

# Analisi Matematica T-1

Urbinati Cristian

5/03/2018

e-mail: cristian.urbinati@studio.unibo.it

Altro : [https://github.com/urbinatricri/Unibo\\_computerEngineeringNotes](https://github.com/urbinatricri/Unibo_computerEngineeringNotes)

Materiale distribuito con licenza Creative Commons

Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 2.0 Italia (CC BY-NC-SA 2.0 IT)



## 1 Relazioni

### 1.1 Prodotto cartesiano

**Definizione** Siano  $A$  e  $B$  due insiemi. L'insieme delle coppie ordinate  $(a, b)$ , con  $a \in A$  e  $b \in B$ , si chiama **prodotto cartesiano** tra  $A$  e  $B$  e si indica con

$$A \times B := (a, b) \mid a \in A, b \in B$$

### 1.2 Relazioni

**Definizione** Una proprietà  $\mathcal{A}$  definita in  $S \times T$  è detta **relazione** tra  $S$  e  $T$ ; diremo che  $s \in S$  è in relazione con  $t \in T$  se si ha  $\mathcal{A}(s, t)$  vera.

Data una relazione  $\mathcal{R}$ :

$$Dom(\mathcal{R}) = \{a \in A \mid a \text{ è in relazione tramite } \mathcal{R} \text{ con almeno un elemento di } B\} \subseteq S$$

$$Cod(\mathcal{R}) = \{b \in B \mid b \text{ è in relazione tramite } \mathcal{R} \text{ con almeno un elemento di } A\} \subseteq T$$

$$Graf(\mathcal{R}) = \{(a, b) \in A \times B \mid \mathcal{R}(a, b) \text{ è vera}\} \subseteq A \times B$$

#### 1.2.1 Relazioni binarie

**Definizione** Una relazione  $\mathcal{R}$  tra  $S$  e  $S$  (cioè una proprietà che mette in relazione tra loro elementi di  $S$ ), è detta **relazione binaria** in  $S$ . Sia  $\mathcal{R}$  una relazione binaria; diremo: -  $\mathcal{R}(x, y)$  è **riflessiva** se  $\forall x \in S \mathcal{R}(x, x)$  è vera -  $\mathcal{R}(x, y)$  è **simmetrica** se  $\forall x, y \in S \mathcal{R}(x, y) \text{ vera} \implies \mathcal{R}(y, x) \text{ vera}$  -  $\mathcal{R}(x, y)$  è **antisimmetrica** se  $\forall x, y \in S \mathcal{R}(x, y) \text{ vera e } \mathcal{R}(y, x) \text{ vera} \implies x = y$  -  $\mathcal{R}(x, y)$  è **transitiva** se  $\forall x, y, z \in S \mathcal{R}(x, y) \text{ vera e } \mathcal{R}(y, z) \text{ vera} \implies \mathcal{R}(x, z)$

### 1.2.2 Relazioni di equivalenza

La relazione binaria  $\mathcal{R}$  su  $A$  si dice **relazione di equivalenza** se è riflessiva, simmetrica e transitiva. La relazione di equivalenza si indica con il simbolo  $\sim$ .

### 1.2.3 Relazioni d'ordine

**Definizione** La relazione binaria  $\mathcal{R}$  su  $A$  si dice **relazione d'ordine** se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Alcuni esempi di relazione d'ordine sono  $<$ ,  $\leq$ ,  $>$ ,  $\geq$ .

**Definizione** Una relazione d'ordine si dice **totale** se

$$\forall x, y \in A \text{ si ha } \mathcal{R}(x, y) \text{ oppure } \mathcal{R}(y, x)$$

cioè, comunque si fissino due elementi di  $A$ , essi sono **confrontabili**. Altrimenti la relazione d'ordine è detta **parziale**.

Indichiamo con  $(R, \leq)$  l'insieme  $R$  ordinato con la relazione  $\leq$ . **Legge di tricotomia:**  $\forall x, y \in R$  vale solo una delle seguenti possibilità : -  $x < y$  -  $x > y$  -  $x = y$

## 2 Massimo e minimo

**Definizione** Sia  $A \subset R$  non vuoto.  $m$  si dice **massimo** (risp. **minimo**) di  $A$  se:

- $m \in A$
- $m \geq x$  (risp.  $m \leq x$ )  $\forall x \in A$

Se  $m$  esiste, usiamo la notazione:  $m = \max A$  (risp.  $m = \min A$ )

**Proposizione** Il minimo e il massimo se esistono sono unici.

## 3 Maggiorante e minorante

**Definizione** Sia  $A \subset R$  non vuoto.  $m \in R$  si dice **maggiorante** (risp. **minorante**) di  $A$  se:  $m \geq x$  (risp.  $m \leq x$ )  $\forall x \in A$

Se  $A$  possiede un maggiorante (risp. minorante), allora **ne possiede infiniti**. Il massimo di  $A$  è un maggiorante. Il minimo di  $A$  è un minorante.

## 4 Insieme superiormente (inferiormente) limitato

**Definizione** Un insieme  $A \subset R$  non vuoto che ammette maggiorante (risp. minorante) si dice **superiormente limitato** (risp. **inferiormente limitato**).

Un insieme superiormente e inferiormente limitato si dice insieme limitato.

## 5 Estremo superiore ed estremo inferiore

**Definizione** Sia  $A \subset R$  un insieme superiormente limitato. Il minimo dei maggioranti si dice **estremo superiore** di  $A$  e si indica con  $\sup A$ :

$$\sup A = \min\{y \in R \mid y \geq x, \forall x \in A\}$$

**Definizione** Sia  $A \subset R$  un insieme inferiormente limitato. Il massimo dei minoranti si dice **estremo inferiore** di  $A$  e si indica con  $\inf A$ :

$$\inf A = \max\{y \in R \mid y \leq x, \forall x \in A\}$$

**Teorema**  $(R, \leq)$  è un **insieme totalmente ordinato e completo**, cioè  $\forall A \in R$  inferiormente limitato, l'insieme  $M$  dei suoi minoranti ha massimo.

**Proposizione** Ogni sottoinsieme di  $R$  superiormente limitato (risp. inferiormente limitato) ammette estremo superiore (risp. estremo inferiore).

**Definizione** Sia  $A \subseteq R$ :

- se  $A$  non possiede maggioranti, diremo che  $A$  è un insieme **non superiormente limitato**  $\sup A = +\infty$
- se  $A$  non possiede minoranti, diremo che  $A$  è un insieme **non inferiormente limitato**  $\inf A = -\infty$
- se  $A$  è limitato sia inferiormente che superiormente, diremo che  $A$  è **limitato**.

**Proposizione** Ogni sottoinsieme di  $R$  ammette estremo superiore e inferiore (finiti o non finiti)

## 6 Insiemi $N, Z, Q, R$

### 6.1 Intervalli

**Definizione** Siano  $a, b \in R$

- Intervallo limitato e chiuso  
 $[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$
- Intervallo superiormente non limitato e chiuso  
 $[a, +\infty[ = \{x \in R \mid x \geq a\}$
- Intervallo inferiormente non limitato e chiuso  
 $] -\infty, b] = \{x \in R \mid x \leq b\}$
- Intervallo limitato e aperto  
 $]a, b[ = \{x \in R \mid a < x < b\}$
- Intervallo non superiormente limitato e aperto  
 $]a, +\infty[ = \{x \in R \mid x > a\}$
- Intervallo non inferiormente limitato e aperto  
 $] -\infty, b[ = \{x \in R \mid x < b\}$
- Intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra  
 $[a, b[ = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$
- Intervallo chiuso a destra e aperto a sinistra  
 $]a, b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$

## 6.2 Proprietà degli insiemi

**Proprietà di densità**  $Q$  è denso in  $R$ , ovvero  $\forall x \in R \forall \epsilon > 0 \exists q \in Q$  tale che  $|x - q| < \epsilon$

**Definizione** Sia  $A \subseteq R$ . Diremo che  $A$  è un **insieme finito** se esiste  $k \in N$  e  $f : \{1, 2, \dots, k\} \xrightarrow{su} A$ .

**Osservazione** Il numero degli elementi  $k$  dell'insieme è detto **cardinalità**  $card(A) = \#A = k$

**Definizione** Sia  $A \subseteq R$ . Diremo che  $A$  è **infinito numerabile** se esiste  $f : N \xrightarrow{su} A$

**Teorema**  $Z$  e  $Q$  sono insiemi infiniti numerabili.

**Dimostrazione** ( $Z$  è infinito numerabile) è possibile costruire la funzione  $f : N \xrightarrow{su} Z$

$$f = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{if } n \text{ è pari} \\ \frac{n+1}{2} & \text{if } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

**Teorema** (di Cantor) L'insieme  $[0, 1]$  non è numerabile.

**Dimostrazione** Supponiamo per assurdo che possiamo formare una lista in cui contiamo tutti gli elementi di  $[0, 1]$ :

$$x_1 = 0.a_11a_12a_13a_14\dots$$

$$x_2 = 0.a_21a_22a_23a_24\dots$$

$$x_3 = 0.a_31a_32a_33a_34\dots$$

Adesso possiamo costruire un numero

$$b = 0.b_1b_2b_3b_4\dots$$

tale che

$$b_k \neq a_k k, \quad b_k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \quad k \geq 1$$

Siccome ogni  $k$ -esima cifra di  $b$  è diversa dalla  $k$ -esima cifra di  $x_k$  per costruzione, e avendo escluso la possibilità che  $b$  sia la rappresentazione equivalente di ciascun  $x_k$ , poiché  $b$  non può terminare con infiniti 0 o 9, allora  $b$  non è nella lista e siamo arrivati ad un assurdo.

**Teorema**  $R$  è non numerabile, come anche l'insieme dei numeri irrazionali  $R \setminus Q$ .

**Definizione** Un insieme  $A \subset R$  dotato di minimo e tale che  $x \in A \implies x + 1 \in A$  è detto **induttivo**

**Proposizione** L'insieme  $N$  dei numeri naturali possiede minimo, è superiormente non limitato ed è il più piccolo insieme induttivo.

## 7 Funzioni

**Definizione** Una **funzione** dall'insieme  $A$  all'insieme  $B$  è una relazione di  $A \times B$  tale che: -  $Dom(f) = A$  -  $\forall x \in A \exists! y \in B$  tale che “ $y$  è in relazione con  $x$  tramite  $f$ , cioè  $y = fx$ ”

e si indica con  $f : A \rightarrow B$

$$Graf(f) = \{(x, y), x \in Dom(A), y = f(x)\} = \{(x, f(x)), x \in A\}$$

### 7.1 Iniettività e suriettività

**Definizione** Siano  $A$  e  $B$  insiemi e  $f : A \rightarrow B$  una funzione

- Diremo che  $f$  è **iniettiva** (1-1) se  
 $\forall x_1, x_2 \in A$  con  $x_1 \neq x_2$  si ha  $f(x_1) \neq f(x_2)$ ,
- Diremo che  $f$  è **suriettiva** (su) se  
 $\forall y \in B \exists x \in A$  tale che  $y = f(x)$
- Diremo che  $f$  è **biiettiva** (o **biunivoca**) se è sia iniettiva che suriettiva, ovvero  
 $\forall y \in B \exists! x \in A$  tale che  $y = f(x)$

### 7.2 Immagine e controimmagine tramite $f$

**Definizione** Siano  $A, B, C \subset R$ ,  $f : A \rightarrow B$  e  $C \subset B$ .

L'**insieme immagine** di  $A$  tramite  $f$  è l'insieme dei valori della funzione  $f(x) \in B$  t.c.  $f(A) = Im(f) = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ e } y = f(x)\}$

L'**insieme controimmagine** di  $C$  tramite  $f$  è l'insieme dei valori di  $x$  tali che  $f(x) \in C$  t.c.  $f^{-1}(C) = \{x \in A \mid f(x) \in C\}$

### 7.3 Funzione composta

**Definizione** Siano  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  funzioni. La funzione  $h : x \in A \rightarrow g(f(x)) \in C$  si chiama **funzione composta** di  $g$  e  $f$  e si indica con  $g \circ f$ .

**Osservazione**  $f(A) \subseteq Dom(B)$

### 7.4 Funzione inversa

**Definizione** Sia  $f : A \xrightarrow[ su]{1-1} B$ . Definiamo la **funzione inversa** di  $f$ ,  $f^{-1} : B \xrightarrow[ su]{1-1} A$ , l'unica funzione che verifica le proprietà :

- $\forall x \in A : f^{-1}(f(x)) = x$
- $\forall y \in B : f(f^{-1}(y)) = y$

## 7.5 Funzioni monotone

**Definizione** Sia  $A \subseteq R$ .  $f : A \rightarrow R$  è:

- (monotona) **crescente** se  $\forall x_1, x_2 \in A$  con  $x_1 < x_2$  si ha  $f(x_1) \leq f(x_2)$
- **strettamente crescente** se  $\forall x_1, x_2 \in A$  con  $x_1 < x_2$  si ha  $f(x_1) < f(x_2)$
- (monotona) **decrescente** se  $\forall x_1, x_2 \in A$  con  $x_1 < x_2$  si ha  $f(x_1) \geq f(x_2)$
- **strettamente decrescente** se  $\forall x_1, x_2 \in A$  con  $x_1 < x_2$  si ha  $f(x_1) > f(x_2)$

**Teorema** Sia  $A \subseteq R$  e  $f : A \rightarrow R$  strettamente monotona. Allora

1.  $f$  è iniettiva da  $A$  in  $R$
2.  $\exists f^{-1} : f(A) \xrightarrow[su]{1-1} A$  strettamente monotona nello stesso verso

**Teorema** (monotonia delle funzioni composte) Siano  $A, B, C \subset R$  e  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  funzioni monotone. Allora  $g \circ f$  è monotona. In particolare:

- se  $f$  e  $g$  sono entrambe crescenti o decrescenti, allora  $g \circ f$  è crescente
- se  $f$  è crescente e  $g$  decrescente o viceversa, allora  $g \circ f$  è decrescente

## 7.6 Funzioni limitate

**Definizione**  $f : A \rightarrow R$  si dice **superiormente limitata** su  $A$  (risp. **inferiormente limitata**) se  $f(A) = \{y \in R \mid \exists x \in A \text{ t.c. } f(x) = y\}$  è superiormente limitato (risp. inferiormente limitato)

o equivalentemente  $f(x) \leq m$  (risp.  $f(x) \geq m$ ),  $\forall x \in A$

**Proposizione** Una funzione limitata superiormente e inferiormente è detta **limitata**.

**Definizione** Sia  $f : A \rightarrow R$ . Diciamo che  $f$  ha **massimo** se l'insieme  $f(A)$  ha massimo, cioè  $\exists x_0 \in A$  tale che  $f(x) \leq f(x_0)$ ,  $\forall x \in A$

Diremo che  $f(x_0)$  è il massimo per  $A$  e si scrive  $\max_{x \in A} f(x) = f(x_0)$  e  $x_0$  è un **punto di massimo**

**Definizione** Sia  $f : A \rightarrow R$ . Diciamo che  $f$  ha **minimo** se l'insieme  $f(A)$  ha minimo, cioè  $\exists x_0 \in A$  tale che  $f(x) \geq f(x_0)$ ,  $\forall x \in A$

Diremo che  $f(x_0)$  è il minimo per  $A$  e si scrive  $\min_{x \in A} f(x) = f(x_0)$  e  $x_0$  è un **punto di minimo**

**Definizione** Sia  $f : A \rightarrow R$ . Chiamiamo **estremo superiore** di  $f$  l'estremo superiore di  $f(A)$  e si scrive  $\sup_A f(x) = \sup f(A) \in R$  oppure  $\sup_A f(x) = +\infty$

**Definizione** Sia  $f : A \rightarrow R$ . Chiamiamo **estremo inferiore** di  $f$  l'estremo inferiore di  $f(A)$  e si scrive  $\inf_A f(x) = \inf f(A) \in R$  oppure  $\inf_A f(x) = -\infty$

## 8 Limiti

**Definizione** Un intorno aperto di  $x_0 \in R$  è un intervallo aperto del tipo  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$  con  $\delta > 0$

**Definizione** Sia  $A \subseteq R$  con  $x_0 \in R$ . Diremo che  $x_0$  è un **punto di accumulazione** per  $A$  se  $\forall \delta > 0 (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$ .

Ovvero per ogni intorno  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$  esistono punti  $x \in A$  distinti da  $x_0$  nell'intersezione di  $A$  con l'intorno  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ .

**Osservazione** Se  $x_0$  è un punto di accumulazione per  $A$ , allora  $\forall \delta > 0 (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\}) \cap A$  contiene infiniti punti.

**Teorema** (di Bolzano-Weierstrass) Un insieme  $A \subset R$  infinito e limitato ha almeno un punto di accumulazione.

### 8.1 Limiti per $x \rightarrow x_0$

**Definizione** (limite convergente) Sia  $A \subset R$ ,  $f : A \rightarrow R$ ,  $x_0$  punto di accumulazione per  $A$  e  $l \in R$ . Diciamo che per  $x \rightarrow x_0$   $f(x)$  converge a  $l$  e scriviamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ se } \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A, x \neq x_0 \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

**Definizione** (limite divergente) Sia  $A \subset R$ ,  $f : A \rightarrow R$  e  $x_0$  punto di accumulazione per  $A$ . Diciamo che per  $x \rightarrow x_0$   $f(x)$  diverge positivamente (risp. diverge negativamente) e scriviamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ (risp. } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty) \text{ se } \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A, x \neq x_0 \quad f(x) > \epsilon \text{ (risp. } f(x) < -\epsilon)$$

**Osservazione** Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  (risp.  $-\infty$ ) allora significa che  $f$  è non superiormente limitata (risp. non inferiormente limitata) nel suo codominio.

### 8.2 Limiti per $x \rightarrow \pm\infty$

**Definizione** Diciamo che  $x_0 = +\infty$  (risp.  $-\infty$ ) è un punto di accumulazione per  $A$ , insieme non limitato superiormente (risp. non limitato inferiormente) se  $\forall \delta > 0 \quad A \cap ]\delta, +\infty[ \neq \emptyset$  (risp.  $A \cap ]-\infty, \delta[ \neq \emptyset$ ).

**Definizione** (limite convergente) Sia  $A \subset R$  non superiormente limitato (risp. non inferiormente limitato),  $f : A \rightarrow B$  e  $l \in R$ . Diciamo che per  $x \rightarrow +\infty$  (risp.  $-\infty$ )  $f(x)$  converge a  $l$  e scriviamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \text{ (risp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l) \text{ se } \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A, x > \delta \text{ (risp. } x < -\delta) \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

**Definizione** (limite divergente) Sia  $A \subset R$  non superiormente limitato (risp. non inferiormente limitato),  $f : A \rightarrow R$ . Diciamo che per  $x \rightarrow \pm\infty$   $f(x)$  diverge positivamente (risp. diverge negativamente) a  $l$  e scriviamo:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \text{ (risp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty) \text{ se } \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A, x > \delta \text{ (risp. } x < -\delta) \quad f(x) > \epsilon \text{ (risp. } f(x) < -\epsilon)$$

### 8.3 Limite destro e limite sinistro

**Definizione** Siano  $f : A \rightarrow R$ ,  $A \subset R$  e  $x_0 \in R$  punto di accumulazione per  $A \cap ]x_0, +\infty[$  (risp.  $A \cap ]-\infty, x_0[$ ). Diciamo che  $f$  ha limite destro (risp. limite sinistro)  $l \in \overline{R}$  per  $x \rightarrow x_0^+$  (risp.  $x \rightarrow x_0^-$ ) se  $l$  è il limite per  $x \rightarrow x_0$  di  $f$  ristretta a  $A \cap ]x_0, +\infty[$  (risp.  $A \cap ]-\infty, x_0[$ ) e scriviamo:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$  (risp.  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ )

### 8.4 Teoremi e proprietà dei limiti

**Osservazione** Se  $x_0$  è punto di accumulazione per  $A$  allora  $\forall \bar{\delta} > 0$   $x_0$  è punto di accumulazione per  $A_0 = A \cap ]x_0 - \bar{\delta}, x_0 + \bar{\delta}[$ .

1. **Teorema** (località del limite) Sia  $f : A \rightarrow R$ ,  $x_0 \in \overline{R}$  punto di accumulazione per  $A$  e  $l \in \overline{R}$ . Sia  $\bar{\delta} > 0$  e  $A_0 = A \cap ]x_0 - \bar{\delta}, x_0 + \bar{\delta}[$ . Allora  $x_0$  è un punto di accumulazione per  $A_0$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} f|_A(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f|_{A_0}(x) = l$
2. **Teorema** (locale limitatezza di  $f$ ) Sia  $f : A \rightarrow R$ ,  $x_0$  punto di accumulazione per  $A$ ,  $l \in R$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ . Allora  $\exists \delta > 0$  tale che  $f$  ristretta all'insieme  $A \cap ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$  è una funzione limitata.

3. **Teorema** (unicità del limite) Sia  $f : A \rightarrow R$  e  $x_0$  punto di accumulazione per  $A$ . Allora il limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  se esiste è unico.

**Osservazione** In particolare se  $f(x)$  è non superiormente o non inferiormente limitata, allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  o non esiste, o se esiste non può essere finito, ovvero  $l \notin R$ .

**Teorema** Sia  $f : A \rightarrow R$ ,  $x_0$  punto di accumulazione per  $A \cap ]-\infty, x_0[$  e  $A \cap ]x_0, +\infty[$ ,  $l \in \overline{R}$ . Allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ .

**Osservazione** Se  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  oppure uno dei due limiti (destro/sinistro) non esiste allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  non esiste.

**Teorema** (limiti di funzioni monotone) Sia  $f : A \rightarrow R$  una funzione monotona crescente. Sia  $x_0 \in ]a, b[$ . Allora :

1.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x \in ]x_0, b]} f(x)$
2.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x \in [a, x_0[} f(x)$
3.  $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_{x \in ]a, b]} f(x)$
4.  $\exists \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_{x \in [a, b[} f(x)$

**Teorema** Siano  $f, g : A \rightarrow R$  e  $x_0 \in R$  punto di accumulazione per  $A$  (oppure  $x_0 = +\infty$  e  $A$  non superiormente limitato, oppure  $x_0 = -\infty$  e  $A$  non inferiormente limitato),  $l, m \in \overline{R}$ . Supponiamo che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$ . Allora:

1. se  $f(x) \leq g(x) \forall x \in A$  si ha  $l \leq m$
2. se  $l < m \exists \delta > 0$  tale che  $f(x) < g(x) \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \cap A$ .

**Teorema** (del confronto) Siano  $f, g, h : A \rightarrow R$  e  $x_0 \in R$  punto di accumulazione per  $A$  (oppure  $x_0 = +\infty$  e  $A$  non superiormente limitato, oppure  $x_0 = -\infty$  e  $A$  non inferiormente limitato). Supponiamo che

1.  $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \forall x \in A$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$ , con  $l \in \overline{R}$

Allora  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$

## 8.5 Proprietà algebriche dei limiti

**Teorema** Siano  $f, g : A \rightarrow R$ ,  $x_0$  punto di accumulazione per  $A$  (oppure  $x_0 = +\infty$  e  $A$  non superiormente limitato, oppure  $x_0 = -\infty$  e  $A$  non inferiormente limitato). Siano  $l, m \in R$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$ . Allora:

1. La funzione somma  $f \pm g$  ha limite  $l \pm m$  per  $x \rightarrow x_0$ , ovvero  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = l \pm m$
2. La funzione prodotto  $f \cdot g$  ha limite  $l \cdot m$  per  $x \rightarrow x_0$ , ovvero  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$
3. Se  $m \neq 0$  allora  $\exists \bar{\delta} > 0$  tale che  $g(x) \neq 0 \forall x \in A \cap ]x_0 - \bar{\delta}, x_0 + \bar{\delta}[$ ,  $x \neq x_0$
4. Se  $m \neq 0$  allora la funzione  $\frac{f}{g}$  ha limite  $\frac{l}{m}$  per  $x \rightarrow x_0$ , cioè  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$
5. Se  $c \in R$  è una costante, allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot l$ .



**Definizione**  $f : A \rightarrow R$  con  $A \subset R$  è **infinitesimo** ( $x \rightarrow x_0$ ) se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  e  $f$  è **infinito** ( $x \rightarrow x_0$ ) se  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$

**Teorema** (proprietà algebriche degli infinitesimi) Siano  $A \subseteq R$ ,  $f, g : A \rightarrow R$ ,  $x_0$  punto di accumulazione per  $A$  (oppure  $x_0 = +\infty$  e  $A$  non superiormente limitato, oppure  $x_0 = -\infty$  e  $A$  non inferiormente limitato) e  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ . Allora:

1. Se  $\exists M > 0$  tale che  $|g(x)| < M$ ,  $\forall x \in A$  allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$
2. Se  $f(x)$  è positiva (risp. negativa)  $\forall x \in A$  allora  $\frac{1}{f(x)}$  è definita e  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$  (risp.  $-\infty$ ).

**Teorema** (proprietà algebriche degli infiniti) Siano  $A \subseteq R$ ,  $f, g : A \rightarrow R$ ,  $x_0$  punto di accumulazione per  $A$  (oppure  $x_0 = +\infty$  e  $A$  non superiormente limitato, oppure  $x_0 = -\infty$  e  $A$  non inferiormente limitato) e  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ . Allora:

1. Se  $\exists M \in R$  tale che  $g(x) \geq M$ ,  $\forall x \in A$ , allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$
2. Se  $\exists M \in R$ ,  $M > 0$  tale che  $g(x) \geq M$ ,  $\forall x \in A$ , allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$
3. Se  $\exists M \in R$ ,  $M < 0$  tale che  $g(x) \leq M$ ,  $\forall x \in A$ , allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty$
4.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

Analogamente per  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ :

1. Se  $\exists M \in R$  tale che  $g(x) \leq M$ ,  $\forall x \in A$ , allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = -\infty$
2. Se  $\exists M \in R$ ,  $M > 0$  tale che  $g(x) \geq M$ ,  $\forall x \in A$ , allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty$
3. Se  $\exists M \in R$ ,  $M < 0$  tale che  $g(x) \leq M$ ,  $\forall x \in A$ , allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$
4.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

## 8.6 Simboli di Landau

**Definizione** (o-piccolo)

- $f$  si dice **o-piccolo di 1**, ( $x \rightarrow x_0$ ), e si scrive  $f(x) = o(1)$ , ( $x \rightarrow x_0$ ) se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
- $f$  si dice **o-piccolo di g**, ( $x \rightarrow x_0$ ), e si scrive  $f(x) = o(g(x))$ , ( $x \rightarrow x_0$ ) se  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ . Se  $f(x) = o(g(x))$ , ( $x \rightarrow x_0$ ),  $f$  si dice **trascurabile** rispetto a  $g$ , ( $x \rightarrow x_0$ ).

**Definizione** (equivalenza)  $f$  si dice **equivalente** a  $g$ , ( $x \rightarrow x_0$ ), e si scrive  $f(x) \approx g(x)$ , ( $x \rightarrow x_0$ ) se  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

**Teorema** Siano  $f, g : A \rightarrow R$ .  $f(x) \approx g(x)$ , ( $x \rightarrow x_0$ )  $\iff f(x) = g(x) + o(g(x))$ , ( $x \rightarrow x_0$ )

**Teorema** Se  $f_1 \approx f_2$  e  $g_1 \approx g_2$ , ( $x \rightarrow x_0$ ), allora  $f_1 g_1 \approx f_2 g_2$ , ( $x \rightarrow x_0$ );  $\frac{f_1}{g_1} \approx \frac{f_2}{g_2}$ , ( $x \rightarrow x_0$ )

**Teorema** (principio di sostituzione)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f+o(f)}{g+o(g)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}$

**Proposizione** Siano  $f, g, h : A \rightarrow R$ . Se  $l + m \neq 0$  e

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \approx lh(x), (x \rightarrow x_0) \\ g(x) \approx mh(x), (x \rightarrow x_0) \end{array} \right\} \implies [f(x) + g(x)] \approx (l + m)h(x), (x \rightarrow x_0)$$

## 8.7 Funzioni continue

**Definizione** Siano  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremo che  $f$  è continua in  $x_0 \in A$  se  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \forall x \in A \cap ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

1. Se  $x_0$  è un punto isolato, quindi non di accumulazione, allora  $f$  è banalmente continua in  $x_0$
2. Se  $x_0$  è un punto di accumulazione, allora la definizione è equivalente a

**Proposizione**  $f$  è continua  $\iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

**Definizione**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}$  è una funzione continua su  $A$  se  $f$  è continua in tutti i punti di  $A$ .

**Teorema** (continuità della funzione composta) Siano  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f$  è continua in  $x_0 \in A$  e  $g$  è continua in  $y_0 = f(x_0)$ , allora  $f \circ g : A \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in  $x_0$ .

**Teorema** (permanenza del segno) Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in  $x_0 \in A$  e  $f(x_0) > 0$  (risp.  $f(x_0) < 0$ ) allora  $\exists \delta > 0 : f(x) > 0$  (risp.  $f(x) < 0$ )  $\forall x \in A \cap ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

**Teorema** (di Weierstrass) Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $[a, b]$ . Allora  $\exists \max_{[a,b]} f$  e  $\exists \min_{[a,b]} f$ .

**Osservazione** Il teorema è valido anche per  $A = \bigcup_{i=1}^k [a_i, b_i]$  ed è valido in generale se  $A$  è un insieme limitato e chiuso.

**Teorema** (degli zeri) Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $[a, b]$  e tale che  $f(a) < 0 < f(b)$ . Allora  $\exists c \in ]a, b[$  tale che  $f(c) = 0$ .

**Teorema** (dei valori intermedi) Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $[a, b]$ . Allora  $f$  assume tutti i valori compresi tra  $f(a)$  e  $f(b)$ .  $[f(a), f(b)] = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, y = f(x)\} = \mathcal{Im}_{[a,b]}(f)$

**Teorema** (di Bolzano) Siano  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $I$ . Allora  $f(I) = \mathcal{Im}(f)$  è un intervallo.

**Teorema** (funzioni monotone e continuità) Siano  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  monotona. Allora  $f$  è continua  $\iff f(I)$  è un intervallo.

**Teorema** (continuità funzione inversa) Siano  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua e strettamente monotona in  $I$ . Allora  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  è strettamente monotona e continua nell'intervallo  $f(I)$ .

**Corollario** (di Bolzano-Weierstrass) Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $[a, b]$  allora  $f([a, b]) = [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f]$ .

## 9 Derivazione

**Definizione** Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$ ,  $x_0 \in [a, b]$ . Chiamiamo **rapporto incrementale** di  $f$  rispetto a  $x_0$

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad R : [a, b] \setminus \{x_0\} \rightarrow R$$

**Definizione** Siano  $f : A \rightarrow R$  e  $x_0 \in A$ . Posto  $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ,  $\frac{df}{dx}(x_0) \in \overline{R}$ . Se  $\frac{df}{dx}(x_0) \in R$  si dice che  $f$  è derivabile in  $x_0$ .

**Teorema** Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$  derivabile in  $x_0 \in R$ . Allora  $f(x)$  è continua in  $x_0$ .

**Definizione** Sia  $f : A \rightarrow R$  e  $x_0 \in A$ . Supponiamo che  $x_0$  sia punto di accumulazione per  $A \cap ]x_0, +\infty[$  e  $A \cap ]-\infty, x_0[$ . Chiameremo **derivata destra** di  $f(x_0)$ , se esiste, il limite destro del rapporto incrementale:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Analogamente chiameremo **derivata sinistra**, se esiste, il limite sinistro del rapporto incrementale:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**Definizione** Sia  $f$  una funzione continua in  $x_0$ . Se esistono finite (o una finita e una infinita), ma distinte, le derivate destra e sinistra, allora si dice che  $f$  ha un **punto angoloso** in  $x_0$ .

**Definizione** Sia  $f$  una funzione continua in  $x_0$ . Se esistono infinite e di segno opposto le derivate destra e sinistra, allora si dice che  $f$  ha una **cuspide** in  $x_0$ .

**Definizione** Sia  $f$  una funzione continua in  $x_0$ . Se  $|f(x)| = +\infty$  allora si dice che  $f$  ha un **punto di flesso a tangente verticale** in  $x_0$ .

### 9.1 Regole di derivazione

**Teorema** (linearità della funzione derivata) Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow R$  derivabili in  $x_0 \in [a, b]$  e  $\lambda, \mu \in R$ . Allora  $\lambda f + \mu g$  è derivabile in  $x_0$  e la derivata è:

$$\frac{d}{dx}[\lambda f + \mu g](x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$$

**Teorema** (Regola di Leibniz) Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow R$  derivabili in  $x_0 \in [a, b]$ . Allora la funzione  $f \cdot g$  è derivabile in  $x_0$  e:

$$\frac{d}{dx}(f \cdot g)(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

**Teorema** (funzione reciproca) Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$  derivabile in  $x_0 \in [a, b]$  e  $f(x_0) \neq 0$ . Allora  $\exists \frac{1}{f} : ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \cap [a, b] \rightarrow R$  derivabile in  $x_0$  e:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f}\right)(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

**Corollario** (rapporto di funzioni) Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow R$  derivabili in  $x_0 \in [a, b]$  e  $g(x_0) \neq 0$ . Allora la funzione  $\frac{f}{g} : ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \cap [a, b] \rightarrow R$  derivabile in  $x_0$  e:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

**Teorema** (funzione composta) Supponiamo  $I, J \in R$  intervalli,  $x_0 \in I$ ,  $f : I \rightarrow J$  derivabile in  $x_0$  e  $g : J \rightarrow R$  derivabile in  $y_0 = f(x_0) \in J$ . Allora la funzione composta  $g \circ f : I \rightarrow R$  è derivabile in  $x_0$  e:

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x_0) = \frac{dg}{dy}(f(x_0)) \frac{df}{dx}(x_0)$$

**Teorema** (funzione inversa) Sia  $I \subseteq R$  intervallo e  $f : I \xrightarrow[su]{1-1} R$  strettamente monotona e continua (quindi  $\exists f^{-1} : f(I) \xrightarrow[su]{1-1} I$  strettamente monotona e continua). Se  $\exists f'(x_0) \neq 0$  allora:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(f^{-1}(y_0))}$$

**Teorema** (di Lagrange) Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$  continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $]a, b[$ . Allora  $\exists c \in ]a, b[$  tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Teorema** (di Rolle) Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$  continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $]a, b[$ . Se  $f(a) = f(b)$  allora necessariamente  $\exists c \in ]a, b[$  tale che:

$$f'(c) = 0$$

**Teorema** (di Fermat) Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow R$ . Se  $c \in ]a, b[$  è un punto di massimo o di minimo per  $f$  e  $\exists f'(c)$  allora necessariamente  $f'(c) = 0$ .

**Teorema** (di De l'Hôpital) Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow R$  derivabili in  $]a, b[$ . Se:

1.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$
2.  $g'(x)$  ha segno costante  $\forall x \in ]a, b[$  (è sufficiente che non cambi di segno in un insieme con punti di accumulazione)
3.  $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{R}$

Allora  $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

**Teorema** (di De l'Hôpital) Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow R$  derivabili in  $]a, b[$ . Se

1.  $\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = +\infty = \lim_{x \rightarrow a^+} |g(x)|$
2.  $g'(x)$  ha segno costante  $\forall x \in ]a, b[$  (è sufficiente che non cambi di segno in un insieme con punti di accumulazione)
3.  $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{R}$

Allora  $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

**Corollario** Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$  continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $]a, b[$ . Se  $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = l \in \overline{R}$  allora  $\exists f'(a) = l$

**Definizione** Siano  $f : I \rightarrow R$ ,  $I$  intervallo e  $f'$  la derivata di  $f$ . Chiamiamo  $I'$  l'insieme dei punti di  $I$  in cui esiste  $f'$ .  $I' = \{x \in I \mid \exists f'(x) \in R\}$

Possiamo ora definire la **derivata seconda** di  $f$ , ovvero la derivata di  $f' : I' \rightarrow R$ , in  $x_0$ , se esiste,  $f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$

Più in generale, se  $f, f', f'', \dots, f^{(k+1)} : I \rightarrow R$  e  $x_0 \in I$  possiamo definire la derivata k-esima di  $f$  in  $x_0$ ,  $f^{(k)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(x_0)}{x - x_0}$

**Definizione** Definiamo la **classe di una funzione** da  $I \subset R$  intervallo a  $R$  di ordine k come l'insieme delle funzioni di variabile reale derivabili con continuità k volte, e scriviamo:

$$\mathcal{C}^{(k)}(I, R) = \{f : I \rightarrow R \mid f \text{ continua in } I\}$$

**Osservazione**  $\mathcal{C}^{(\infty)}(I, R) \dots \mathcal{C}^{(1)}(I, R) \mathcal{C}^{(0)}(I, R)$

## 10 Polinomi di Taylor

**Definizione** Sia  $f : I \rightarrow R$ ,  $I$  intervallo, derivabile  $n$  volte in  $x_0 \in I$ . Chiamiamo **polinomio di Taylor di  $f$  di ordine  $n$**  e punto iniziale  $x_0$  il polinomio

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

**Teorema** (formula di Taylor con resto di Peano) Sia  $f : I \rightarrow R$ ,  $I$  intervallo, derivabile  $n$  volte in  $x_0 \in I$ . Allora

$$f(x) = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right] + o((x - x_0)^k) \quad (x \rightarrow x_0)$$

**Teorema** (formula di Taylor con resto di Lagrange) Siano  $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}(I, R)$ ,  $x, x_0 \in I$ . Allora  $\exists c \in I$  compreso tra  $x_0$  e  $x$  tale che:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + f^{(n+1)}(c) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

### 10.1 Proprietà del polinomio di Taylor

**Proposizione** Sia  $f \in \mathcal{C}^{(n)}(I, R)$ .

1. Il polinomio di Taylor di  $f$  di punto iniziale  $x_0$  e grado minore o uguale a  $n$  è l'unico polinomio di grado  $\leq n$  per il quale vale  $T_n^k(x_0) = f^{(k)}(x_0)$
2. Derivando il polinomio di Taylor di ordine  $n$  di  $f$  si ottiene il polinomio di Taylor di grado  $n - 1$  di  $f : \frac{d}{dx} T_n[f](x) = T_{n-1}[f'](x)$

**Proposizione** Se  $f(x) = q_n(x) + o((x - x_0)^n)$ ,  $(x \rightarrow x_0)$ , ove  $q_n(x)$  è un polinomio di grado al più  $n$ , allora necessariamente  $q_n(x) = T_{n,x_0}(x)$  ove  $T_{n,x_0}(x)$  è il polinomio di Taylor di  $f$  di ordine  $n$  e punto iniziale  $x_0$ .

### 10.2 Formule di Taylor delle funzioni elementari

**Esponenziale** La funzione esponenziale ha derivate di ordine comunque elevato; scelto come punto iniziale  $x_0 = 0$ , la sua formula di Taylor, di ordine  $n$ , si scrive come

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

**Coseno** La funzione coseno è pari e ha derivate di ordine comunque elevato; scelto come punto iniziale  $x_0 = 0$ , la sua formula di Taylor, di ordine  $2n$ , si scrive come

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \quad (x \rightarrow 0)$$

infatti

$$D^{(k)} \cos(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ dispari} \\ (-1)^k & \text{se } k \text{ pari} \end{cases}$$

**Seno** La funzione seno è dispari e ha derivate di ordine comunque elevato; scelto come punto iniziale  $x_0 = 0$ , la sua formula di Taylor, di ordine  $2n + 1$ , si scrive come

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{(2n+2)}) \quad (x \rightarrow 0)$$

infatti

$$D^{(k)} \sin(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ pari} \\ (-1)^k & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$$

**Coseno iperbolico** La funzione coseno iperbolico è pari e ha derivate di ordine comunque elevato; scelto come punto iniziale  $x_0 = 0$ , la sua formula di Taylor, di ordine  $2n$ , si scrive come

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \quad (x \rightarrow 0)$$

infatti

$$D^{(k)} \cosh(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ dispari} \\ 1 & \text{se } k \text{ pari} \end{cases}$$

**Seno iperbolico** La funzione seno iperbolico è dispari e ha derivate di ordine comunque elevato; scelto come punto iniziale  $x_0 = 0$ , la sua formula di Taylor, di ordine  $2n + 1$ , si scrive come

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{(2n+2)}) \quad (x \rightarrow 0)$$

infatti

$$D^{(k)} \sinh(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ pari} \\ 1 & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$$

**Ln(1 + x)** La funzione  $\ln(1 + x)$  ha derivate di ordine comunque elevato; scelto come punto iniziale  $x_0 = 0$ , la sua formula di Taylor, di ordine  $n$ , si scrive come

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

**(1 + x)<sup>α</sup>** La funzione  $(1 + x)^\alpha$ ,  $x > -1$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  ha derivate di ordine comunque elevato; scelto come punto iniziale  $x_0 = 0$ , la sua formula di Taylor, di ordine  $n$ , si scrive come

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

posto

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \quad \binom{\alpha}{0} = 1$$

$(1+x)^{-1}$  La funzione  $(1+x)^{-1}$ ,  $x \neq -1$ , ha derivate di ordine comunque elevato; scelto come punto iniziale  $x_0 = 0$ , la sua formula di Taylor, di ordine  $n$ , si ottiene da quella precedente, con  $\alpha = -1$ , ed è

$$(1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n), \quad (x \rightarrow 0)$$

infatti

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)\dots(-1-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k)}{k!} = (-1)^k$$

Quindi il polinomio di Taylor è

$$T_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$$

$(1+x^2)^{-1}$  La funzione  $(1+x^2)^{-1}$  ha derivate di ordine comunque elevato; scelto come punto iniziale  $x_0 = 0$ , la sua formula di Taylor, di ordine  $2n$ , si ottiene da quella precedente, sostituendo  $x$  con  $x^2$ , ed è

$$(1+x^2)^{-1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) \quad (x \rightarrow 0)$$

$(1-x)^{-1}$  La funzione  $(1-x)^{-1}$ ,  $x \neq 1$ , ha derivate di ordine comunque elevato; scelto come punto iniziale  $x_0 = 0$ , la sua formula di Taylor, di ordine  $n$ , si ottiene da quella precedente, sostituendo  $x$  con  $-x$ , ed è

$$(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$(1-x^2)^{-1}$  La funzione  $(1-x^2)^{-1}$ ,  $x \neq \pm 1$ , ha derivate di ordine comunque elevato; scelto come punto iniziale  $x_0 = 0$ , la sua formula di Taylor, di ordine  $2n$ , si ottiene da quella precedente, sostituendo  $x$  con  $x^2$ , ed è

$$(1-x^2)^{-1} = \sum_{k=0}^n x^{2k} + o(x^{2n}) \quad (x \rightarrow 0)$$

## 11 Studio qualitativo del grafico di una funzione

### 11.1 Comportamento asintotico

**Definizione** Siano  $f, g : ]a, +\infty[ \rightarrow R$  diremo che  $g(x)$  è asintotica a  $f(x)$  (equivalentemente,  $f(x)$  ha per asintoto  $g(x)$ ) quando  $(x \rightarrow \pm\infty)$  se:

$$f(x) = g(x) + o(1) \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

**Definizione** Diremo che  $f(x)$  ha **asintoto obliquo**  $g(x) = ax + b$  ( $x \rightarrow \pm\infty$ ) se esistono  $a \neq 0$  e  $b \in R$  tali che

$$f(x) = ax + b + o(1) \quad (x \rightarrow \pm\infty) \iff \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \end{cases}$$

**Definizione** Diremo che  $f(x)$  ha **asintoto verticale** da destra (risp. da sinistra) ( $x \rightarrow a^+$ ) se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad (\text{risp.} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty)$$

**Definizione** Diremo che  $f(x)$  ha **asintoto orizzontale**  $y = c$  ( $x \rightarrow \pm\infty$ ) se

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c$$

### 11.2 Monotonia

**Teorema** (funzioni monotone e derivata prima) Supponiamo  $I \subseteq R$  intervallo e  $f : I \rightarrow R$  derivabile in  $I$ . Allora:

1.  $f$  è debolmente crescente in  $I \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$
2.  $f$  è debolmente decrescente in  $I \iff f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$
3. Se  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$  allora  $f$  è strettamente crescente in  $I$
4. Se  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$  allora  $f$  è strettamente decrescente in  $I$

**Teorema** Siano  $I$  intervallo e  $f : I \rightarrow R$  derivabile in  $I$ . Allora  $f$  è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente) se e solo se  $f'(x) \geq 0$  (risp.  $f'(x) \leq 0$ )  $\forall x \in I$  e l'insieme  $E = \{x \in I \mid f'(x) = 0\} \subseteq I$  non contiene intervalli aperti.

**Teorema** Sia  $f : I \rightarrow R$  derivabile  $2n + 1$  volte in  $x_0 \in I$  e tale che  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{2n}(x_0) = 0$ . Se

- $f^{2n+1} > 0$  allora  $x_0$  è un punto di crescita, ovvero  $f$  è strettamente crescente
- $f^{2n+1} < 0$  allora  $x_0$  è un punto di decrescenza, ovvero  $f$  è strettamente decrescente

### 11.3 Punti di massimo e minimo locale

**Definizione** Sia  $A \subseteq R$ ,  $f : A \rightarrow R$ . Diremo che  $x_0 \in A$  è un punto di **minimo locale** (risp. di **massimo locale**) (o relativo) se  $\exists \delta > 0$  tale che

$$f(x) \geq f(x_0) \quad (\text{risp.} \quad f(x) \leq f(x_0)) \quad \forall x \in A \cap ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

**Teorema** (di Fermat) Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow R$ . Se  $x_0 \in ]a, b[$  è un punto di massimo (o minimo) locale e  $\exists f'(x_0)$  allora  $f'(x_0) = 0$

**Definizione** Sia  $f : I \rightarrow R$  derivabile in  $x_0 \in I$ . Diciamo che  $x_0$  è un **punto stazionario o critico** se  $f'(x) = 0$ .



**Teorema** Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow R$  derivabile in  $]a, b[$ . Se in  $x_0 \in ]a, b[$   $f'(x_0) = 0$  e  $\exists \delta > 0$  tale che:

1.  $f'(x_0) > 0 \ \forall x \in ]x_0, x_0 + \delta[$
2.  $f'(x_0) < 0 \ \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0[$

Allora  $x_0$  è un punto di minimo locale

1.  $f'(x_0) < 0 \ \forall x \in ]x_0, x_0 + \delta[$
2.  $f'(x_0) > 0 \ \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0[$

Allora  $x_0$  è un punto di massimo locale

**Teorema** Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow R$ ,  $x_0 \in ]a, b[$  e supponiamo che  $f$  sia continua in tutto  $]a, b[$  e derivabile in  $]a, b[ \setminus \{x_0\}$ . Se  $\exists \delta > 0$

1.  $f'(x) > 0 \ \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0[ \cap ]a, b[$  e  $f'(x) < 0 \ \forall x \in ]x_0, x_0 + \delta[ \cap ]a, b[$  allora  $x_0$  è un punto angoloso di massimo locale
2.  $f'(x) < 0 \ \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0[ \cap ]a, b[$  e  $f'(x) > 0 \ \forall x \in ]x_0, x_0 + \delta[ \cap ]a, b[$  allora  $x_0$  è un punto angoloso di minimo locale
3.  $f'_+(x) = +\infty$  e  $f'_-(x) = -\infty$  allora  $x_0$  è una cuspidi di minimo locale
4.  $f'_+(x) = -\infty$  e  $f'_-(x) = +\infty$  allora  $x_0$  è una cuspidi di massimo locale

**Teorema** Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow R$  derivabile  $2n$  volte in  $x_0$ , con  $n \geq 1$ . Se  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{2n-1}(x_0) = 0$ . Allora:

1. Se  $f^{2n}(x_0) > 0$  allora  $x_0$  è un punto di minimo locale
2. Se  $f^{2n}(x_0) < 0$  allora  $x_0$  è un punto di massimo locale

**Corollario** Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow R$  derivabile 2 volte in  $x_0$ . Supponiamo  $f'(x_0) = 0$  allora:

1. Se  $f''(x_0) > 0$  allora  $x_0$  è un punto di minimo locale
2. Se  $f''(x_0) < 0$  allora  $x_0$  è un punto di massimo locale

**Teorema** Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow R$  derivabile 2 volte in  $x_0$ . Allora:

1. Se  $x_0$  è un punto di minimo locale allora  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) > 0$
2. Se  $x_0$  è un punto di massimo locale allora  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) < 0$

## 11.4 Convessità e concavità

**Definizione** Sia  $I \subset R$  intervallo e  $f : I \rightarrow R$ . Diciamo che  $f$  è **convessa** in  $I$  se:

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ e } \forall \lambda \in ]0, 1[ \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Diremo che  $f$  è **strettamente convessa** se:

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ e } \forall \lambda \in ]0, 1[ \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

**Definizione** Sia  $I \subset R$  intervallo e  $f : I \rightarrow R$ . Diciamo che  $f$  è **concava** in  $I$  se:

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ e } \forall \lambda \in ]0, 1[ \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Diremo che  $f$  è **strettamente concava** se:

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ e } \forall \lambda \in ]0, 1[ \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

**Teorema** Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$  concava (o convessa) in  $[a, b]$ . Allora  $f$  è continua in  $]a, b[$ .

**Teorema** (convessità e rette tangenti) Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $I$ . Allora:

1.  $f$  è convessa in  $I \iff \forall x, x_0 \in I \ f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
2.  $f$  è concava in  $I \iff \forall x, x_0 \in I \ f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
3. Se  $\forall x, x_0 \in I \ f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  allora  $f$  è strettamente convessa in  $I$
4. Se  $\forall x, x_0 \in I \ f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  allora  $f$  è strettamente concava in  $I$

**Teorema** (convessità e monotonia) Sia  $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo. Allora:

1.  $f$  è convessa in  $I \iff f'$  è monotona crescente in  $I$
2.  $f$  è concava in  $I \iff f'$  è monotona decrescente in  $I$

**Teorema** (convessità e segno della derivata seconda) Siano  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo e  $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ . Allora:

1.  $f$  è convessa in  $I \iff f'' \geq 0 \ \forall x \in I$
2.  $f$  è concava in  $I \iff f'' \leq 0 \ \forall x \in I$

**Teorema** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua e strettamente convessa (risp. strettamente concava) in  $[a, b]$ . Allora  $\exists! x_0 \in [a, b]$  tale che  $f(x_0) = \min_{[a, b]} f$  (risp.  $f(x_0) = \max_{[a, b]} f$ )

## 11.5 Punti di flesso

**Definizione** Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , continua in  $]a, b[$  e derivabile in  $x_0 \in ]a, b[$ . Allora diremo che  $x_0$  è un **punto di flesso** se presa  $F(x) = [f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)]$   $x \in ]a, b[$  allora  $\exists \delta > 0$  tale che  $F(x) \text{sign}(x - x_0)$  ha segno costante in  $]a, b[ \cap ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

**Teorema** Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $]a, b[$  e derivabile 2 volte in  $x_0 \in ]a, b[$ . Se  $x_0$  è un punto di flesso allora  $f''(x_0) = 0$ .

**Teorema** Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $]a, b[$  e derivabile  $2n + 1$  volte in  $x_0 \in ]a, b[$ . Se  $f''(x_0) = \dots = f^{2n}(x_0) = 0$  e  $f^{2n+1}(x_0) \neq 0$  allora  $x_0$  è un punto di flesso.

**Corollario** Se  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile 3 volte e  $f''(x_0) = 0$  e  $f'''(x_0) \neq 0$  allora  $x_0$  è un punto di flesso.

**Teorema** Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $]a, b[$ . Se  $x_0$  è un punto di minimo o massimo per  $f'(x_0)$  allora è un punto di flesso per  $f$ .

Supponiamo  $x_0$  punto di minimo per  $f'$ . Allora  $F'(x) \geq 0 \ \forall x \in ]a, b[ \cap ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ . Da qui segue che  $F(x)$  è monotona crescente in  $]a, b[ \cap ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ . Essendo  $F(x_0) = 0$ , allora  $x_0$  è un punto di flesso.

**Teorema** Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile 2 volte in  $]a, b[$ . Se in  $x_0 \in ]a, b[$   $f''(x_0) = 0$  ed  $\exists \delta > 0$  tale che  $f$  è concava in  $]x_0, x_0 + \delta[$  e convessa in  $]x_0 - \delta, x_0[$ , o viceversa, allora  $x_0$  è un punto di flesso.

## 12 Integrazione

### 12.1 Primitive

**Definizione** Sia  $f : I \rightarrow R$ ,  $I$  intervallo. Chiamiamo  $F : I \rightarrow R$  **primitiva** di  $f$  se  $\frac{dF}{dx}(x) = f(x) \forall x \in I$

**Teorema** (funzioni a derivata nulla) Sia  $I$  intervallo,  $f : I \rightarrow R$  derivabile in  $I$ . Allora  $f'(x) = 0 \forall x \in I \iff \exists c \in R$  tale che  $f(x) = c \forall x \in I$

**Teorema** (caratterizzazione delle primitive di  $f$  su un intervallo) Sia  $I \subseteq R$  intervallo,  $f : I \rightarrow R$ . Allora:

1. se  $F : I \rightarrow R$  è una primitiva di  $f$  allora  $F(x) + c$ ,  $c \in R$  costante, è un'altra primitiva di  $f$
2. se  $F, G : I \rightarrow R$  sono primitive di  $f$ , allora  $\exists c \in R$  costante tale che  $G(x) = F(x) + c$

### 12.2 Integrazione secondo Riemann

**Definizione** Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$  limitata in  $[a, b]$ . Definiamo **scomposizione**  $\sigma$  dell'intervallo  $[a, b]$  un sottoinsieme finito e ordinato di punti in  $[a, b]$

$$\sigma = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

**Definizione** Siano  $\sigma, \tau$  scomposizioni di  $[a, b]$ .  $\sigma \cup \tau$  è l'**insieme unione** dei punti che stanno in  $\sigma, \tau$ . Tale scomposizione è più fine di  $\sigma$  e  $\tau$ .

**Definizione** Fissata la scomposizione  $\sigma$  di  $[a, b]$ :

1. definiamo la **somma inferiore** di  $f$  rispetto a  $\sigma$  come

$$s(f, \sigma) = (x_1 - x_0) \inf_{[x_0, x_1]} f + \dots + (x_n - x_{n-1}) \inf_{[x_{n-1}, x_n]} f = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

1. definiamo la **somma superiore** di  $f$  rispetto a  $\sigma$  come

$$S(f, \sigma) = (x_1 - x_0) \sup_{[x_0, x_1]} f + \dots + (x_n - x_{n-1}) \sup_{[x_{n-1}, x_n]} f = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

**Proposizione** Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$  limitata. Siano  $\sigma, \tau$  scomposizioni di  $[a, b]$ .

$$(b - a) \inf_{[a, b]} f \leq s(f, \sigma) \leq s(f, \sigma \cup \tau) \leq S(f, \sigma \cup \tau) \leq S(f, \sigma) \leq (b - a) \sup_{[a, b]} f$$

**Definizione** Si definisce **integrale inferiore** di  $f$  in  $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_{\sigma} s(f, \sigma)$$

Si definisce **integrale superiore** di  $f$  in  $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_{\sigma} S(f, \sigma)$$

**Corollario** Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$  limitata. Allora

$$\int_a^b f(x)dx < +\infty \text{ perché ha come maggiorante } (b-a) \sup_{[a,b]} f$$

$$\int_a^b f(x)dx > -\infty \text{ perché ha come minorante } (b-a) \inf_{[a,b]} f$$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \overline{\int_a^b f(x)dx}$$

**Definizione** (funzione integrabile secondo Riemann) Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$  limitata. Diremo che  $f$  è **integrabile secondo Riemann** se

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b f(x)dx}$$

e in tal caso chiamiamo **integrale** di  $f$  in  $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b f(x)dx}$$

**Funzione di Dirichlet** La funzione di Dirichlet è così definita

$$f : [0, 1] \rightarrow R, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap Q \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus Q \end{cases}$$

Presa una qualunque partizione  $\sigma = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1\}$  scomposizione, allora

- $s(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f = 0$
- $S(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = (x_1 - 0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) \dots (1 - x_{n-1}) = 1$

Quindi

$$\int_a^b f(x)dx < \overline{\int_a^b f(x)dx}$$

Quindi la funzione di Dirichlet è limitata ma non integrabile secondo Riemann.

**Teorema** (classificazione delle funzioni integrabili secondo Riemann)

1. Se  $f : [a, b] \rightarrow R$  è continua in  $[a, b]$  allora  $f$  è integrabile secondo Riemann
2. Se  $f : [a, b] \rightarrow R$  è continua e limitata in  $[a, b] \setminus \{c\}$  ( $c \in ]a, b[$ ) allora  $f$  è integrabile secondo Riemann e  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
3. Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$  limitata in  $[a, b]$  e continua in  $[a, b]$  eccetto in un numero finito di punti. Allora  $f$  è integrabile secondo Riemann
4. Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$  monotona. Allora  $f$  è integrabile secondo Riemann

**Osservazione** Una funzione monotona può avere un numero infinito numerabile di discontinuità di I specie nell'intervallo  $[a, b]$ .

## Proprietà

1. (linearità) Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow R$  limitate e integrabili secondo Riemann. Allora  $\lambda f(x) + \mu g(x)$  è integrabile secondo Riemann e  $\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$
2. (monotonia) Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow R$  limitate e integrabili secondo Riemann e  $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$ . Allora  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$
3. (additività) Siano  $f : [a, b] \rightarrow R$  limitata e integrabile secondo Riemann e  $c \in [a, b]$ . Allora  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

**Definizione** Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$  limitata e integrabile secondo Riemann. Chiamiamo **funzione integrale** di  $f$

$$F : [a, b] \rightarrow R \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad x \in [a, b]$$

**I Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale** Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$  continua e sia  $F : [a, b] \rightarrow R$  la funzione integrale di  $f$ ,  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$   $x \in [a, b]$ . Allora  $F \in \mathcal{C}^{(1)}([a, b], R)$  e  $\frac{dF}{dx}(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$ .

**II Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale** Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$  continua e sia  $G \in \mathcal{C}^{(1)}([a, b], R)$  una primitiva di  $f$ . Allora  $\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$

**Teorema** (della media integrale) Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$  integrabile secondo Riemann. Allora:

1.  $\inf_{[a, b]} f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sup_{[a, b]} f \cdot (b - a)$
2. Sia  $f \in \mathcal{C}([a, b], R)$ . Allora  $\exists c \in [a, b]$  tale che:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

**Teorema** (integrazione per parti) Siano  $f, g \in \mathcal{C}^{(1)}([a, b], R)$ . Allora

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = f(t)g(t) \Big|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt$$

## Dimostrazione

$$\frac{d}{dt}[f(t)g(t)] = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

$$\int_a^b \frac{d}{dt} f(t)g(t) dt = \int_a^b f'(t)g(t) dt + \int_a^b f(t)g'(t) dt$$

$$f(t)g(t) \Big|_a^b = \int_a^b f'(t)g(t) dt + \int_a^b f(t)g'(t) dt$$

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = f(t)g(t) \Big|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt$$

**Teorema** (integrazione per sostituzione) Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$  continua e  $\varphi \in \mathcal{C}^{(1)}([\alpha, \beta], [a, b])$ .

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(s)) \frac{d\varphi}{ds}(s) ds$$

**Dimostrazione** Sia  $F \in \mathcal{C}^{(1)}([a, b], R)$  tale che  $\frac{dF}{dt}(t) = f(t) \forall t \in [a, b]$

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

$$F \circ \varphi \in \mathcal{C}^{(1)}([\alpha, \beta], R) \quad F(\varphi(s)) = (F \circ \varphi)(s)$$

$$\frac{d}{ds}(F \circ \varphi)(s) = \frac{dF}{dt}(\varphi(s)) \frac{d\varphi}{ds}(s) = f(\varphi(s)) \frac{d\varphi}{ds}(s)$$

Quindi  $(F \circ \varphi)(s)$  è la primitiva di  $f(\varphi(s)) \frac{d\varphi}{ds}(s)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(s)) \frac{d\varphi}{ds}(s) ds = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

**Osservazione** Se inoltre  $\varphi : [\alpha, \beta] \xrightarrow[su]{1-1} [a, b] \in \mathcal{C}^{(1)}$  (con  $\varphi'(s) \neq 0 \forall s \in [\alpha, \beta]$ ).

$$\varphi^{-1} : [a, b] \xrightarrow[su]{1-1} [\alpha, \beta]$$

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(s)) \frac{d\varphi}{ds}(s) ds$$

## 12.3 Integrali di funzioni razionali

Gli integrali di funzioni razionali sono gli integrali del tipo:  $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

Dove  $P(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$  e  $Q(x) = \sum_{j=1}^m a_j x^j$ , con  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in R$  e  $a_n, b_m \neq 0$ .

Vi sono due casi:

1.  $n \geq m$ : si effettua la divisione tra  $P(x)$  e  $Q(x)$
2.  $n < m$ : si effettua la scomposizione di  $\frac{P(x)}{Q(x)}$

Analizzeremo ora i casi distintamente

### 12.3.1 $n \geq m$

Sappiamo che esistono e sono unici i polinomi  $S(x)$  e  $R(x)$  tali che:

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$$

dove il grado di  $S(x)$  è  $n - m$  e il grado di  $R(x)$  è  $< m$ . Possiamo quindi riscrivere

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

### 12.3.2 $n < m$

E' necessario studiare la scomposizione di  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ . Sappiamo per il teorema fondamentale dell'algebra che il polinomio  $Q(x)$  ammette al più  $m$  radici reali ed esattamente  $m$  radici complesse, contate con la loro molteplicità .

Supponiamo che  $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_r \pm i\beta_r$  siano le radici di  $Q(x)$ , e siano  $n_1, \dots, n_s, m_1, \dots, m_r$  le loro molteplicità , che devono soddisfare la seguente condizione:

$$n_1 + \dots + n_s + 2m_1 + \dots + 2m_r = m$$

Allora è possibile scomporre  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  nel seguente modo

$$\frac{P_1(x)}{(x - \lambda_1)^{n_1}} + \dots + \frac{P_s(x)}{(x - \lambda_s)^{n_s}} + \frac{R_1}{[(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2]} + \dots + \frac{R_r}{[(x - \alpha_r)^2 + \beta_r^2]}$$

dove, come conseguenza del teorema fondamentale dell'algebra, i polinomi  $P_1(x), \dots, P_s(x)$  sono costanti, mentre  $R_1(x), \dots, R_r(x)$  sono di primo grado.

## 12.4 Integrali generalizzati

Abbiamo definito l'integrale secondo Riemann usando sempre somme inferiori o superiori, cioè approssimando, nel caso di funzioni non regolari, l'area del sottografico con l'area dell'unione finita di rettangoli.

Questo comporta delle limitazioni sulla classe di funzioni su cui questa costruzione ha senso:

- $Dom(f)$  limitato
- $f$  limitata su tutto il dominio, estremi compresi

Come possiamo estendere l'integrale nel caso in cui  $f$  sia definita su insiemi o non limitati o non chiusi o in cui  $f$  non sia limitata? Questa estensione non può avvenire direttamente usando somme inferiori/superiori perché vi sarebbero rettangoli di area infinita.

Estendiamo l'integrale a questa classe di funzioni richiedendo che la restrizione di  $f$  a qualunque intervallo limitato e chiuso del dominio sia integrabile secondo Riemann e vediamo il valore dell'integrale come limite della funzione integrale.

**Definizione** (Integrale generalizzato) Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow R$  tale che  $\forall \alpha, \beta \in ]a, b[, \alpha < \beta, f : [\alpha, \beta] \rightarrow R$  è Riemann integrabile (cioè  $f$  è Riemann integrabile su tutti gli intervalli limitati e chiusi contenuti in  $]a, b[$ ). Sia  $c \in ]a, b[$ . Se i limiti:  $I_1 = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_c^x f(t) dt$  e  $I_2 = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^c f(t) dt$  esistono finiti, diremo che  $f$  è **integrabile in senso generalizzato** in  $]a, b[$  e il valore dell'integrale è  $\int_a^b f(t) dt = I_1 + I_2$

**Osservazione** Il valore di  $\int_a^b f(t) dt$  non dipende da  $c$ .

**Osservazione** Se  $I_1 \in R$  e  $I_2 = +\infty$  o viceversa o  $I_1 = I_2 = +\infty$  diciamo che  $\int_a^b f(t) dt = +\infty$ . Analogamente per  $-\infty$ .

**Osservazione** Non è possibile estendere l'integrale a tutto  $]a, b[$  se  $I_1 = +\infty$  e  $I_2 = -\infty$  (o viceversa) o se uno dei due non esiste.

**Osservazione** Se  $f : ]a, b[ \rightarrow R$  è non negativa in  $]a, b[$  (cioè  $f(x) \geq 0 \forall x \in ]a, b[$ ) vi sono solo le seguenti possibilità :  $\int_a^b f(t) dt \in R$  o  $\int_a^b f(t) dt = +\infty$

**Teorema** Siano  $f, g : ]a, b[ \rightarrow R$  limitata e localmente Riemann integrabile (su tutti gli intervalli limitati e chiusi in  $]a, b[$ ). Se  $0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in ]a, b[$ , allora:

- se  $\int_a^b f(x) dx = +\infty \implies \int_a^b g(x) dx = +\infty$
- se  $\int_a^b f(x) dx \in R \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

**Teorema** (convergenza assoluta  $\implies$  convergenza semplice) Sia  $f : ]a, b[ \subset \mathbb{R}$  localmente Riemann integrabile e  $\int_a^b |f(x)| \, dx < +\infty$ . Allora  $f$  è integrabile in senso generalizzato in  $]a, b[$  e

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$$

**Osservazione**

$$\int_a^b f(x) \, dx \in \mathbb{R} \not\iff \int_a^b |f(x)| \, dx \in \mathbb{R}$$

**Osservazione**

Se  $f$  è integrabile secondo Riemann in  $[a, b]$  allora è integrabile in senso generalizzato in  $[a, b]$  e i valori dei due integrali coincidono.



## 13 Numeri complessi

L'insieme dei numeri complessi  $C$  è l'insieme composto da coppie ordinate di numeri reali  $(a, b)$ .

### Operazioni

1. Somma:  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
2. Moltiplicazione:  $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

**Proposizione**  $(C, +, \cdot)$  è un campo. Sia  $z = (a, b)$

1. Elemento neutro della somma:  $(0, 0)$ ,
2. Elemento neutro della moltiplicazione:  $(1, 0)$
3. Opposto di un numero complesso:  $-z = (-a, -b)$
4. Reciproco di un numero complesso:  $\frac{1}{z} = (\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$

**Osservazione**  $R = \{(a, 0) : a \in R\}$

### 13.1 Rappresentazione algebrica

**Definizione** Il numero complesso  $(0, 1)$  si chiama **unità immaginaria** ed è denotata con  $i$ . Si ha che

1.  $(0, 1)^2 = (-1, 0)$
2.  $(a, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib$

**Definizione** Se  $z = (a, b) \in C$ , la scrittura  $z = a + ib$   $a, b \in R$  è detta **rappresentazione algebrica dei numeri complessi**.

Definiamo inoltre la **parte reale** di  $z$  la quantità

$$Re(z) = a$$

e coefficiente della **parte immaginaria** di  $z$  la quantità

$$Im(z) = b$$

**Definizione** Sia  $z = a + ib$ . E' detto **complesso coniugato** di  $z$  il numero complesso

$$\bar{z} = a - ib$$

**Proprietà** Sia  $z = a + ib$ .

1.  $\overline{(\bar{z})} = z$
2.  $\overline{(z + w)} = \bar{z} + \bar{w}$
3.  $\overline{(zw)} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
4.  $\frac{z + \bar{z}}{2} = Re(z) = a$  e  $\frac{z - \bar{z}}{2i} = Im(z) = b$

## 13.2 Rappresentazione in forma trigonometrica

**Definizione** Sia  $z = (a, b)$ . La quantità  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  è detta **modulo** di  $z$  e rappresenta la distanza di  $z$  dall'origine  $O = (0, 0)$ .

**Proprietà**

1.  $|z| \geq 0$  e  $|z| = 0 \iff z = (0, 0)$
2.  $|zw| = |z| \cdot |w|$
3.  $|\bar{z}| = |z|$
4.  $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$
5.  $|z + w| \leq |z| + |w|$  (disuguaglianza triangolare)
6.  $\max\{|Re(z)|, |Im(z)|\} \leq |z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$
7.  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
8.  $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$

**Definizione** Sia  $z \in C$ . L'angolo orientato misurato dal semiasse positivo delle ascisse al semiasse  $OZ$  è detto **argomento** di  $z$ .

**Osservazione** Ogni numero complesso  $z \in C \setminus \{0, 0\}$  ha un unico modulo e infiniti argomenti.

**Proposizione**  $\theta$  e  $\hat{\theta}$  sono argomenti di  $z \in C$  se e solo se  $\exists n \in Z$  tale che

$$\theta - \hat{\theta} = 2\pi n$$

**Definizione** Chiamiamo **argomento principale** di  $z \in C^*$  l'unico argomento appartenente all'intervallo  $] -\pi, \pi]$ .

**Definizione** Chiamiamo **rappresentazione trigonometrica** di  $z \in C^*$  la coppia  $[r, \theta]$  formata dal modulo  $r = |z| \geq 0$  e da un argomento  $\theta$  di  $z$ . Questa rappresentazione si ottiene dal seguente sistema

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

### 13.2.1 Determinazione dell'argomento principale

Sia  $z \in C \setminus \{0, 0\}$  e  $\hat{\theta}$  l'argomento principale di  $z$ .

**Coseno**

La funzione  $\cos$  ristretta all'intervallo  $[0, \pi]$  è biettiva e invertibile.

- se  $z$  appartiene al I o II quadrante

$$\hat{\theta} = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

- se  $z$  appartiene al III o IV quadrante

$$\hat{\theta} = -\arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

### **Seno**

La funzione sin ristretta all'intervallo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  è biiettiva e invertibile.

- se  $z$  appartiene al I o IV quadrante

$$\hat{\theta} = \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

- se  $z$  appartiene al II quadrante

$$\hat{\theta} = \pi - \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

- se  $z$  appartiene al III quadrante

$$\hat{\theta} = -\pi - \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

### **Tangente**

La funzione tan ristretta all'intervallo  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  è biiettiva e invertibile.

- se  $z$  appartiene al I o IV quadrante

$$\hat{\theta} = \arctan \frac{b}{a}$$

- se  $z$  appartiene al II quadrante

$$\hat{\theta} = \pi + \arctan \frac{b}{a}$$

- se  $z$  appartiene al III quadrante

$$\hat{\theta} = -\pi + \arctan \frac{b}{a}$$

## **13.3 La formula di De Moivre**

**Proposizione** Siano  $z = [r, \theta]$  e  $w = [\rho, \phi]$  numeri complessi in forma trigonometrica. Si possono scrivere in maniera equivalente come

$$z = |z|[\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$$

$$w = |w|[\cos(\phi) + i \sin(\phi)]$$

e valgono le seguenti affermazioni

1.  $z \cdot w = |z||w|[\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)]$
2.  $\bar{z} = |z|[\cos(\theta) - i \sin(\theta)]$
3.  $\frac{1}{z} = |z|^{-1}[\cos(\theta) - i \sin(\theta)]$

$$4. \frac{z}{w} = |z||w|^{-1}[\cos(\theta - \rho) - i \sin(\theta - \rho)]$$

**Teorema** (regola di De Moivre) Siano  $z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ ,  $w = |w|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ . Allora

$$1. z \cdot w = |z||w|[\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)]$$

$$2. \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}(\cos(\theta) - i \sin(\theta))$$

$$3. z^n = |z|^n[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

$$4. \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}[\cos(\theta - \varphi) + i \sin(\theta - \varphi)]$$

## 13.4 Notazione esponenziale

**Definizione** La **notazione esponenziale** discende da quella trigonometrica. Infatti si ha, con  $z = a + ib$

$$z = |z|[\cos(b) + i \sin(b)] = |z|\exp(ib)$$

**Proprietà**

$$1. \exp(i\theta) \cdot \exp(i\phi) = \exp[i(\theta + \phi)]$$

$$2. \frac{1}{\exp(i\theta)} = \frac{1}{\cos(\theta) + i \sin(\theta)} \cdot \frac{\cos(\theta) - i \sin(\theta)}{\cos(\theta) - i \sin(\theta)} = \cos(\theta) - i \sin(\theta) = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \exp(-i\theta)$$

$$3. \exp(in\theta) = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]^n = (\exp(i\theta))^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

## 13.5 Radici n-esime

**Teorema** (radici n-esime di un numero complesso) Sia  $w = \alpha \exp(i\beta)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ . Allora le soluzioni dell'equazione  $z^n = w$  sono

$$\sqrt[n]{\alpha} \left[ \cos \left( \frac{\beta + 2\pi(k-1)}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\beta + 2\pi(k-1)}{n} \right) \right] \quad k = 1, \dots, n$$

**Osservazione** Queste radici sono i vertici di un poligono regolare di  $n$  lati inscritto nella circonferenza di raggio  $\sqrt[n]{\alpha}$ .

## 14 Equazioni differenziali

### 14.1 Eq. differenziale del primo ordine

$$(p) \begin{cases} \frac{dy}{dt} = & y(t) \\ y(t_0) = & y_0 \end{cases}$$

Soluzione:

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t y(s) ds + y_0$$

### 14.2 Eq. differenziale del primo ordine, lineare

$$(p) \begin{cases} \frac{dy}{dt} = & a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = & y_0 \end{cases}$$

Soluzione:

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

$$\varphi(t) = e^{A(t)} \left[ \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds + y_0 \right]$$

### 14.3 Eq. differenziale del primo ordine, non lineare, a variabili separabili

$$(p) \begin{cases} \frac{dy}{dt} = & \frac{f(t)}{g(t)} \\ y(t_0) = & y_0 \end{cases}$$

Soluzione:

$\varphi(t)$  è data implicitamente dall'eq.  $G(\varphi(t)) = F(t) \forall t \in ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$

$$\longrightarrow \int_{y_0}^{\varphi(t)} g(r) dr = \int_{t_0}^t f(s) ds$$

## 14.4 Eq. differenziale di ordine $n$ , lineare, omogenea (EDLO)

$$\frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}} + a_1 \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_n y = 0 \text{ con } a_1, \dots, a_n \in C^{(0)}(I, R)$$

**A coefficienti costanti  $\in R$**

Possiamo definire il polinomio caratteristico  $P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$

**I caso )  $P(\lambda)$  ha  $n$  radici reali  $\lambda$  distinte**

Soluzione:

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t}$$

**II caso )  $P(\lambda)$  ha  $n$  radici reali  $\lambda$ , di cui  $n - q$  coincidenti**

**(di molteplicità  $m_1, \dots, m_q \in N$  con  $m_1 + \dots + m_q = n$  e  $q \leq n$ )**

NB:  $q$  è il numero di radici reali senza ripetizioni,  $\lambda_i$  per  $i = 1, \dots, q$  sono proprio tali radici e  $m_1, \dots, m_q$  sono le loro rispettive molteplicità

Soluzione:

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} t^{(j-1)} e^{\lambda_i t}$$

**III caso )  $P(\lambda)$  ha  $n$  radici complesse  $\lambda$**

**( $k$  radici reali e  $h$  radici complesse :  $k + h = n$ ) di molteplicità  $m_1, \dots, m_n \in N$  ( $m_1 + \dots + m_n = n$ )**

Soluzione:

$$\varphi_k(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} t^{(j-1)} e^{\lambda_i t} \text{ per le radici reali}$$

$$\varphi_h(t) = \begin{aligned} & \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} t^{(j-1)} e^{\alpha_i t} \cos(\beta_i t) && \alpha + i\beta \\ & \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} t^{(j-1)} e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t) && \alpha - i\beta \end{aligned} \text{ per le radici complesse}$$

## 14.5 Eq. differenziale di ordine $n$ , lineare, non omogenea (EDLNO)

$$\frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}} + a_1 \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_n y = b(t) \text{ con } a_1, \dots, a_n \in C^{(0)}(I, R)$$

**Equazione caratteristica dell' EDLO associata:**  $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$

**A coefficienti costanti  $\in \mathbf{R}$**

**I caso )**

$$\frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}} + a_1 \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_n y = ct^s$$

con  $a_1, \dots, a_n \in R$ ,  $c \in R$ ,  $s \in N$

Soluzione:  $\psi(t) = \psi_p(t) + \varphi(t)$  dove:

$\varphi(t)$  é la soluzione generale dell'EDLO associata e

Se  $\lambda = 0$  è radice dell'equazione caratteristica dell'EDLO associata:

$$\psi_p(t) = t^k (A_0 t^s + A_1 t^{s-1} + \dots + A_s)$$

altrimenti:

$$\psi_p(t) = A_0 t^s + A_1 t^{s-1} + \dots + A_s$$

**II caso )**

$$\frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}} + a_1 \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_n y = ce^{\alpha t}$$

con  $a_1, \dots, a_n \in R$ ,  $c, \alpha \in R$

Soluzione:  $\psi(t) = \psi_p(t) + \varphi(t)$  dove:

$\varphi(t)$  é la soluzione generale dell'EDLO associata e

Se  $\lambda = \alpha$  è radice dell'equazione caratteristica dell'EDLO associata:

$$\psi_p(t) = t^k (Ae^{\alpha t})$$

altrimenti:

$$\psi_p(t) = Ae^{\alpha t}$$

**III caso )**

$$\frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}} + a_1 \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_n y = ct^s e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

con  $a_1, \dots, a_n \in R$ ,  $c, \alpha \in R$

Soluzione:  $\psi(t) = \psi_p(t) + \varphi(t)$  dove:

$\varphi(t)$  é la soluzione generale dell'EDLO associata e

Se  $\lambda = \alpha + i\beta$  è radice dell'equazione caratteristica dell'EDLO associata:

$$\psi_p(t) = t^k e^{\alpha t} [(A_0 t^s + A_1 t^{s-1} + \dots + A_s) \cos(\beta t) + (B_0 t^s + B_1 t^{s-1} + \dots + B_s) \sin(\beta t)]$$

altrimenti:

$$\psi_p(t) = e^{\alpha t} [(A_0 t^s + A_1 t^{s-1} + \dots + A_s) \cos(\beta t) + (B_0 t^s + B_1 t^{s-1} + \dots + B_s) \sin(\beta t)]$$

## 14.6 Periodicità delle soluzioni

**Definizione** Una funzione  $f(t)$  si dice **periodica** di periodo  $T > 0$  se  $\forall t \in R$  si ha  $f(t) = f(T + t)$

**Proprietà** Se  $T, S > 0$  sono periodi, allora 1.  $T + S$  è periodo 2.  $nT$  è periodo (con  $n \in Z$ )

**Definizione** Se  $f(t)$  non è costante, esiste il periodo minimo  $T_f$  positivo tale che  $f(t + T_f) = f(t) \forall t \in R$  e se  $S$  è periodo allora  $S = nT_f$ ,  $n \in Z$ . Tale periodo è chiamato **periodo fondamentale**.

**Teorema** Siano  $f(t)$  e  $g(t)$  funzioni periodiche di periodo fondamentale rispettivamente  $T_f$  e  $S_f$ . La funzione  $h(t) = f(t) + g(t)$  è periodica di periodo fondamentale  $P_f = mcm(T_f, S_f)$  se e solo se  $\frac{T_f}{S_f} \in Q$