Esercizio 1
Un sistema materiale costituito da due aste omogenee AB e AH di uguale massa m e di lunghezza rispettivamente 4ℓ e 2ℓ è mobile nel piano verticale Oxy con assi di versori $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ e $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ (come in figura).
Il sistema è così vincolato

a - il punto medio dell'asta AB è incernierato nell'origine O del sistema di riferimento

b - l'estremo A dell'asta AH è incernierato nell'estremo A dell'asta AB, mentre l'estremo H è vincolato a scorrere sull'asse x.

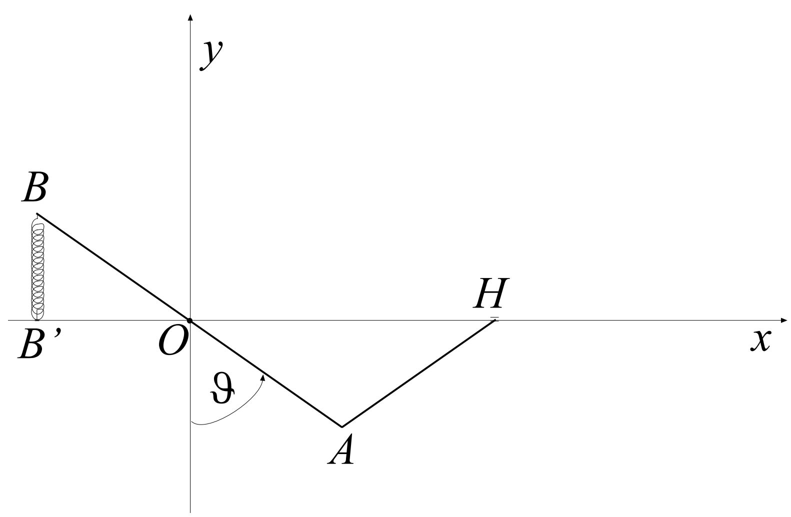
Oltre alla forza peso sul sistema agisce la forza elastica $\mathbf{F}_e = -\alpha \dfrac{mg}{\ell}(B - B')$ applicata in B, con B' proiezione di B sull'asse x.
Preso come parametro lagrangiano ϑ angolo che l'asta AB forma con l'asse y,

1 - Determinare il centro di istantanea rotazione per l'asta AH, scrivere le equazioni della base e della rulletta e disegnarne il grafico.

2 - Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità, al variare di $\alpha > 0$.

3 - Fissato $\alpha = \dfrac{1}{2}$, determinare le reazioni vincolari statiche in O e in H in una configurazione di equilibrio stabile.

4 - Sempre per $\alpha = \dfrac{1}{2}$ scrivere l'energia meccanica del sistema.



Soluzione dell'Esercizio 1

1. **Considerazioni generali**

   Il sistema è olonomo a un grado di libertà. I vincoli sono fissi e bilaterali. In funzione del parametro lagrangiano i punti A, B, H e il baricentro G dell'asta AH hanno coordinate

$$A = (2\ell \sin\vartheta, -2\ell\cos\vartheta) \quad , \quad B = (-2\ell\sin\vartheta, 2\ell\cos\vartheta)$$

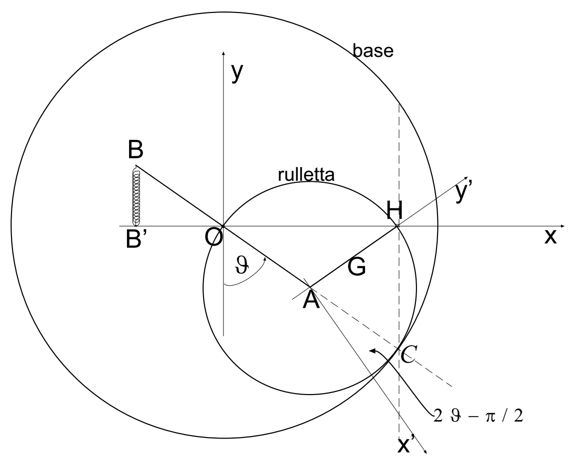
$$H = (4\ell\sin\vartheta, 0) \quad , \quad G = (3\ell\sin\vartheta, -\ell\cos\vartheta),$$

   le velocità angolari delle aste AB e AH sono rispettivamente

$$\omega_{AB} = \dot{\vartheta}\hat{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad , \quad \omega_{AH} = -\dot{\vartheta}\hat{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

   mentre le forze attive si scrivono

$$m\mathbf{g} = -mg\hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad , \quad \mathbf{F}_e = -2\alpha mg\cos\vartheta\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$



2. **Primo quesito**

   Per la determinazione del centro di istantanea rotazione C dell'asta AH, ricordando che $\mathbf{v}_P = \omega_{AH} \wedge (P - C)$, è sufficiente osservare che A si muove sulla circonferenza di centro O e raggio 2ℓ e che H si muove sull'asse x e quindi (vedi figura) da

$$(C - A) \parallel (O - A) \quad , \quad (C - H) \parallel \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

   si ha

$$x_C = x_H = 4\ell\sin\vartheta \quad , \quad y_C = 2y_A = -4\ell\cos\vartheta \tag{1}$$

Eliminando il parametro ϑ da (10) si ha l'equazione della base

$$x^2 + y^2 = 16\ell^2$$

Rispetto al riferimento solidale all'asta AH, $Ax'y'$ (come in figura) le coordinate di C sono

$$x'_C = 2\ell \sin 2\vartheta \quad , \quad y'_C = -2\ell \cos 2\vartheta \tag{2}$$

Eliminando il parametro ϑ da (11) si ha l'equazione della rulletta

$$x'^2 + y'^2 = 4\ell^2$$

3. **Secondo quesito**

Avendo il sistema un solo grado di libertà ed essendo le forze arrive conservative, le configurazioni di equilibrio sono quelle che rendono stazionario il potenziale.

Il potenziale delle forze attive è

$$U(\vartheta) = -mgy_G - \alpha\frac{mg}{2\ell} \mid B - B' \mid^2 + \text{cost.} = mg\ell(\cos\vartheta - 2\alpha\cos^2\vartheta) + \text{cost.}$$

I valori che rendono stazionario il potenziale sono soluzione dell'equazione

$$U'(\vartheta) = mg\ell(4\alpha\cos\vartheta - 1)\sin\vartheta = 0$$

Le configurazioni di equilibrio sono

$$\vartheta_1 = 0 \quad , \quad \vartheta_2 = \pi \quad \forall\alpha \quad , \quad \vartheta_{3,4} = \pm\arccos\frac{1}{4\alpha} \quad \text{se } \alpha \geq \frac{1}{4} \tag{3}$$

Per studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio calcoliamo la derivata seconda del potenziale

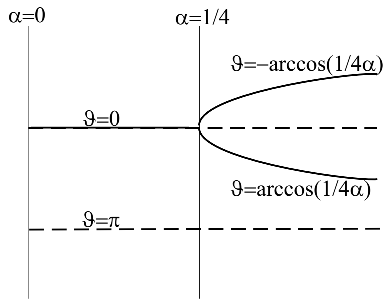
$$U''(\vartheta) = mg\ell(8\alpha\cos^2\vartheta - 4\alpha - \cos\vartheta).$$

Nelle posizioni di equilibrio di ha

$$\begin{cases} U''(0) = mg\ell(4\alpha - 1) \quad \text{negativa se } \alpha < \frac{1}{4} \\ U''(\pi) = mg\ell(4\alpha + 1) > 0 \quad \forall\alpha > 0 \\ \text{per } \alpha \geq \frac{1}{4} \\ U''(\vartheta_3) = U''(\vartheta_4) = mg\ell\frac{1-16\alpha^2}{4\alpha} \quad \text{negativa se } \alpha > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Per $\alpha = \frac{1}{4}$ si ha $\vartheta_1 = \vartheta_3 = \vartheta_4 = 0$ e, dallo studio del diagramma di biforcazione, si può concludere che tale configurazione di equilibrioè stabile.
Riassumendo si ha

$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$	2 posizioni di equilibrio ϑ_1, ϑ_2	ϑ_1 stabile
$\alpha > \frac{1}{4}$	4 posizioni di equilibrio ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4	ϑ_3 e ϑ_4 stabili



4. **Terzo quesito**
per $\alpha = \frac{1}{2}$ una posizione di equilibrio stabile è $\vartheta = \frac{\pi}{3}$.
Per il Principio delle Reazioni Vincolari,

$$\mathbf{\Phi}_O = \Phi_{Ox}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \Phi_{Oy}\hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad \text{reazione in } O, \qquad \mathbf{\Phi}_H = \Phi_H\hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad \text{reazione in } H$$

La seconda equazione cardinale della statica per l'asta AH con polo A e la prima equazione cardinale per l'intero sistema forniscono

$$\begin{cases} m\mathbf{g} \wedge (A - G) + \mathbf{\Phi}_H \wedge (A - H) = \mathbf{0} \\ 2m\mathbf{g} - \frac{mg}{2\ell}(B_e - B_e') + \mathbf{\Phi}_O + \mathbf{\Phi}_H = \mathbf{0} \end{cases}$$

Poiché $(B_e - B_e') = \ell\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, proiettando sugli assi si ottiene

$$\begin{cases} \Phi_H = \frac{1}{2}mg \\ \Phi_{Ox} = 0 \\ \Phi_{Oy} = 2mg \end{cases}$$

5. **Quarto quesito**
Per calcolare l'energia cinetica del sistema calcoliamo separatamente l'energia cinetica delle singole aste.
Asta AB

$$T_{AB} = \frac{1}{2}I_O^3(\omega_{AB})^2 = \frac{1}{2}\frac{16}{12}m\ell^2\dot{\vartheta}^2$$

Asta AH: applicando il teorema di König si ha

$$\begin{aligned} T_{AH} &= \tfrac{1}{2}m\mathbf{v}_G^2 + \tfrac{1}{2}I_G^3\omega_{AH}^2 = \tfrac{1}{2}m(9\ell^2\cos^2\vartheta + \ell^2\sin^2\vartheta)\dot{\vartheta}^2 + \tfrac{1}{2}\,\tfrac{4}{12}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 \\ &= \tfrac{1}{2}m\ell^2(8\cos^2\vartheta + \tfrac{4}{3})\dot{\vartheta}^2, \end{aligned}$$

quindi l'energia meccanica del sistema è

$$E = T_{AB} + T_{AH} - U = 4m\ell^2(\frac{1}{3} + \cos^2\vartheta)\dot{\vartheta}^2 - mg\ell(\cos\vartheta - \cos^2\vartheta).$$

Esercizio 2

Un sistema materiale, costituito da un disco omogeneo di massa m e raggio r e da un'asta AG di uguale massa m e di lunghezza $\sqrt{2}r$, è mobile nel piano verticale Oxy con assi di versori $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ e $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ (come in figura). Il sistema è così vincolato

a - il disco rotola senza strisciare sull'asse x;

b - l'estremo A dell'asta scorre sull'asse x, mentre l'estremo G è incernierato nel baricentro del disco.

Oltre alla forza peso sul sistema agisce

i - la forza elastica $\mathbf{F}_e = -k(A - O)$ applicata in A;

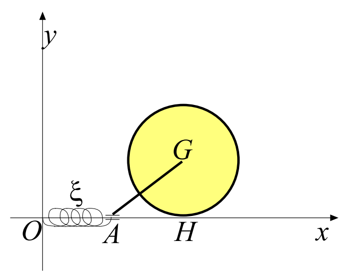
ii - la coppia di momento $\mathbf{M} = \alpha k(G-O) \wedge (G-H)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e H proiezione di G sull'asse x, applicata al disco.

Preso come parametro lagrangiano ξ, ascissa del punto A,

1 - determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità, al variare di $\alpha \neq -1$;

2 - fissato $\alpha = 1$, determinare le reazioni vincolari esterne e interne nella configurazione di equilibrio stabile;

3 - sempre per $\alpha = 1$ scrivere l'energia meccanica del sistema.



Soluzione dell'Esercizio 2

1. **Considerazioni generali**

   Il sistema è olonomo a un grado di libertà. I vincoli sono fissi e bilaterali. In funzione del parametro lagrangiano i punti A e G hanno coordinate

   $$A = (\xi, 0) \quad , \quad G = (\xi + r, r)$$

   L'asta AG trasla e la velocità angolare del disco ω si ottiene osservando che, per il vincolo di rotolamento senza strisciamento, H è centro di istantanea rotazione, quindi

   $$\mathbf{v}_G = \omega \wedge (G - H) \quad \Longrightarrow \quad \dot{\xi}\hat{\boldsymbol{\imath}} = \omega \wedge r\hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad \Longrightarrow \quad \omega = -\frac{\dot{\xi}}{r}\hat{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

   mentre le forze attive si scrivono

   $$m\mathbf{g} = -mg\hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad , \quad \mathbf{F}_e = -k\xi\hat{\boldsymbol{\imath}} \quad , \quad \mathbf{M} = \alpha kr(\xi + r)\hat{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

2. **Primo quesito**

   Avendo il sistema un solo grado di libertà ed essendo le forze arrive conservative, le configurazioni di equilibrio sono quelle che rendono stazionario il potenziale. Il potenziale della forza peso è costante, il potenziale dalla forza elastica è $-\frac{k}{2}|A - O|^2$, per determinare il potenziale delle forze attive calcoliamo il lavoro elementare compiuto dalla coppia di momento $\mathbf{M}$

   $$dL_M = -\alpha kr(\xi + r)\hat{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \frac{d\xi}{r}\hat{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}} = d[-\alpha k(\frac{1}{2}\xi^2 + r\xi)]$$

   Quindi il potenziale delle forze attive è

   $$U(\xi) = -\frac{k}{2}(\alpha + 1)\xi^2 - \alpha kr\xi + \text{cost.}$$

   I valori che rendono stazionario il potenziale sono soluzione dell'equazione

   $$U'(\xi) = -k(\alpha + 1)\xi - \alpha kr = 0$$

   Il sistema ammette un'unica soluzione di equilibrio

   $$\xi_e = -\frac{\alpha}{\alpha + 1}r$$

   Per studiare la stabilità della posizioni di equilibrio calcoliamo la derivata seconda del potenziale

   $$U''(\xi) = -k(\alpha + 1).$$

   La derivata seconda del potenziale è costante ed è positiva se $\alpha < -1$ (equilibrio instabile), negativa per $\alpha > -1$ (equilibrio stabile).

3. **Secondo quesito**
Per $\alpha = 1$ la posizione di equilibrio $\xi_e = -\frac{r}{2}$ è stabile.
Per il Principio delle Reazioni Vincolari,

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}_H = \Phi_{Hx}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \Phi_{Hy}\hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad \text{reazione esterna in } H,\\ &\boldsymbol{\Phi}_A = \Phi_A\hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad \text{reazione esterna in } A,\\ &\boldsymbol{\Phi}_G = \Phi_{Gx}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \Phi_{Gy}\hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad \text{reazione vincolare interna in } G.\end{aligned}$$

Indicato con M il baricentro dell'asta AG, la seconda equazione cardinale per l'asta AG con polo G e la prima equazione cardinale della statica per l'intero sistema permettono di determinare le reazioni vincolari esterne

$$\begin{cases} m\mathbf{g} \wedge (G - M) + (\boldsymbol{\Phi}_A - k(A_e - O)) \wedge (G - A) = \mathbf{0} \\ 2m\mathbf{g} - k(A_e - O) + \boldsymbol{\Phi}_A + \boldsymbol{\Phi}_H = \mathbf{0} \end{cases}$$

Poiché $(A_e - O) = -\frac{1}{2}r\hat{\boldsymbol{\imath}}$, proiettando sugli assi si ottiene

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}mgr\hat{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}} + (\Phi_A\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{1}{2}kr\hat{\boldsymbol{\imath}}) \wedge (r\hat{\boldsymbol{\imath}} + r\hat{\boldsymbol{\jmath}}) = \mathbf{0} \implies \Phi_A = \frac{1}{2}(kr - mg) \\ \Phi_{Hx} = -\frac{1}{2}kr \\ \Phi_{Hy} + \Phi_A = 2mg \quad \implies \quad \Phi_{Hy} = \frac{1}{2}(5mg - kr) \end{cases}$$

Per determinare la reazioni vincolare interna, la prima equazione cardinale applicata all'asta fornisce

$$m\mathbf{g} - k(A_e - O) + \boldsymbol{\Phi}_A + \boldsymbol{\Phi}_G = \mathbf{0} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\Phi}_G = -kr\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{1}{2}(3mg - kr)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

4. **Terzo quesito**
Per calcolare l'energia cinetica del sistema calcoliamo separatamente l'energia cinetica dell'asta e del disco.
L'asta AG trasla

$$T_{AG} = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2$$

Il disco ruota attorno all'asse ortogonale al piano xy passante per H

$$T_{disco} = \frac{1}{2}I_H^z\left[\frac{\dot{\xi}}{r}\right]^2 = \frac{3}{4}m\dot{\xi}^2$$

quindi l'energia meccanica del sistema è

$$E = T_{AG} + T_{disco} - U = \frac{5}{4}m\dot{\xi}^2 + k\xi^2 + kr\xi.$$

Esercizio 3

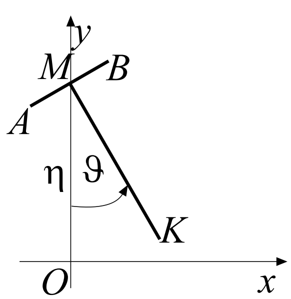
Un corpo rigido è costituito da due aste omogenee AB e KM di ugual massa m e di lunghezza 2ℓ e 4ℓ rispettivamente, saldate perpendicolarmente tra loro in modo tale che M sia il punto medio di AB.

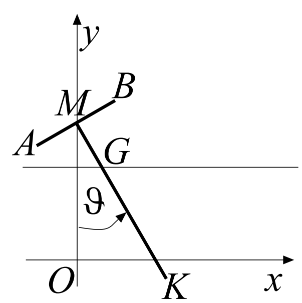
1 - Determinare la posizione del baricentro G del corpo e scrivere la matrice di inerzia rispetto ad una terna principale di inerzia centrata in G.

Il corpo è mobile nel piano verticale Oxy con assi di versori $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ e $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ (come in figura) con il punto M vincolato a scorrere sull'asse y ed è soggetto solamente alla forza peso.
Presi come parametri lagrangiani η, ordinata di M e ϑ, angolo che l'asta KM forma con l'asse y,

2 - scrivere le equazioni differenziali che governano il moto del corpo.

3 - Introdotto l'ulteriore vincolo che impone a G di scorrere sulla retta di equazione $y = 2\ell$, determinare il centro di istantanea rotazione per il corpo, scrivere le equazioni della base e della rulletta e disegnarne il grafico.





Soluzione dell'Esercizio 3

1. **Considerazioni generali**

   Il sistema è olonomo a due gradi di libertà. I vincoli sono fissi e bilaterali.

2. **Primo quesito**

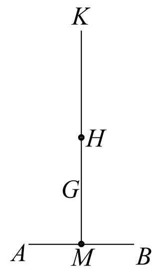


figura 1

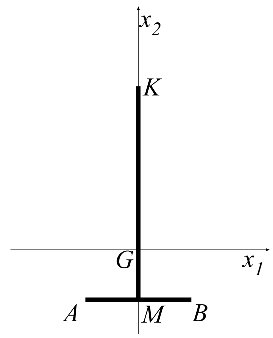


figura 2

Per simmetria il baricentro del sistema di trova sull'asta KM, e per la proprietà distributiva del baricentro, G si trova nel punto medio del segmento HM con H punto medio dell'asta MK (figura 1).
In funzione dei parametri lagrangiani le coordinate del baricentro sono

$$G = (\ell \sin\vartheta, \eta - \ell\cos\vartheta)$$

Per le proprietà di simmetria del sistema la terna $Gx_1x_2x_3$ indicata nella figura 2 è principale di inerzia. Per l'additività dei momenti di inerzia

$$I_{11} = I_{11}^{AB} + I_{11}^{KM} \quad , \quad I_{22} = I_{22}^{AB} + I_{22}^{KM}.$$

Essendo poi il sistema piano

$$I_{33} = I_{11} + I_{22}.$$

Si ha

$$\begin{cases} I_{11}^{AB} = I_{11}^{AB\,(M)} + m|G-M|^2 = 0 + m\ell^2 \\ I_{11}^{KM} = I_{11}^{KM\,(H)} + m|G-H|^2 = \frac{m(4\ell)^2}{12} + m\ell^2 = \frac{7}{3}m\ell^2, \\ I_{22}^{AB} = \frac{m(2\ell)^2}{12} = \frac{1}{3}m\ell^2 \\ I_{22}^{KM} = 0, \end{cases}$$

quindi la matrice di inerzia del sistema è

$$\begin{pmatrix} \frac{10}{3}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3}m\ell^2 \end{pmatrix}$$

3. **Secondo quesito**
Essendo in presenza di un sistema rigido, le equazioni cardinali con il Principio delle Reazioni Vincolari sono sufficienti per lo studio del moto. Per il Principio delle Reazioni Vincolari, il sistema di reazioni vincolari è equivalente a un vettore $\Phi_M = \Phi\hat{\boldsymbol{\imath}}$ applicato in M. Le equazioni del moto si ottengono proiettando la prima equazione cardinale sull'asse y

$$m\ddot{y}_G = -mg$$

e la seconda equazione cardinale con polo M ortogonalmente al piano xy. Poiché $\mathbf{v_G} \wedge \mathbf{v_M} \neq \mathbf{0}$ la seconda equazione cardinale si scrive

$$\dot{\mathbf{K}}_M = m\mathbf{g} \wedge (M - G) + m\mathbf{v_G} \wedge \mathbf{v_M}$$

Si ha quindi

$$\ddot{y}_G = \ddot{\eta} + \ell \sin\vartheta\ddot{\vartheta} + \ell\cos\vartheta\dot{\vartheta}^2$$

e per il teorema di König

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{K}'_G + m\mathbf{v}_G \wedge (M - G)$$

Poiché la velocità angolare del sistema è $\dot{\vartheta}\hat{\boldsymbol{k}}$,($\hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}}$), facendo i conti si ha

$$\mathbf{K}_M = \frac{11}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}\hat{\boldsymbol{k}} + m\ell(\ell\dot{\vartheta} + \dot{\eta}\sin\vartheta)\hat{\boldsymbol{k}}$$

$$\dot{K}_z = \frac{11}{3}m\ell^2\ddot{\vartheta} + m\ell(\ell\ddot{\vartheta} + \ddot{\eta}\sin\vartheta + \dot{\eta}\cos\vartheta\dot{\vartheta})$$

$$\mathbf{v_G} \wedge \mathbf{v_M} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = \ell\dot{\eta}\cos\vartheta\dot{\vartheta}$$

$$m\mathbf{g} \wedge (M - G) = -mg\ell\sin\vartheta\hat{\boldsymbol{k}}$$

Facendo le opportune semplificazioni, le equazioni dei moto sono

$$\begin{cases} \ddot{\eta} + \ell\sin\vartheta\ddot{\vartheta} + \ell\cos\vartheta\dot{\vartheta}^2 = -g \\ \frac{14}{3}\ell\ddot{\vartheta} + \ddot{\eta}\sin\vartheta = -g\sin\vartheta \end{cases}$$

4. **Terzo quesito**
L'imposizione dell'ulteriore vincolo abbassa il grado di libertà del sistema:

$$y_G = 2\ell \quad \Rightarrow \quad \eta = 2\ell + \ell\cos\vartheta.$$

Esprimeremo quindi tutte le grandezze in funzione del parametro ϑ.
Per la determinazione del centro di istantanea rotazione C del sistema, ricordando che $\mathbf{v}_P = \omega \wedge (P - C)$, è sufficiente osservare che M si muove sull'asse y e che G si muove sulla retta $y = 2\ell$ e quindi (vedi figura)da

$$(C - M) \parallel \hat{\boldsymbol{\imath}} \quad , \quad (C - G) \parallel \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

si ha

$$x_C = x_G = \ell\sin\vartheta \quad , \quad y_C = y_M = 2\ell + \ell\cos\vartheta \tag{4}$$

Eliminando il parametro ϑ da (10) si ha l'equazione della base

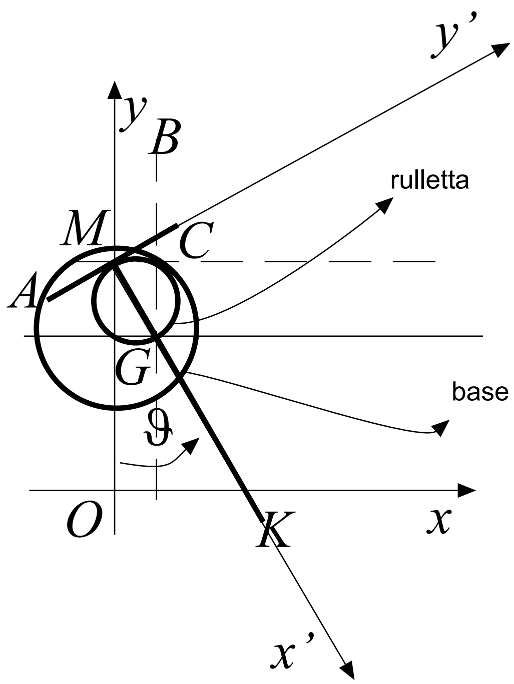
$$x^2 + (y - 2\ell)^2 = \ell^2$$

Rispetto al riferimento solidale al sistema $Mx'y'$ (come in figura) le coordinate di C sono

$$x'_C = \ell \sin^2 \vartheta = \frac{\ell}{2}(1 - \cos 2\vartheta) \quad , \quad y'_C = \ell \sin \vartheta \cos \vartheta = \frac{\ell}{2} \sin 2\vartheta \qquad (5)$$

Eliminando il parametro ϑ da (11) si ha l'equazione della rulletta

$$(x' - \frac{\ell}{2})^2 + y'^2 = \frac{1}{4}\ell^2$$



Esercizio 4

Un'asta AB di massa m e di lunghezza ℓ, è mobile nel piano verticale Oxy con assi di versori $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ e $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ (come in figura) ha l'etremo A vincolato a scorrere sull'asse x e l'estremo B sulla guida circolare di equazione $x^2 + y^2 = \ell^2$ Oltre alla forza peso sull'asta agisce

i - la forza elastica $\mathbf{F}_e = -\alpha \dfrac{mg}{\ell}(A - O)$ applicata in A, con $\alpha > 0$;

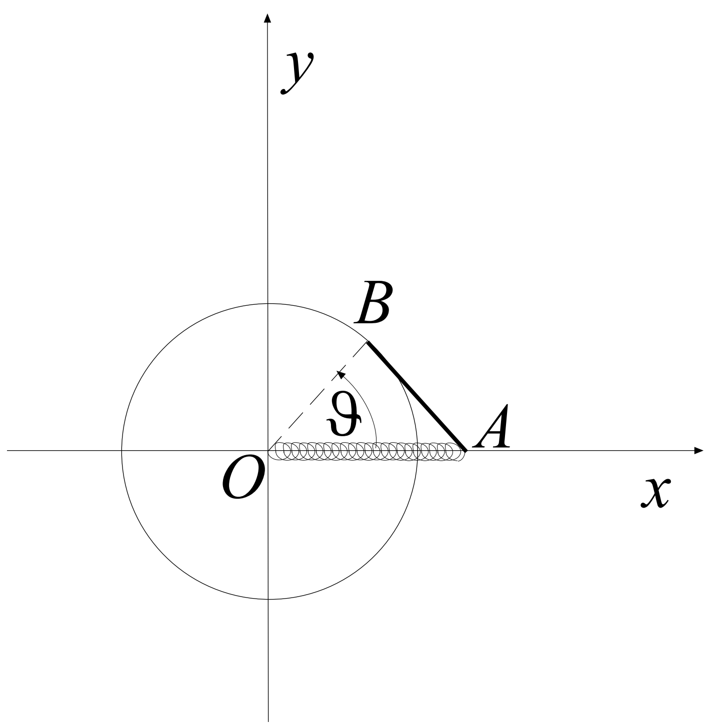
ii - la coppia di momento $\mathbf{M} = mg(B - A) \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}}$.

Preso come parametro lagrangiano ϑ, angolo che la retta OA forma con l'asse x,

1 - determinare il centro di istantanea rotazione dell'asta, le equazioni cartesiane di base e rulletta e disegnarne i grafici;

2 - determinare le configurazioni di equilibrio dell'asta e studiarne la stabilità, al variare di $\alpha > 0$;

3 - trovare per quale valore di α la configurazione $\vartheta = -\dfrac{\pi}{6}$ é di equilibrio e determinare le reazioni vincolari statiche in tale configurazione.



1. **Considerazioni generali**

   Il sistema è olonomo a un grado di libertà.
   I vincoli sono fissi e bilaterali.
   In funzione del parametro lagrangiano ϑ si ha:

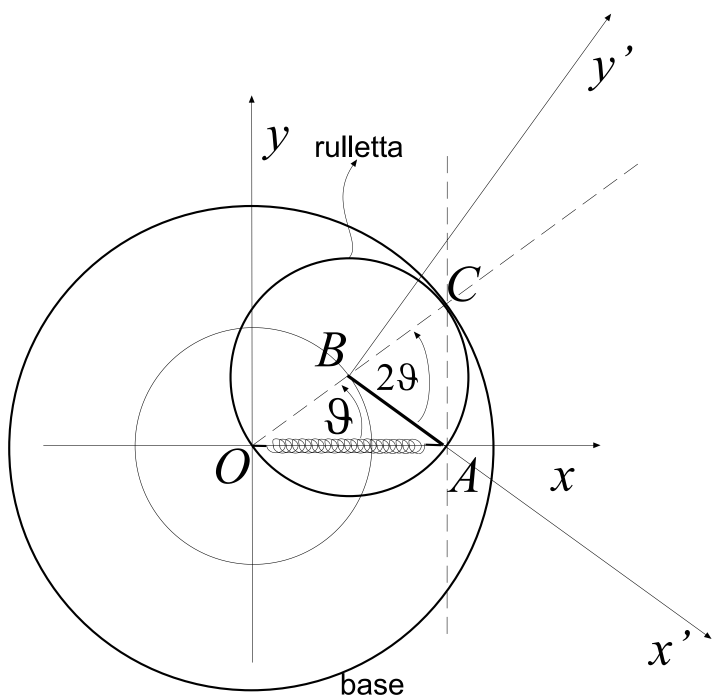
$$B = (\ell\cos\vartheta, \ell\sin\vartheta) \quad , \quad A = (2\ell\cos\vartheta, 0) \; ,$$

$$G = (\frac{3}{2}\ell\cos\vartheta, \frac{1}{2}\ell\sin\vartheta) \quad , \quad \omega = -\dot{\vartheta}\hat{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}} \; ,$$

   con G baricentro dell'asta e ω velocità angolare dell'asta. Inoltre

$$\mathbf{F}_e = -2\alpha mg\cos\vartheta\hat{\boldsymbol{\imath}} \quad , \quad \mathbf{M} = -mg\ell\cos\vartheta\hat{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}} \, .$$

2. **Primo quesito**



   Per la determinazione del centro di istantanea rotazione C dell'asta AB, ricordando che $\mathbf{v}_P = \omega \wedge (P - C)$, è sufficiente osservare che B si muove sulla circonferenza di centro O e raggio ℓ e che A si muove sull'asse x e quindi (vedi figura)da

$$(C - B) \parallel (O - B) \quad , \quad (C - A) \parallel \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

si ha

$$x_C = x_A = 2\ell\cos\vartheta \quad , \quad y_C = 2y_B = 2\ell\sin\vartheta \tag{6}$$

Eliminando il parametro ϑ da (10) si ha l'equazione della base

$$x^2 + y^2 = 4\ell^2$$

Rispetto al riferimento solidale all'asta AB, $Bx'y'$ (come in figura) le coordinate di C sono

$$x'_C = \ell\cos 2\vartheta \quad , \quad y'_C = 2\ell\sin 2\vartheta \tag{7}$$

Eliminando il parametro ϑ da (11) si ha l'equazione della rulletta

$$x'^2 + y'^2 = \ell^2$$

3. **Secondo quesito** Avendo il sistema un solo grado di libertà ed essendo le forze attive conservative, le configurazioni di equilibrio sono quelle che rendono stazionario il potenziale.

   Il potenziale della forza peso è $-mgy_G$,

   il potenziale dalla forza elastica è $-\frac{\alpha mg}{2\ell}|A-O|^2$.

   Per determinare il potenziale delle forze attive calcoliamo il lavoro elementare compiuto dalla coppia di momento $\mathbf{M}$

$$dL_M = \mathbf{M}\cdot\omega dt = (-mg\ell\cos\vartheta\,\hat{\boldsymbol{\imath}}\wedge\hat{\boldsymbol{\jmath}}\,)\cdot(-d\vartheta\,\hat{\boldsymbol{\imath}}\wedge\hat{\boldsymbol{\jmath}}\,) = d[mg\ell\sin\vartheta]$$

   Quindi il potenziale delle forze attive è

$$U(\vartheta) = -\frac{1}{2}mg\ell\sin\vartheta - 2\alpha mg\ell\cos^2\vartheta + mg\ell\sin\vartheta + \text{cost.} = mg\ell(\frac{1}{2}\sin\vartheta - 2\alpha\cos^2\vartheta) + \text{cost.}$$

   I valori che rendono stazionario il potenziale sono soluzione dell'equazione

$$U'(\vartheta) = mg\ell(\frac{1}{2} + 4\alpha\sin\vartheta)\cos\vartheta = 0$$

   Le configurazioni di equilibrio sono

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \vartheta_2 = -\frac{\pi}{2} \quad \forall\alpha$$

$$\vartheta_3 = -\arcsin\frac{1}{8\alpha} \quad , \quad \vartheta_4 = \pi + \arcsin\frac{1}{8\alpha} \quad \text{se } \alpha \geq \frac{1}{8}$$

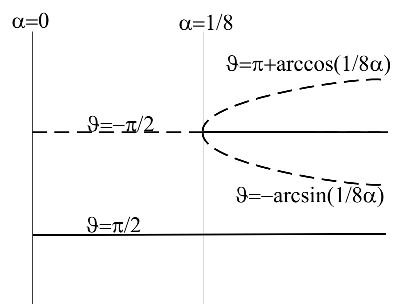
   Per studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio calcoliamo la derivata seconda del potenziale

$$U''(\vartheta) = mg\ell[4\alpha(1-2\sin^2\vartheta) - \frac{1}{2}\sin\vartheta].$$

Nelle posizioni di equilibrio di ha

$$\begin{cases} U''(\frac{\pi}{2}) = -mg\ell(4\alpha + \frac{1}{2}) < 0 \quad \forall\alpha > 0 \\ U''(-\frac{\pi}{2}) = mg\ell(\frac{1}{2} - 4\alpha) \quad \text{negativa se } \alpha > \frac{1}{8} \\ \text{per } \alpha \geq \frac{1}{8} \\ U''(\vartheta_3) = U''(\vartheta_4) = mg\ell\frac{64\alpha^2-1}{16\alpha} \quad \text{positiva se } \alpha > \frac{1}{8} \end{cases}$$

Per $\alpha = \frac{1}{8}$ si ha $\vartheta_2 = \vartheta_3 = \vartheta_4 = -\frac{\pi}{2}$ e, dallo studio del diagramma di biforcazione, si può concludere che tale configurazione di equilibrio è instabile.



Riassumendo si ha

$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{8}$	2 posizioni di equilibrio ϑ_1, ϑ_2	ϑ_1 stabile
$\alpha > \frac{1}{8}$	4 posizioni di equilibrio ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4	ϑ_1 e ϑ_2 stabili

4. **Terzo quesito**
Richiedere che $\vartheta = -\frac{\pi}{6}$ sia configurazione di equilibrio implica

$$\arcsin\frac{1}{8\alpha} = \frac{\pi}{6} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{4}$$

Per il principio delle reazioni vincolari

$$\mathbf{\Phi}_A = \Phi_A\hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad , \quad \mathbf{\Phi}_B = \Phi_B \text{ vers}(B - O)$$

Nella configurazione di equilibrio

$$\text{vers}(B - O) = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\boldsymbol{\imath}} - \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad , \quad \mathbf{F}_e = -\frac{\sqrt{3}}{4}mg\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

sostituendo nella prima equazione cardinale della statica si ottiene

$$-mg\hat{\boldsymbol{\jmath}} - \frac{\sqrt{3}}{4}mg\hat{\boldsymbol{\imath}} + \Phi_A\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \Phi_B(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\boldsymbol{\imath}} - \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\jmath}}) = 0$$

Proiettando sugli assi si ottiene

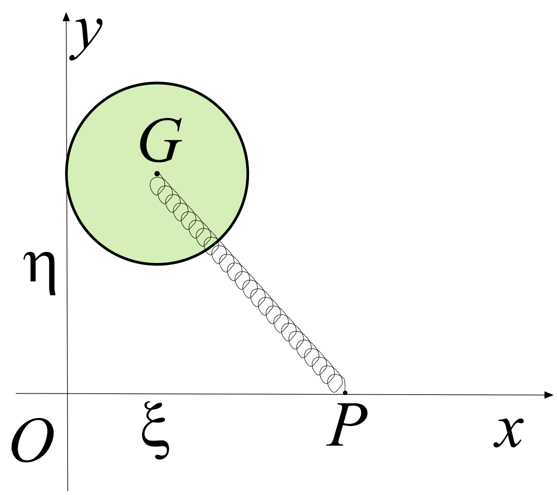
$$\Phi_A = \frac{5}{4}mg \quad , \quad \Phi_B = \frac{1}{2}mg$$

Esercizio 5
Un sistema materiale, mobile nel piano verticale Oxy con assi di versori $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ e $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ (come in figura), è costituito da un disco omogeneo di massa m, centro G e raggio r e da un punto materiale P di massa m.
Il disco è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse y, mentre il punto P è vincolato a scorrere sull'asse x.
Oltre alla forza peso sul sistema agisce

i - una forza elastica interna rappresentata da una molla ideale si costante elastica $\dfrac{mg}{r}$ e lunghezza a riposo nulla che collega il centro G del disco al punto P;

ii - una forza viscosa di costante $2m\sqrt{\dfrac{g}{r}}$, applicata al punto P.

Presi come parametri lagrangiani η, ordinata di G e ξ, ascissa di P, scrivere ed integrare le equazioni differenziali che governano il moto del sistema in corrispondenza alle condizioni iniziali $\xi(0) = 0$, $\eta(0) = 0$, $\dot{\xi}(0) = 0$, $\dot{\eta}(0) = 0$ e determinare la reazione vincolare dinamica nel punto P al variare del tempo.



Soluzione dell'Esercizio 5

1. **Considerazioni generali**

   Il sistema è olonomo a due gradi di libertà. I vincoli sono fissi e bilaterali. In funzione dei parametri lagrangiani i punti P e G hanno coordinate

   $$P = (\xi, 0) \quad , \quad G = (r, \eta).$$

   Il disco si muove di moto rigido piano e H, punto di contatto tra il disco e l'asse y è centro di istantanea rotazione, quindi, posto $\hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}}$, la velocità angolare del disco si ricava dalla relazione

   $$\mathbf{v}_G = \omega \hat{\boldsymbol{k}} \wedge (G - H) \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\dot{\eta}}{r}$$

   La forza elastica interna si rappresenta come la coppia

   $$\mathbf{F}_P = -\frac{mg}{r}[(\xi - r)\hat{\boldsymbol{\imath}} - \eta \hat{\boldsymbol{\jmath}}], \text{ applicata in P}$$

   $$\mathbf{F}_G = -\frac{mg}{r}[-(\xi - r)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \eta \hat{\boldsymbol{\jmath}}], \text{ applicata in G}$$

   mentre la forza viscosa

   $$\mathbf{F}_v = -2m\sqrt{\frac{g}{r}}\dot{\xi}\hat{\boldsymbol{\imath}}, \text{ applicata in P}$$

2. **Primo quesito**

   Per determinare le equazioni del moto, osserviamo che il sistema di reazioni vincolari si può rappresentare attraverso un vettore $\boldsymbol{\Phi}_H$ applicato in H (di cui non si conosce la direzione) e un vettore $\boldsymbol{\Phi}_P = \Phi_P \hat{\boldsymbol{\jmath}}$ applicato in P.

   Quindi l'equazione fondamentale della dinamica per il punto P proiettata sull'asse x e la seconda equazione cardinale con polo H per il disco, proiettata ortogonalmente al piano xy sono le equazioni del moto richieste.

   $$m\mathbf{a}_P \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} = [m\mathbf{g} + \mathbf{F}_P + \mathbf{F}_v + \boldsymbol{\Phi}_P] \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{\xi} = -\frac{mg}{r}(\xi - r) - 2m\sqrt{\frac{g}{r}}\dot{\xi}$$

   Poiché $\mathbf{v}_H \wedge \mathbf{v}_G = 0$, $\mathbf{K}_H = I_H^3 \omega \hat{\boldsymbol{k}}$ con $I_H^3 = I_G^3 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$ e

   $$(m\mathbf{g}+\mathbf{F}_G)\wedge(H-G) = [-mg\hat{\boldsymbol{\jmath}} - \frac{mg}{r}[-(\xi-r)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \eta\hat{\boldsymbol{\jmath}}]]\wedge(-r\hat{\boldsymbol{\imath}}) = -mg(\eta+r)\hat{\boldsymbol{k}}$$

   si ottiene

   $$\dot{\mathbf{K}}_H \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = [\boldsymbol{\Omega}_H^e + \boldsymbol{\Psi}_H^e] \cdot \hat{\boldsymbol{k}} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}mr\ddot{\eta} = -mg(\eta + r)$$

Il sistema di equazioni differenziali da risolvere è il seguente

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + 2\sqrt{\frac{g}{r}}\dot{\xi} + \frac{g}{r}(\xi - r) = 0 \\ \ddot{\eta} + \frac{2g}{3r}(\eta + r) = 0 \\ \xi(0) = 0 \quad , \quad \eta(0) = 0 \quad , \quad \dot{\xi}(0) = 0 \quad , \quad \dot{\eta}(0) = 0 \end{cases}$$

Le due equazioni sono indipendenti e hanno come integrali generali

$$\begin{cases} \xi(t) - r = (c_1 + c_2 t)\exp[-\sqrt{\frac{g}{r}}t] \\ \eta(t) + r = c_3\cos(\sqrt{\frac{2g}{3r}}t + c_4) \end{cases}$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$\begin{cases} \xi(t) = (r + \sqrt{gr}t)\exp[-\sqrt{\frac{g}{r}}t] + r \\ \eta(t) = r\cos(\sqrt{\frac{2g}{3r}}t) - r \end{cases}$$

Per il calcolo della reazione vincolare in P consideriamo l'equazione fondamentale della dinamica per il punto P proiettata sull'asse y

$$m\mathbf{a}_P \cdot \hat{\boldsymbol{j}} = [m\mathbf{g} + \mathbf{F}_P + \mathbf{F}_v + \boldsymbol{\Phi}_P] \cdot \hat{\boldsymbol{j}} \quad \Rightarrow \quad 0 = -mg + \frac{mg}{r}\eta + \Phi_P$$

da cui

$$\Phi_P = mg[2 - \cos(\sqrt{\frac{2g}{3r}}t)]$$

Esercizio 6

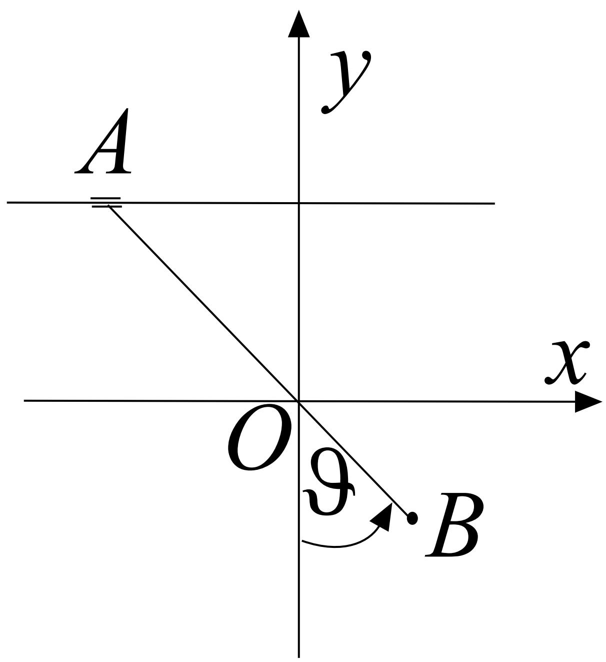
Un'asta AB, di di lunghezza 2ℓ, è mobile nel piano verticale Oxy con assi di versori $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ e $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ (come in figura). L'asta è vincolata a passare per il punto O , mentre l'estremo A scorre sulla retta di equazione $y = \ell$.
Preso come parametro lagrangiano ϑ, angolo che l'asta AB forma con l'asse y,

1 - determinare il centro di istantanea rotazione dell'asta e l'equazione cartesiana della base, disegnandone il grafico.

L'asta AB ha la massa m concentrata nell'estremo B e oltre alla forza peso agisce una forza costante $\mathbf{F} = \alpha m g \hat{\boldsymbol{\imath}}$ applicata in A, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

2 - Determinare per quale valore di α la configurazione $\vartheta = \dfrac{\pi}{6}$ é di equilibrio e studiare la stabilità di tale configurazione;

3 - determinare le reazioni vincolari statiche in tale configurazione.



Soluzione dell'Esercizio 6

1. **Considerazioni generali**

   Il sistema è olonomo a un grado di libertà. I vincoli sono fissi. Per rispettare i vincoli, parametro ϑ varia nell'intervallo $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$
   In funzione del parametro lagrangiano i punti A e B hanno coordinate

   $$A = (-\ell \tan\vartheta, \ell) \quad , \quad B = (-\ell \tan\vartheta + 2\ell \sin\vartheta, \ell - 2\ell \cos\vartheta).$$

   La velocità angolare dell'asta è

   $$\omega = \dot{\vartheta} \boldsymbol{\hat{\imath}} \wedge \boldsymbol{\hat{\jmath}}\,.$$

2. **Primo quesito**

   Per la determinazione del centro di istantanea rotazione C dell'asta ricordando che $\mathbf{v}_P = \omega \wedge (P - C)$, è sufficiente osservare che A si muove su una retta parallela all'asse x, mentre il punto dell'asta che transita per O ha velocità parallela all'asta, quindi (vedi figura)

   $$(C - A) \parallel \boldsymbol{\hat{\jmath}} \quad , \quad (C - O) \perp (B - A)$$

   Poiché il triangolo AOC è rettangolo e $|A - C| = \frac{\ell}{\cos^2\vartheta}$, si ha

   $$x_C = x_A = -\ell \tan\vartheta \quad , \quad y_C = y_A - \frac{\ell}{\cos^2\vartheta} = -\ell \tan^2\vartheta \tag{8}$$

   Eliminando il parametro ϑ da (10) si ha l'equazione della base che è l'arco di parabola

   $$y = -\frac{x^2}{\ell} \quad , \quad x \in [-\sqrt{3}\ell, \sqrt{3}\ell]$$

   (non richiesta) Rispetto al riferimento solidale all'asta AB, $Ax'y'$ (come in figura) le coordinate di C sono

   $$x'_C = \frac{\ell}{\cos\vartheta} \quad , \quad y'_C = \frac{\ell}{\cos^2\vartheta} \sin\vartheta \tag{9}$$

   Per eliminare il parametro ϑ da (11) osserviamo che

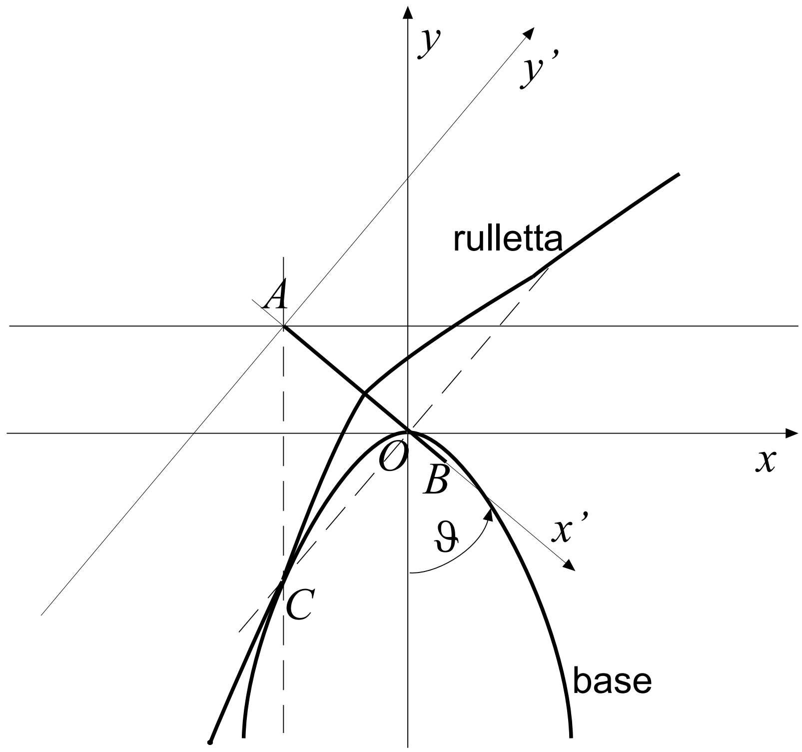
   $$y'^2_C = \frac{\ell^2}{\cos^4\vartheta}(1 - \cos^2\vartheta) = \frac{1}{\ell^2}\frac{\ell^4}{\cos^4\vartheta} - \frac{\ell^2}{\cos^2\vartheta}$$

   quindi l'equazione della rulletta che è l'arco di curva

   $$y'^2 = \frac{x'^4}{\ell^2} - x'^2 \quad , \quad x' \in [\ell, 2\ell]$$

   Poiché x è non negativa si può dare l'equazione esplicita dell'arco di curva

   $$x' = \ell\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4\frac{y'^2}{\ell^2}}}{2}} \quad , \quad y' \in [-2\sqrt{3}\ell, 2\sqrt{3}\ell]$$



3. **Secondo quesito**

   Avendo il sistema un solo grado di libertà ed essendo le forze attive costanti e quindi conservative, le configurazioni di equilibrio sono quelle che rendono stazionario il potenziale.

   Il potenziale delle forze attive è

$$U(\vartheta) = -mgy_B + \alpha mgx_A + \text{cost.} = mg\ell(2\cos\vartheta - \alpha\tan\vartheta) + \text{cost.}$$

   I valori che rendono stazionario il potenziale sono soluzione dell'equazione

$$U'(\vartheta) = -mg\ell(2\sin\vartheta + \alpha\frac{1}{\cos^2\vartheta}) = 0$$

   Ricordando che $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ è configurazione di equilibrio se

$$U'(\vartheta) = -mg\ell(1 + \frac{4}{3}\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{3}{4}$$

   Per studiare la stabilità della posizione di equilibrio calcoliamo la derivata seconda del potenziale per $\alpha = -\frac{3}{4}$

$$U''(\vartheta) = -2mg\ell(\cos\vartheta - \frac{3}{4}\frac{\sin\vartheta}{\cos^3\vartheta}).$$

Nella posizione di equilibrio $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ si ha

$$U''(\frac{\pi}{6}) = -2mg\ell(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{8}}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}mg\ell < 0.$$

e si può concludere che tale configurazione di equilibrioè stabile.

4. **Terzo quesito**

   Per il Principio delle Reazioni Vincolari,

   $$\mathbf{\Phi}_O \perp (B - A) \quad \text{reazione in } O, \qquad \mathbf{\Phi}_A = \Phi_A \hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad \text{reazione in } A$$

   Nella configurazione di equilibrio $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ il versore ortogonale all'asta AB
   è $\hat{\boldsymbol{u}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$
   La prima equazione cardinale della statica

   $$m\mathbf{g} + \mathbf{F} + \mathbf{\Phi}_O + \mathbf{\Phi}_A = \mathbf{0}$$

   proiettata sugli assi fornisce

   $$\begin{cases} -\frac{3}{4}mg + \frac{\sqrt{3}}{2}\Phi_O = 0 \\ -mg + \frac{1}{2}\Phi_O + \Phi_A = 0 \end{cases}$$

   quindi

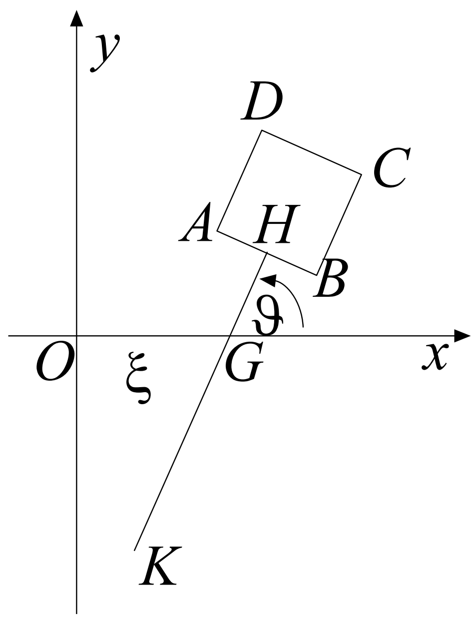
   $$\mathbf{\Phi}_O = \frac{\sqrt{3}}{2}mg(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \quad , \quad \mathbf{\Phi}_A = \frac{4-\sqrt{3}}{4}mg\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Esercizio 7
Un corpo rigido, mobile nel piano verticale Oxy con assi di versori $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ e $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ (come in figura), è costituito da un quadrato omogeneo $ABCD$ di lato ℓ e massa μ e da un'asta omogenea HK di lunghezza 3ℓ e massa ν che ha l'estremo H saldato nel punto medio del lato AB in modo tale che l'asta sia esterna al quadrato e perpendicolare ad AB.

1 - Determinare μ e ν in modo che la massa del corpo sia m e che il baricentro G del sistema disti 2ℓ da K.

Sapendo che G è vincolato a scorrere sull'asse x e che sul sistema agisce solo la forza peso, presi come parametri lagrangiani ξ, ascissa di G, e ϑ, angolo che l'asta HK forma con l'asse x,

2 - determinare due integrali primi di moto.



Soluzione dell'Esercizio 7

1. **Considerazioni generali**

   Il sistema è olonomo a due gradi di libertà. I vincoli sono fissi e bilaterali. Le forze attive sono conservative.

   La velocità angolare del corpo è $\omega = \dot{\vartheta}\hat{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}}$.

2. **Primo quesito**

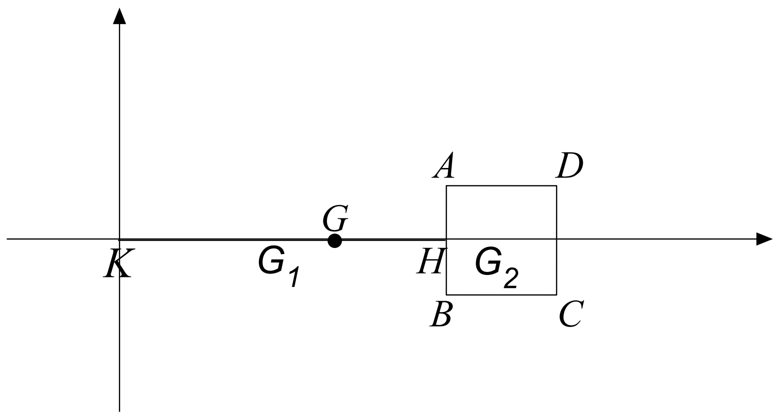


figura 1

   La massa del sistema materiale è

$$m = \mu + \nu.$$

   Per simmetria il baricentro del sistema di trova sull'asta KH e, per la proprietà distributiva del baricentro, (figura 1)

$$(\mu + \nu)|G - K| = \nu|G_1 - K| + \mu|G_2 - K|$$

   con G_1 baricentro dell'asta e G_2 baricentro del quadrato.
   Si ha

$$\begin{array}{lcl} \mu + \nu = m & & \mu = \frac{1}{4}m \\ & \Longrightarrow & \\ 2(\mu + \nu)\ell = \frac{3}{2}\ell\nu + \frac{7}{2}\mu\ell & & \nu = \frac{3}{4}m \end{array}$$

   In funzione dei parametri lagrangiani le coordinate del baricentro sono

$$G = (\xi, 0)$$

3. **Secondo quesito**
   Per il Principio delle Reazioni Vincolari, il sistema di reazioni vincolari è equivalente a un vettore $\Phi_G = \Phi\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ applicato in G. Il sistema delle forze

peso è equivalente $m\mathbf{g}$ applicato in G. Quindi sia le forze attive, sia le razioni vincolari risultano parallele all'asse y e hanno momento risultante nullo rispetto al polo G. Dalle equazioni cardinali della dinamica discende

$$\begin{array}{lcl} \dot{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} = 0 & & \dot{x}_G = \text{cost} \\ & \Longrightarrow & \\ \dot{\mathbf{K}}_G = \mathbf{0} & & K_G^3 = \text{cost} \end{array}$$

Poiché $\dot{x}_G = \dot{\xi}$ e $K_G^3 = I_G^3 \dot{\vartheta}$ si può concludere che gli integrali primi di moto sono

$$\dot{\xi} = \text{cost} \quad , \quad \dot{\vartheta} = \text{cost}$$

Il calcolo di I_G^3 non risulta necessario in quanto è costante. Per completezza

$$I_G^3 = I_{G_1}^3 + \frac{3}{4} m |G - G_1|^2 + I_{G_2}^3 + \frac{1}{4} m |G - G_2|^2 = \frac{65}{48} m \ell^2$$

Ad uno dei due integrali primi sopra trovati si poteva sostituire l'integrale primo dell'energia

$$T + V = E \quad \Rightarrow \quad T = E \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} [m \dot{\xi}^2 + \frac{41}{16} m \ell^2 \dot{\vartheta}^2] = E$$

Esercizio 8
Un sistema materiale, mobile nel piano verticale Oxy con assi di versori $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ e $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ (come in figura), è costituito da un'asta omogenea AB di lunghezza 2ℓ e massa m e da un disco omogeneo di massa m e raggio $\alpha\ell$ ($\alpha > 0$).
Il disco è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse y (come in figura), mentre l'asta ha l'estremo A incernierato nel centro del disco e l'estremo B vincolato a scorrere sull'asse x.
Preso come parametro lagrangiano φ angolo che l'asta AB forma con l'asse y

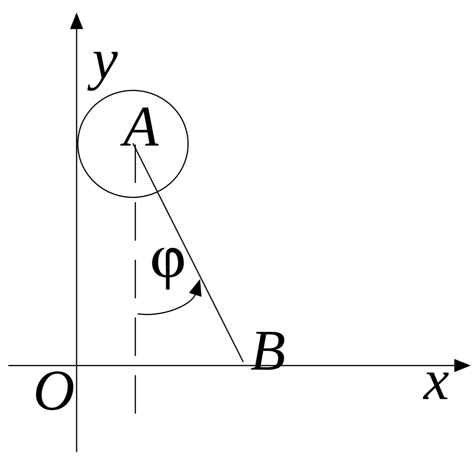
1 - determinare il centro di istantanea rotazione dell'asta e le equazioni cartesiane della base e della rulletta, disegnandone i grafici.

Sapendo che sul sistema agisce la forza peso e sul disco una coppia di momento $\mathbf{M} = (B - A) \wedge mg\hat{\boldsymbol{\jmath}}$,

2 - determinare per quale valore di α la configurazione $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ è di equilibrio e studiare la stabilità di tale configurazione;

3 - determinare le reazioni vincolari statiche esterne ed interne in tale configurazione;

4 - determinare l'energia meccanica del sistema



Soluzione dell'Esercizio 8

1. **Considerazioni generali**

   Il sistema è olonomo a un grado di libertà. I vincoli sono fissi e bilaterali. In funzione del parametro lagrangiano i punti A, B e G (baricentro dell'asta) hanno coordinate

   $$A = (\alpha\ell, 2\ell\cos\varphi) \quad , \quad B = (\alpha\ell + 2\ell\sin\varphi, 0) \quad , \quad G = (\alpha\ell + \ell\sin\varphi, \ell\cos\varphi)$$

   la velocità angolare dell'asta è

   $$\omega_a = \dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

   mentre la velocità angolare del disco ω_d si ottiene osservando che, per il vincolo di rotolamento senza strisciamento, H (punto di contatto del disco con l'asse y è centro di istantanea rotazione, quindi

   $$\mathbf{v}_A = \omega_d \wedge (A - H) \;\Rightarrow\; -2\ell\sin\varphi\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\jmath}} = \omega_d \wedge \alpha\ell\hat{\boldsymbol{\imath}} \;\Rightarrow\; \omega_d = -\frac{2}{\alpha}\sin\varphi\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

   mentre le forze attive si scrivono

   $$m\mathbf{g} = -mg\hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad , \quad \mathbf{M} = 2mg\ell\sin\varphi\hat{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

2. **Primo quesito**
   Per la determinazione del centro di istantanea rotazione C dell'asta, ricordando che $\mathbf{v}_P = \omega_a \wedge (P - C)$, è sufficiente osservare che B si muove sull'asse x e che A si muove sulla retta $x = \alpha\ell$ e quindi (vedi figura) da

   $$(C - A) \parallel \hat{\boldsymbol{\imath}} \quad , \quad (C - B) \parallel \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

   si ha
   $$x_C = x_B = \alpha\ell + 2\ell\sin\varphi \quad , \quad y_C = y_A = 2\ell\sin\varphi \tag{10}$$
   Eliminando il parametro φ da (10) si ha l'equazione della base

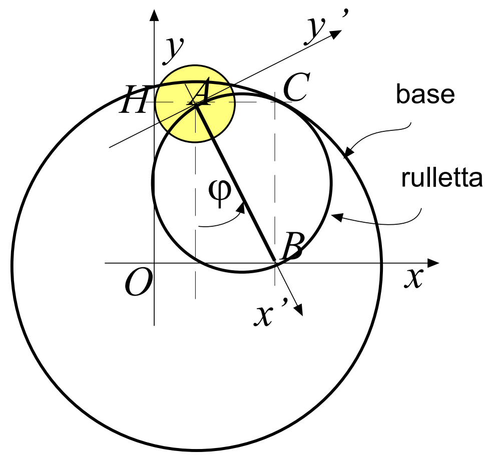
   $$(x - \alpha\ell)^2 + y^2 = 4\ell^2$$

   Rispetto al riferimento solidale al sistema $Ax'y'$ (come in figura) le coordinate di C sono

   $$x'_C = 2\ell\sin^2\varphi = \ell(1 - \cos 2\varphi) \quad , \quad y'_C = 2\ell\sin\varphi\cos\varphi = \ell\sin 2\varphi \tag{11}$$

   Eliminando il parametro φ da (11) si ha l'equazione della rulletta

   $$(x' - \ell)^2 + y'^2 = \ell^2$$



3. **Secondo quesito**

   Avendo il sistema un solo grado di libertà ed essendo le forze arrive conservative, le configurazioni di equilibrio sono quelle che rendono stazionario il potenziale. Il potenziale della forza peso è

$$-mgy_A - mgy_G = -3mgl\cos\varphi,$$

   per determinare il potenziale delle forze attive calcoliamo il lavoro elementare compiuto dalla coppia di momento $\mathbf{M}$

$$\begin{aligned} dL_M &= 2mg\ell\sin\varphi\hat{\boldsymbol{\imath}}\wedge\hat{\boldsymbol{\jmath}}\cdot(-\tfrac{2}{\alpha}\sin\varphi d\varphi\hat{\boldsymbol{\imath}}\wedge\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \\ &= \tfrac{2}{\alpha}mg\ell(\cos 2\varphi - 2)d\varphi = d[\tfrac{mgl}{\alpha}(\sin 2\varphi - 2\varphi)] \end{aligned}$$

   Quindi il potenziale delle forze attive è

$$U(\varphi) = -mg\ell[3\cos\varphi + \frac{1}{\alpha}(2\varphi - \sin 2\varphi)] + \text{cost.}$$

   I valori che rendono stazionario il potenziale sono soluzione dell'equazione

$$U'(\varphi) = mg\ell(3\sin\varphi - \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\alpha}\cos 2\varphi) = 0$$

   $U'(\frac{\pi}{6}) = 0$ se

$$mg\ell(\frac{3}{2} - \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\alpha}\frac{1}{2}) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3}$$

   Per studiare la stabilità della posizione di equilibrio calcoliamo la derivata seconda del potenziale con $\alpha = \frac{2}{3}$

$$U''(\varphi) = mg\ell(3\cos\varphi - 6\sin 2\varphi)$$

e per $\varphi = \frac{\pi}{6}$

$$U''(\frac{\pi}{6}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}mgl \quad \Rightarrow \quad \text{equilibrio stabile}$$

4. **Terzo quesito**
   Per il Principio delle Reazioni Vincolari,

$$\boldsymbol{\Phi}_H \Phi_{Hx}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \Phi_{Hy}\hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad \text{reazione esterna in } H,$$

$$\boldsymbol{\Phi}_B = \Phi_B\hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad \text{reazione esterna in } B,$$

$$\boldsymbol{\Phi}_A = \Phi_{Ax}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \Phi_{Ay}\hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad \text{reazione interna in } A.$$

   La seconda equazione cardinale per il disco con polo A e la prima equazione cardinale della statica per l'intero sistema permettono di determinare le reazioni vincolari esterne

$$\begin{cases} \mathbf{M} + \boldsymbol{\Phi}_H \wedge (A - H) = \mathbf{0} \\ \\ 2m\mathbf{g} + \boldsymbol{\Phi}_H + \boldsymbol{\Phi}_B = \mathbf{0} \end{cases}$$

   All'equilibrio $\mathbf{M} = mg\ell\hat{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}}$, proiettando sugli assi si ottiene

$$\begin{cases} mg\ell\hat{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \Phi_{Hy}\hat{\boldsymbol{\jmath}} \wedge \frac{2}{3}\ell\hat{\boldsymbol{\imath}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{Hy} = \frac{3}{2}mg \\ \Phi_{Hx} = 0 \\ \Phi_{Hy} + \Phi_B = 2mg \quad \Rightarrow \quad \Phi_B = \frac{1}{2}mg \end{cases}$$

   Per determinare la reazioni vincolare interna, la prima equazione cardinale applicata all'asta fornisce

$$m\mathbf{g} + \boldsymbol{\Phi}_A + \boldsymbol{\Phi}_B = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Phi}_A = \frac{1}{2}mg\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

5. **Quarto quesito**
   Per calcolare l'energia cinetica del sistema calcoliamo separatamente l'energia cinetica dell'asta e del disco.
   Per l'asta AB, applicando il teorema di König si ha

$$T_{AB} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2}I_G^3\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\varphi}^2$$

   Il disco ruota attorno all'asse ortogonale al piano xy passante per H

$$T_{disco} = \frac{1}{2}I_H^3\left[\frac{1}{3}\sin\varphi\dot{\varphi}\right]^2 = 3m\ell^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2$$

   quindi l'energia meccanica del sistema è

$$E = T_{AB} + T_{disco} - U = m\ell^2[\frac{2}{3} + 3\sin^2\varphi]\dot{\varphi}^2 + 3mgl[\cos\varphi + \varphi - \sin 2\varphi].$$

Esercizio 9

Un sistema materiale, costituito da un'asta omogenea di massa m e di lunghezza $8R$ e da un disco omogeneo di uguale massa m e raggio R, è mobile nel piano verticale Oxy con assi di versori $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ e $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ (come in figura). Il sistema è così vincolato

i - l'asta ha un'inclinazione costante $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ rispetto all'asse x e il suo baricentro M scorre su tale asse;

ii - il disco rotola senza strisciare sull'asta ed ha il baricentro G vincolato a scorrere sull'asse y.

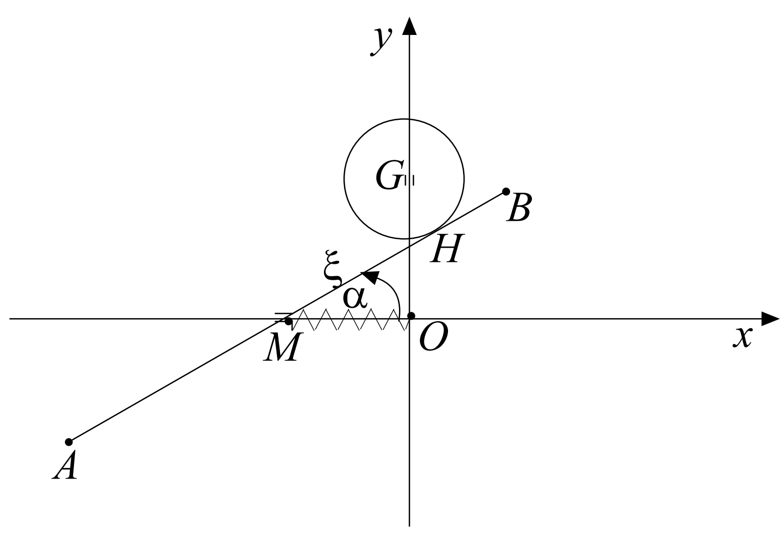
Oltre alla forza peso sul sistema agisce una forza elastica $\mathbf{F}_e = -\dfrac{\sqrt{3}mg}{R}(M - O)$ applicata in M.

Preso come parametro lagrangiano ξ in modo che $(H - M) = \xi\, vers(B - A)$, essendo H il punto di contatto tra il disco e l'asta,

1 - determinare il centro di istantanea rotazione del disco, le equazioni cartesiane di base e rulletta e disegnarne i grafici;

2 - determinare la configurazione di equilibrio del sistema e le reazioni vincolari esterne in tale configurazione;

3 - scrivere l'energia meccanica del sistema.



Soluzione dell'Esercizio 9

1. **Considerazioni generali**

   Il sistema è olonomo a un grado di libertà. I vincoli sono fissi.
   Il parametro lagrangiano ξ varia nell'intervallo $[-4R, 4R]$.
   In funzione del parametro lagrangiano i punti H, M e G hanno coordinate

   $$H = (\frac{R}{2}, \frac{\xi}{2}) \quad , \quad M = (\frac{R - \sqrt{3}\xi}{2}, 0) \quad , \quad G = (0, \frac{\xi + \sqrt{3}R}{2})$$

   L'asta trasla, per determinare la velocità angolare del disco osserviamo che

   $$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_H + \omega \wedge (G - H)$$

   e, per il vincolo di rotolamento senza strisciamento, $\mathbf{v}_H = \mathbf{v}_M$ quindi

   $$\frac{\dot{\xi}}{2}\hat{\boldsymbol{\jmath}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\xi}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \omega(\hat{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}}) \wedge (G - H) \quad \Rightarrow \quad \omega = -\frac{\dot{\xi}}{R}\hat{\boldsymbol{\imath}} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

   mentre le forze attive si scrivono

   $$m\mathbf{g} = -mg\hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad , \quad \mathbf{F}_e = \frac{mg}{2}(R - \sqrt{3}\xi)\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

2. **Primo quesito**
   Per la determinazione del centro di istantanea rotazione C del disco, ricordando che $\mathbf{v}_P = \omega \wedge (P - C)$, è sufficiente osservare che G si muove sull'asse y e che $\mathbf{v}_H \parallel \hat{\boldsymbol{\imath}}$ e quindi (vedi figura) da

   $$(C - G) \parallel \hat{\boldsymbol{\imath}} \quad , \quad (C - H) \parallel \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

   si ha

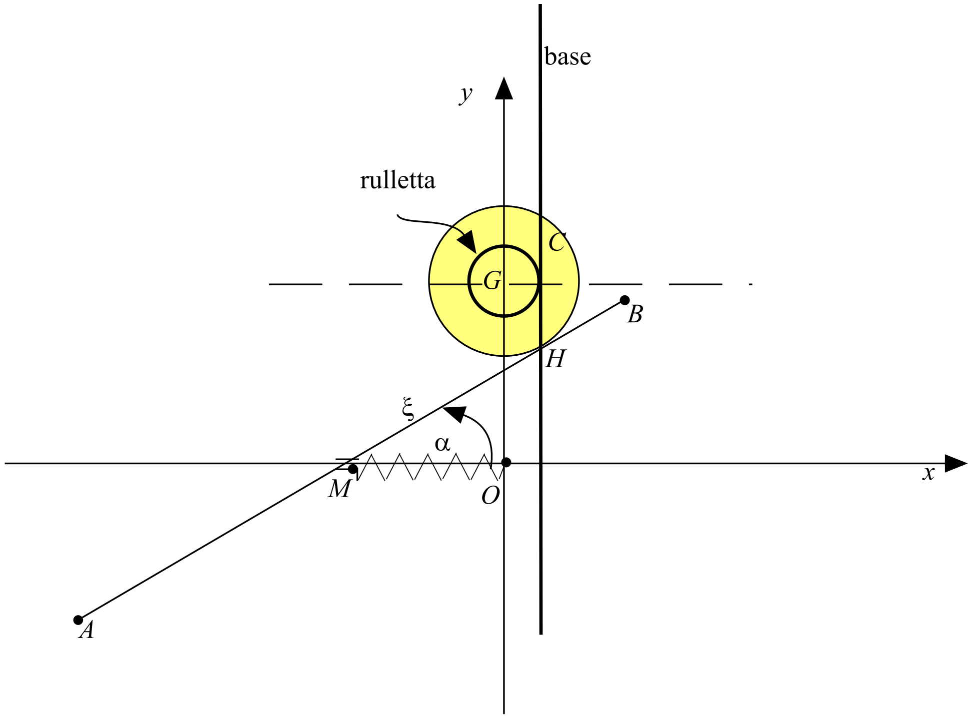
   $$x_C = x_H = \frac{R}{2} \quad , \quad y_C = y_G = \frac{\xi + \sqrt{3}R}{2}$$

   L'equazione della base

   $$x = \frac{R}{2}$$

   Per determinare la rulletta, osserviamo che, durante il moto, $|C - G| = \frac{R}{2}$, quindi la rulletta è la circonferenza di centro G e raggio $\frac{R}{2}$. Preso un sistema di assi cartesiani $Gx'y'$ solidali con il disco, l'equazione della rulletta è

   $$x'^2 + y'^2 = \frac{R^2}{4}$$



3. **Secondo quesito**

   Avendo il sistema un solo grado di libertà ed essendo le forze arrive conservative, le configurazioni di equilibrio sono quelle che rendono stazionario il potenziale.

$$U(\xi) = -mgy_G - \frac{\sqrt{3}mg}{2R}|M-O|^2 = \frac{mg}{4}[\xi - \frac{3\sqrt{3}}{2R}\xi^2] + \text{cost.}$$

   I valori che rendono stazionario il potenziale sono soluzione dell'equazione

$$U'(\xi) = \frac{mg}{4}[1 - \frac{3\sqrt{3}}{R}\xi] = 0$$

   L'unica posizione di equilibrio è

$$\xi = \frac{\sqrt{3}}{9}R$$

   Per il Principio delle Reazioni Vincolari,

$$\mathbf{\Phi}_G = \Phi_G \hat{\boldsymbol{\imath}} \quad , \quad \mathbf{\Phi}_M = \Phi_M \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

La prima equazione cardinale della statica per l'intero sistema permettono di determinare le reazioni vincolari esterne

$$2m\mathbf{g} - \mathbf{F}_e(\xi_e) + \mathbf{\Phi}_G + \mathbf{\Phi}_M = \mathbf{0}$$

Poiché all'equilibrio $\mathbf{F}_e(\xi_e) = \frac{1}{3}mg\hat{\boldsymbol{\imath}}$, proiettando sugli assi si ottiene

$$\mathbf{\Phi}_G = \frac{1}{3}mg\hat{\boldsymbol{\imath}} \quad , \quad \mathbf{\Phi}_M = 2mg\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

4. **Terzo quesito**
   Per calcolare l'energia cinetica del sistema calcoliamo separatamente l'energia cinetica dell'asta e del disco.
   L'asta AB trasla
   $$T_{asta} = \frac{1}{2}m[\mathbf{v}_M]^2 = \frac{3}{8}m\dot{\xi}^2$$

   Per il disco, applicando il teorema di König si ha

   $$T_{disco} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2}I_G^3\frac{\dot{\xi}^2}{R^2} = \frac{1}{8}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\frac{\dot{\xi}^2}{R^2} = \frac{3}{8}m\dot{\xi}^2$$

   quindi l'energia meccanica del sistema è

   $$E = T_{asta} + T_{disco} - U = \frac{3}{4}m\dot{\xi}^2 - \frac{mg}{4}[\xi - \frac{3\sqrt{3}}{2R}\xi^2].$$