} \left(\frac{d\hat{i}}{dt} \right) = \frac{\hat{n} \wedge \hat{i}}{\|\hat{n} \wedge \hat{i}\|} = \frac{\hat{n} \wedge \hat{i}}{\|\hat{n}\| \|\hat{i}\| |\sin \theta|} = \frac{\hat{n} \wedge \hat{i}}{|\sin \theta|} \text{ poichè perpendicolare al piano } POC$$

$$\text{Dunque} \quad \frac{d\hat{i}}{dt} \Big|_{O'} = \left\| \frac{d\hat{i}}{dt} \right\|_{O'} \text{vers} \left(\frac{d\hat{i}}{dt} \right) = \dot{\varphi} (\hat{n} \wedge \hat{i}) \quad \text{ed essendo} \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} \hat{n} \quad \text{allora}$$

$$\text{Formula di Poisson:} \quad \frac{d\hat{i}}{dt} \Big|_{O'} = \vec{\omega} \wedge \hat{i}$$

2.0.28 k_di_08

$$\text{Essendo:} \quad \frac{d\hat{i}}{dt} \Big|_{O'} = \vec{\omega} \wedge \hat{i} \implies \frac{d\hat{j}}{dt} \Big|_{O'} = \vec{\omega} \wedge \hat{j}, \quad \frac{d\hat{k}}{dt} \Big|_{O'} = \vec{\omega} \wedge \hat{k}$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} \Big|_{O'} = \frac{d\vec{a}}{dt} \Big|_O + \left[a_x \frac{d\hat{i}}{dt} + a_y \frac{d\hat{j}}{dt} + a_z \frac{d\hat{k}}{dt} \right] = \frac{d\vec{a}}{dt} \Big|_O + \left[a_x \vec{\omega} \wedge \hat{i} + a_y \vec{\omega} \wedge \hat{j} + a_z \vec{\omega} \wedge \hat{k} \right] = \frac{d\vec{a}}{dt} \Big|_O + \vec{\omega} \wedge \left[\underbrace{a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}}_{\vec{a}} \right]$$

$$\text{Relazione di Poisson:} \quad \frac{d\vec{a}}{dt} \Big|_{O'} = \frac{d\vec{a}}{dt} \Big|_O + \vec{\omega} \wedge \vec{a}$$

2.0.29 k_di_09

Essendo: $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{r}_O$ dalla legge di trasformazione del vettore posizionale

$$\text{Legge di trasformazione della velocità:} \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} \Big|_{O'} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \Big|_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \right) + \frac{d\vec{r}_O}{dt} \Big|_{O'} = \vec{v} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} + \vec{v}_O$$

2.0.30 k_di_10

Essendo: $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} + \vec{v}_O$ dalla legge di trasformazione della velocità

Legge di trasformazione dell'accelerazione:

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt} \Big|_{O'} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_O + \vec{\omega} \wedge \vec{v} \right) + \left(\vec{\omega} \wedge \left(\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \Big|_O}_{\vec{v}} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_{O'} \wedge \vec{r} \right) + \frac{d\vec{v}_O}{dt} \Big|_{O'} = \vec{a} + 2(\vec{\omega} \wedge \vec{v}) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{a}_O$$

2.0.31 k_di_11

Essendo: $\vec{v}'_P = \vec{v}_P + \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{OP}$ e $\vec{v}'_Q = \vec{v}_Q + \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{OQ}$ dalla legge di trasformazione della velocità

Poichè $\vec{v}_P = \vec{v}_Q = \vec{0}$ dato che sia \vec{r}_{OP} che $\vec{r}_{OQ} \equiv \text{cost.}$ allora sottraendo membro a membro si ottiene: $\vec{v}'_Q - \vec{v}'_P = \vec{\omega} \wedge \left(\underbrace{\vec{r}_{OQ} - \vec{r}_{OP}}_{\vec{r}_{PQ}} \right)$

Non comparando le velocità nel riferimento O_{xyz} non ci sono ambiguità ed è possibile eliminare gli apici: $\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{PQ}$

2.0.32 k_di_12

Essendo: $\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$, $\frac{d\hat{i}}{dt} = \frac{d\hat{i}}{dx} \frac{dx}{dt} = \vec{0}$, $\frac{d\hat{j}}{dt} = \frac{d\hat{j}}{dy} \frac{dy}{dt} = \vec{0}$, $\frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{d\hat{k}}{dz} \frac{dz}{dt} = \vec{0}$

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \underbrace{\dot{x} \frac{d\hat{i}}{dt}}_{\vec{0}} + \ddot{y}\hat{j} + \underbrace{\dot{y} \frac{d\hat{j}}{dt}}_{\vec{0}} + \ddot{z}\hat{k} + \underbrace{\dot{z} \frac{d\hat{k}}{dt}}_{\vec{0}} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

2.0.33 k_di_13

Essendo: $\vec{v} = \dot{r}\hat{i}_r + r\dot{\varphi}\hat{i}_\varphi + \dot{z}\hat{k}$, $\frac{d\hat{i}_r}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\hat{i}_r}{d\varphi} = \dot{\varphi}\hat{i}_\varphi$, $\frac{d\hat{i}_\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\hat{i}_\varphi}{d\varphi}(\varphi) = -\dot{\varphi}\hat{i}_r$

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{i}_r + \underbrace{\dot{r} \frac{d\hat{i}_r}{dt}}_{\dot{\varphi}\hat{i}_\varphi} + \dot{r}\dot{\varphi}\hat{i}_\varphi + r\ddot{\varphi}\hat{i}_\varphi + r\dot{\varphi} \underbrace{\frac{d\hat{i}_\varphi}{dt}}_{-\dot{\varphi}\hat{i}_r} + \ddot{z}\hat{k} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{i}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\hat{i}_\varphi + \ddot{z}\hat{k}$$

2.0.34 k_di_14

Essendo: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $\frac{d\hat{i}}{dt} = \frac{d\hat{i}}{dx} \frac{dx}{dt} = \vec{0}$, $\frac{d\hat{j}}{dt} = \frac{d\hat{j}}{dy} \frac{dy}{dt} = \vec{0}$, $\frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{d\hat{k}}{dz} \frac{dz}{dt} = \vec{0}$

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \underbrace{\dot{x} \frac{d\hat{i}}{dt}}_{\vec{0}} + \dot{y}\hat{j} + \underbrace{\dot{y} \frac{d\hat{j}}{dt}}_{\vec{0}} + \dot{z}\hat{k} + \underbrace{\dot{z} \frac{d\hat{k}}{dt}}_{\vec{0}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

2.0.35 k_di_15

Essendo: $\vec{r} = r\hat{i}_r + z\hat{k}$, $\frac{d\hat{i}_r}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\hat{i}_r}{d\varphi} = \dot{\varphi}\hat{i}_\varphi$, $\frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{d\hat{k}}{dz} \frac{dz}{dt} = \vec{0}$

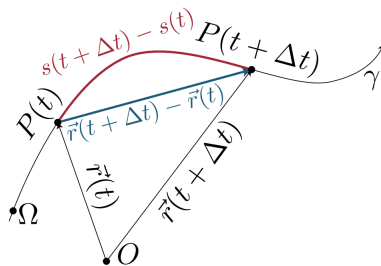
$$\vec{v} = \dot{r}\hat{i}_r + \underbrace{r \frac{d\hat{i}_r}{dt}}_{\dot{\varphi}\hat{i}_\varphi} + \dot{z}\hat{k} + \underbrace{z \frac{d\hat{k}}{dt}}_{\vec{0}} = \dot{r}\hat{i}_r + r\dot{\varphi}\hat{i}_\varphi + \dot{z}\hat{k}$$

2.0.36 k_di_16

Essendo: $\vec{r} = \vec{r}(s)$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(s)}{dt} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s}\hat{t}$$

2.0.37 k_di_17



$$|u(t)| = \underbrace{\left| \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \right|}_{\text{lunghezza arco}} \sim \underbrace{\left\| \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \right\|}_{\text{lunghezza corda}} = \|\vec{v}(t)\| \quad \Delta t \rightarrow 0$$

$$|u(t)| = \underbrace{\left| \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \right|}_{\text{lunghezza arco}} \geq \underbrace{\left\| \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \right\|}_{\text{lunghezza corda}} = \|\vec{v}(t)\|$$

3 Statica

3.0.1 s_ec_01

No, per essere in equilibrio un corpo rigido deve avere sia la risultante delle forze che il momento risultante delle forze nulli poichè, ad esempio, potremmo avere forze di verso opposto (somma nulla) ma momento non nullo e quindi verrebbe improntato un moto rotatorio.

3.0.2 s_ec_02

La forza vincolare esercitata dal tavolo dal corpo di massa maggiore è maggiore rispetto a quella esercitata sul corpo di massa minore, infatti dalla prima equazione cardinale della statica:

$$\begin{cases} \vec{R}_{(e)}^{(1)} = \vec{F}_p^{(1)} + \vec{R}_n^{(1)} = \vec{0} \\ \vec{R}_{(e)}^{(2)} = \vec{F}_p^{(2)} + \vec{R}_n^{(2)} = \vec{0} \\ m^{(1)} > m^{(2)} \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{R}_n^{(1)} = -\vec{F}_p^{(1)} = -m^{(1)}\vec{g} \\ \vec{R}_n^{(2)} = -\vec{F}_p^{(2)} = -m^{(2)}\vec{g} \implies \|\vec{R}_n^{(1)}\| > \|\vec{R}_n^{(2)}\| \\ \|\vec{F}_p^{(1)}\| > \|\vec{F}_p^{(2)}\| \end{cases}$$

3.0.3 s_ec_03

L'intensità della reazione vincolare che il tavolo esercita sul corpo è pari a 10 N, infatti per la prima equazione cardinale della statica:

$$\vec{R}_{(e)} = \vec{F}_p + \vec{R}_n = \vec{0} \implies \vec{R}_n = -\vec{F}_p = -(-F_p \hat{k}) \text{ per } \hat{k} \nearrow z \implies R_n = F_p$$

3.0.4 s_ec_04

La condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un punto materiale è che la risultante delle forze ad esso applicate sia nulla.

La condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo rigido è che la risultante delle forze ad esso applicate e il momento risultante delle forze applicate siano nulli.

3.0.5 s_rd_01

Il momento risultante $\vec{\mathcal{M}}^{(O)}$ non dipende dalla scelta del centro di riduzione se la risultante $\vec{\mathcal{R}}$ è nulla, infatti, essendo $\vec{\mathcal{M}}^{(O')} = \vec{\mathcal{M}}^{(O)} + \vec{r}_{O'O} \wedge \vec{\mathcal{R}}$ se $\vec{\mathcal{R}}$ è nulla allora: $\vec{\mathcal{M}}^{(O')} = \vec{\mathcal{M}}^{(O)}$.

3.0.6 s_rd_02

Due insiemi di vettori applicati si dicono equivalenti se hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante.

3.0.7 s_rd_03

Il numero minimo di vettori applicati a cui si riesce a ridurre un generico sistema di vettori applicati è 3 (un vettore e una coppia), infatti scelto un punto O , si trasportano tutti i vettori in O aggiungendo le necessarie coppie, si compongono i vettori nella risultante $\vec{\mathcal{R}}$ applicata in O e si compongono le coppie in un'unica coppia.

3.0.8 s_rd_04

Il numero minimo di vettori applicati a cui si riesce a ridurre un generico sistema di vettori applicati con risultante nulla è 2 (una coppia), infatti scelto un punto O , si trasportano tutti i vettori in O aggiungendo le necessarie coppie, se la composizione dei vettori ha risultante $\vec{\mathcal{R}}$ nulla allora basta comporre le restanti coppie in un'unica coppia.

3.0.9 s_rd_05

Il numero minimo di vettori applicati a cui si riesce a ridurre un generico sistema di vettori applicati con momento risultante nullo rispetto ad un centro di riduzione assegnato O è 1, infatti scelto un punto O' , si trasportano tutti i vettori in O' aggiungendo le necessarie coppie, se la composizione delle coppie ha momento risultante $\vec{\mathcal{M}}^{(O)}$ nullo, allora basta comporre i vettori applicati ad O' nella risultante $\vec{\mathcal{R}}$.

3.0.10 s_rd_06

No, non è possibile poichè il numero minimo di vettori applicati a cui si riesce a ridurre un generico sistema di vettori applicati con risultante nulla è 2 (una coppia), inoltre:

per $\vec{\mathcal{R}} = \vec{0} \implies \mathcal{M}_{(\vec{\mathcal{R}}, P)}^{(O)} = \vec{r}_{OP} \wedge \vec{\mathcal{R}} \neq \vec{0}$ risulta impossibile poichè il prodotto vettoriale si annulla sempre

3.0.11 s_rd_07

- (a) Il baricentro (o centro di gravità) è il punto di applicazione della risultante $\vec{\mathcal{R}}$ delle forze peso.
(b) L'espressione matematica vettoriale che definisce la posizione del baricentro è:

$$\vec{r}_{OG} = \frac{1}{\|\vec{\mathcal{R}}\|} \sum_{i=1}^n \|\vec{F}_i\| \vec{r}_{OP_i} \quad \vec{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

- (c) L'espressione matematica delle tre coordinate cartesiane del baricentro é:

$$x_G = \frac{1}{\|\vec{\mathcal{R}}\|} \sum_{i=1}^n \|\vec{F}_i\| x_i \quad y_G = \frac{1}{\|\vec{\mathcal{R}}\|} \sum_{i=1}^n \|\vec{F}_i\| y_i \quad z_G = \frac{1}{\|\vec{\mathcal{R}}\|} \sum_{i=1}^n \|\vec{F}_i\| z_i$$

3.0.12 s_rd_08

Dati n vettori $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ applicati nei punti P_1, \dots, P_n :

$$(a) \vec{\mathcal{R}}_{\{(\vec{F}_1, P_1), \dots, (\vec{F}_n, P_n)\}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

$$(b) \mathcal{M}^{(O)}_{\{(\vec{F}_1, P_1), \dots, (\vec{F}_n, P_n)\}} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{OP_i} \wedge \vec{F}_i$$

$$(c) \mathcal{M}^{(u)}_{\{(\vec{F}_1, P_1), \dots, (\vec{F}_n, P_n)\}} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{OP_i} \wedge \vec{F}_i \cdot \hat{u} \quad O \in u$$

3.0.13 s_at_01

$\vec{F} = 10N$, $\vec{R}_n = 100N$, $f = 0.2$, $\mu = 0.15$.

Poichè $\|\vec{F}\| < f \|\vec{R}_n\|$ allora significa che il corpo non si muove e dunque $\|\vec{R}_t\| = \|\vec{F}\| = 10N$.

3.0.14 s_at_02

$\vec{F} = 30N$, $\vec{R}_n = 100N$, $f = 0.2$, $\mu = 0.15$.

Poichè $\|\vec{F}\| > f \|\vec{R}_n\|$ allora significa che il corpo inizia a muoversi e dunque $\|\vec{R}_t\| = \mu \|\vec{R}_n\| = 15N$.

3.0.15 s_at_03

$\vec{F} = 30N$, $\vec{R}_n = 100N$, $f = 0.4$, $\mu = 0.2$.

Poichè $\|\vec{F}\| < f \|\vec{R}_n\|$ allora significa che il corpo non si muove e dunque $\|\vec{R}_t\| = \|\vec{F}\| = 30N$.

3.0.16 s_at_04

$\vec{F} = 50N$, $\vec{R}_n = 100N$, $f = 0.4$, $\mu = 0.2$.

Poichè $\|\vec{F}\| > f \|\vec{R}_n\|$ allora significa che il corpo inizia a muoversi e dunque $\|\vec{R}_t\| = \mu \|\vec{R}_n\| = 20N$.

3.0.17 s_at_05

$\vec{F} = 50N$, $\vec{R}_n = 200N$, $f = 0.4$, $\mu = 0.3$.

Poichè $\|\vec{F}\| < f \|\vec{R}_n\|$ allora siglifica che il corpo non si muove e dunque $\|\vec{R}_t\| = \|\vec{F}\| = 50N$.

3.0.18 s_at_06

$\vec{F} = 90N$, $\vec{R}_n = 200N$, $f = 0.4$, $\mu = 0.3$.

Poichè $\|\vec{F}\| > f \|\vec{R}_n\|$ allora siglifica che il corpo inizia a muoversi e dunque $\|\vec{R}_t\| = \mu \|\vec{R}_n\| = 60N$.

3.0.19 s_at_07

Se la ruota striscia sull'asfalto la forza di attrito diviene dinamica, in questo caso entra in gioco il dispositivo anti-patinamento che rilascia un po' il freno in modo da ripristinare le condizioni di attrito statico. Essendo infatti $\mu < f$ allora

$\|\vec{R}^{(d)}\| = \mu \|\vec{R}_n\| < f \|\vec{R}_n\| = \max \left\{ \|\vec{R}^{(s)}\| \right\}$, cioè la massima forza di attrito si ha quando la forza attiva è prossima ma appena inferiore alla soglia di primo distacco. Aumentando l'efficacia della forza frenante si riduce di conseguenza lo spazio di frenata.

4 Dinamica

4.0.1 d_df_01

Dal 1889 al 2017 il chilogrammo è stato definito come la massa di un manufatto, denominato International Prototype Kilogram, costituito di platino-iridio dopo un lavaggio eseguito con un procedimento ben definito, dovuto dal fatto che tale campione è soggetto all'inevitabile accumulazione di contaminanti che variano la sua massa di $1\mu g$ all'anno. Dal 2018 l'unità di misura è stata ridefinita come:

$$\sim 1.47 \times 10^{40} \frac{h}{c^2 T_{Cs}}$$

dove h è la costante di Planck, c è la velocità della luce nel vuoto e T_{Cs} è il periodo di oscillazione della radiazione elettromagnetica emessa dagli atomi di Cesio 133 in una particolare transizione

4.0.2 d_df_02

(a) L'espressione vettoriale che definisce la posizione del centro di massa di un insieme di punti materiali è:

$$\vec{r}_{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{OP_i}, \quad M = \sum_{i=1}^n m_i$$

(b) L'espressione scomposta nelle componenti cartesiane è:

$$x_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad y_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad z_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i, \quad M = \sum_{i=1}^n m_i$$

4.0.3 d_df_03

(a) L'espressione vettoriale che definisce la posizione del centro di massa di un corpo rigido \mathcal{C} avente densità puntuale $\rho(\vec{r})$ è:

$$\vec{r}_{OG} = \frac{1}{M} \int \int \int_{\mathcal{C}} \vec{r}_{OP} \rho(\vec{r}_{OP}) dV, \quad M = \int \int \int_{\mathcal{C}} \rho(\vec{r}_{OP}) dV$$

(b) L'espressione scomposta nelle componenti cartesiane è:

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{M} \int \int \int_{\mathcal{C}} x \rho(x, y, z) dx dy dz \\ y_G = \frac{1}{M} \int \int \int_{\mathcal{C}} y \rho(x, y, z) dx dy dz \\ z_G = \frac{1}{M} \int \int \int_{\mathcal{C}} z \rho(x, y, z) dx dy dz \end{cases}, \quad M = \int \int \int_{\mathcal{C}} \rho(x, y, z) dx dy dz$$

4.0.4 d_df_04

(a) L'espressione del momento di inerzia di un insieme di punti materiali rispetto ad un asse u è:

$$I_u = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2, \quad r_i = d(P_i, u)$$

(b) L'espressione del momento di inerzia di un corpo rigido \mathcal{C} avente densità puntuale $\rho(x, y, z)$ rispetto ad un asse u è:

$$I_u = \int \int \int_{\mathcal{C}} \rho(x, y, z) r^2 dx dy dz, \quad r = d(P, u)$$

4.0.5 d_1p_01

Il primo principio della dinamica, nella formulazione classica, dice che “Qualunque punto materiale, non soggetto ad alcuna forza, o rimane in quiete oppure si muove di moto rettilineo uniforme”. Tale formulazione pone l'enfasi sull'assenza di forze, in particolare quelle di attrito che per secoli hanno impedito una corretta comprensione dei principi della dinamica; il problema risiede nel fatto che anche eliminando tutte le forze agenti su un punto materiale, permangono delle forze apparenti dette Pseudo-forze che non dipendono da fattori esterni ma esistono in alcuni SdR e non in altri. Pertanto la formulazione moderna tiene conto anche di questo aspetto ed afferma che “Esiste un insieme di SdR, detti inerziali, rispetto ai quali, un punto materiale P soggetto ad una risultante nulla delle forze agenti su di esso si trova in stato di quiete oppure in stato di moto rettilineo uniforme”. Ponendoci infatti in un SdR inerziale stiamo automaticamente, per definizione, lavorando in un sistema in cui non esistono Pseudo-forze. E' importante ricordare che, essendo questo un principio, nessuna dimostrazione teorica o sperimentale ci può assicurare l'esistenza di un insieme infinito di SdR inerziali; tale proprietà può essere ricavata soltanto mediante l'esperienza.

4.0.6 d_1p_02

Un sistema di riferimento è un sistema di coordinate rispetto al quale viene osservato o misurato un fenomeno o un oggetto fisico. In particolare un sistema di riferimento si dice inerziale quando le coordinate sono prese in un modo tale che, in assenza di forze, i punti materiali sono in uno stato di quiete o di moto rettilineo uniforme; non sono cioè individuate Pseudo-forze.

4.0.7 d_1p_03

Si può fare oscillare un pendolo di qualche metro di lunghezza per un intervallo di tempo di qualche ora. Se il piano di oscillazione del pendolo ruota nel tempo allora il SdR costituito dai corpi di questa stanza non è inerziale. (Esperimento del pendolo di Foucault).

4.0.8 d_2p_01

Il secondo principio della dinamica afferma che, in un sistema di riferimento inerziale, un punto materiale sottoposto a una o più forze si muove con accelerazione vettorialmente proporzionale alla risultante:

$$\vec{\mathcal{R}} = m\vec{a}$$

Dove $\vec{\mathcal{R}}$ è la risultante delle forze applicate al punto, m è un coefficiente scalare, detto massa inerziale, sempre positivo e \vec{a} è l'accelerazione con cui si muove il punto.

4.0.9 d_2p_02

La massa inerziale può essere definita come la resistenza che esercita il corpo nell'essere accelerato. La massa gravitazionale invece è la capacità di un corpo di attirare a se altri corpi o di essere attirato da essi. L'esperimento che ci porta a dire che se $m^{(g)}$ ed $m^{(i)}$ sono misurate con le stesse unità di misura allora risulta $m^{(g)} = m^{(i)}$ è quello di osservare l'accelerazione con cui cade un corpo nel vuoto:

$$a = \frac{F}{m^{(i)}} = \frac{1}{m^{(i)}} \gamma \frac{m_T^{(g)} m^{(g)}}{R_T^2}$$

se non valesse la proporzionalità $m^{(g)} \propto m^{(i)}$ si avrebbe che corpi di massa diversa cadrebbero, nello stesso luogo, con accelerazione diversa.

4.0.10 d_2p_03

L'unità di misura del peso nel Sistema Internazionale è il Newton (simbolo N).

L'unità di misura della massa nel Sistema Internazionale è il chilogrammo (simbolo kg).

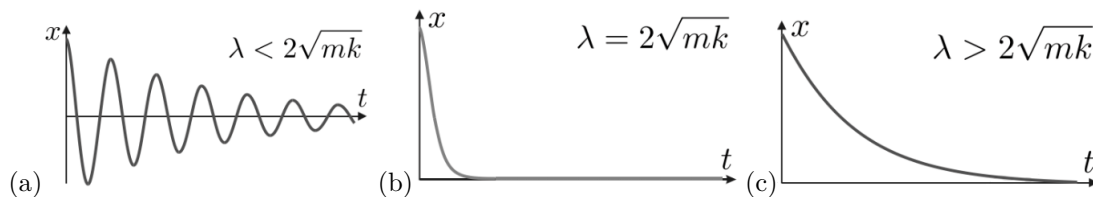
L'unità di misura del peso nel Sistema Tecnico è il chilogrammo-forza (simbolo kgf).

4.0.11 d_2p_04

Si definisce impulso di una forza \vec{F} nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ la quantità $I(\vec{F}, [t_1, t_2]) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$. Essendo però $\vec{F} = \dot{\vec{Q}}$, dove \vec{Q} è la quantità di moto allora il teorema dell'impulso afferma che $I(\vec{F}, [t_1, t_2]) = \vec{Q}(t_2) - \vec{Q}(t_1)$.

4.0.12 d_2p_05

Oscillatore smorzato: $\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ con x lo spostamento dalla posizione di equilibrio, m la massa, k la costante elastica e λ la costante di smorzamento.



4.0.13 d_mr_01

(a) Le pseudoforze sono grandezze aventi dimensione fisica di una forza a cui si attribuisce formalmente l'accelerazione dei corpi non soggetti a forze nei SdR non inerziali. Le pseudoforze, al contrario alle forze di interazione:

- Sono sempre proporzionali alla massa dei corpi sulla quale agiscono
- Hanno intensità che dipende dal SdR scelto (nel caso inerziale $\vec{\Phi} = \vec{0}$)
- Non sono dovute all'interazione con altri corpi
- Non rispettano il III principio della dinamica

(b) Sia il SdR $O'_{x'y'z'}$ inerziale mentre il SdR O_{xyz} no. Poichè $\vec{a}' = \vec{a} + \vec{a}_T + \vec{a}_C$ in generale $\neq \vec{a}$, allora perchè venga rispettato il II principio della dinamica per cui $\vec{F} = m\vec{a}' = m\vec{a}$ occorre che nel SdR non inerziale O_{xyz} si abbia che $\vec{F} + \vec{\Phi} = m\vec{a}$ dove $\vec{\Phi} = -m\vec{a}_T - m\vec{a}_C$. Dunque sì, esse sono considerate forze a tutti gli effetti.

4.0.14 d_mr_02

$$(a) \vec{\Phi}_T = -m \left[\vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r}_{OP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{OP}) \right]$$

$$(b) \vec{\Phi}_C = -m [2\vec{\omega} \wedge \vec{v}]$$

4.0.15 d_mr_03

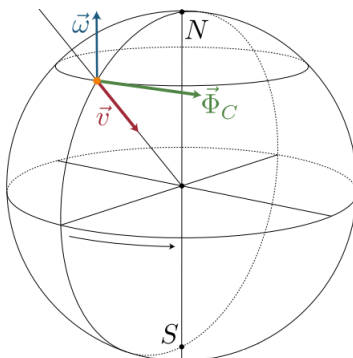
La presenza della pseudo-forza centrifuga sulla superficie della terra si può osservare calcolando l'accelerazione gravitazionale g al variare della latitudine. Risulterà infatti $g \neq 9.81$, fatta esclusione ai poli, poichè la forza peso è la risultante dell'attrazione gravitazionale e della pseudo-forza centrifuga ($m\vec{g} = m\vec{g}' + \vec{\Phi}_T$). In particolare $g(\theta) \approx g'(\theta) - \omega^2 R \cos^2(\theta)$ dove g' è l'accelerazione gravitazionale, ω è la velocità angolare terrestre, R è il raggio terrestre e θ è la latitudine.

4.0.16 d_mr_04

La presenza della pseudo-forza di Coriolis sulla superficie della terra si può osservare utilizzando il pendolo di Foucault che in ogni oscillazione risulterà deviato verso destra nell'emisfero nord e verso sinistra nell'emisfero sud. In particolare $d\alpha = (\sin \varphi) d\alpha'$ dove $d\alpha$ è la rotazione del piano del pendolo, φ è la latitudine e $d\alpha'$ è la rotazione della terra.

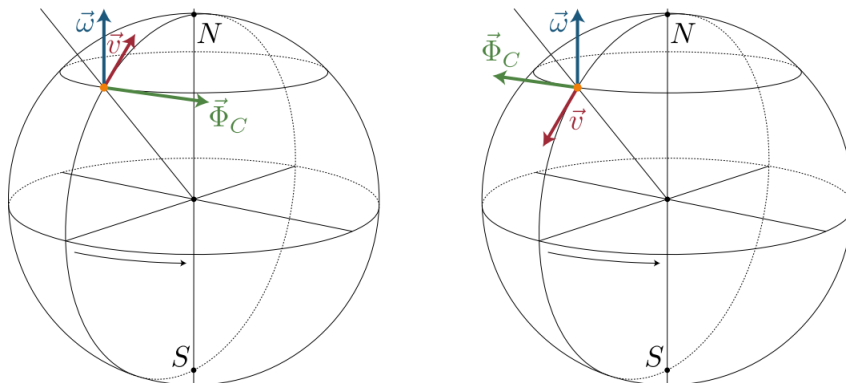
4.0.17 d_mr_05

In entrambi gli emisferi, un corpo in caduta libera, viene deviato dalla pseudo-forza di Coriolis verso est se osservato nel SdR terrestre non inerziale. Questo perchè essendo $\vec{\omega} \wedge \vec{v}$ diretto verso ovest, dato che $\vec{\Phi}_C = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$, allora $\vec{\Phi}_C$ è diretta verso est.



4.0.18 d_mr_06

Un corpo in moto sulla superficie terrestre viene deviato dalla pseudo-forza di Coriolis verso destra nell'emisfero nord e verso sinistra nell'emisfero sud. Questo perchè, per la regola della mano destra, nell'emisfero nord $\vec{\omega} \wedge \vec{v}$ è sempre diretto verso sinistra rispetto al moto del corpo e dato che $\vec{\Phi}_C = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$, allora $\vec{\Phi}_C$ è diretta verso destra. Risulta che nell'emisfero nord, per la regola della mano destra, $\vec{\Phi}_C$ è diretta verso destra, nell'emisfero sud invece $\vec{\Phi}_C$ è diretta verso sinistra.



4.0.19 d_mr_07

A 30° di latitudine nord, in un giorno sidereo, il piano del pendolo di Foucault ruota di un angolo pari a $\frac{1}{2}360^\circ = 180^\circ$. Dalla formula $d\alpha = (\sin \varphi) d\alpha'$ dove $d\alpha$ è la rotazione del piano del pendolo, $d\alpha'$ la rotazione della Terra e φ l'angolo rispetto al nord.

4.0.20 d_mr_08

A 45° di latitudine nord, in un giorno sidereo, il piano del pendolo di Foucault ruota di un angolo pari a $\frac{\sqrt{2}}{2}360^\circ \approx 254.6^\circ$. Dalla formula $d\alpha = (\sin \varphi) d\alpha'$ dove $d\alpha$ è la rotazione del piano del pendolo, $d\alpha'$ la rotazione della Terra e φ l'angolo rispetto al nord.

4.0.21 d_mr_09

A 60° di latitudine nord, in un giorno sidereo, il piano del pendolo di Foucault ruota di un angolo pari a $\frac{\sqrt{3}}{2}360^\circ \approx 311.8^\circ$. Dalla formula $d\alpha = (\sin \varphi) d\alpha'$ dove $d\alpha$ è la rotazione del piano del pendolo, $d\alpha'$ la rotazione della Terra e φ l'angolo rispetto al nord.

4.0.22 d_mr_10

- (1a) Dal punto di vista di un osservatore esterno l'unica forza agente sul pt. materiale è la tensione esercitata dalla cordicella \vec{T} .
 (1b) La risultante delle forze $\vec{F} = \vec{T} \neq \vec{0}$.
 (1c) $\vec{a} = \frac{\dot{s}^2}{r} \hat{n}$ e dato che $\dot{s} = r\omega$ allora $\vec{a} = r\omega^2 \hat{n}$.
 (2a) Dal punto di vista di un osservatore solidale al punto materiale in moto le forze agenti su esso sono la tensione esercitata dalla cordicella \vec{T} equilibrata dalla forza centrifuga poichè il punto è in quiete.
 (2b) La risultante delle forze $\vec{F} = \vec{T} + \vec{\Phi} = \vec{0}$.
 (2c) $\vec{a} = \vec{0}$.

4.0.23 d_cn_01

La quantità di moto di un sistema meccanico si conserva se la risultante delle forze esterne è nulla.

Dalla prima equazione cardinale della dinamica $\dot{\vec{Q}} = \vec{\mathcal{R}}_{(e)}$ si ha:

$$\text{Principio di conservazione della quantità di moto } \vec{\mathcal{R}}_{(e)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q} \equiv \text{cost.}$$

4.0.24 d_cn_02

Il momento angolare di un sistema meccanico si conserva se il momento risultante delle forze esterne è nullo rispetto ad un centro di riduzione O (fisso o in moto con $\vec{v}_O \parallel \vec{Q}$).

Dalla seconda equazione cardinale della dinamica $\dot{\vec{K}}^{(O)} = \underbrace{-\vec{v}_O \wedge \vec{Q}}_0 + \vec{\mathcal{M}}_{(e)}^{(O)}$ (se O è fisso o in moto con $\vec{v}_O \parallel \vec{Q}$) si ha:

$$\text{Principio di conservazione del momento angolare } \vec{\mathcal{M}}_{(e)}^{(O)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{K}^{(O)} \equiv \text{cost.}$$

4.0.25 d_cn_03

Affinchè l'energia meccanica di un sistema meccanico si conservi è necessario che le forze vincolari siano ideali e che le forze attive siano conservative.

4.0.26 d_cn_04

In un SdR inerziale, nel moto di un pianeta attorno al Sole, trascurando l'effetto della presenza degli altri pianeti:

- (a) La quantità di moto di un pianeta non si conserva poichè agisce la forza di gravità esercitata dal Sole sul pianeta (esterna) e quindi:

$$\dot{\vec{Q}}_P = \vec{\mathcal{R}}_{(e)} \neq 0 \Rightarrow \vec{Q}_P \not\equiv \text{cost.}$$

- (b) La quantità di moto di un pianeta e del Sole si conserva poichè non agiscono forze esterne e quindi:

$$\dot{\vec{Q}}_P + \dot{\vec{Q}}_S = \vec{\mathcal{R}}_{(e)} = 0 \Rightarrow \vec{Q}_P + \vec{Q}_S \equiv \text{cost.}$$

4.0.27 d_cn_05

In un SdR inerziale, nel moto di un pianeta attorno al Sole, trascurando l'effetto della presenza degli altri pianeti:

- (a) Il momento angolare di un pianeta rispetto al centro del Sole si conserva. Questo si ricava dal fatto che

$$\vec{Q}_P + \vec{Q}_S = (m_P + m_S) \underbrace{\vec{v}_G}_{\vec{0}} = \vec{0} \text{ e dunque } \vec{Q}_P = -\vec{Q}_S = -m_S \vec{v}_S \text{ da cui si ricava che } \vec{v}_S \parallel \vec{Q}_P \text{ e quindi } -\vec{v}_S \wedge \vec{Q}_P = \vec{0}.$$

Inoltre essendo $\vec{r}_{SP} \parallel \vec{F}_G$ si ha che $\vec{\mathcal{M}}_{(e)}^{(S)} = \vec{r}_{SP} \wedge \vec{F}_G = \vec{0}$. Sostituendo nella seconda equazione cardinale si ha quindi

$$\dot{\vec{K}}_P^{(S)} = \underbrace{-\vec{v}_S \wedge \vec{Q}_P}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_{(e)}^{(S)}}_{\vec{0}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{K}_P^{(S)} \equiv \text{cost.}$$

- (b) Il momento angolare di un pianeta rispetto ad un punto arbitrario non si conserva. Questo perchè in generale

$$\dot{\vec{K}}_P^{(O)} = -\vec{v}_O \wedge \vec{Q}_P + \vec{\mathcal{M}}_{(e)}^{(O)} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{K}_P^{(O)} \not\equiv \text{cost.}$$

4.0.28 d_cn_06

Nel moto di un pianeta attorno al sole il punto geometrico che rimane in quiete in un SdR inerziale (trascurando l'effetto di tutti gli altri pianeti) è il centro di massa G del sistema pianeta-sole. Infatti se il sistema di riferimento è inerziale e l'effetto degli altri pianeti è trascurato, allora $\vec{\mathcal{R}}^{(e)} = \vec{0}$ per il sistema pianeta sole e poichè $\vec{\mathcal{R}}^{(e)} = M\vec{a}_G$ segue che $\vec{a}_G = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_G \equiv \text{cost.}$ cioè si muove di moto rettilineo uniforme. Questo significa che in un opportuno SdR inerziale quest'ultimo è in quiete.

4.0.29 d_cn_07

(a) No, un sistema di punti materiali liberi non può avere $T = 0$ e $\vec{Q} \neq \vec{0}$. Infatti, se $T = 0$ allora, per definizione dell'energia cinetica si ha $T = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} m_i v_i^2 = 0$ e poichè la massa è sempre positiva per definizione e $v_i^2 \geq 0$ per far sì che la somma si annulli

$v_i^2 = 0$. Dunque anche i vettori sono nulli e $\vec{Q} = \sum_{k=0}^{+\infty} m_i v_i = 0$.

(b) Sì, un sistema di punti materiali può avere $\vec{Q} = \vec{0}$ e $T \neq 0$ poichè, in generale nella sommatoria $\vec{Q} = \sum_{k=0}^{+\infty} m_i v_i = 0$ potrebbero

esserci vettori con modulo negativo che sommati a quelli di modulo positivo annullano il risultato. Siccome in $T = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} m_i v_i^2$ i moduli dei vettori sono tutti elevati al quadrato potrebbe valere un risultato non nullo.

4.0.30 d_cn_08

(a) No, un corpo rigido non può avere $T = 0$ e $\vec{Q} \neq \vec{0}$. Infatti, se $T = 0$ allora, per il teorema di König si ha $T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_g \omega^2 = 0$. Poichè massa e momento di inerzia I_g sono entrambi positivi, l'unica possibilità affinché la somma sia nulla è che $v_G = 0$, $\omega = 0$. Dunque la quantità di moto $\vec{Q} = M \vec{v}_G = \vec{0}$.

(b) Sì, un corpo rigido può avere $\vec{Q} = \vec{0}$ e $T \neq 0$. Infatti anche se $\vec{Q} = M \vec{v}_G = \vec{0}$ e dunque $v_G = 0$ non è detto che la velocità angolare di rotazione ω^2 sia anch'essa nulla, dunque in generale $T = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} I_g \omega^2 \neq 0$.

4.0.31 d_cn_09

Sì, poichè se le forze esterne agenti sono conservative, esse compiono un lavoro dato dalla variazione del potenziale e ciò significa, per il teorema di conservazione dell'energia meccanica, che l'energia meccanica totale si conserva.

4.0.32 d_cn_10

No, poichè se le forze interne agenti non sono conservative, per violazione della condizione necessaria e sufficiente per la conservazione dell'energia meccanica quest'ultima non si conserva.

4.0.33 d_cn_11

Sì, la quantità di moto si conserva poichè dalla prima equazione cardinale della dinamica $\dot{\vec{Q}} = \vec{\mathcal{R}}^{(e)}$, perciò non è importante che le forze interne siano conservative o meno. Inoltre poichè il sistema è isolato, allora la risultante delle forze esterne $\vec{\mathcal{R}}^{(e)} = 0$ e dunque $\dot{\vec{Q}} = 0$ e $\vec{Q} \equiv \text{cost.}$

4.0.34 d_cn_12

No, la quantità di moto non si conserva poichè dalla prima equazione cardinale della dinamica $\dot{\vec{Q}} = \vec{\mathcal{R}}^{(e)}$, perciò non è importante che le forze interne siano conservative o meno. Inoltre poichè la risultante delle forze esterne $\vec{\mathcal{R}}^{(e)} \neq 0$ e dunque $\dot{\vec{Q}} \neq 0$ perciò in generale $\vec{Q} \neq \text{cost.}$

4.0.35 d_cn_13

Sì, il momento angolare si conserva poichè dalla seconda equazione cardinale della dinamica $\dot{\vec{K}}^{(O)} = -\vec{v}_O \wedge \vec{Q} + \mathcal{M}_{(O)}^{(e)}$ da cui, considerando O un centro di riduzione fisso $\vec{v}_O = \vec{0}$ e $\dot{\vec{K}}^{(O)} = \mathcal{M}_{(O)}^{(e)}$. Inoltre poichè il sistema è isolato, allora $\mathcal{M}_{(O)}^{(e)} = \vec{0}$ e dunque $\dot{\vec{K}}^{(O)} = 0$ e $\vec{K}^{(O)} \equiv \text{cost.}$.

4.0.36 d_cn_14

No, il momento angolare non si conserva poichè dalla seconda equazione cardinale della dinamica $\dot{\vec{K}}^{(O)} = -\vec{v}_O \wedge \vec{Q} + \mathcal{M}_{(O)}^{(e)}$ da cui, considerando O un centro di riduzione fisso $\vec{v}_O = \vec{0}$ e $\dot{\vec{K}}^{(O)} = \mathcal{M}_{(O)}^{(e)}$. Inoltre poichè il momento angolare risultante $\mathcal{M}_{(O)}^{(e)} \neq \vec{0}$ e dunque $\dot{\vec{K}}^{(O)} \neq 0$ perciò in generale $\vec{K}^{(O)} \neq \text{cost.}$.

4.0.37 d_cn_15

La costanza della velocità areolare nel moto dei pianeti è spiegata dal principio di conservazione del momento angolare. Infatti, prendendo come centro di riduzione il centro del sole S si ha:

$$\begin{cases} \vec{A}_{P(S)} = \frac{1}{2} \vec{r}_{PS} \wedge \vec{v} \\ \vec{K}_{P(S)} = \vec{r}_{PS} \wedge m\vec{v} \end{cases} \implies \vec{A}_{P(S)} = \frac{1}{2m} \vec{K}_{P(S)}$$

Dunque la velocità areolare si conserva se e solo se si conserva il momento angolare. Inoltre, come conseguenze delle equazioni cardinali della dinamica abbiamo che in un SdR inerziale e trascurando l'effetto della presenza di altri pianeti, il momento angolare di un pianeta P rispetto al centro del Sole S si conserva: $\vec{K}_{P(S)} \equiv \text{cost.}$ e di conseguenza anche la velocità areolare.

4.0.38 d_cn_16

Le orbite dei pianeti sono vincolate a giacere su di un piano dal principio di conservazione del momento angolare. Infatti prendendo come centro di riduzione il centro del Sole S , si ha $\vec{K}_{P(S)} = \vec{r}_{PS} \wedge m\vec{v}$. Se supponiamo il momento angolare rimanga costante allora:

$$\begin{cases} \vec{v} \perp \vec{K}_{P(S)} \\ \vec{r}_{PS} \perp \vec{K}_{P(S)} \end{cases}$$

Poichè infine la forza gravitazionale è una forza centrale : $\vec{F}_g \parallel \vec{r}_{PS}$ e per il secondo principio della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$, allora $\vec{a} \parallel \vec{F}_g \parallel \vec{r}_{PS}$.

Cioè si ha che sia velocità che accelerazione stanno in un piano perpendicolare a $\vec{K}_{P(S)}$:

$$\begin{cases} \vec{v} \perp \vec{K}_{P(S)} \\ \vec{a} \perp \vec{K}_{P(S)} \end{cases}$$

e dunque il moto può avvenire soltanto sul piano perpendicolare a $\vec{K}_{P(S)}$.

4.0.39 d_cn_17

Poichè le due sferette sono lanciate verticalmente verso l'alto da due forze uguali, che agiscono nello stesso intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, esse subiranno lo stesso impulso che, per il teorema dell'impulso :

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt = Q(t_1) - Q(t_0)$$

poichè esse sono entrambe ferme all'istante t_0 , al termine della spinta (istante t_1) esse possiederanno la stessa quantità di moto, cioè:

$$mv_1 = MV_1 = Q \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{Q}{m} \\ V_1 = \frac{Q}{M} \end{cases}$$

Infine, poichè nell'istante in cui la sferetta raggiunge la quota più elevata, essa ha convertito tutta l'energia cinetica in energia potenziale gravitazionale si ha:

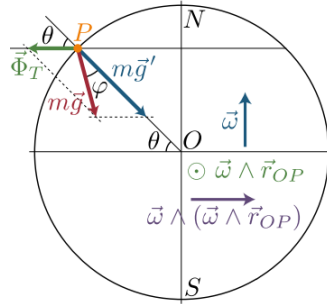
$$\begin{cases} mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \\ MgH = \frac{1}{2}MV_1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{gm^2} \\ H = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{gM^2} \end{cases}$$

ed essendo $m < M$ si ha che $h > H$, dunque la sferetta più leggera raggiunge quota più elevata.

4.0.40 d_di_01 - d_di_10

TO-DO

4.0.41 d_di_11



Ricaviamo l'espressione dell'accelerazione gravitazionale g di caduta dei corpi sulla terra in funzione della latitudine dall'espressione della forza peso $m\vec{g} = m\vec{g}' + \vec{\Phi}_T$. Separando le componenti parallela e perpendicolare a \vec{r}_{OP} si ha:

$$\begin{aligned} \parallel \begin{cases} mg \cos \varphi = mg' - \Phi_T \cos \theta \\ mg \sin \varphi = \Phi_T \sin \theta \end{cases} &\Rightarrow \parallel \begin{cases} g \cos \varphi = g' - \frac{\Phi_T}{m} \cos \theta \\ g \sin \varphi = \frac{\Phi_T}{m} \sin \theta \end{cases} \\ \perp & \end{aligned}$$

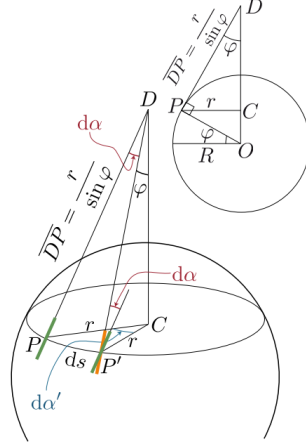
$$\text{Essendo } \vec{\Phi}_T = -m \left[\underbrace{\vec{a}_O}_{\vec{0}} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}}}_{\vec{0}} \wedge \vec{r}_{OP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{OP}) \right] \Rightarrow \|\vec{\Phi}_T\| = \|-m [\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{OP})]\| = m\omega^2 R \cos \theta \text{ allora:}$$

$$\begin{aligned} \parallel \begin{cases} g \cos \varphi = g' - \omega^2 R \cos^2 \theta \\ g \sin \varphi = \omega^2 R \cos \theta \sin \theta \end{cases} &\Rightarrow \text{poichè } \varphi \approx 2\text{mrad, allora } \cos \varphi \gg \sin \varphi \text{ e } \cos \varphi \approx 1 \text{ allora dalla prima equazione:} \\ \perp & \end{aligned}$$

$$g(\theta) \approx g'(\theta) - \omega^2 R \cos^2 \theta$$

4.0.42 d_di_12

Ricaviamo l'espressione della velocità di rotazione del piano di oscillazione del pendolo di Focault in funzione della velocità di rotazione della terra e della latitudine del sistema



$$\begin{cases} ds = r d\alpha' \\ ds = \frac{r}{\sin \varphi} d\alpha \end{cases} \text{ da cui } d\alpha = \frac{\sin \varphi}{r} ds = \sin \varphi d\alpha'$$

$$d\alpha = \sin \varphi d\alpha' \Rightarrow \omega = \omega' \sin \varphi$$

4.0.43 d_di_13

Essendo $\vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$ l'espressione della quantità di moto

$$\dot{\vec{Q}} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{\mathcal{R}} \text{ per il II principio della dinamica}$$

Ora poichè per il III principio della dinamica si ha che $\vec{\mathcal{R}}_{(i)} = \vec{0}$, allora $\dot{\vec{Q}} = \vec{\mathcal{R}}_{(e)}$

4.0.44 d_di_14

Essendo $\vec{K}^{(O)} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{OP_i} \wedge m_i \vec{v}_i$ l'espressione del momento angolare

$$\dot{\vec{K}}^{(O)} = \sum_{i=1}^n (\vec{v}_i - \vec{v}_O) \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^n \vec{r}_{OP_i} \wedge \overbrace{m_i \vec{a}_i}^{\vec{F}_i} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i}_{\vec{0}} - \vec{v}_O \wedge \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}_{\vec{Q}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{r}_{OP_i} \wedge \vec{F}_i}_{\vec{\mathcal{M}}^{(O)}} = -\vec{v}_O \wedge \vec{Q} + \vec{\mathcal{M}}^{(O)}$$

Ora poichè per il III principio della dinamica si ha che $\vec{\mathcal{M}}_{(i)}^{(O)} = \vec{0} \forall O$, allora $\dot{\vec{K}}^{(O)} = -\vec{v}_O \wedge \vec{Q} + \vec{\mathcal{M}}_{(e)}^{(O)}$

4.0.45 d_di_15

Se il sistema non è troppo esteso, cioè \vec{g} è uniforme su tutto il sistema, allora $\vec{F}_i = m_i \vec{g}$ e $\vec{\mathcal{R}} = M \vec{g}$ quindi:

$$\vec{r}_{OB} = \frac{1}{\|\vec{\mathcal{R}}\|} \sum_{i=1}^n \|\vec{F}_i\| \vec{r}_{OP_i} = \frac{1}{Mg} \sum_{i=1}^n m_i g \vec{r}_{OP_i} = \frac{1}{Mg} g \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{OP_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{OP_i} = \vec{r}_{OG}$$

cioè il centro di massa G coincide con il centro di gravità (baricentro) B .

4.0.46 d_di_16

Essendo $\vec{r}_{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{OP_i}$, derivando rispetto al tempo si ottiene $\vec{v}_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{Q}}{M}$ quindi $\vec{Q} = M \vec{v}_G$.

4.0.47 d_di_17

Essendo $\vec{r}_{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{OP_i}$, derivando rispetto al tempo si ottiene $\vec{v}_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{Q}}{M}$ quindi $\vec{Q} = M \vec{v}_G$.

Derivando rispetto al tempo si ottiene $\dot{\vec{Q}} = M \vec{a}_G$. Per la I equazione cardinale della dinamica si ha anche che $\dot{\vec{Q}} = \vec{\mathcal{R}}_{(e)}$.

Pertanto il teorema del moto del centro di massa afferma che $\vec{\mathcal{R}}_{(e)} = M \vec{a}_G$, ovvero, il centro di massa di un sistema meccanico si muove come un punto materiale con la massa dell'intero sistema, sottoposto a tutte le forze esterne che agiscono su di esso.

4.0.48 d_di_18

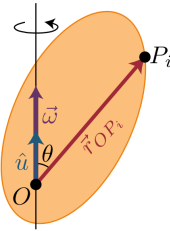
Scegliendo il centro di riduzione O sull'asse di rotazione \hat{u} si ha per la formula fondamentale della cinematica dei corpi rigidi $\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{OP_i} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{OP_i}$. Ponendo $\vec{\omega} = \omega \hat{u}$, il momento angolare del corpo rigido si scrive:

$$\vec{K}^{(O)} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{OP_i} \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{OP_i} \wedge m_i (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{OP_i}) = \omega \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{OP_i} \wedge (\hat{u} \wedge \vec{r}_{OP_i})$$

Il momento angolare assiale si ottiene facendo:

$$K^{(u)} = \vec{K}^{(O)} \cdot \hat{u} = \omega \hat{u} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{OP_i} \wedge (\hat{u} \wedge \vec{r}_{OP_i}) = \omega \sum_{i=1}^n m_i \hat{u} \cdot \vec{r}_{OP_i} \wedge (\hat{u} \wedge \vec{r}_{OP_i}) = \omega \sum_{i=1}^n m_i \hat{u} \wedge \vec{r}_{OP_i} \cdot (\hat{u} \wedge \vec{r}_{OP_i}) = \omega \sum_{i=1}^n m_i (\hat{u} \wedge \vec{r}_{OP_i})^2$$

Definito il momento di inerzia I_u rispetto all'asse u : $I_u = \sum_{i=1}^n m_i (\hat{u} \wedge \vec{r}_{OP_i})^2$ si ottiene che $K^{(u)} = I_u \omega$.



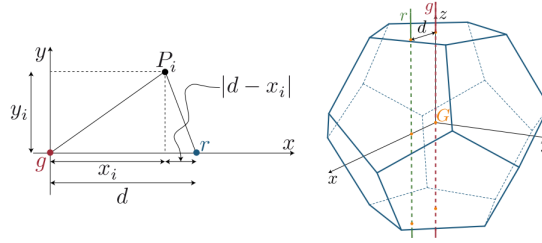
4.0.49 d_di_19

Il teorema di Huygens-Steiner afferma che per un corpo qualsiasi il momento di inerzia rispetto a una qualsiasi retta r è uguale al momento di inerzia rispetto alla retta g passante per il centro di massa G e parallela a r aumentato del prodotto tra la massa totale del corpo e il quadrato della distanza tra le due rette.

Si dimostra fissando l'origine degli assi nel centro di massa G con l'asse z nella direzione della retta g .

Essendo $I_g = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$ e ricordando che $x_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i = 0$ perchè abbiamo fissato l'origine in G , allora:

$$I_r = \sum_{i=1}^n m_i [(x_i - d)^2 + y_i^2] = \sum_{i=1}^n m_i [x_i^2 - 2x_i d + d^2 + y_i^2] = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) + d^2 \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i}_M - 2d \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i x_i}_{M x_G = 0} = I_g + M d^2$$



4.0.50 d_di_20

La relazione cercata è: $\vec{\mathcal{M}}_{(u)}^{(e)} = I_u \dot{\omega}$.

Essendo $K_u = I_u \omega$ dove I_u è il momento di inerzia del corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso u .

Detto \hat{u} un versore con la stessa direzione della retta u e $O \in u$ si ha che $K_u = \vec{K}_{(O)} \cdot \hat{u}$ e dunque $\vec{K}_{(O)} \cdot \hat{u} = I_u \omega$. Derivando rispetto al tempo abbiamo $\dot{\vec{K}}_{(O)} \cdot \hat{u} = I_u \dot{\omega}$.

Dalla seconda equazione della dinamica abbiamo che $\dot{\vec{K}}_{(O)} = -\vec{v}_O \wedge \vec{Q} + \vec{\mathcal{M}}_{(O)}^{(e)}$.

Poichè il punto O è fissato su u si trova in quiete, allora $\vec{v}_O = \vec{0}$ e si ha $\dot{\vec{K}}_{(O)} = \vec{\mathcal{M}}_{(O)}^{(e)} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_{(O)}^{(e)} \cdot \hat{u} = I_u \dot{\omega} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_{(u)}^{(e)} = I_u \dot{\omega}$.

4.0.51 d_di_21

Una forza di forza non conservativa è la forza di attrito radente dinamico $\vec{F} = -F_a \hat{t}$. Per dimostrare che non è conservativa verifichiamo che non sia nullo il lavoro compiuto quando un punto materiale si muove su una traiettoria circolare chiusa:

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \\ y = r \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = r \cos \varphi d\varphi \\ dy = -r \sin \varphi d\varphi \end{cases} \quad \text{Da cui si ricava che} \quad \begin{cases} t_x = \cos \varphi \\ t_y = -\sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = -F_a \cos \varphi \\ F_y = F_a \sin \varphi \end{cases}$$

Essendo $\vec{F} = -F_a (\cos \varphi \hat{i} - \sin \varphi \hat{j})$ e $dP = dx \hat{i} + dy \hat{j} = r (\cos \varphi \hat{i} - \sin \varphi \hat{j}) d\varphi$ allora il lavoro si scrive $dL = \vec{F} \cdot dP = -F_a r d\varphi$

Allora integrando sulla circonferenza si ha: $L_C = \oint_{C(O,r)} \vec{F} \cdot dP = \int_0^{2\pi} -F_a r d\varphi = -F_a r [\varphi]_0^{2\pi} = -2\pi F_a r \neq 0$.

4.0.52 d_di_22

Il teorema delle forze vive afferma che il lavoro compiuto da tutte le forze (sia conservative che dissipative) che agiscono su di un sistema meccanico nel passaggio da una configurazione iniziale A a una configurazione finale B è uguale alla corrispondente variazione dell'energia cinetica di tale sistema. Infatti definita l'energia cinetica $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$ si ha che:

$$dL = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{P}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \cdot \frac{d\vec{P}_i}{dt} dt = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i dt = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d(v_i^2)}{dt} dt = \frac{dT}{dt} dt = dT$$

$$\text{Dunque integrando tra } A \text{ e } B : L_{A,B} = \int_{\gamma(A,B)} dL = \int_{\gamma(A,B)} \frac{dT}{dt} dt = [T(t)]_{t_A}^{t_B} = T_B - T_A$$

4.0.53 d_di_23

Il teorema di König per un sistema di punti materiali afferma che l'energia cinetica è la somma dell'energia cinetica del centro di massa e dell'energia cinetica relativa al centro di massa.

(a) Dimostrazione per un sistema meccanico generico:

Definita l'energia cinetica $T(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i^2$ e $\vec{w}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_G$ la velocità del punto P_i relativa al centro di massa G , si ha:

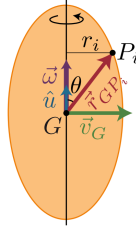
$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{w}_i^2 + \vec{v}_G \cdot \sum_{i=1}^n m_i \vec{w}_i$$

Definito inoltre il centro di massa mediante la relazione $\vec{r}_{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{OP_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{OP_i} = M \vec{r}_{OG}$. Osserviamo che prendendo come centro di riduzione il centro di massa ($O \equiv G$) si ha che $M \vec{r}_{OG} = M \underbrace{\vec{r}_{GG}}_{\vec{0}} = \vec{0} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{GP_i}$. Derivando membro a membro

si ottiene $\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_{GP_i}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{w}_i = \vec{0}$. Dunque possiamo riscrivere:

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i w_i^2$$

(b) Dimostrazione per un corpo rigido che rototrasla:



Definita l'energia cinetica $T(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i^2$, essendo $\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{GP_i}$ e $\vec{w}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_G = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{GP_i}$ si ha come sopra:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{w}_i^2 + \underbrace{\vec{v}_G \cdot \sum_{i=1}^n m_i \vec{w}_i}_0$$

Ricaviamo che: $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{w}_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{GP_i})^2 = \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i (\hat{u} \wedge \vec{r}_{GP_i})^2 = \omega^2 I_g$ dunque possiamo riscrivere:

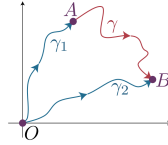
$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_g \omega^2$$

4.0.54 d_di_24

La condizione necessaria e sufficiente affinché la forza posizionale $\vec{F}(\vec{r})$ sia conservativa è che esista un campo scalare $U(\vec{r})$, detto potenziale, tale che $L_{\gamma(A,B)} = U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A)$. Dim:

- La condizione è necessaria poichè, se la forza posizionale $\vec{F}(\vec{r})$ è conservativa, allora scelto ad arbitrio un punto di partenza fisso O si ha che $U(\vec{r}_P) = \int_{\gamma(O,P)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Dunque risulta:

$$L_{\gamma(A,B)} = \int_{\gamma(A,B)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1(A,O)} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2(O,B)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\gamma_1(O,A)} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2(O,B)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -U(\vec{r}_A) + U(\vec{r}_B)$$



- La condizione è sufficiente poichè, se $L_{\gamma(A,B)} = U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A)$, è evidente che il lavoro dipende soltanto dagli estremi e dunque la forza è conservativa.

4.0.55 d_di_25

La condizione necessaria e sufficiente affinché la forza posizionale $\vec{F}(\vec{r})$ sia conservativa è che esista un campo scalare $U(\vec{r})$, detto potenziale, tale che $\vec{F}(\vec{r}) = (\vec{\nabla} U)(\vec{r})$. Dim:

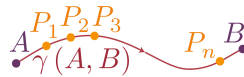
- La condizione è necessaria poichè, se la forza posizionale $\vec{F}(\vec{r})$ è conservativa, allora $L_{\gamma(A,B)} = U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A)$. Dunque per uno spostamento elementare $d\vec{r} = dx\hat{i}$ risulta:

$$\delta L = U(x+dx, y, z) - U(x, y, z) \text{ e } \delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot (dx\hat{i}) = F_x dx \Rightarrow F_x = \frac{U(x+dx, y, z) - U(x, y, z)}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\text{Con un ragionamento analogo per } y \text{ e } z \text{ si ottiene } F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, F_z = \frac{\partial U}{\partial z} \text{ da cui: } \vec{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} = \vec{\nabla} U$$

- La condizione è sufficiente poichè, se $\vec{F} = \vec{\nabla} U$, allora $\delta L = dU = U(x+dx, y+dy, z+dz) - U(x, y, z)$. Dunque:

$$L_{\gamma(A,B)} = [U(P_1) - U(A)] + [U(P_2) - U(P_1)] + \dots + [U(P_n) - U(P_{n-1})] + [U(B) - U(P_n)] = U(B) - U(A)$$

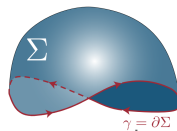


4.0.56 d_di_26

La condizione necessaria e sufficiente affinché la forza posizionale $\vec{F}(\vec{r})$ definita in un dominio semplicemente connesso \mathcal{D} sia conservativa è che il rotore della forza sia ovunque nullo nel dominio di definizione $(\vec{\nabla} \wedge \vec{F})(\vec{r}_P) = \vec{0}$, $\forall P \in \mathcal{D}$. Dim:

- La condizione è necessaria poichè, se la forza posizionale $\vec{F}(\vec{r})$ è conservativa, allora esiste una funzione potenziale U tale che $\vec{F} = \vec{\nabla} U$. Perciò $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} U) = \vec{0}$ perchè il rotore di un gradiente è sempre nullo.
- La condizione è sufficiente poichè, se $(\vec{\nabla} \wedge \vec{F})(\vec{r}_P) = \vec{0}$, $\forall P \in \mathcal{D}$, allora per il teorema di Stokes, scelta una superficie $\Sigma \subset \mathcal{D}$ che abbia per bordo la curva $\gamma \subset \mathcal{D}$ (sempre possibile perchè semplicemente connesso), allora:

$$\oint_{\gamma=\partial\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \hat{n} d\Sigma = 0, \quad \forall \gamma \subset \mathcal{D} \text{ pertanto } \vec{F} \text{ è conservativa.}$$



4.0.57 d_di_27

Dalla seconda legge di Keplero si trova che la forza di gravità \vec{F}_{SP} che il sole esercita sui pianeti è una forza centrale. Infatti per la costanza della velocità areolare risulta $\frac{1}{2}\vec{r}_{SP} \wedge \vec{v}_P = \vec{A} \equiv \text{cost.}$ per cui derivando membro a membro rispetto al tempo si ottiene: $\underbrace{\frac{1}{2}\vec{v}_P \wedge \vec{v}_P + \frac{1}{2}\vec{r}_{SP} \wedge \vec{a}_P}_{\vec{0}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{r}_{SP} \wedge \vec{a}_P = \vec{0} \Rightarrow \vec{r}_{SP} \parallel \vec{a}_P$. Perciò la forza, avendo la stessa direzione dell'accelerazione è

anch'essa diretta come il vettore posizionale $\vec{F}_{SP} \parallel \vec{r}_{SP}$.

4.0.58 d_di_28

L'equazione dell'ellisse di semiassi α (maggiore) e β (minore) ed eccentricità e in coordinate cilindriche è: $r(\varphi) = \frac{\alpha(1-e^2)}{1-e\cos\varphi}$. Dalla seconda legge di Keplero sappiamo che $A = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} \equiv \text{cost.}$ dunque durante un periodo T del moto di rivoluzione

$$TA = T \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \pi\alpha\beta \text{ cioè } \dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T} \frac{\alpha\beta}{r^2}$$

Determiniamo la componente azimutale dell'accelerazione a_φ a partire dall'espressione della velocità areolare:

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} \equiv \text{cost.} \Rightarrow \frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt} = 0 \Rightarrow 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = r(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = ra_\varphi = 0$$

quindi, essendo $r \neq 0$, $a_\varphi = 0$.

Poichè $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$ ricaviamo il termine \ddot{r} a partire dall'equazione dell'ellisse e dalla derivata dell'angolo φ rispetto al tempo:

$$r = \frac{\alpha(1-e^2)}{1-e\cos\varphi} \Rightarrow \dot{r} = -\frac{\alpha(1-e^2)}{(1-e\cos\varphi)^2} (e\sin\varphi)\dot{\varphi} = -\frac{2\pi}{T}\alpha\beta \frac{e(\sin\varphi)}{\alpha(1-e^2)} \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{2\pi}{T}\alpha\beta \frac{e(\cos\varphi)\dot{\varphi}}{\alpha(1-e^2)} = -\frac{4\pi^2}{T^2} \frac{\alpha^2\beta^2}{r^2} \frac{e(\cos\varphi)}{\alpha(1-e^2)}$$

Determiniamo ora la componente radiale dell'accelerazione $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$ dai dati precedentemente calcolati e dalla relazione $\alpha^2(1-e^2) = \beta^2$:

$$a_r = -\frac{4\pi^2}{T^2} \frac{\alpha^2\beta^2}{r^2} \left[\frac{e(\cos\varphi)}{\alpha(1-e^2)} + \frac{1}{r} \right] = -\frac{4\pi^2}{T^2} \frac{\alpha^2\beta^2}{r^2} \left[\frac{e(\cos\varphi)}{\alpha(1-e^2)} + \frac{1-e\cos\varphi}{\alpha(1-e^2)} \right] = -\frac{4\pi^2}{T^2} \frac{\alpha^2\beta^2}{r^2} \frac{1}{\alpha(1-e^2)} = -\frac{4\pi^2}{T^2} \frac{\alpha^3}{r^2} \frac{\beta^2}{\alpha^2(1-e^2)}$$

Poichè dunque il vettore accelerazione nella base cilindrica vale $\vec{a}_P = a_r\hat{i}_r + a_\varphi\hat{i}_\varphi + a_z\hat{k}$ e $\vec{F}_{SP} = m_P\vec{a}_P$ allora possiamo dire che $\vec{F}_{SP} = -m_P \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{\alpha^3}{r^2} \hat{i}_r$ perciò la forza di gravità esercitata da due punti materiali ha modulo inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra i due punti materiali.

4.0.59 d_di_29

Nell'espressione $\vec{F}_{SP} = -m_P \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{\alpha^3}{r^2} \hat{i}_r = -m_P \frac{k}{r_{SP}^2} \hat{r}_{SP}$ il fattore $k = \frac{4\pi^2}{T^2} \alpha^3$ contiene il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore α dell'ellisse e il quadrato del tempo di rivoluzione T che, per la terza legge di Keplero ($T^2 \propto \alpha^3$) è lo stesso per tutti i pianeti. Per il III principio della dinamica la forza che il sole esercita sul pianeta è opposta alla forza che il pianeta esercita sul sole e poichè la forza è proporzionale alla massa del pianeta m_P , per ragioni di simmetria, deve essere anche proporzionale alla massa del sole m_S . La costante k dovrà quindi contenere la massa del sole: $k = \gamma m_S$.

Otteniamo quindi la legge $\vec{F}_{SP} = -\gamma \frac{m_P m_S}{r_{SP}^2} \hat{r}_{SP}$ dalla quale si nota che la forza di gravità esercitata da due punti materiali ha modulo direttamente proporzionale alle masse dei due punti materiali.