Esercizi sulla geometria delle masse

Esercizio 1

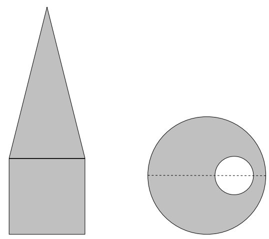
Determinare il baricentro delle seguenti figure

- arco di circonferenza omogeneo di centro O, raggio R e apertura 2α;
- settore circolare omogeneo di centro O, raggio R e apertura 2β;
- triangolo rettangolo omogeneo di cateti a e b;
- asta AB non omogenea di lunghezza ℓ con densità $\rho(P) = k|P - A|$;
- cono omogeneo di vertice V, raggio di base R e altezza h.

Soluzione
$|G - O| = \frac{\sin\alpha}{\alpha}R$, $\quad |G - O| = \frac{2\sin\beta}{3\beta}R$, $\quad G = (\frac{a}{3}, \frac{b}{3})$, $\quad |G - A| = \frac{2}{3}\ell$, $\quad |G - V| = \frac{3}{4}h$.

Esercizio 2

Determinare il baricentro delle seguenti figure omogenee
* quadrato di centro O e lato a, sormontato da un triangolo isoscele di altezza $2a$;
* disco di centro O e raggio R con foro circolare di raggio r e distanza d tra i centri.



Soluzione
$|G - O| = \frac{7}{12}a$, $\quad |G - O| = \frac{dR^2}{R^2 - r^2}$.

Esercizio 3

Determinare la matrice di inerzia delle seguenti figure omogenee di massa m rispetto ad una terna principale d'inerzia con origine nel baricentro

- asta di lunghezza ℓ;
- circonferenza di raggio R;
- disco di raggio R;
- rettangolo di lati a, b;

Soluzione

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{12} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mb^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4

Determinare la matrice di inerzia di un settore circolare omogeneo di raggio R, apertura 2α e massa m rispetto ad una terna principale d'inerzia con origine nel centro del settore.

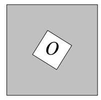
Soluzione

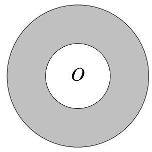
$$\begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4}(1 - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4}(1 - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}.$$

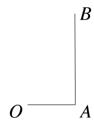
Esercizio 5

Determinare la matrice di inerzia delle seguenti figure omogenee rispetto ad una terna di origine O

* quadrato di lato L con foro quadrato concentrico di lato ℓ e massa m;
* corona circolare di raggi R, r e massa m;
* asta OA di lunghezza $2a$ e massa m ortogonale all'asta AB di lunghezza $2b$ e massa m.







Soluzione

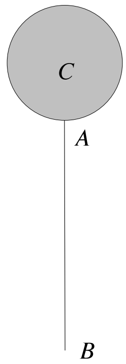
$$\begin{pmatrix} \frac{m(L^2+\ell^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(L^2+\ell^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(L^2+\ell^2)}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{m(R^2+r^2)}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(R^2+r^2)}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(R^2+r^2)}{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{3}mb^2 & -2mab & 0 \\ -2mab & \frac{16}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}m(4a^2+b^2) \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6

Un corpo rigido è costituito da un disco omogeneo di centro C, raggio r e massa μ e da un'asta omogenea AB di massa ν e lunghezza $4r$ che ha l'estremo A saldato in un punto del bordo del disco in modo che A, B e C risultino allineati.

* Determinare μ e ν in modo che la massa del sistema sia $3m$ e il baricentro dal corpo coincida con A.
* Scrivere la matrice di inerzia del corpo rispetto al punto A.



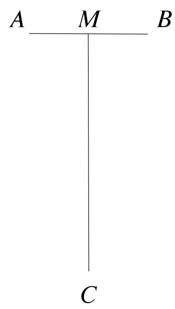
Soluzione

$$\mu = 2m\,,\ \nu = m\,, \begin{pmatrix} \frac{47}{6}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{3}mr^2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7

Un corpo rigido è costituito da due aste omogenee AB e CM di ugual massa m e di lunghezza 2ℓ e 4ℓ rispettivamente, saldate perpendicolarmente tra loro in modo tale che M sia il punto medio di AB.

* Determinare la posizione del baricentro G del corpo;
* scrivere la matrice di inerzia rispetto ad una terna principale di inerzia centrata in G.



Soluzione

$$|G-M| = \ell\,, \begin{pmatrix} \frac{10}{3}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3}m\ell^2 \end{pmatrix}.$$
