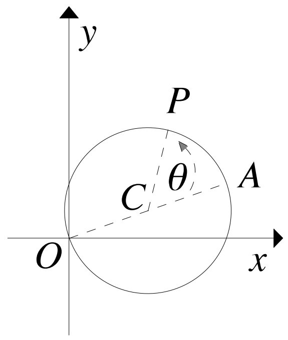
Esercizi di cinematica relativa

Esercizio 1

Nel Piano Oxy, un un punto materiale P, si muove su una circonferenza, di centro C e raggio R, che ruota Oxy attorno ad un suo punto fisso coincidente con l'origine O del riferimento con velocità angolare costante $\vec{\omega} = \omega \hat{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}}$.

Introdotto il parametro θ, angolo che il vettore $(P - C)$ forma con il diametro $(A - O)$, determinare il modulo della velocità assoluta del punto P.



Soluzione

$|\mathbf{v}| = r\sqrt{\dot{\theta}^2 + 2\omega(1+\cos\theta)(\omega+\dot{\theta})}$.

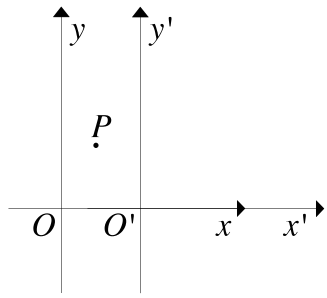
Esercizio 2

Un punto materiale P si muove nel piano Oxy con legge

$$\ddot{x}(t) = 0\,, \quad \ddot{y}(t) = -a\,,$$

con $a > 0$.

Sapendo che inizialmente P si trova nel punto di coordinate $(0, h)$ con velocità nulla, determinare la traiettoria di P rispetto al riferimento $O'x'y'$ che si muove di moto di trascinamento traslatorio con velocità $\mathbf{v}_\tau = v_\tau \hat{\boldsymbol{\imath}}$, come in figura.



Soluzione

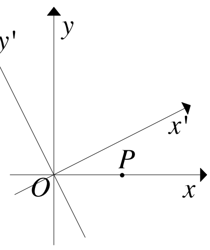
Equazione della traiettoria: $y' = -\frac{a}{2v_\tau^2}[x' - x_{O'}(0)]^2 + h$.

Esercizio 3

Un punto materiale P si muove nel piano Oxy con legge

$$(P(t) - O) = (x_0 + vt)\hat{\boldsymbol{\imath}}\,.$$

Determinare la velocità e la traiettoria di P rispetto al piano $Ox'y'$ che ruota attorno ad un asse ortogonale ad esso e passante per O con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega \hat{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}}$



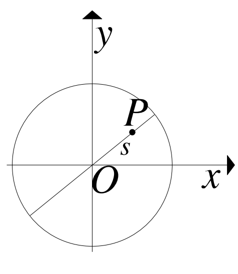
Soluzione

Equazioni parametriche della traiettoria: $x'(t) = (x_0 + vt)\cos(\omega t + \theta_0)$, $y'(t) = -(x_0 + vt)\sin(\omega t + \theta_0)$.
Vettore velocità:
$\mathbf{v}_r(t) = [v\cos(\omega t + \theta_0) - \omega(x_0 + vt)\sin(\omega t + \theta_0)]\hat{\boldsymbol{\imath}}\,' - [v\sin(\omega t + \theta_0) + \omega(x_0 + vt)\cos(\omega t + \theta_0)]\hat{\boldsymbol{\jmath}}\,'$.

Esercizio 4

Un disco di raggio R ruota con velocità angolare $\omega = \alpha t$ attorno a un asse ad esso ortogonale e passante per il suo centro. Un punto materiale P si nuove lungo un diametro del disco con legge $s(t) = R\sin\lambda t$ (s ascissa del punto P sul diametro, calcolata a partire dal centro del disco).

Determinare l'accelerazione assoluta di P.



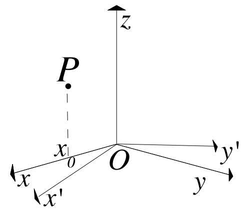
Soluzione

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_P^a = &-R[\alpha(2\lambda t\cos\lambda t + \sin\lambda t)\sin(\tfrac{\alpha}{2}t^2 + \gamma_0) + \sin\lambda t(\alpha^2 t^2 + \lambda^2)(\cos(\tfrac{\alpha}{2}t^2 + \gamma_0)]\hat{\boldsymbol{\imath}}\\ &+R[\alpha(2\lambda t\cos\lambda t + \sin\lambda t)\cos(\tfrac{\alpha}{2}t^2 + \gamma_0) - \sin\lambda t(\alpha^2 t^2 + \lambda^2)(\sin(\tfrac{\alpha}{2}t^2 + \gamma_0)]\hat{\boldsymbol{\jmath}}\,.\end{aligned}$$

Esercizio 5

In un sistema di riferimento $Oxyz$ un punto materiale P su muove con legge $(P(t) - O) = x_0 \hat{\boldsymbol{\imath}} + vt\hat{\boldsymbol{k}}$.

Determinare la traiettoria e la velocità del punto P rispetto a un riferimento $Ox'y'z$ che si muove di moto di trascinamento rotatorio uniforme con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{k}}$



Soluzione

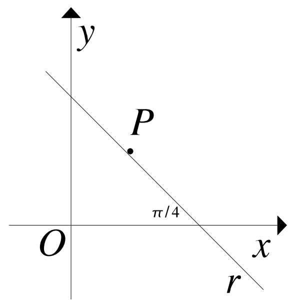
Traiettoria: Elica sul cilindro circolare retto di asse Oz e raggio $|x_0|$

$\mathbf{v}_P^r = -\omega x_0 \sin \omega t \hat{\boldsymbol{\imath}}' - \omega x_0 \cos \omega t \hat{\boldsymbol{\jmath}}' + v\hat{\boldsymbol{k}}$

Esercizio 6

Nel piano Oxy, una retta r inclinata di $\frac{\pi}{4}$ rispetto all'asse x trasla con accelerazione costante $\mathbf{a}$ di modulo $a = 1\, m\, sec^{-2}$, parallela e concorde all'asse x. Un punto P si muove sulla retta con accelerazione relativa costante $\mathbf{a}_r$ di modulo $a_r = \sqrt{2}\, m\, sec^{-2}$ e verso tale che $\mathbf{a}_r \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} > 0$, essendo $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ il versore dell'asse x. All'istante iniziale $t = 0$ il punto P ha coordinate $(0, h)$ e la retta r e il punto P hanno velocità assoluta nulla.

Determinare la velocità, l'accelerazione e la traiettoria del moto assoluto di P.



Soluzione

traiettoria: $y = -\frac{x}{2} + h$; $\mathbf{v}^a = 2t\hat{\boldsymbol{\imath}} - t\hat{\boldsymbol{\jmath}}$; $\mathbf{a}^a = 2\hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}}$.
