Esercizi di statica dei sistemi e di ricapitolazione

Esercizio 1

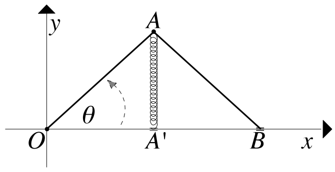
Un sistema materiale costituito da due aste omogenee di ugual massa m e lunghezza ℓ, mobile nel piano verticale Oxy, è soggetto ai seguenti vincoli:

* il primo estremo della prima asta è incernierato nell'origine del sistema di riferimento,
* il primo estremo della seconda asta è incernierato nel secondo estremo della prima asta,
* il secondo estremo della seconda asta è vincolato a scorrere sull'asse x.

Sul sistema, oltre alla forza peso, agisce una forza elastica rappresentata da una molla ideale di costante $k = \alpha \frac{mg}{\ell}$, $(\alpha > 0)$ e lunghezza a riposo nulla che collega A con A', proiezione di A sull'asse x.

Introdotto il parametro θ, angolo che la prima asta forma con l'asse x,

* determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità al variare di α;
* scrivere l'equazione differenziale che governa il moto del sistema;
* determinare eventuali integrali primi del moto.



Soluzione

equailibrio e stabilità:

$(0) < \alpha < 1$**:** due posizioni di equilibrio: $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ instabile e $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$ stabile;

$\alpha > 1$: 4 posizioni di equilibrio: θ_1 e θ_2 instabili,

$\theta_3 = -\arcsin\frac{1}{\alpha}$ e $\theta_4 = \pi + \arcsin\frac{1}{\alpha}$ stabili;

$\alpha = 1$: due posizioni di equilibrio: $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ instabile e $\theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = -\frac{\pi}{2}$ stabile:

equazione del moto:

$$2m\ell^2\left(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\right)\ddot{\theta} + 2m\ell^2 \sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + mgl(1 + \alpha\sin\theta)\cos\theta = 0;$$

integrale primo di moto: $m\ell^2\left(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2 + mg\ell(\sin\theta + \frac{\alpha}{2}\sin^2\theta) = E.$

Esercizio 2

Un sistema materiale costituito da un disco omogeneo di massa m e raggio ℓ e da un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza 8ℓ, mobile su un piano verticale Oxy è soggetto ai seguenti vincoli:

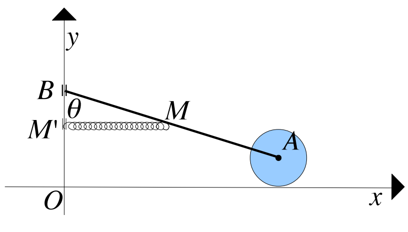
* il disco rotola senza strisciare sull'asse x,
* l'estremo A dell'asta è incernierato nel centro del disco,
* l'estremo B dell'asta scorre sull'asse y.

Oltre alla forza peso sul sistema agiscono:

* una forza elastica rappresentata da una molla ideale di costante $k = \frac{mg}{\ell}$ e lunghezza a riposo nulla che collega il punto medio dell'asta M con M', proiezione di M sull'asse y,
* una coppia di momento $\mathbf{M} = -\alpha mg\ell\hat{\boldsymbol{k}}$ applicata al disco.

Introdotto il parametro θ, angolo che l'asta AB forma con l'asse y, determinare

* per quale valore di α la configurazione $\theta = \frac{\pi}{3}$ è di equilibrio e discuterne la stabilità.



Soluzione

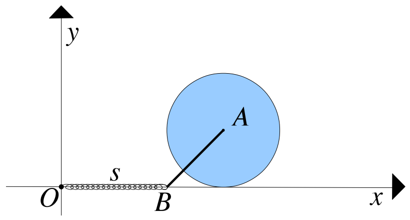
$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, la configurazione di equilibrio è instabile.

Esercizio 3

Un sistema materiale costituito da un disco omogeneo di massa m e raggio r e da un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza $\sqrt{2}r$, mobile su un piano verticale Oxy è soggetto ai seguenti vincoli:
* il disco rotola senza strisciare sull'asse x,
* l'estremo A dell'asta è incernierato nel centro del disco,
* l'estremo B dell'asta scorre sull'asse x.

Oltre alla forza peso sul sistema agiscono:
* una forza elastica rappresentata da una molla ideale di costante k e lunghezza a riposo nulla che collega B con O,
* una coppia di momento $\mathbf{M} = \alpha k (A - O) \wedge (A - H)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, applicata al disco.

Introdotto il parametro s, ascissa di B,
* determinare le configurazione di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità al variare di $\alpha \neq 1$;
* determinare un integrale primo di moto.



Soluzione

$s = -\frac{\alpha}{1+\alpha} r$, stabile se $\alpha > -1$;

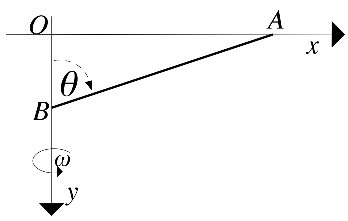
integrale primo di moto: $\frac{5}{4} m\dot{s}^2 + \frac{k}{2}[s^2 + \alpha(s+r)^2] = E$.

Esercizio 4

Un'asta omogenea pesante AB di massa m e lunghezza ℓ, mobile in un piano verticale Oxy, con y asse verticale, ha gli estremi vincolati a scorrere sugli assi x e y.

Il piano è posto in rotazione uniforme attorno all'asse y con velocità angolare $\omega \hat{\boldsymbol{\jmath}}$.

Introdotto il parametro θ, angolo che l'asta AB forma con l'asse y,
* determinare le configurazioni di equilibrio relativo, discutendone la stabilità al variare di ω.



Soluzione

* $(0) < \omega^2 < \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}$: due posizioni di equilibrio:
  $\theta_1 = 0$ stabile e $\theta_2 = \pi$ instabile;
* $\omega^2 > \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}$: 4 posizioni di equilibrio:
  θ_1 e θ_2 instabili, $\theta_{3,4} = \pm \arccos \frac{3g}{2\omega^2 \ell}$ stabili;
* $\omega^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}$ due posizioni di equilibrio:
  $\theta_1 = \theta_3 = \theta_4 = 0$ stabile e $\theta_2 = \pi$ instabile.

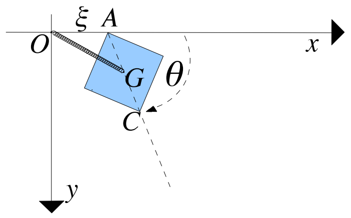
ESERCIZIO 5

Una lamina quadrata $ABCD$ omogenea di massa m e lato $\sqrt{2}\,\ell$, mobile in un piano verticale Oxy,ha il vertice A vincolato a scorrere sull'asse x.

Oltre alla forza peso sulla lamina agisce la forza $\mathbf{F} = -2\frac{mg}{\ell}(G - O)$:, applicata nel baricentro G della lamina.

Introdotti i parametri θ, angolo che la diagonale AC forma con l'asse x, e ξ, ascissa di A:

* determinare le configurazioni di equilibrio, discutendone la stabilità,
* calcolare l'accelerazione di G all'istante iniziale, sapendo che inizialmente A si trova in O, C sul semiasse positivo delle x e l'atto di moto della lamina è nullo.



SOLUZIONE

* quattro posizioni di equilibrio:
  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ e $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ instabili; $\theta_3 = \frac{\pi}{6}$ e $\theta_4 = \frac{5\pi}{6}$ stabili,
* $\mathbf{a}_G(0) = g(-2\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{3}{4}\hat{\boldsymbol{\jmath}}\,)$

ESERCIZIO 6

Un sistema materiale costituito da un punto materiale P di massa m e da un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza 2ℓ, mobile nel piano verticale Oxy, è soggetto ai seguenti vincoli:

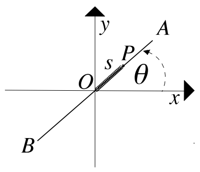
* il punto medio dell'asta è incernierato nell'origine del sistema di riferimento,
* il punto P è vincolato a scorrere sull'asta.

Oltre alla forza peso sul sistema agiscono

* una forza elastica realizzata con una molla ideale di costante elastica $k = \frac{mg}{2\ell}$ e lunghezza a riposo nulla che collega il punto medio dell'asta con il punto P.

Introdotti i parametri s, ascissa di P sull'asta, tale che $(P - O) = \frac{s}{\ell}(A - O)$, e θ, angolo che l'asta AB forma con l'asse x,

* determinare le configurazioni di equilibrio ordinarie e di confine e studiare la stabilità di quelle ordinarie.



SOLUZIONE

* configurazioni di equilibrio ordinarie
  $\Gamma_1 = (s = 0, \theta = 0)$ e $\Gamma_2 = (s = 0, \theta = \pi)$, entrambe instabili;
* configurazioni di equilibrio di confine
  $\Gamma_1^c = (s = \ell, \theta = -\frac{\pi}{2})$ e $\Gamma_2^c = (s = -\ell, \theta = \frac{\pi}{2})$.
