Esercizi sui vettori applicati

1. Nel riferimento cartesiano $Oxyz$ sono dati i vettori applicati $(A_1, \mathbf{v}_1)$ e $(A_2, \mathbf{v}_2)$ con
   - $A_1 = (2, 2, 3)$, $\mathbf{v}_1 = -2\hat{\boldsymbol{\imath}} - 2\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 3\hat{\boldsymbol{k}}$,
   - $A_2 = (0, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = 2\hat{\boldsymbol{\jmath}} - \hat{\boldsymbol{k}}$,

   determinare il risultante, il momento risultante rispetto al polo $O = (0, 0, 0)$, il momento risultante rispetto al polo $O' = (1, 0, 1)$, l'invariante scalare, il momento assiale rispetto all'asse z.

2. Determinare il momento e il braccio della coppia $(A_1, \mathbf{v})$ e $(A_2, -\mathbf{v})$ con
   - $A_1 = (1, \frac{\sqrt{5}}{5}, -\sqrt{5})$, $A_2 = (-1, 0, \frac{2\sqrt{5}}{5})$, $\mathbf{v} = 3\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 4\hat{\boldsymbol{k}}$.

3. Scrivere l'equazione dell'asse centrale del sistema di vettori applicati
   - $A_1 = (0, 2, 0)$, $\mathbf{v}_1 = 5\hat{\boldsymbol{\jmath}}$
   - $A_2 = (0, 9, 0)$, $\mathbf{v}_2 = -3\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 4\hat{\boldsymbol{k}}$
   - $A_3 = (2, 0, 0)$, $\mathbf{v}_3 = -2\hat{\boldsymbol{\imath}}$

4. Dato il sistema di vettori applicati
   - $A_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_1 = \hat{\boldsymbol{\imath}} - 2\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$
   - $A_2 = (0, 2, 0)$, $\mathbf{v}_2 = \hat{\boldsymbol{\jmath}} - 3\hat{\boldsymbol{k}}$
   - $A_3 = (0, 0, 3)$, $\mathbf{v}_3 = 2\hat{\boldsymbol{\imath}} + 3\hat{\boldsymbol{\jmath}} - \hat{\boldsymbol{k}}$

   determinare il risultante, il momento risultante rispetto ai poli $O = (0, 0, 0)$ e $O' = (1, 2, 3)$, l'invariante scalare, il momento assiale rispetto all'asse z e l'equazione dell'asse centrale.

5. Un sistema di vettori applicati ha risultante $\mathbf{R} = 3\hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}} + 2\hat{\boldsymbol{k}}$ e momento risultante $\mathbf{M}_O = -4\hat{\boldsymbol{\imath}} - 2\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$ rispetto al polo $O = (0, 0, 0)$. Calcolare il momento rispetto ad un punto dell'asse centrale.

6. Trovare il centro dei vettori applicati
   - $A_1 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}$
   - $A_2 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{u}$
   - $A_3 = (0, -1, 2)$, $\mathbf{v}_3 = -2\mathbf{u}$
   - $A_4 = (-1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_4 = 3\mathbf{u}$

7. Trovare il centro dei vettori applicati
   - $A_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_1 = 6\hat{\boldsymbol{\imath}} + 4\hat{\boldsymbol{\jmath}} - 10\hat{\boldsymbol{k}}$
   - $A_2 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = -3\hat{\boldsymbol{\imath}} - 2\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 5\hat{\boldsymbol{k}}$
   - $A_3 = (0, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = 12\hat{\boldsymbol{\imath}} + 8\hat{\boldsymbol{\jmath}} - 20\hat{\boldsymbol{k}}$

8. Due sistemi di vettori applicati Σ e Σ' hanno
   - risultante
     $\mathbf{R} = \mathbf{R}' = 2\hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}}$,
   - momento risultante rispettivamente
     $\mathbf{M}_O = -\hat{\boldsymbol{\imath}} - 2\hat{\boldsymbol{\jmath}} - \hat{\boldsymbol{k}}$ rispetto a $O(0, 0, 0)$,
     $\mathbf{M}'_Q = 4\hat{\boldsymbol{k}}$ rispetto a $Q(1, 2, -1)$.

   Verificare che Σ e Σ' sono equivalenti a $(\mathbf{R}, T)$ con $T = (1, 0, -1)$.

9. Verificare che il sistema di vettori applicati
   - $A_1 = (2, 0, -2)$, $\mathbf{v}_1 = \hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{k}}$
   - $A_2 = (0, 1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = 2\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$
   - $A_3 = (-1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_3 = -\hat{\boldsymbol{\imath}} - 2\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

   è equivalente ad una coppia di momento $\mathbf{M} = 3\hat{\boldsymbol{\imath}} + 2\hat{\boldsymbol{k}}$.

10. Verificare che il sistema piano di vettori applicati
    - $A_1 = (1, 0)$, $\mathbf{v}_1 = 2\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}$
    - $A_2 = (0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = -\hat{\boldsymbol{\imath}} + 3\hat{\boldsymbol{\jmath}}$
    - $A_3 = (-2, 1)$, $\mathbf{v}_3 = -3\hat{\boldsymbol{\jmath}}$
    - $A_4 = (5, -3)$, $\mathbf{v}_4 = -\hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}}$

    è equilibrato.

Soluzioni

1. $\mathbf{R} = -2\hat{\boldsymbol{\imath}} + 2\hat{\boldsymbol{k}}$, $\quad \mathbf{M}_0 = 10\hat{\boldsymbol{\imath}} - 12\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, $\quad \mathbf{M}_{O'} = 10\hat{\boldsymbol{\imath}} - 8\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, $\quad I = -20$, $\quad M_z = 0$.

2. $\mathbf{M} = 5\sqrt{5}\hat{\boldsymbol{\imath}} - 8\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 6\hat{\boldsymbol{k}}$, $\quad b = 3$.

3. equazione parametrica dell'asse centrale: $x = -\lambda$, $\quad y = 6 + \lambda$, $\quad z = -3 + 2\lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$.

4. $\mathbf{R} = 3\hat{\boldsymbol{\imath}} + 2\hat{\boldsymbol{\jmath}} - 3\hat{\boldsymbol{k}}$, $\quad \mathbf{M}_O = -15\hat{\boldsymbol{\imath}} + 5\hat{\boldsymbol{\jmath}} - 2\hat{\boldsymbol{k}}$, $\quad \mathbf{M}_{O'} = -3\hat{\boldsymbol{\imath}} - 7\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 2\hat{\boldsymbol{k}}$, $\quad M_z = -2$, $\quad I = -29$, equazione parametrica dell'asse centrale: $x = \frac{1}{2} + 3\lambda$, $y = \frac{51}{22} + 2\lambda$, $z = \frac{45}{22} - 3\lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$.

5. $\mathbf{M} = -\dfrac{12}{7}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \dfrac{4}{7}\hat{\jmath} - \dfrac{8}{7}\hat{\boldsymbol{k}}$.

6. $C = \left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}\right)$

7. $C = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$