Esercizi di dinamica dei sistemi

Esercizio 1

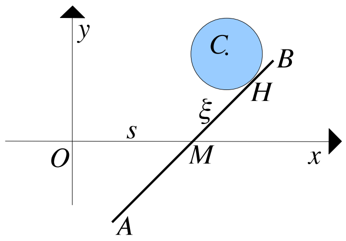
Un sistema materiale costituito da un disco omogeneo di centro C, massa m e raggio R e da un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza ℓ, mobile nel piano verticale Oxy è soggetto ai seguenti vincoli:

* il baricentro M dell'asta è vincolato a scorrere sull'asse x,
* l'asta AB trasla formando con l'asse x un angolo di $\frac{\pi}{4}$,
* il disco rotola senza strisciare sull'asta AB.

Oltre alla forza peso sul sistema agisce una coppia di momento $\mathbf{M} = \frac{mg}{R}(C-H)\wedge(C-M)$, H punto di contatto tra l'asta e il disco, applicata al disco.

Introdotti i parametri ξ, ascissa di C sull'asta AB in modo che $(H-M) = \frac{\xi}{\ell}(B-A)$, e s, ascissa di M sull'asse x,

* determinare eventuali integrali primi di moto.



Soluzione

$$\frac{1}{2}m(2\dot{s}^2 + \sqrt{2}\dot{s}\dot{\xi} + \frac{3}{2}\dot{\xi}^2 + \frac{mg}{2}\left(\sqrt{2}\xi - \frac{\xi^2}{R}\right) = E\,,$$

$$m\left(2\dot{s} + \frac{\sqrt{2}}{2}\dot{\xi}\right) = c\,.$$

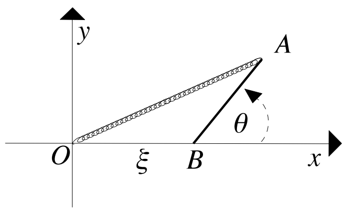
Esercizio 2

Un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza 2ℓ, mobile nel piano verticale Oxy ha l'estremo B vincolato a scorrere sull'asse x.

Oltre alla forza peso sull'asta agisce una forza elastica $\mathbf{F} = -k(A-O)$ applicata in A.

Introdotti i parametri ξ, ascissa di B e θ, angolo che l'asta AB forma con l'asse x,

* scrivere le equazioni differenziali che governano il moto dell'asta.



Soluzione

$$m(\ddot{\xi} - \ell\sin\theta\,\ddot{\theta} - \ell\cos\theta\,\dot{\theta}^2) + k(\xi + 2\ell\cos\theta) = 0\,,$$

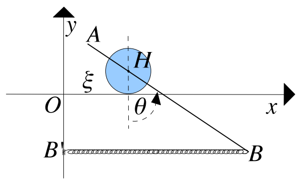
$$m(\frac{4}{3}\ell^2\ddot{\theta} - \ell\sin\theta\,\ddot{\xi}) + mg\ell\cos\theta - 2k\ell\xi\sin\theta = 0\,.$$

Esercizio 3

Un sistema materiale costituito da un disco omogeneo di massa m e raggio R e da un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza 2ℓ, mobile nel piano verticale Oxy è soggetto ai seguenti vincoli:
* il punto H dell'asta, distante $\frac{\ell}{2}$ da A, è incernierato nel centro del disco,
* il disco rotola senza strisciare sull'asse x.

Oltre alla forza peso sul sistema agiscono
* una coppia di momento $\mathbf{M} = mgR\hat{\boldsymbol{k}}$, applicata al disco.
* una forza elastica $\mathbf{F} = -k(B - B')$ applicata in B, con B' proiezione di B sull'asse y .

Introdotti i parametri ξ, ascissa di H, e θ, angolo che l'asta AB forma con la verticale,
* scrivere le equazioni differenziali che governano il moto del sistema.



Soluzione

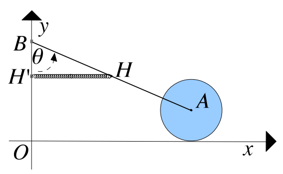
$$\frac{1}{2}m(5\ddot{\xi} + \ell\cos\theta\,\ddot{\theta} - \ell\sin\theta\,\dot{\theta}^2) + k(\xi + \frac{3}{2}\ell\sin\theta) + mg = 0\,,$$
$$\frac{m\ell}{2}\left(\frac{7}{6}\ell\ddot{\theta} + \cos\theta\,\ddot{\xi}\right) + \frac{mg\ell}{2}\sin\theta + \frac{3}{2}k\ell\left(\xi + \frac{3}{2}\ell\sin\theta\right)\cos\theta = 0\,.$$

Esercizio 4

Un sistema materiale costituito da un disco omogeneo di massa m e raggio R e da un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza 2ℓ, mobile nel piano verticale Oxy è soggetto ai seguenti vincoli:
* l'estremo A dell'asta, è incernierato nel centro del disco,
* l'estremo B dell'asta, è vincolato a scorrere sull'asse y,
* il disco rotola senza strisciare sull'asse x.

Oltre alla forza peso sul sistema agiscono
* una coppia di momento $\mathbf{M} = klR\hat{\boldsymbol{k}}$, applicata al disco.
* una forza elastica $\mathbf{F} = -k(H - H')$ applicata in H, punto medio dell'asta AB, con H' proiezione di H sull'asse y .

Introdotto il parametro θ, angolo che l'asta AB forma con la verticale,
* scrivere l'equazione differenziale che governa il moto del sistema.



Soluzione

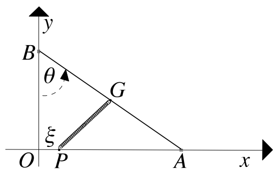
$$m\ell^2\left[\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\cos^2\theta\right)\ddot{\theta} - \frac{3}{2}\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2\right] +$$
$$+k\ell^2\left(\frac{1}{4}\sin\theta + 1\right)\cos\theta - mg\ell\sin\theta = 0\,.$$

Esercizio 5

Un sistema materiale costituito da un punto materiale P di massa m e da un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza 2ℓ, mobile nel piano verticale Oxy, è soggetto ai seguenti vincoli:
* l'estremo A dell'asta, è vincolato a scorrere sull'asse x,
* l'estremo B dell'asta, è vincolato a scorrere sull'asse y,
* il punto P è vincolato a scorrere sull'asse x.

Oltre alla forza peso sul sistema agiscono
* una forza elastica realizzata con una molla ideale di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla che collega il baricentro G dell'asta con il punto P,
* una forza costante $\mathbf{F} = F\hat{\boldsymbol{\imath}}$ applicata in A.

Introdotti i parametri ξ, ascissa di P, e θ, angolo che l'asta AB forma con la verticale,
* scrivere le equazioni differenziali che governano il moto del sistema.



Soluzione

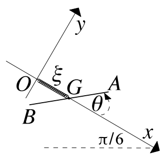
$$\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} - k\ell\xi\cos\theta - mgl\sin\theta - 2F\ell\cos\theta = 0$$
$$m\ddot{\xi} + k(\xi - \ell\sin\theta) = 0 \qquad .$$

Esercizio 6

Un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza 2ℓ, mobile in un piano verticale in cui si prende il sistema di riferimento Oxy, con l'asse x inclinato di $\frac{\pi}{6}$ rispetto all'orizzontale, ha il baricentro G vincolato a scorrere sull'asse x.

Oltre alla forza peso, sul baricentro G dell'asta agiscono la forza elastica $\mathbf{F}_e = -\frac{mg}{\ell}(G-O)$ e la forza viscosa $\mathbf{F}_v = -2m\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,\mathbf{v}_G$.

Introdotti i parametri ξ, ascissa di G, e θ, angolo che l'asta AB forma con l'asse x,
* scrivere ed integrare le equazioni differenziali che governano il moto dell'asta.



Soluzione

$$m\ddot{\xi} + 2m\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,\dot{\xi} + \frac{mg}{\ell}\xi = \frac{1}{2}mg\,, \qquad \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} = 0$$
$$\theta(0) = \theta_0\,, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \quad \xi(0) = \xi_0\,, \quad \dot{\xi}(0) = \dot{\xi}_0\,.$$
$$\xi(t) = \frac{\ell}{2} + \left[\left(\dot{\xi}_0 + \sqrt{\frac{g}{\ell}}\left(\xi_0 - \frac{\ell}{2}\right)\right)t + \xi_0 - \frac{\ell}{2}\right]e^{-\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t}\,,$$
$$\theta(t) = \dot{\theta}_0 t + \theta_0\,.$$

Esercizio 7

Un sistema materiale costituito da un punto materiale P di massa m e da un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza ℓ, mobile in un piano verticale Oxy, con y asse verticale, è soggetto ai seguenti vincoli:

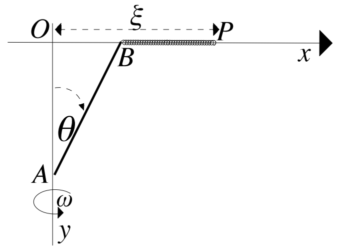
* il punto P e l'estremo B dell'asta scorrono sull'asse x;
* l'estremo A dell'asta scorre sull'asse y.

Il piano è posto in rotazione uniforme attorno all'asse y con velocità angolare $\omega\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, con $\omega^2 = 3\frac{g}{\ell}$.

Oltre alla forza peso sul sistema agisce una forza elastica realizzata con una molla ideale di costante elastica $k = \frac{mg}{\ell}$ e lunghezza a riposo nulla che collega l'estremo B dell'asta con il punto P.

Introdotti i parametri θ, angolo che l'asta AB forma con l'asse y, e ξ, ascissa di P,

* scrivere le equazioni differenziali che governano il moto del sistema.



Soluzione

$$m\ddot{\xi} = \frac{mg}{\ell}(2\xi + \ell\sin\theta)\,, \qquad \frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta} = \frac{mg}{2}(2\xi\cos\theta - \ell\sin\theta)\,.$$