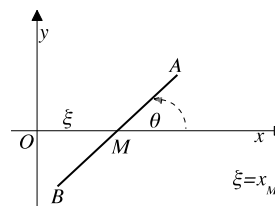


ESERCIZI DI CINEMATICA DEI SISTEMI

ESERCIZIO 1

Un'asta AB di lunghezza 2ℓ , mobile nel piano Oxy ha il punto medio M vincolato a scorrere sull'asse x .

Determinare in funzione dei parametri θ e ξ (come in figura) e delle loro derivate prime la velocità degli estremi A e B .



SOLUZIONE

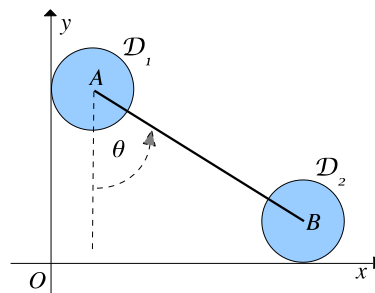
$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{i} \wedge \hat{j}, \quad \mathbf{v}_A = (\dot{\xi} - \ell \sin \theta \dot{\theta}) \hat{i} + \ell \cos \theta \dot{\theta} \hat{j}, \quad \mathbf{v}_B = (\dot{\xi} + \ell \sin \theta \dot{\theta}) \hat{i} - \ell \cos \theta \dot{\theta} \hat{j}.$$

ESERCIZIO 2

Il sistema, costituito dai dischi \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 di raggio r e dall'asta AB di lunghezza $6r$, mobile nel piano Oxy , è soggetto ai seguenti vincoli:

- * il disco \mathcal{D}_1 rotola senza strisciare sull'asse y ,
- * il disco \mathcal{D}_2 rotola senza strisciare sull'asse x ,
- * l'asta ha gli estremi incernierati nei centri dei dischi \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 .

Determinare in funzione del parametro θ (come in figura) e della sua derivata prima le velocità angolari dei dischi \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 e dell'asta AB .



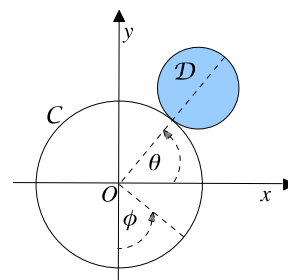
SOLUZIONE

$$\vec{\omega}_1 = -6 \sin \theta \dot{\theta} \hat{i} \wedge \hat{j}, \quad \vec{\omega}_2 = -6 \cos \theta \dot{\theta} \hat{i} \wedge \hat{j}, \quad \vec{\omega}_{AB} = \dot{\theta} \hat{i} \wedge \hat{j}.$$

ESERCIZIO 3

Nel piano Oxy un disco \mathcal{D} di raggio r rotola senza strisciare all'esterno di una guida circolare \mathcal{C} di raggio R che ruota attorno al suo asse.

Determinare in funzione dei parametri θ e ϕ (come in figura) e delle loro derivate prime la velocità angolare del disco \mathcal{D} .



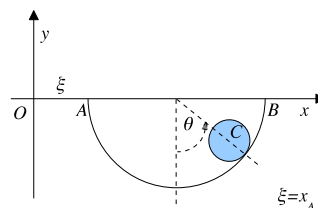
SOLUZIONE

$$\vec{\omega} = \frac{(R+r)\dot{\theta} - R\dot{\phi}}{r} \hat{i} \wedge \hat{j}$$

ESERCIZIO 4

Nel piano Oxy un disco \mathcal{D} di raggio r e centro C rotola senza strisciare all'interno di una guida semicircolare \mathcal{C} di raggio R ($R > r$) che trasla parallelamente all'asse x .

Determinare in funzione dei parametri θ e ξ (come in figura) e delle loro derivate prime la velocità angolare del disco \mathcal{D} e la velocità del suo centro C .



SOLUZIONE

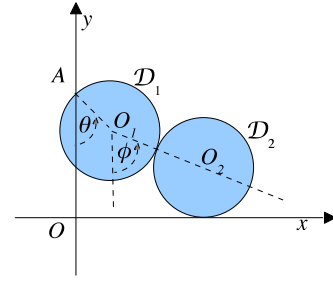
$$\mathbf{v}_C = \dot{\xi} \hat{i} + (R - r)(\cos \theta \dot{\theta} \hat{i} + \sin \theta \dot{\theta} \hat{j}), \quad \vec{\omega} = -\frac{(R-r)}{r} \dot{\theta} \hat{i} \wedge \hat{j}.$$

ESERCIZIO 5

Due dischi \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 di raggio r e di centri rispettivamente O_1 e O_2 , mobili nel piano Oxy , sono soggetti ai seguenti vincoli:

- * il disco \mathcal{D}_2 rimane tangente all'asse x ,
- * il disco \mathcal{D}_1 ha il punto A del bordo vincolato a scorrere sull'asse y e rotola senza strisciare su \mathcal{D}_2 .

Indicato con θ l'angolo che il raggio OA forma con l'asse y e con ϕ l'angolo che la retta O_1O_2 forma con l'asse y , determinare in funzione di θ , ϕ e delle loro derivate prime la velocità angolare del disco \mathcal{D}_2 e la sua velocità di strisciamento sull'asse x .



SOLUZIONE

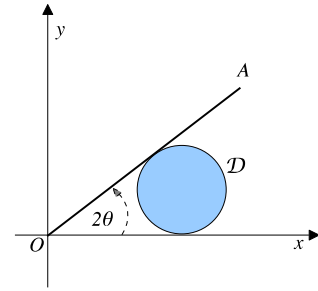
$$\vec{\omega} = (2\dot{\phi} - \dot{\theta})\hat{i} \wedge \hat{j}, \quad \mathbf{v}_s = r(\cos\theta\dot{\theta} + 2\cos\phi\dot{\phi} + 2\dot{\phi} - \dot{\theta})\hat{i}.$$

ESERCIZIO 6

Il sistema, costituito dal disco \mathcal{D} di raggio r e dall'asta OA , mobile nel piano Oxy , è soggetto ai seguenti vincoli:

- * l'asta OA ruota attorno al suo estremo O ,
- * il disco \mathcal{D} rotola senza strisciare sull'asta OA e rimane tangente l'asse x .

Determinare in funzione del parametro θ (vedi figura) e della sua derivata prima la velocità angolare del disco \mathcal{D} e la sua velocità di strisciamento sull'asse x .



SOLUZIONE

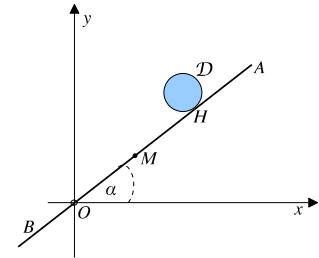
$$\vec{\omega} = -\frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta} \dot{\theta} \hat{i} \wedge \hat{j}, \quad \mathbf{v}_s = -2r \cot^2 \theta \dot{\theta} \hat{i}.$$

ESERCIZIO 7

Il sistema, costituito dal disco \mathcal{D} di raggio R e dall'asta AB di lunghezza ℓ , mobile nel piano Oxy , è soggetto ai seguenti vincoli:

- * l'asta AB è vincolata a passare per O , mantenendo un'inclinazione costante α con l'asse x ,
- * il disco \mathcal{D} rotola senza strisciare sull'asta AB .

Indicati con M il punto medio dell'asta AB , con H il punto di contatto tra l'asta AB e il disco \mathcal{D} , e presi come parametri ξ e η , tali che $(M-O) = \xi \text{ vers}(A-B)$ e $(H-O) = \eta \text{ vers}(A-B)$, determinare la velocità angolare del disco in funzione di η , ξ e delle loro derivate prime.



SOLUZIONE

$$\vec{\omega} = \frac{\dot{\xi} - \dot{\eta}}{r} \hat{i} \wedge \hat{j}.$$

ESERCIZIO 8

In un piano Oxy , un disco \mathcal{D} di centro O' e raggio R si muove rimanendo tangente all'asse x . Sapendo che la velocità di O' è costantemente uguale a $v_0 \hat{i}$ e che la velocità angolare del disco è costantemente uguale a $\omega_0 \hat{i} \wedge \hat{j}$, determinare

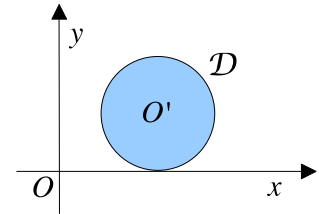
- * la velocità di strisciamento del disco \mathcal{D} sull'asse x ,
- * il centro di istantanea rotazione del disco \mathcal{D} ,
- * la base e la rulletta del moto del disco \mathcal{D} .

SOLUZIONE

$$\mathbf{v}_s = (v_0 + \omega_0 R) \hat{i}, \quad x_C = x_{O'}, \quad y_C = \frac{v_0}{\omega_0} + R,$$

$$\text{base: retta di equazione } y = \frac{v_0}{\omega_0} + R,$$

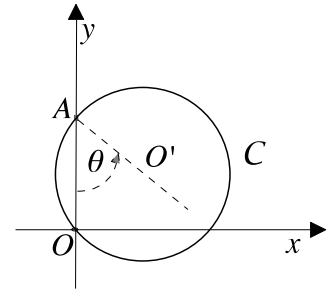
$$\text{rulletta: circonferenza di centro } O' \text{ e raggio } \left| \frac{v_0}{\omega_0} \right|.$$



ESERCIZIO 9

Una circonferenza \mathcal{C} di centro O' e raggio r , mobile nel piano Oxy , è vincolata a passare per l'origine O del sistema di riferimento, mentre un suo punto A è vincolato a scorrere sull'asse y .

Introdotta il parametro θ , angolo che il raggio AO' forma con l'asse y , determinare il centro di istantanea rotazione, la base e la rulletta per il moto della circonferenza \mathcal{C} .



SOLUZIONE

$$x_C = 2r \sin \theta, \quad y_C = 2r \cos \theta,$$

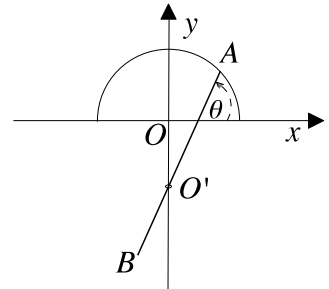
base: circonferenza di centro O e raggio $2r$,

rulletta: circonferenza di centro O' e raggio r .

ESERCIZIO 10

Un'asta AB di lunghezza 2ℓ , mobile nel piano Oxy , è vincolata a passare per il punto O' di coordinate $(0, -r)$ (con $r < \ell$), mentre il suo estremo A è vincolato a scorrere sulla guida semicircolare di equazione $x^2 + y^2 = r^2, y \geq 0$.

Introdotta il parametro θ , angolo che l'asta AB forma con l'asse x , determinare l'intervallo di variazione di tale parametro; il centro di istantanea rotazione; la base e la rulletta per il moto dell'asta AB .



SOLUZIONE

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad x_C = -x_A = -r \sin 2\theta, \quad y_C = -y_A = -r \cos 2\theta,$$

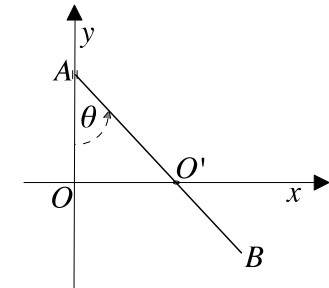
base: semicirconferenza di centro O e raggio r ,

rulletta: quarto di circonferenza di centro A e raggio $2r$.

ESERCIZIO 11

Un'asta AB di lunghezza 2ℓ , mobile nel piano Oxy , è vincolata a passare per il punto O' di coordinate $(r, 0)$ (con $r < \ell$), mentre il suo estremo A è vincolato a scorrere sull'asse y .

Introdotta il parametro θ , angolo che l'asta AB forma con l'asse y , determinare il centro di istantanea rotazione e la base per il moto dell'asta AB .



SOLUZIONE

$$x_C = -r(1 + \cot^2 \theta), \quad y_C = r \cot \theta,$$

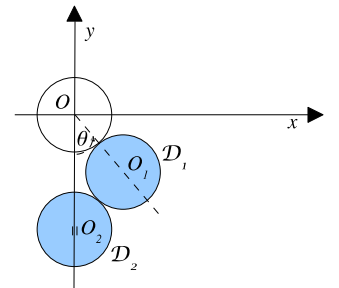
base: arco di parabola che ha come asse l'asse x e vertice nel punto $(r, 0)$.

ESERCIZIO 12

Un sistema costituito da due dischi \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 entrambi di raggio r , mobile nel piano Oxy , è così vincolato:

- * il disco \mathcal{D}_1 rotola senza strisciare sulla guida di equazione $x^2 + y^2 = r^2$,
- * il centro O_2 del disco \mathcal{D}_2 scorre sull'asse y ,
- * il disco \mathcal{D}_2 senza strisciare sul disco \mathcal{D}_1 .

Indicato con θ l'angolo che la retta che congiunge il centro O_1 del disco \mathcal{D}_1 con l'origine O forma con l'asse y , determinare la velocità angolare del disco \mathcal{D}_2 in funzione del parametro θ e della sua derivata prima, il centro di istantanea rotazione e la base per il moto del disco \mathcal{D}_2 .



SOLUZIONE

$$\vec{\omega} = -4\dot{\theta} \hat{i} \wedge \hat{j}, \quad x_C = r \sin \theta, \quad y_C = -4r \cos \theta,$$

base: arco di ellisse con centro in O , assi coincidenti con gli assi del sistema di riferimento di lunghezza rispettivamente $2r$ e $8r$.