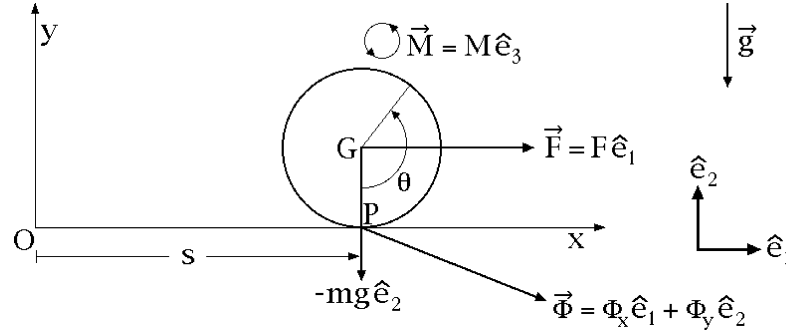


1. ROTOLAMENTO DI UN DISCO SU UN PIANO ORIZZONTALE

Si consideri un disco circolare rigido, di centro G , raggio R e massa m , vincolato a muoversi nel piano verticale Oxy di una terna di riferimento cartesiana ortogonale $Oxyz$, mantenendosi a contatto con l'asse orizzontale Ox . Per semplicità si supponga che il baricentro del disco coincida con il suo centro geometrico G . Il disco, pesante, è soggetto ad una sollecitazione esterna $\vec{F} = F \hat{e}_1$ applicata nel centro G e ad una coppia di momento $\vec{M} = M \hat{e}_3$. Il sistema descrive in modo schematico una ruota vincolata a rotolare su un piano orizzontale, in presenza di una eventuale forza di trazione \vec{F} e di una coppia motrice di momento \vec{M} .



Utilizzando l'ascissa s di G e l'angolo di rotazione θ mostrato in figura, si vogliono ricavare le equazioni che governano il moto del sistema, sia nell'ipotesi che il disco rotoli con la possibilità di strisciare sull'asse orizzontale Ox , sia nel caso di puro rotolamento.

2. PURO ROTOLAMENTO (rotolamento senza strisciamento)

Oltre alla coppia di momento $M \hat{e}_3$, il disco rigido è soggetto alla forza peso $-mg \hat{e}_2$ e a quella di trazione $F \hat{e}_1$, entrambe applicate nel baricentro G , nonché ad una reazione vincolare $\vec{\Phi} = \Phi_x \hat{e}_1 + \Phi_y \hat{e}_2$ agente sul punto P del disco posto a contatto con l'asse orizzontale. Le equazioni del moto si deducono facendo ricorso alle equazioni cardinali della dinamica.

L'equazione cardinale della quantità di moto si scrive:

$$m\ddot{\vec{G}} = m\ddot{s} \hat{e}_1 = -mg \hat{e}_2 + F \hat{e}_1 + \Phi_x \hat{e}_1 + \Phi_y \hat{e}_2$$

e proiettando lungo gli assi ortogonali Ox ed Oy porge le due equazioni scalari:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F + \Phi_x \\ 0 = -mg + \Phi_y \end{cases} \quad (2.1)$$

La condizione di puro rotolamento impone peraltro che il punto P del disco abbia velocità nulla, eguale a quella del corrispondente punto del piano orizzontale:

$$0 = \dot{P} = \dot{G} + \vec{\omega} \wedge (P - G) = \dot{s} \hat{e}_1 + \dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (-R \hat{e}_2) = (\dot{s} + R\dot{\theta}) \hat{e}_1$$

per cui deve aversi:

$$\dot{s} + R\dot{\theta} = 0. \quad (2.2)$$

L'equazione cardinale del momento angolare, rispetto al polo G , assume poi la forma:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{K}_G &= M\hat{e}_3 + (P - G) \wedge (\Phi_x \hat{e}_1 + \Phi_y \hat{e}_2) = \\ &= M\hat{e}_3 + (-R\hat{e}_2) \wedge (\Phi_x \hat{e}_1 + 0) = M\hat{e}_3 + R\Phi_x \hat{e}_3\end{aligned}$$

dove il momento angolare \vec{K}_G del disco è legato al momento d'inerzia I rispetto all'asse Gz dall'ovvia relazione:

$$\vec{K}_G = I\dot{\theta}\hat{e}_3$$

e quindi, sostituendo:

$$I\ddot{\theta} = M + R\Phi_x . \quad (2.3)$$

Vale la pena di osservare come allo stesso risultato si giunga considerando l'equazione cardinale del momento angolare rispetto al polo P :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{K}_P &= -\dot{P} \wedge m\dot{G} + \vec{M}_P = \vec{M}_P = (G - P) \wedge F\hat{e}_1 + (G - P) \wedge (-mg\hat{e}_2) + M\hat{e}_3 = \\ &= R\hat{e}_2 \wedge F\hat{e}_1 + R\hat{e}_2 \wedge (-mg\hat{e}_2) + M\hat{e}_3 = (-RF + M)\hat{e}_3\end{aligned} \quad (2.4)$$

dove il momento angolare \vec{K}_P del disco in P si esprime ora per mezzo dell'equazione:

$$\vec{K}_P = I_{Pz}\dot{\theta}\hat{e}_3$$

in quanto P è per ipotesi un punto del corpo a velocità nulla, identificabile con il centro istantaneo di rotazione. Il momento d'inerzia I_{Pz} del disco rispetto all'asse Pz si ricava da I facendo uso del teorema di Huygens-Steiner:

$$I_{Pz} = I + mR^2$$

espressione che inserita nella (2.4) conduce all'equazione del moto:

$$(I + mR^2)\ddot{\theta} = -RF + M .$$

Questa può anche porsi nella forma equivalente:

$$I\ddot{\theta} = -mR^2\ddot{\theta} - RF + M = M + R\Phi_x - mR^2\ddot{\theta} - RF - R\Phi_x$$

e poiché risulta:

$$mR\ddot{\theta} + F + \Phi_x = mR^2\ddot{\theta} + m\ddot{s} = m\frac{d}{dt}(R\dot{\theta} + \dot{s}) = m\frac{d}{dt}0 = 0$$

si conclude che

$$I\ddot{\theta} = M + R\Phi_x$$

in accordo con la (2.3).

Le equazioni (2.1), (2.2), (2.3) possono riassumersi nel seguente sistema:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F + \Phi_x \\ \Phi_y = mg \\ \dot{s} + R\dot{\theta} = 0 \\ (I + mR^2)\ddot{\theta} = -RF + M \end{cases} \implies \ddot{s} + R\ddot{\theta} = 0 \quad (2.5)$$

L'ultima equazione si risolve in $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = \frac{-RF + M}{I + mR^2} \quad (2.6)$$

mentre dalla prima e dalla terza segue l'espressione della componente Φ_x della reazione vincolare:

$$\Phi_x = m\ddot{s} - F = -mR\ddot{\theta} - F = -mR \frac{M - RF}{I + mR^2} - F = -\frac{IF + mRM}{I + mR^2} .$$

A questa si affianca la componente verticale costante della reazione vincolare in P :

$$\Phi_y = mg$$

ed infine l'equazione per il moto orizzontale del baricentro G :

$$\ddot{s} = -R\ddot{\theta} = R \frac{RF - M}{I + mR^2} . \quad (2.7)$$

Per F ed M costanti l'equazione (2.6) descrive un moto rotatorio uniformemente accelerato del disco attorno al proprio asse baricentrale Gz , mentre la (2.7) rappresenta un contemporaneo moto uniformemente accelerato del baricentro secondo la direzione orizzontale Ox .

In definitiva, le equazioni del moto richieste sono:

$$\begin{cases} \ddot{s} = R \frac{RF - M}{I + mR^2} \\ \ddot{\theta} = -\frac{RF - M}{I + mR^2} \end{cases} \quad (2.8)$$

con la reazione vincolare in P data dall'espressione:

$$\vec{\Phi} = -\frac{IF + mRM}{I + mR^2} \hat{e}_1 + mg \hat{e}_2 . \quad (2.9)$$

Osservazione. Condizione per il puro rotolamento.

L'effettivo realizzarsi della condizione di puro rotolamento dipende, come è ragionevole attendersi, dalla intensità delle forze di attrito radente che il piano orizzontale è in grado di esercitare sul disco nel suo punto di contatto P con il piano stesso.

In condizioni di puro rotolamento, il punto P del disco risulta istantaneamente in quiete rispetto alla terna assoluta $Oxyz$, identificandosi con il centro di rotazione istantanea del sistema rigido. Data l'assenza di strisciamento su Ox , la componente orizzontale della reazione vincolare agente sul disco in P deve quindi interpretarsi come una forza di attrito radente statico, per la quale vale la legge di Coulomb-Morin:

$$|\Phi_x| \leq \mu_s |\Phi_y|$$

che in virtù della (2.9) può anche esprimersi nella forma più esplicita:

$$\left| \frac{FI + mRM}{I + mR^2} \right| \leq \mu_s mg .$$

Da un semplice raccoglimento a fattor comune si deduce la relazione equivalente:

$$\left| F + M \frac{mR}{I} \right| \left| 1 + \frac{mR^2}{I} \right|^{-1} \leq \mu_s mg$$

che porta infine alla condizione necessaria e sufficiente perché il moto sia di puro rotolamento:

$$\left| F + M \frac{mR}{I} \right| \leq \mu_s mg \left(1 + \frac{mR^2}{I} \right)$$

ossia:

$$\mu_s \geq \frac{1}{mg} \left(1 + \frac{mR^2}{I} \right)^{-1} \left| F + M \frac{mR}{I} \right| . \quad (2.10)$$

Come ci si aspetta, la condizione (2.10) stabilisce che il moto del disco sulla retta Ox risulta di puro rotolamento se e soltanto se il coefficiente di attrito radente statico μ_s assume un valore sufficientemente elevato.

3. MOTO DI ROTOLAMENTO CON STRISCIAMENTO

Le equazioni cardinali della quantità di moto e del momento angolare in G :

$$m\ddot{\vec{G}} = \vec{R} \quad \frac{d}{dt} \vec{K}_G = \vec{M}_G$$

porgono, come prima,

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F + \Phi_x \\ \Phi_y = mg \end{cases} \quad \text{e} \quad I\ddot{\theta} = M + R\Phi_x , \quad (3.1)$$

ma in questo caso la velocità del punto P del disco, tangente all'asse orizzontale Ox , risulta diversa da zero. La componente orizzontale Φ_x della reazione vincolare applicata al disco in P deve quindi interpretarsi come una sollecitazione di attrito radente dinamico, che si esercita in senso opposto alla velocità $\dot{P} = \dot{P} \cdot \hat{e}_1 \hat{e}_1$ e soddisfa la legge di Coulomb-Morin:

$$\Phi_x = \begin{cases} -\mu_d \Phi_y & \text{se } \hat{e}_1 \cdot \dot{P} > 0 \\ +\mu_d \Phi_y & \text{se } \hat{e}_1 \cdot \dot{P} < 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Le equazioni differenziali del moto del sistema assumeranno dunque una forma diversa a seconda del segno di $\dot{P} \cdot \hat{e}_1$, osservato che:

$$\hat{e}_1 \cdot \dot{P} = \hat{e}_1 \cdot [\dot{G} + \dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (P - G)] = \dot{s} + R\dot{\theta} \text{ .}$$

I casi $\dot{P} \cdot \hat{e}_1 > 0$ e $\dot{P} \cdot \hat{e}_1 < 0$, ovvero $\dot{s} + R\dot{\theta} > 0$ e $\dot{s} + R\dot{\theta} < 0$, dovranno essere esaminati separatamente.

- (i) Se $\hat{e}_1 \cdot \dot{P} > 0$, ossia $\dot{s} + R\dot{\theta} > 0$, sostituendo le relazioni (3.2) nelle equazioni cardinali (3.1) si ottengono le equazioni del moto:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F - \mu_d mg \\ I\ddot{\theta} = M - R\mu_d mg \end{cases}$$

immediatamente riconducibili alla forma normale:

$$\begin{cases} \ddot{s} = \frac{F}{m} - \mu_d g \\ \ddot{\theta} = \frac{M}{I} - \frac{R\mu_d mg}{I} \end{cases} \quad (3.3)$$

Qualora F e M siano funzioni sufficientemente regolari di $(t, s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta})$, il problema di Cauchy ottenuto associando alla (3.3) le condizioni iniziali $(t_0, s_0, \theta_0, \dot{s}_0, \dot{\theta}_0)$ — con $\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 > 0$ — ammette una ed una sola soluzione massimale, che avrà significato fisico fintantoché $\dot{s} + R\dot{\theta} > 0$.

In particolare, se F ed M sono costanti assegnate le equazioni (3.3) si integrano esplicitamente e per $(\dot{s}(0), \dot{\theta}(0)) = (\dot{s}_0, \dot{\theta}_0)$ forniscono:

$$\begin{cases} \dot{s} = \left(\frac{F}{m} - \mu_d g \right) t + \dot{s}_0 \\ \dot{\theta} = \left(\frac{M}{I} - \frac{R\mu_d mg}{I} \right) t + \dot{\theta}_0 \end{cases}$$

da cui si deduce la condizione di compatibilità:

$$\dot{s} + R\dot{\theta} = \left(\frac{F}{m} - \mu_d g + \frac{RM}{I} - \frac{R^2 \mu_d mg}{I} \right) t + \dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 > 0$$

che specifica l'eventuale intervallo di valori di t per i quali la soluzione è fisicamente significativa.

- (ii) Se $\hat{e}_1 \cdot \dot{P} < 0$, ossia $\dot{s} + R\dot{\theta} < 0$, le equazioni del moto differiscono dalle precedenti per il segno del termine di attrito radente dinamico:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F + \mu_d mg \\ I\ddot{\theta} = M + R\mu_d mg \end{cases}$$

e le equazioni differenziali del moto in forma normale si scrivono:

$$\begin{cases} \ddot{s} = \frac{F}{m} + \mu_d g \\ \ddot{\theta} = \frac{M}{I} + \frac{R\mu_d mg}{I} \end{cases} \quad (3.4)$$

Le soluzioni di (3.4) sono fisicamente accettabili nell'intervallo di t contenente l'istante iniziale per il quale si abbia $\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) < 0$.

Nel caso notevole di F ed M costanti, una integrazione esplicita delle (3.4) con le condizioni iniziali $(\dot{s}(0), \dot{\theta}(0)) = (\dot{s}_0, \dot{\theta}_0)$ porge:

$$\begin{cases} \dot{s} = \left(\frac{F}{m} + \mu_d g \right) t + \dot{s}_0 \\ \dot{\theta} = \left(\frac{M}{I} + \frac{R\mu_d mg}{I} \right) t + \dot{\theta}_0 \end{cases}$$

e conduce alla condizione di compatibilità per la soluzione:

$$\dot{s} + R\dot{\theta} = \left(\frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2\mu_d mg}{I} \right) t + \dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 < 0$$

che seleziona l'intervallo di t su cui la soluzione è fisicamente ammissibile.

4. DISCUSSIONE GENERALE

La dinamica del sistema è governata da tre diversi sistemi di equazioni differenziali ordinarie in forma normale, come illustrato di seguito.

- (i) Se $\dot{s} + R\dot{\theta} = 0$ e $\mu_s \geq \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \frac{1}{mg}$ il disco rotola senza strisciare sull'asse orizzontale Ox e le equazioni del moto si scrivono:

$$\ddot{s} = R \frac{RF - M}{I + mR^2} \quad \ddot{\theta} = - \frac{RF - M}{I + mR^2}; \quad (4.1)$$

- (ii) per $\dot{s} + R\dot{\theta} > 0$ la velocità del punto di contatto disco-guida è parallela e concorde con \hat{e}_1 , per cui le equazioni del moto assumono la forma:

$$\ddot{s} = \frac{F}{m} - \mu_d g \quad \ddot{\theta} = \frac{M}{I} - \frac{R\mu_d mg}{I}; \quad (4.2)$$

(iii) se infine $\dot{s} + R\dot{\theta} < 0$ si ha al contrario che la velocità del punto P di contatto fra il disco e l'asse orizzontale Ox è antiparallela ad \hat{e}_1 , in modo che risulta:

$$\ddot{s} = \frac{F}{m} + \mu_d g \quad \ddot{\theta} = \frac{M}{I} + \frac{R\mu_d mg}{I} . \quad (4.3)$$

Sotto condizioni molto generali sulle funzioni $F(t, s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta})$ ed $M(t, s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta})$, ciascun sistema di equazioni ammette una ed una sola soluzione massimale per ogni scelta delle condizioni iniziali di $(s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta})$, compatibili con le relative restrizioni sul segno di $\dot{s} + R\dot{\theta}$. Le soluzioni delle singole equazioni del moto vanno raccordate in modo che $\dot{\theta}(t)$, $\dot{s}(t)$ — e dunque anche $\theta(t)$, $s(t)$ — risultino continue. Le forze di attrito applicate, anche quando variano con discontinuità o non sono definite, sono infatti comunque finite e non possono indurre discontinuità nell'impulso. Si verifica facilmente che in tal modo è sempre possibile definire uno ed un solo moto del sistema, in senso massimale, per qualsiasi set assegnato di condizioni iniziali $(s(t_0), \theta(t_0), \dot{s}(t_0), \dot{\theta}(t_0)) = (s_0, \theta_0, \dot{s}_0, \dot{\theta}_0) \in \mathbb{R}^4$, $t_0 \in \mathbb{R}$.

La costruzione del suddetto moto avviene secondo lo schema seguente, che lo individua in modo univoco. Per semplicità ci si limiterà a considerare il moto nel futuro, cioè per $t \geq t_0$, restando inteso che una analoga procedura si applica alla definizione del moto nel passato.

(1) Se $\dot{s}(t_0) + R\dot{\theta}(t_0) > 0$

il moto del sistema è descritto dalla soluzione $(s(t), \theta(t), \dot{s}(t), \dot{\theta}(t))$ del problema di Cauchy associato al sistema (4.2), con la condizione iniziale $(s_0, \theta_0, \dot{s}_0, \dot{\theta}_0)$ all'istante $t = t_0$. Ciò avviene sull'intervallo $t \in [t_0, t_+]$ tale che:

$$\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) > 0 \quad \forall t \in [t_0, t_+) \quad \text{e} \quad \dot{s}(t_+) + R\dot{\theta}(t_+) = 0 .$$

Può naturalmente ricorrere il caso che non esista alcun $t_+ > t_0$ per il quale risulti $\dot{s}(t_+) + R\dot{\theta}(t_+) = 0$ e che, di conseguenza, il moto del sistema sia completamente descritto dalla soluzione di (4.2).

(2) Se $\dot{s}(t_0) + R\dot{\theta}(t_0) < 0$

il moto del sistema si rappresenta per mezzo della soluzione $(s(t), \theta(t), \dot{s}(t), \dot{\theta}(t))$ delle equazioni (4.3) con la condizione iniziale assegnata. L'intervallo di definizione $[t_0, t_+]$ è individuato dalle condizioni:

$$\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) < 0 \quad \forall t \in [t_0, t_+) \quad \text{e} \quad \dot{s}(t_+) + R\dot{\theta}(t_+) = 0 .$$

Circa l'esistenza dell'estremo superiore t_+ valgono le considerazioni già espresse nel caso precedente.

(3) Se $\dot{s}(t_0) + R\dot{\theta}(t_0) = 0$

il moto del sistema può essere descritto su un conveniente intervallo $[t_0, t_+]$ dalla soluzione delle equazioni (4.1), (4.2) o (4.3) che soddisfi le condizioni iniziali assegnate. Precisamente:

(a) si utilizza il sistema (4.1) qualora all'istante t_0 la condizione di Coulomb dell'attrito radente statico (2.10) sia verificata

$$\mu_s \geq \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \left| \frac{1}{mg} \right|_{t=t_0}$$

fissando il massimo t_+ per il quale lungo la soluzione di (4.1) risulti

$$\mu_s \geq \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \frac{1}{mg} \quad \forall t \in [t_0, t_+]$$

— il che peraltro assicura il verificarsi della condizione di puro rotolamento $\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_+]$;

- (b) si fa ricorso al sistema (4.2) nel caso che all'istante t_0 la legge di Coulomb dell'attrito radente statico non sia verificata

$$\mu_s < \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \frac{1}{mg} \Big|_{t=t_0}$$

e nel contempo $\dot{s} + R\dot{\theta}$ risulti crescente — ossia positiva — in un intorno destro di t_0

$$\frac{d}{dt}(\dot{s} + R\dot{\theta})(t_0) = (\ddot{s} + R\ddot{\theta}) \Big|_{t=t_0} = \left(\frac{F}{m} - \mu_d g + \frac{RM}{I} - \frac{R^2 \mu_d mg}{I} \right) \Big|_{t=t_0} > 0. \quad (4.4)$$

L'istante t_+ viene determinato in modo che si abbia

$$\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) > 0 \quad \forall t \in (t_0, t_+)$$

e $\dot{s}(t_+) + R\dot{\theta}(t_+) = 0$ — all'istante t_+ la velocità del punto di contatto disco-asse orizzontale si annulla, dopo avere assunto valori strettamente positivi in tutto l'intervallo aperto (t_0, t_+) ;

- (c) il sistema da impiegare è (4.3) qualora all'istante t_0 la legge di Coulomb dell'attrito radente statico non risulti verificata

$$\mu_s < \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \frac{1}{mg} \Big|_{t=t_0}$$

ed inoltre $\dot{s} + R\dot{\theta}$ sia decrescente — dunque negativa — in un intorno destro di t_0

$$\frac{d}{dt}(\dot{s} + R\dot{\theta})(t_0) = (\ddot{s} + R\ddot{\theta}) \Big|_{t=t_0} = \left(\frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d mg}{I} \right) \Big|_{t=t_0} < 0. \quad (4.5)$$

L'istante t_+ è fissato in modo che si abbia

$$\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) < 0 \quad \forall t \in (t_0, t_+)$$

e $\dot{s}(t_+) + R\dot{\theta}(t_+) = 0$ — la velocità del punto di contatto fra disco e guida orizzontale si mantiene strettamente negativa nell'intervallo (t_0, t_+) e si annulla a $t = t_+$.

Osservazione. Mutua esclusione delle soluzioni (a), (b) e (c).

Le condizioni (4.4) e (4.5) sono alternative l'una all'altra. Qualora infatti esse risultassero valide simultaneamente, all'istante t_0 si avrebbe:

$$\begin{cases} \left(-\frac{F}{m} + \mu_d g - \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d mg}{I} \right) \Big|_{t=t_0} < 0 \\ \left(\frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d mg}{I} \right) \Big|_{t=t_0} < 0 \end{cases}$$

e quindi, sommando membro a membro:

$$2\mu_d g + 2\frac{R^2 \mu_d mg}{I} < 0$$

una palese contraddizione, visto che μ_d , g ed I sono costanti positive assegnate. Se ne conclude che le procedure (b) e (c) non sono soltanto ovviamente alternative ad (a), richiedendo che la legge di Coulomb dell'attrito radente statico non sia verificata a $t = t_0$, ma anche mutuamente esclusive.

Osservazione. Caso critico.

A prima vista potrebbe sembrare che le tre soluzioni (a), (b), (c) non esauriscano la totalità dei casi possibili, in quanto nessuna di essere è accettabile nell'ipotesi che all'istante t_0 risulti:

$$\begin{cases} \mu_s < \frac{1}{mg} \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \\ \frac{F}{m} - \mu_d g + \frac{RM}{I} - \frac{R^2 \mu_d mg}{I} \leq 0 \\ \frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d mg}{I} \geq 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

La prima delle (4.6) esclude infatti l'applicabilità della procedura (a), mentre la seconda e la terza condizione non autorizzano il ricorso alle procedure (b) e (c), in quanto incompatibili con (4.4) e (4.5) rispettivamente. La situazione individuata dalle (4.6) si configura dunque come critica, non potendosi procedere alla descrizione del moto del sistema mediante nessuna delle equazioni differenziali (4.1), (4.2), (4.3).

In realtà detto caso critico non può ricorrere grazie alla ben nota condizione generale che lega i coefficienti di attrito radente statico e dinamico:

$$\mu_s \geq \mu_d \quad (4.7)$$

La seconda e la terza disequazione in (4.6) porgono infatti:

$$\begin{cases} IF - \mu_d mgI + mRM - mR^2 \mu_d mg \leq 0 \\ IF + \mu_d mgI + mRM + mR^2 \mu_d mg \geq 0 \end{cases}$$

da cui segue:

$$\begin{cases} IF + mRM \leq \mu_d mg(I + mR^2) \\ -\mu_d mg(I + mR^2) \leq IF + mRM \end{cases}$$

per cui:

$$|IF + mRM| \leq \mu_d mg(I + mR^2)$$

e quindi:

$$\left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \leq \mu_d mg . \quad (4.8)$$

Dalla prima disequazione (4.6) si deduce allora che:

$$\mu_s < \frac{1}{mg} \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \leq \frac{1}{mg} \mu_d mg = \mu_d \quad \implies \quad \mu_s < \mu_d$$

in contraddizione con la relazione generale (4.7).

Si perviene così alla conclusione che per $\dot{s}(t_0) + R\dot{\theta}(t_0) = 0$ le soluzioni (a), (b) e (c) non sono soltanto mutuamente esclusive, ma esauriscono anche la totalità dei casi possibili, essendo sempre applicabile una ed una sola di esse.

Costruzione del moto del sistema.

La costruzione del moto del sistema per le assegnate condizioni iniziali $(t_0, s_0, \theta_0, \dot{s}_0, \dot{\theta}_0)$ avviene mediante le procedure (1), (2) e (3) – (a), (b), (c), mutuamente esclusive ed esauritive della totalità dei casi possibili. L'applicazione di tali procedure consente di definire il moto del sistema dall'istante iniziale t_0 al successivo istante t_+ . Se t_+ non risulta definito il moto nel futuro è completamente determinato — l'intervallo di definizione può essere superiormente limitato o meno. Qualora viceversa l'istante t_+ sia definito, lo si potrà assumere come nuovo istante iniziale e si farà nuovamente ricorso alle procedure (1), (2), (3) – (a), (b), (c) con le nuove condizioni iniziali $(t_+, s(t_+), \theta(t_+), \dot{s}(t_+), \dot{\theta}(t_+))$. L'iterazione del metodo consente di costruire, in senso massimale, l'intero moto nel futuro del sistema.

Procedura applicata a $t = t_0$	Eq. integrata da t_0 a t_+	Proced. applicabili a $t = t_+$
(1)	(3.2)	(3-a) - (3-b) - (3-c)
(2)	(3.3)	(3-a) - (3-b) - (3-c)
(3-a)	(3.1)	(3-b) - (3-c)
(3-b)	(3.2)	(3-a) - (3-b) - (3-c)
(3-c)	(3.3)	(3-a) - (3-b) - (3-c)

5. ESEMPIO NOTEVOLE: forza di trazione e coppia motrice costanti

Nel caso particolare di F ed M costanti, le equazioni differenziali che descrivono il moto di puro rotolamento del sistema e i due casi di rotolamento con strisciamento possono essere integrate esplicitamente e descrivono moti uniformemente accelerati. Nella fattispecie, l'equazione (4.1), con condizioni iniziali $(t_0, s_0, \theta_0, \dot{s}_0, \dot{\theta}_0)$, ammette la soluzione massimale

in \mathbb{R} :

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + \dot{s}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}R \frac{RF - M}{I + mR^2}(t - t_0)^2 \\ \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0(t - t_0) - \frac{1}{2} \frac{RF - M}{I + mR^2}(t - t_0)^2 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (5.1)$$

mentre per la (4.2) si ha:

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + \dot{s}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m} - \mu_d g\right)(t - t_0)^2 \\ \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{M}{I} - \frac{R\mu_d mg}{I}\right)(t - t_0)^2 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (5.2)$$

e per la (4.3) risulta infine:

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + \dot{s}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m} + \mu_d g\right)(t - t_0)^2 \\ \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{M}{I} + \frac{R\mu_d mg}{I}\right)(t - t_0)^2 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} . \quad (5.3)$$

Distinguiamo tre casi principali, con i relativi sottocasi.

Sia $\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 = 0$.

(i) Nell'ipotesi che si abbia:

$$\mu_s \geq \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \frac{1}{mg}$$

la soluzione (5.1) descrive il moto del sistema per ogni t reale. Dal momento che F ed M sono delle costanti preassegnate, infatti, la condizione per la validità della legge di Coulomb dell'attrito radente statico, se verificata, lo è costantemente $\forall t \in \mathbb{R}$.

(ii) Se viceversa:

$$\mu_s < \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \frac{1}{mg} \quad \text{e} \quad \frac{F}{m} - \mu_d g + \frac{RM}{I} - \frac{R^2 \mu_d mg}{I} > 0 \quad (5.4)$$

il moto è rappresentato dalla soluzione (5.2) per ogni $t \geq t_0$. Ciò segue dal fatto che, avendosi $\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 = 0$, lungo la (5.2) la velocità del punto di contatto disco-asse è data da:

$$\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) = \left(\frac{F}{m} - \mu_d g + \frac{RM}{I} - \frac{R^2 \mu_d mg}{I} \right)(t - t_0)$$

e si mantiene strettamente positiva $\forall t > t_0$ in virtù della seconda condizione (5.4).

(iii) La terza possibilità è che risulti:

$$\mu_s < \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \frac{1}{mg} \quad \text{e} \quad \frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d mg}{I} < 0 . \quad (5.5)$$

Nella fattispecie è la soluzione (5.3) dell'equazione differenziale (4.3) a fornire il moto del sistema per ogni $t \geq t_0$, in quanto:

$$\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) = \left(\frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d mg}{I} \right) (t - t_0) < 0 \quad \forall t > t_0$$

per effetto della seconda disuguaglianza (5.5).

L'analisi generale del moto già condotta in precedenza assicura che non possano ricorrere altre situazioni oltre a queste. La discussione del caso $\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 = 0$ è dunque completa.

Sia $\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 > 0$.

La soluzione (5.2) dell'equazione (4.2) porge:

$$\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) = \left(\frac{F}{m} - \mu_d g + \frac{RM}{I} - \frac{R^2 \mu_d mg}{I} \right) (t - t_0) + \dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

(i) Per:

$$\frac{F}{m} - \mu_d g + \frac{RM}{I} - \frac{R^2 \mu_d mg}{I} \geq 0$$

allora è certamente $\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) > 0 \forall t \geq t_0$ e quindi la soluzione (5.2) descrive l'intero moto del sistema nel futuro.

(ii) Se all'opposto:

$$\frac{F}{m} - \mu_d g + \frac{RM}{I} - \frac{R^2 \mu_d mg}{I} < 0$$

esisterà un istante t_+ definito da:

$$t_+ = t_0 - (\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0) \left(\frac{F}{m} - \mu_d g + \frac{RM}{I} - \frac{R^2 \mu_d mg}{I} \right)^{-1} > t_0$$

tale che $\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) > 0 \forall t \in [t_0, t_+)$ e $\dot{s}(t_+) + R\dot{\theta}(t_+) = 0$; per $t > t_+$ la soluzione (5.2) non è applicabile, visto che la velocità del punto di contatto del disco sull'asse orizzontale diventerebbe negativa. Si hanno due possibilità.

– Qualora sia soddisfatta la legge dell'attrito radente statico:

$$\mu_s \geq \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \frac{1}{mg} ,$$

per ogni $t > t_+$ si applica l'equazione (4.1) con le nuove condizioni iniziali:

$$\begin{aligned}
 s(t_+) &= s_0 + \dot{s}_0(t_+ - t_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{F}{m} - \mu_d g \right) (t_+ - t_0)^2 \\
 \theta(t_+) &= \theta_0 + \dot{\theta}_0(t_+ - t_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{M}{I} - \frac{R\mu_d mg}{I} \right) (t_+ - t_0)^2 \\
 \dot{s}(t_+) &= \dot{s}_0 + \left(\frac{F}{m} - \mu_d g \right) (t_+ - t_0) \\
 \dot{\theta}(t_+) &= \dot{\theta}_0 + \left(\frac{M}{I} - \frac{R\mu_d mg}{I} \right) (t_+ - t_0)
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

e la soluzione assume la forma:

$$\begin{cases} s(t) = s(t_+) + \dot{s}(t_+)(t - t_+) + \frac{1}{2} R \frac{RF - M}{I + mR^2} (t - t_+)^2 \\ \theta(t) = \theta(t_+) + \dot{\theta}(t_+)(t - t_+) - \frac{1}{2} \frac{RF - M}{I + mR^2} (t - t_+)^2 \end{cases} \quad \forall t \geq t_+$$

- Se viceversa la legge dell'attrito radente statico non è verificata, deve aversi necessariamente:

$$\frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d mg}{I} < 0$$

e per $t > t_+$ l'equazione da utilizzare è la (4.3) con gli stessi dati iniziali (5.6) a $t = t_+$. La soluzione diventa allora:

$$\begin{cases} s(t) = s(t_+) + \dot{s}(t_+)(t - t_+) + \frac{1}{2} \left(\frac{F}{m} + \mu_d g \right) (t - t_+)^2 \\ \theta(t) = \theta(t_+) + \dot{\theta}(t_+)(t - t_+) + \frac{1}{2} \left(\frac{M}{I} + \frac{R\mu_d mg}{I} \right) (t - t_+)^2 \end{cases} \quad \forall t \geq t_+ .$$

Sia $\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 < 0$.

Dalla soluzione (5.3) dell'equazione (4.3) si deduce che:

$$\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) = \left(\frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d mg}{I} \right) (t - t_0) + \dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

(i) Se:

$$\frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d mg}{I} \leq 0$$

risulta $\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) < 0 \forall t \geq t_0$ e la soluzione (5.3) descrive completamente il moto del sistema nel futuro.

(ii) Se viceversa:

$$\frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d m g}{I} > 0$$

la soluzione (5.3) può essere applicata soltanto fino all'istante $t_+ > t_0$ definito dall'espressione:

$$t_+ = t_0 - (\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0) \left(\frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d m g}{I} \right)^{-1} > t_0$$

e per il quale risulta $\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) < 0 \forall t \in [t_0, t_+)$ e $\dot{s}(t_+) + R\dot{\theta}(t_+) = 0$. Oltre questo istante la (5.3) non è più utilizzabile, dal momento che la velocità scalare del punto di contatto fra disco ed asse assumerebbe segno positivo. Due sono le possibilità.

– Se la legge dell'attrito radente statico risulta soddisfatta:

$$\mu_s \geq \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \frac{1}{mg} ,$$

per ogni $t > t_+$ si ricorre all'equazione (4.1) con le condizioni iniziali della forma (5.6), in modo che la soluzione risulta:

$$\begin{cases} s(t) = s(t_+) + \dot{s}(t_+)(t - t_+) + \frac{1}{2} R \frac{RF - M}{I + mR^2} (t - t_+)^2 \\ \theta(t) = \theta(t_+) + \dot{\theta}(t_+)(t - t_+) - \frac{1}{2} \frac{RF - M}{I + mR^2} (t - t_+)^2 \end{cases} \quad \forall t \geq t_+ .$$

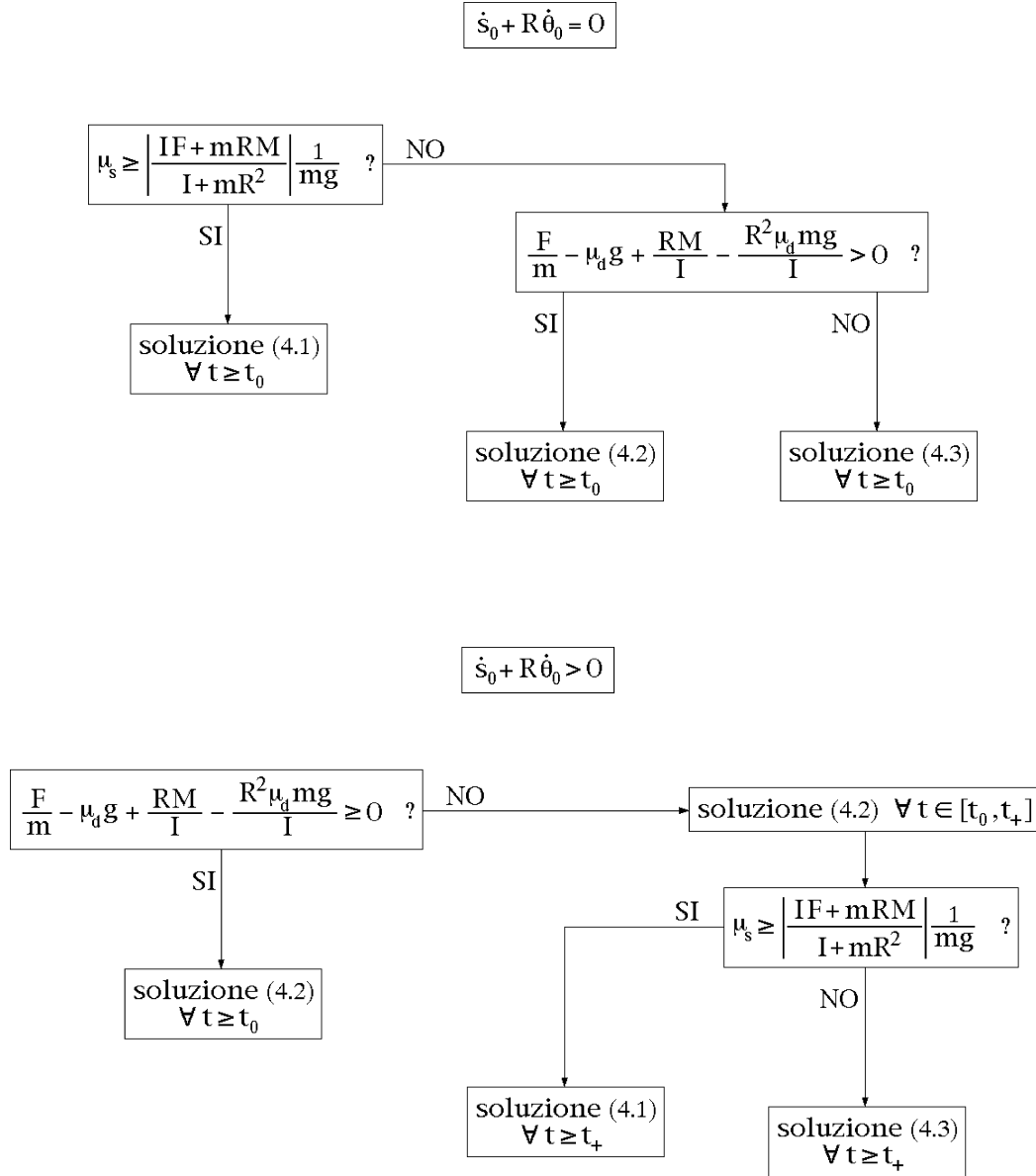
– Qualora viceversa la legge dell'attrito radente statico non sia verificata, deve aversi necessariamente:

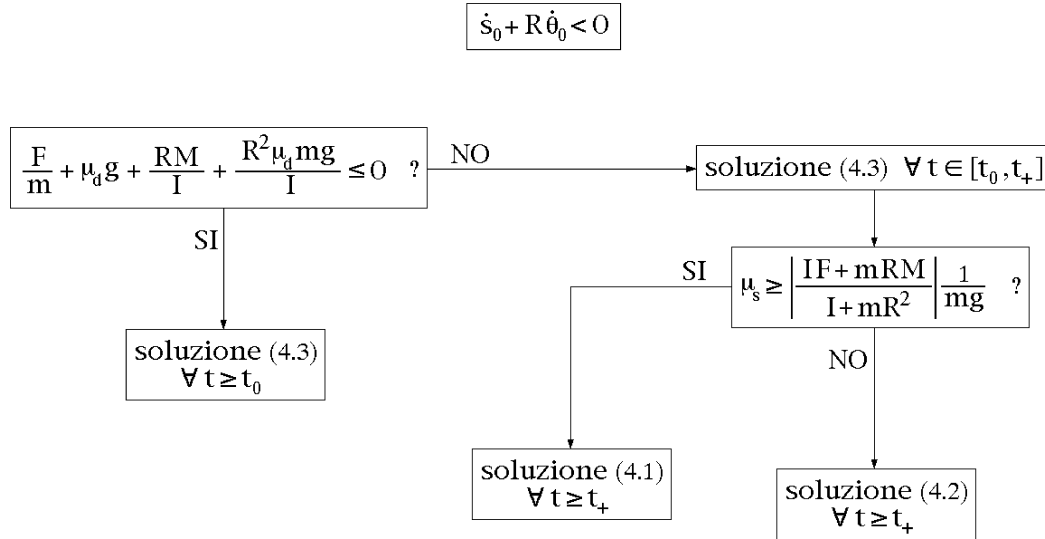
$$\frac{F}{m} - \mu_d g + \frac{RM}{I} - \frac{R^2 \mu_d m g}{I} > 0$$

e per $t > t_+$ l'equazione da utilizzare è la (4.2) con gli stessi dati iniziali (5.6) a $t = t_+$. La soluzione diventa allora:

$$\begin{cases} s(t) = s(t_+) + \dot{s}(t_+)(t - t_+) + \frac{1}{2} \left(\frac{F}{m} - \mu_d g \right) (t - t_+)^2 \\ \theta(t) = \theta(t_+) + \dot{\theta}(t_+)(t - t_+) + \frac{1}{2} \left(\frac{M}{I} - \frac{R\mu_d m g}{I} \right) (t - t_+)^2 \end{cases} \quad \forall t \geq t_+ .$$

I tre schemi a blocchi riportati nel seguito illustrano la procedura per la determinazione del moto del sistema assegnate che siano le condizioni iniziali $(t_0, s_0, \theta_0, \dot{s}_0, \dot{\theta}_0) \in \mathbb{R}^5$.





6. CASO PARTICOLARE: forza di trazione e coppia motrice nulle

Le equazioni differenziali (4.1), (4.2) e (4.3) che governano il moto del sistema assumono in questo caso una forma particolarmente semplice, al pari della loro soluzione generale.

- (i) Se $\dot{s} + R\dot{\theta} = 0$, poiché la condizione per la validità della legge dell'attrito radente statico $\mu_s \geq \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \frac{1}{mg} = 0$ è sempre verificata, il disco rotola senza strisciare sull'asse orizzontale Ox e le equazioni del moto si scrivono:

$$\ddot{s} = 0 \quad \ddot{\theta} = 0 ; \quad (6.1)$$

la soluzione del relativo problema di Cauchy con dato iniziale $(t_0, s_0, \theta_0, \dot{s}_0, \dot{\theta}_0)$ è data dall'ovvia espressione:

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + \dot{s}_0(t - t_0) \\ \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0(t - t_0) \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (6.2)$$

in cui $\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 = 0$.

- (ii) Per $\dot{s} + R\dot{\theta} > 0$ la velocità del punto di contatto disco-guida è parallela e concorde con \hat{e}_1 e le equazioni del moto diventano:

$$\ddot{s} = -\mu_d g \quad \ddot{\theta} = -\frac{R\mu_d mg}{I} , \quad (6.3)$$

con soluzione:

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + \dot{s}_0(t - t_0) - \frac{1}{2}\mu_d g(t - t_0)^2 \\ \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0(t - t_0) - \frac{R\mu_d mg}{2I}(t - t_0)^2 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} . \quad (6.4)$$

(iii) Se infine $\dot{s} + R\dot{\theta} < 0$ si ha al contrario che la velocità del punto P di contatto fra il disco e l'asse orizzontale Ox è antiparallela ad \hat{e}_1 , per cui risulta:

$$\ddot{s} = \mu_d g \quad \ddot{\theta} = \frac{R\mu_d mg}{I} . \quad (6.5)$$

e la soluzione del generico problema di Cauchy si scrive:

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + \dot{s}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mu_d g(t - t_0)^2 \\ \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0(t - t_0) + \frac{R\mu_d mg}{2I}(t - t_0)^2 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} . \quad (6.6)$$

Come già discusso nel caso generale, le soluzioni precedenti consentono di determinare univocamente il moto del disco rigido sull'asse orizzontale, imponendo la semplice condizione di continuità in t delle funzioni $s(t)$, $\theta(t)$, $\dot{s}(t)$ e $\dot{\theta}(t)$.

Se $\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 = 0$

il disco si limita a rotolare senza strisciare sull'asse orizzontale Ox ed il suo moto roto-traslatorio uniforme è descritto dalla (6.2) $\forall t \in \mathbb{R}$ — cioè tanto nel futuro quanto nel passato.

Se $\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 > 0$

si fa uso della soluzione (6.4), che però implica:

$$\dot{s}(t) = -\mu_d g(t - t_0) + \dot{s}_0 \quad \dot{\theta}(t) = -\frac{R\mu_d mg}{I}(t - t_0) + \dot{\theta}_0$$

e deve soddisfare la condizione di compatibilità:

$$\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) = \left(-\mu_d g - \frac{R^2\mu_d mg}{I}\right)(t - t_0) + \dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 > 0 , \quad (6.7)$$

sufficiente affinché sia applicabile l'equazione (6.3). Dalla (6.7) si deduce che la (6.4) risulta valida soltanto in un intervallo superiormente limitato, dovendo essere:

$$t < (\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0) \left(\mu_d g + \frac{R^2\mu_d mg}{I} \right)^{-1} + t_0 := t_+$$

con $t_+ > t_0$. Il moto in s è uniformemente decelerato $\forall t \in [t_0, t_+]$. All'istante t_+ la velocità del punto di contatto fra disco e asse orizzontale si annulla ed il moto prosegue senza strisciamento come moto uniforme — vale certamente $\mu_s \geq 0$, per cui la legge dell'attrito radente statico impone l'assenza di strisciamento.

Se $\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 < 0$

dalla soluzione (6.6) si ha invece:

$$\dot{s}(t) = \mu_d g(t - t_0) + \dot{s}_0 \quad \dot{\theta}(t) = \frac{R\mu_d m g}{I}(t - t_0) + \dot{\theta}_0 ,$$

con la condizione di compatibilità:

$$\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) = \left(\mu_d g + \frac{R^2 \mu_d m g}{I} \right) (t - t_0) + \dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 < 0 . \quad (6.8)$$

La soluzione (6.6) dell'equazione (6.5) è dunque utilizzabile soltanto in un intervallo di t superiormente limitato:

$$t < -(\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0) \left(\mu_d g + \frac{R^2 \mu_d m g}{I} \right)^{-1} + t_0 := t_+$$

dove, di nuovo, $t_+ > t_0$. Il moto lungo Ox del disco risulta uniformemente accelerato nell'intervallo $t \in [t_0, t_+]$. Dall'istante t_+ in poi, annullandosi la velocità del punto di contatto disco-asse, il moto diventa uniforme e di puro rotolamento.

Si conclude che qualunque sia la scelta delle condizioni iniziali, trascorso un intervallo di tempo abbastanza lungo, quello del disco sull'asse orizzontale diventa un moto di puro rotolamento, con traslazione uniforme del baricentro G secondo la direzione Ox e simultanea rotazione, pure uniforme, del disco attorno al proprio asse baricentrale Gz .

7. ATTRITO VOLVENTE DINAMICO

Al punto precedente si è giunti a prevedere che un disco rigido, vincolato a rotolare su un piano orizzontale e non soggetto ad alcuna sollecitazione oltre al proprio peso ed alla reazione vincolare nel punto di contatto con il piano, dovrebbe indefinitamente muoversi di moto rototraslatorio uniforme — dopo una eventuale fase iniziale di moto rototraslatorio uniformemente accelerato. Tale previsione risulta in palese contrasto con l'esperienza, la quale dimostra che nelle predette condizioni il moto del disco si arresta dopo un intervallo di tempo sufficientemente lungo. Dal momento che le leggi di Coulomb-Morin dell'attrito radente statico e dinamico riposano su una base sperimentale piuttosto solida e non v'è motivo di dubitare della loro validità nelle condizioni considerate, si deve presumere che l'analisi condotta al punto precedente sia di per sé corretta ma pur tuttavia incompleta, non potendo rendere conto dei fenomeni dissipativi osservati sperimentalmente e responsabili del progressivo rallentamento del moto e dell'arresto finale del sistema.

Un modo ragionevole di completare il modello di rotolamento e di ottenere risultati maggiormente in linea con quelli sperimentali consiste nell'ipotizzare che nel punto P di contatto fra il disco ed il piano non agisca soltanto la reazione vincolare $\vec{\Phi} = \Phi_x \hat{e}_1 + \Phi_y \hat{e}_2$,

ma anche una coppia vincolare di momento $\vec{M}^\phi = M^\phi \hat{e}_3$. Detto momento è noto come **attrito volvente** — o di rotolamento — e l'esperienza insegna che esso obbedisce a leggi fenomenologiche analoghe a quelle già esaminate nel caso delle forze di attrito radente. Nella fattispecie, per un moto di rotolamento già in atto — il vettore velocità angolare istantanea $\vec{\omega}$ del disco che rotola è diverso da zero — il momento di attrito volvente obbedisce alla legge di Coulomb dell'attrito volvente dinamico ed è dato dall'espressione:

$$\vec{M}^\phi = -h_d \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} |\Phi_y|$$

dove Φ_y indica la componente della reazione vincolare ortogonale al piano di rotolamento nel punto di contatto P all'istante considerato, mentre $h_d \geq 0$ è una costante caratteristica dei corpi a contatto, avente le dimensioni fisiche di una lunghezza e nota come **coefficiente di attrito volvente dinamico** — o più precisamente, nella fattispecie, coefficiente di attrito di rotolamento dinamico.

Limitandosi al caso del disco rigido in moto di puro rotolamento, per il quale risulta $\dot{s} + R\dot{\theta} = 0$, l'equazione cardinale della quantità di moto porge:

$$m\ddot{s} = F + \Phi_x \quad \Phi_y = mg$$

mentre quella del momento angolare nel polo G comporta l'equazione scalare:

$$I\ddot{\theta} = M + R\Phi_x - h_d \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} |\Phi_y| \quad \implies \quad I\ddot{\theta} = M + R\Phi_x - h_d \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} mg.$$

Da quest'ultima, posto $\dot{\theta} = -\dot{s}/R$ e $\Phi_x = m\ddot{s} - F$, si ottiene:

$$-\frac{I}{R}\ddot{s} = M + R(m\ddot{s} - F) + h_d \frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} mg$$

che risolta in \ddot{s} conduce alla forma normale:

$$\ddot{s} = \frac{R}{I + mR^2} \left(RF - M - h_d \frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} mg \right).$$

Per $\ddot{\theta}$ si ha invece:

$$\ddot{\theta} = -\frac{\ddot{s}}{R} = -\frac{1}{I + mR^2} \left(RF - M - h_d \frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} mg \right)$$

ossia:

$$\ddot{\theta} = -\frac{1}{I + mR^2} \left(RF - M + h_d \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} mg \right).$$

Le equazioni differenziali del moto di puro rotolamento in presenza di attrito volvente si scrivono dunque come:

$$\begin{cases} \ddot{s} = +\frac{R}{I + mR^2} \left(RF - M - h_d \frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} mg \right) \\ \ddot{\theta} = -\frac{1}{I + mR^2} \left(RF - M + h_d \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} mg \right) \end{cases} \quad (7.1)$$

e generalizzano le equazioni (2.8) già precedentemente considerate. Le soluzioni di (7.1) sono accettabili fino a che $\dot{\theta}$ — ovvero \dot{s} — mantiene lo stesso segno iniziale: l'annullarsi della velocità angolare scalare $\dot{\theta}$ richiederebbe infatti l'introduzione di un momento di attrito volvente **statico** in luogo di quello dinamico qui considerato. In tale ipotesi, le soluzioni di (7.1) assumono la forma:

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + \dot{s}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{R}{I + mR^2} \left(RF - M - h_d \frac{\dot{s}_0}{|\dot{s}_0|} mg \right) (t - t_0)^2 \\ \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0(t - t_0) - \frac{1}{2} \frac{1}{I + mR^2} \left(RF - M + h_d \frac{\dot{\theta}_0}{|\dot{\theta}_0|} mg \right) (t - t_0)^2 \end{cases}$$

e sono definite per ogni t compreso fra l'istante iniziale t_0 e l'eventuale istante t_+ di annullamento della velocità angolare:

$$t_+ = t_0 + \dot{\theta}_0(I + mR^2) \left(RF - M + h_d \frac{\dot{\theta}_0}{|\dot{\theta}_0|} mg \right)^{-1}$$

qualora risulti $t_+ > t_0$ — se t_+ è indefinito la soluzione risulta accettabile $\forall t \geq t_0$.

Nel caso particolare del disco rigido non soggetto a forze di trazione o a coppie motrici, discusso al punto 5, vale $F = 0$ e $M = 0$. Le equazioni (7.1) del moto di puro rotolamento diventano allora:

$$\begin{cases} \ddot{s} = -\frac{R}{I + mR^2} h_d \frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} mg \\ \ddot{\theta} = -\frac{1}{I + mR^2} h_d \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} mg \end{cases}$$

con le soluzioni:

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + \dot{s}_0(t - t_0) - \frac{1}{2} \frac{R}{I + mR^2} h_d \frac{\dot{s}_0}{|\dot{s}_0|} mg (t - t_0)^2 \\ \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0(t - t_0) - \frac{1}{2} \frac{1}{I + mR^2} h_d \frac{\dot{\theta}_0}{|\dot{\theta}_0|} mg (t - t_0)^2 \end{cases}$$

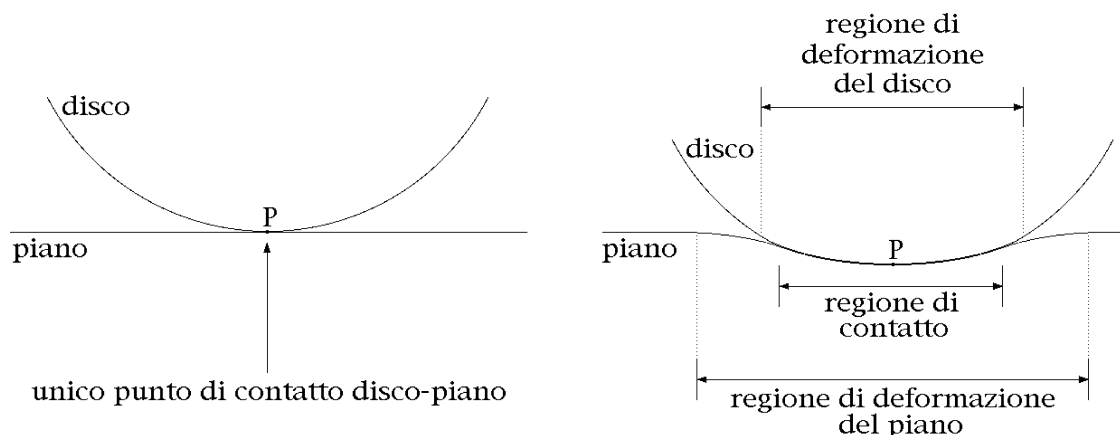
sempre definite sull'intervallo $[t_0, t_+]$ di estremo superiore:

$$t_+ = t_0 + \dot{\theta}_0(I + mR^2) \left(h_d \frac{\dot{\theta}_0}{|\dot{\theta}_0|} mg \right)^{-1} = t_0 + |\dot{\theta}_0| \frac{I + mR^2}{h_d mg} .$$

Dall'istante t_+ in poi il sistema si mantiene indefinitamente in quiete nella configurazione finale raggiunta. Quello descritto è un moto rototraslatorio uniformemente accelerato, che in un intervallo di tempo finito porta il disco a raggiungere la quiete. L'accordo con l'esperienza è in tal modo ristabilito.

L'origine del momento di attrito volvente, statico o dinamico, può essere compresa riconoscendo che i corpi in gioco — disco e piano orizzontale — sono soltanto approssimativamente rigidi. In un conveniente intorno di P , il disco ed il piano subiranno una piccola

deformazione localizzata e le reazioni vincolari sul disco non saranno applicate nel solo punto P del contatto rigido, ma in una piccola superficie estesa intorno a P che costituirà la regione di effettivo contatto fra i due corpi. Poiché le reazioni vincolari non sono in realtà applicate ad un solo punto, il momento di tali reazioni rispetto a P potrà risultare non nullo e, se di segno opportuno, potrà rendere conto delle dissipazioni.



Il modello dell'attrito volvente nasce da una sorta di compromesso fra l'approssimazione di corpo rigido, usata per descrivere disco e piano orizzontale, e la presenza di inevitabili, piccole deformazioni. Queste fanno sì che il contatto non avvenga nel solo punto P , ma in corrispondenza di una piccola superficie nell'intorno di P . Le reazioni vincolari esercitate dal piano sul disco non si riducono quindi ad un'unica forza applicata in P , ma costituiscono un sistema di forze applicate con risultante $\vec{\Phi}$ e momento risultante \vec{M}^ϕ in P . Che il momento tenda a frenare il moto del disco segue dall'*isteresi* delle deformazioni: una volta deformati, piano e disco tardano un poco a riprendere la forma originale, con il risultato che le forze associate alla deformazione sul fronte di avanzamento del disco sono più intense di quelle prodotte sul retro. Tornando a considerare il disco come un sistema sostanzialmente rigido, questi risultanti specificano completamente l'effetto delle reazioni vincolari sul disco stesso. Al complesso sistema delle reazioni vincolari prodotte nella regione di contatto può sostituirsi un sistema equivalente costituito da un'unica forza di reazione vincolare applicata in P — comprendente l'eventuale attrito radente statico o dinamico — e da un'unica coppia — che costituisce l'attrito volvente, statico o dinamico.

8. ATTRITO VOLVENTE STATICO

Accanto all'attrito volvente dinamico, di cui si è discusso al punto precedente, l'esperienza dimostra l'esistenza di un attrito volvente di tipo statico, che si manifesta quando il disco risulta in quiete rispetto al piano di rotolamento. Per illustrare la necessità di introdurre un momento di attrito volvente statico, si consideri il solito disco omogeneo pesante di massa m , raggio R e centro G , appoggiato sul piano orizzontale Ox e soggetto ad una forza costante orizzontale $F\hat{e}_1$ applicata al baricentro G . È facile convincersi che un simile sistema non ammette alcuna configurazione di equilibrio. Indicate con Φ_x e Φ_y le

componenti cartesiane della reazione vincolare agente sul disco nel punto P di contatto con l'asse orizzontale ed applicando le equazioni cardinali della statica dovrebbe aversi infatti:

$$\begin{cases} -mg \hat{e}_2 + F \hat{e}_1 + \Phi_x \hat{e}_1 + \Phi_y \hat{e}_2 = 0 \\ (G - P) \wedge (-mg \hat{e}_2 + F \hat{e}_1) = 0 \end{cases} \quad (8.1)$$

e quindi, con la sostituzione $G - P = R \hat{e}_2$ ed una proiezione ortogonale sugli assi:

$$\begin{cases} F + \Phi_x = 0 \\ -mg + \Phi_y = 0 \\ -RF = 0 \end{cases}.$$

Quest'ultimo sistema di equazioni fornisce le componenti della reazione vincolare $\vec{\Phi} = \Phi_x \hat{e}_1 + \Phi_y \hat{e}_2$:

$$\Phi_x = -F \quad \Phi_y = mg$$

mentre l'ultima delle tre equazioni diventa:

$$RF = 0$$

e chiaramente non ammette alcuna soluzione nell'ipotesi che sia $F \neq 0$. Non sono quindi definite configurazioni di equilibrio per il sistema! Ciò è in evidente contrasto con l'osservazione sperimentale che vede il disco appoggiato mantenersi in equilibrio sul piano orizzontale, a condizione che la sollecitazione $F \hat{e}_1$ non risulti troppo intensa.

Per ripristinare l'accordo fra l'esperienza e le previsioni della Statica, si suppone che un momento di reazioni vincolari \vec{M}^ϕ venga esercitato dal piano orizzontale sul disco, come conseguenza delle piccole deformazioni che l'uno e l'altro subiscono in corrispondenza della regione di contatto fra i due corpi. Con l'introduzione di questo momento addizionale, la seconda delle equazioni cardinali (8.1) si modifica in:

$$(G - P) \wedge (-mg \hat{e}_2 + F \hat{e}_1) + \vec{M}^\phi = 0$$

e conduce alla relazione:

$$-RF \hat{e}_3 + \vec{M}^\phi = 0 \quad (8.2)$$

che dunque assicura l'equilibrio del sistema se e soltanto se $\vec{M}^\phi = RF \hat{e}_3$. Detto momento di reazioni vincolari è noto come **attrito volvente statico** ed obbedisce a leggi fenomenologiche analoghe a quelle di Coulomb-Morin valide per gli attriti radenti e per l'attrito volvente dinamico. Indicata con $\vec{\Phi}_n$ la componente della reazione vincolare agente sul disco in P ortogonale alle superfici in contatto, il momento di attrito volvente statico deve soddisfare la condizione:

$$|\vec{M}^\phi| \leq h_s |\vec{\Phi}_n|$$

essendo $h_s > 0$ una costante caratteristica delle superfici a contatto, nota come **coefficiente di attrito volvente statico** e avente le dimensioni fisiche di una lunghezza. Il coefficiente risulta, con discreta approssimazione, sostanzialmente indipendente dal raggio

del disco. Nella fattispecie $\vec{\Phi}_n = \Phi_y \hat{e}_2 = mg \hat{e}_2$ e la legge dell'attrito volvente statico diventa:

$$|\vec{M}^\phi| \leq h_s mg$$

e dovendo essere per la (8.2):

$$\vec{M}^\phi = RF \hat{e}_3$$

si conclude che condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio del disco sul piano orizzontale è la seguente:

$$R|F| \leq h_s mg$$

ossia:

$$|F| \leq \frac{h_s mg}{R} . \quad (8.3)$$

L'attrito volvente statico consente quindi di giustificare quegli equilibri la cui esistenza è ben dimostrata dall'osservazione sperimentale. Qualora la disuguaglianza (8.3) non sia verificata, l'attrito volvente statico non è in grado di mantenere in equilibrio il sistema, ed il disco si pone in movimento sul piano.

Indice degli argomenti

1. Rotolamento di un disco su un piano orizzontale	1
2. Puro rotolamento (rotolamento senza strisciamento)	1
3. Moto di rotolamento con strisciamento	4
4. Discussione generale	6
5. Esempio notevole: forza di trazione e coppia motrice costanti	10
6. Caso particolare: forza di trazione e coppia motrice nulli	16
7. Attrito volvente dinamico	18
8. Attrito volvente statico	21