CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
PROVA SCRITTA - 4 settembre 2015

1. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ definito come segue:

$$f((x, y, z)) = (2x + y, 2y + z, 2z).$$

a. Stabilire se l'endomorfismo è diagonalizzabile.

b. Si consideri l'endomorfismo $f^2 = f \circ f$ e si stabilisca se è diagonalizzabile.

c. Determinare la dimensione del sottospazio $f^2(W)$, dove $W = Span\{(2, 1, 3), (2, 3, 4)\}$.

d. Quali sono gli autovalori dell'endomorfismo f^{200}?

2. Si consideri lo spazio euclideo tridimensionale e si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando in ciascun caso la risposta:

a. Sia r una retta e P e Q due punti tali che $P \in s \perp r$ e $Q \in t \perp r$. Non possiamo dedurre che $s \parallel t$.

b. Sia π una retta e P e Q due punti tali che $P \in s \perp \pi$ e $Q \in t \perp \pi$. Non possiamo dedurre che $s \parallel t$.

c. Sia π un piano e P un suo punto. Sia r una retta non contenuta in π parallalela a π. Se $P \in s \parallel r$, non possiamo dedurre che $s \subseteq \pi$.

d. Se $P \in r \subseteq \pi$ e $P' \in r' \subseteq \pi'$ e $\pi \parallel \pi'$, allora la retta PP' è perpendicolare a r se e solo se è perpendicolare a r'.

3. Siano $V = \{(1, 0, 2), (2, 1, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ e $W = \{(1, 2), (3, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

a. Determinare un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $V \cup \{v\}$ non sia una base di $\mathbb{R}^3$.

b. Determinare una rappresentazione cartesiana del sottospazio $Span(V)$.

c. Determinare una base di $Span(V)$ ortonormale rispetto al prodotto scalare canonico.

d. Scrivere la matrice canonicamente associata a una trasformazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $g(Span(V)) = Span(W)$.