# RICHIAMI DI STATICA GRAFICA

## Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

## Corso di Elementi delle Macchine T

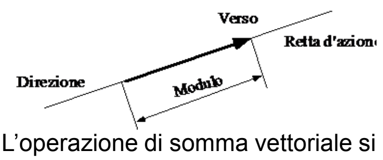
Massimiliano De Agostinis
DIN - Dipartimento di Ingegneria Industriale
m.deagostinis@unibo.it



# OPERAZIONI SULLE FORZE

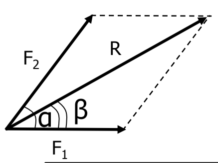
**SOMMA DI DUE FORZE:**

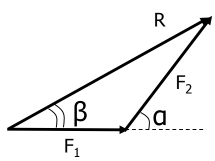
Ogni **forza** può essere rappresentata graficamente mediante un **vettore** caratterizzato da un **modulo** che ne determina l'intensità, da una **direzione** indicata dalla sua retta d'azione e da un **verso** indicato dalla punta di una freccia.




Unità di misura SI: **[N]**

L'operazione di somma vettoriale si esegue con la ''Regola del Parallelogramma''




Rappresentazione alternativa

''Poligono delle Forze''

$$R = \sqrt{(F_1 + F_2 \cdot \cos(\alpha))^2 + (F_2 \cdot \mathrm{sen}(\alpha))^2}$$

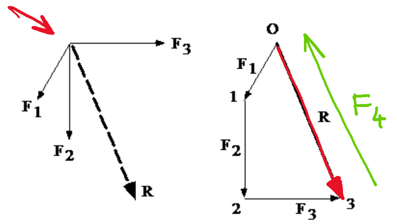
# OPERAZIONI SULLE FORZE

**SISTEMA PIANO DI FORZE CHE SI DIPARTONO DA UN PUNTO:**

Dato un sistema di due o più forze che si dipartono da un punto, il vettore rappresentativo della risultante passerà ovviamente per quel punto.

Per trovarne modulo, direzione e verso si costruisce un poligono delle forze, prendendole in un ordine qualsiasi.

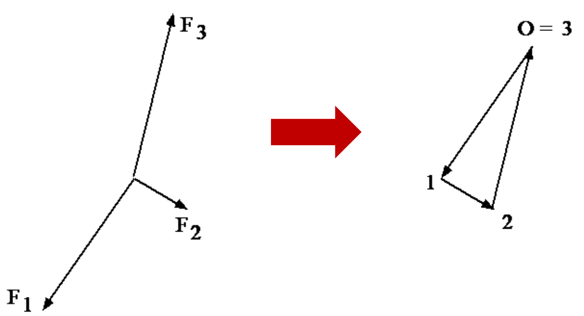
Il segmento di chiusura del poligono così ottenuto è la **Risultante**.






# OPERAZIONI SULLE FORZE

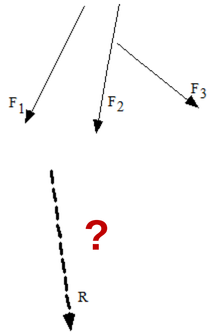
Se il poligono delle forze risulta CHIUSO, la sua Risultante è NULLA e il sistema di forze si dice EQUILIBRATO



# OPERAZIONI SULLE FORZE

**SISTEMA PIANO DI FORZE NON PASSANTI PER UNO STESSO PUNTO:**

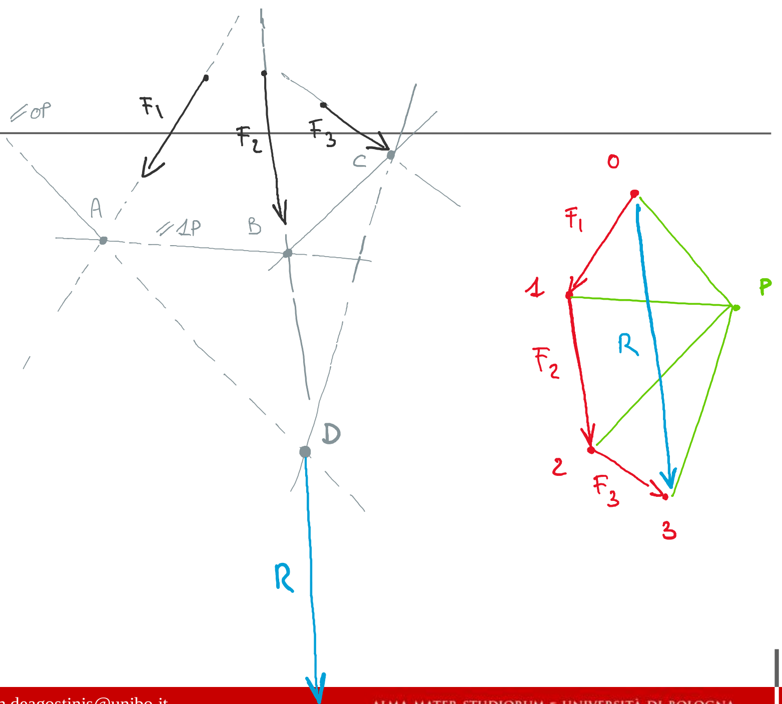
POLIGONO FUNICOLARE: permette di individuare la retta d'azione della forza risultante R del sistema.
Il modulo e la direzione della risultante si trovano col solito Poligono delle Forze.




**Esempio:**

Date le tre forze complanari F1, F2, F3 non passanti per lo stesso punto, si determinino modulo, direzione, verso e punto di applicazione della risultante R

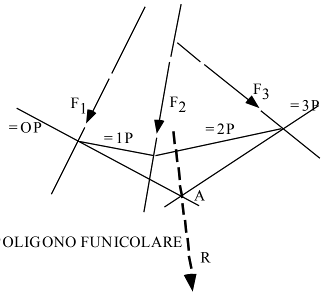




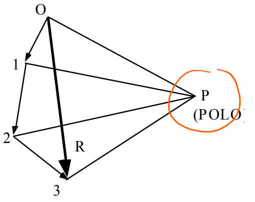
# OPERAZIONI SULLE FORZE

Per determinare la linea d'azione di R si procede nel modo seguente:

Modulo, direzione e verso del vettore risultante si trovano col solito Poligono delle Forze, O - 1 - 2 - 3 (figura a destra).
Per determinare il punto d'applicazione (quindi la linea d'azione) di R si procede nel modo seguente:



POLIGONO FUNICOLARE



POLIGONO DELLE FORZE



# OPERAZIONI SULLE FORZE

1) Si prende un punto arbitrario P (POLO) e si traccia la congiungente OP (figura a destra).
2) Da un punto qualunque della retta d'azione di F1 si traccia una retta parallela a OP (figura a sinistra).
3) Si traccia la congiungente 1P (figura a destra).
4) Dal punto di intersezione (figura a sinistra) tra la retta parallela a OP e la retta d'azione di F1 si traccia la parallela a 1P fino a intersecare la retta d'azione di F2.
5) Si traccia la congiungente 2P (figura a destra).
6) Dal punto di intersezione trovato al passo 4) (figura a sinistra) si traccia la parallela alla retta 2P fino a intersecare la retta d'azione della forza F3.
7) Si traccia la congiungente 3P (figura a destra).
8) Dal punto trovato al passo 7 (figura a sinistra) si traccia la parallela alla retta 3P.
9) Il punto A di intersezione delle due rette parallele rispettivamente a OP e a 3P (figura a sinistra) è un punto della retta d'azione della risultante R di cui si conosce già il modulo, la direzione e il verso dal poligono delle forze.

# OPERAZIONI SULLE FORZE

Infatti i due vettori OP e P1 danno come somma O1; analogamente 1P e P2 danno come somma 12 e così via fino a 2P e P3 che danno come somma 23.
La risultante O3 si può quindi intendere come somma vettoriale di OP e P3.
Poiché le tre forze OP, P3 e O3 (= R) sono in equilibrio, le loro linee d'azione devono passare per uno stesso punto che è appunto il punto A nella figura a sinistra, comune alle linee d'azione di OP e P3.

**Nota:**

La scelta del Polo P è arbitraria; esistono quindi nel piano $\infty^2$ possibilità di scelta.

La scelta del punto d'intersezione del primo lato del poligono funicolare con la retta d'azione della forza F1 è pure arbitraria con $\infty$ possibilità.

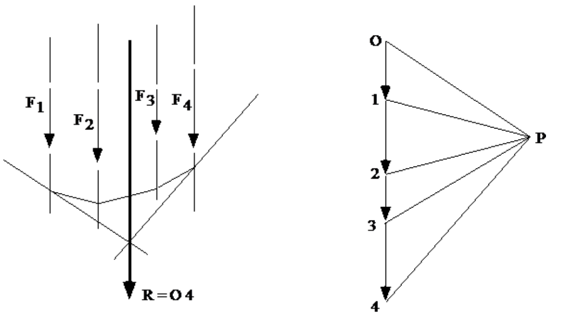
Esistono quindi $\infty^3$ possibili poligoni funicolari che danno tutti lo stesso risultato.



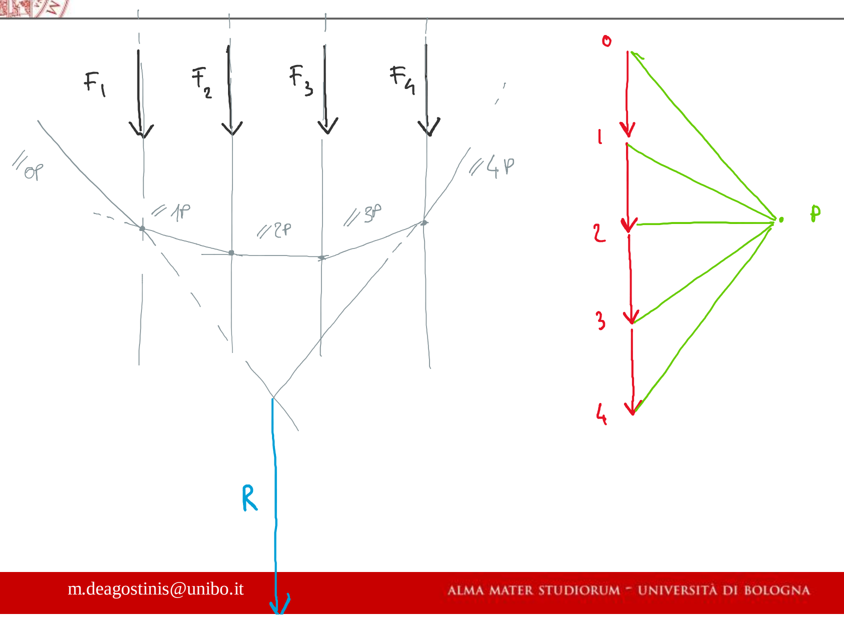
# OPERAZIONI SULLE FORZE

**SISTEMA PIANO DI FORZE PARALLELE:**

La retta d'azione della risultante R si trova ancora mediante il POLIGONO FUNICOLARE



$|F_1| = |F_2| = |F_3| = |F_4|$ EQUISPAZIATI

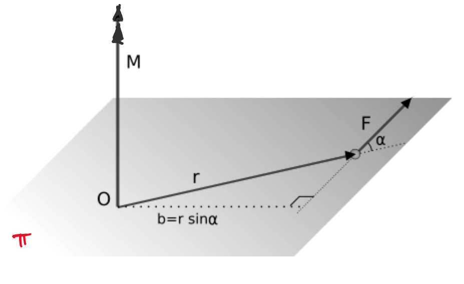





# OPERAZIONI SULLE FORZE

**MOMENTO DI UNA FORZA:**

Un momento è un vettore, ottenuto come prodotto vettoriale di una forza per un braccio.
I momenti tendono a far ruotare i corpi su cui sono applicati; la loro unità di misura nel SI è **[N·m]**




$$\overline{M} = \overline{F} \wedge \overline{r}$$

Modulo:

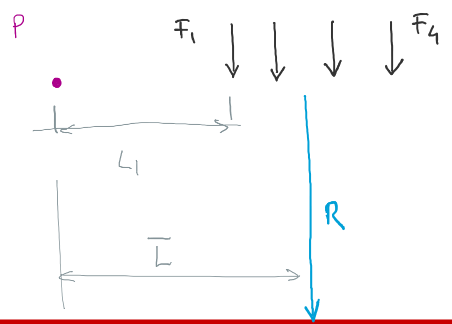
$$M = Fr \cdot sen(\alpha)$$

# OPERAZIONI SULLE FORZE

**MOMENTO DI UNA SISTEMA PIANO DI FORZE PARALLELE:**

Il momento di un sistema piano di forze parallele rispetto a un punto del piano è uguale al momento rispetto a quel punto della risultante del sistema di forze medesimo (Teorema di Varignon).

$$\sum_{i=1}^{n} F_i L_i = R\bar{L}$$

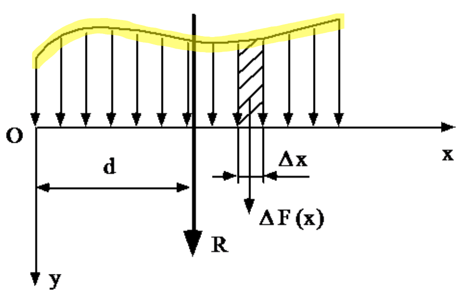





# OPERAZIONI SULLE FORZE

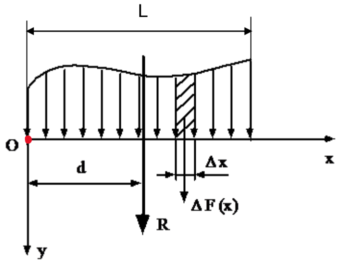
**I CARICHI DISTRIBUITI:**

Nella realtà i carichi concentrati non esistono ma sono carichi distribuiti su aree molto piccole.
Se consideriamo invece un carico distribuito in modo qualunque lungo una linea, esso può essere definito considerando un tratto $\Delta x$ della linea e la risultante $\Delta F$ del carico agente su quel tratto.



# OPERAZIONI SULLE FORZE

**I CARICHI DISTRIBUITI:**




$q(x) \cdot x$

Intensità media del carico:

$$\overline{q}(x) = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \quad [N/m]$$

Carico specifico:

$$q(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \quad [N/m]$$

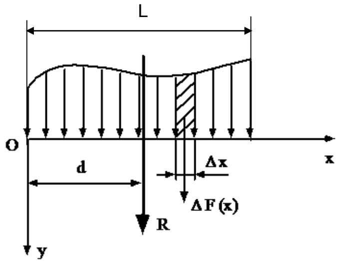
Risultante:

$$R = \int_0^L q(x)dx \quad [N]$$



# OPERAZIONI SULLE FORZE

**I CARICHI DISTRIBUITI:**




La linea d'azione della risultante può essere individuata mediante:

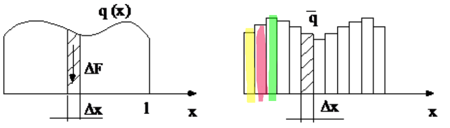
$$d = \frac{\int_0^L q(x) \cdot x dx}{\int_0^L q(x)dx} \quad [m]$$

Che individua la distanza d della risultante dall'origine O.

Ciò esprime il fatto che il momento rispetto ad O della risultante R è uguale alla somma dei momenti risultanti rispetto ad O delle forze infinitesime che costituiscono la distribuzione di carico.

# OPERAZIONI SULLE FORZE

**LA CURVA FUNICOLARE:**




Laddove ad un sistema piano di forze parallele si sostituisca una distribuzione q(x), il poligono funicolare diviene una curva.

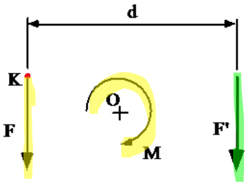
Questa può essere tracciata con **approssimazione** dividendo il carico distribuito in tratti **finiti** e considerando le forze ΔF risultanti dei singoli tratti Δx.

$$\Delta F = \int_{\Delta x} q(x)dx \longrightarrow \bar{q} = \frac{\int_{\Delta x} q(x)dx}{\Delta x} \longrightarrow \Delta F = \bar{q} \cdot \Delta x$$



# OPERAZIONI SULLE FORZE

**COMPOSIZIONE DI FORZE E MOMENTI:**




$$d = \frac{M}{F}$$

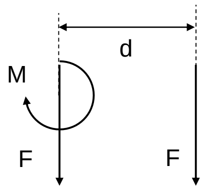
La composizione di una forza F applicata nel punto K e di un momento M applicato nel punto O è una forza F’ = F TRASLATA rispetto a F di una distanza d.

Il verso di F’ è tale da determinare lo stesso effetto rotatorio del sistema di partenza rispetto al punto K.

Per i corpi rigidi non ha importanza il punto di applicazione di F’ ma solamente la sua retta d’azione.

# OPERAZIONI SULLE FORZE

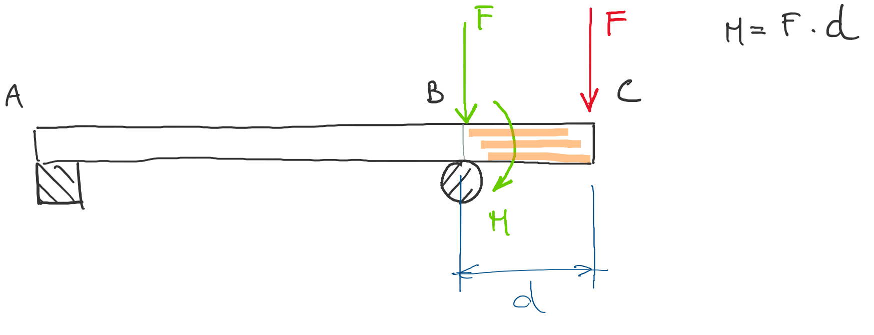
**TRASPORTO DI UNA FORZA:**




Se si trasporta una forza F dalla propria retta d'azione ad un'altra retta d'azione parallela alla precedente ed alla distanza d da questa, si deve aggiungere un MOMENTO DI TRASPORTO M:

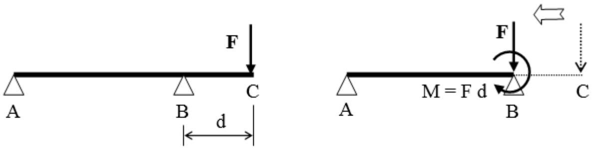
$$M = F \cdot d$$





# OPERAZIONI SULLE FORZE

**TRASPORTO DI UNA FORZA:**




E' lecito trasportare le forze dall'esterno verso l'interno della trave, aggiungendo il momento di trasporto M, solamente per calcolare l'effetto delle forze e dei momenti di trasporto nella parte della trave più interna al punto nel quale è stato effettuato il trasporto (nell'esempio il tratto BA).
Non è mai lecito trasportare una forza dall'interno della trave verso l'esterno, né valutare la sollecitazione della trave nel tratto in cui è stato eseguito il trasporto, dopo la sua esecuzione.
Nell'esempio, dopo il trasporto della forza F dal punto C al punto B, il tratto CB risulta scarico, mentre in realtà è soggetto a flessione e taglio.



# BIBLIOGRAFIA

**Dispense e appunti di lezione.**


Appunti tratti dalle lezioni del Prof. Dal Re

D. Croccolo, M. De Agostinis, G. Olmi, *Esercizi di Comportamento Meccanico dei Materiali ed Elementi delle Macchine.* Società Editrice Esculapio, Bologna, 2013. ISBN: 9788874886319.

O. Belluzzi. *Scienza delle Costruzioni. Volume Primo.* Zanichelli Editore, Bologna.
E. Viola, *Lezioni di Scienza delle Costruzioni*, Pitagora Editrice Bologna, 2003.
E. Viola, *Esercitazioni di Scienza delle Costruzioni*, Vol. 1, Pitagora Editrice Bologna, 1993.
E. Viola, *Esercitazioni di Scienza delle Costruzioni*, Vol. 2, Pitagora Editrice Bologna, 1993.
.

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Massimiliano De Agostinis
DIN - Dipartimento di Ingegneria Industriale
m.deagostinis@unibo.it

*www.unibo.it*