Aufgabe 2.2

Funktion $T_1(n)$

$$T_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 4 \cdot T_1(\lceil n/2 \rceil) + n^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Um das Mastertheorem anzuwenden, müssen wir die Gleichung in die Form $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ bringen. In unserem Fall haben wir $a = 4$, $b = 2$ und $f(n) = n^2$. Das Mastertheorem kann so angewendet werden:

- Fall 1: Wenn $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$.
- Fall 2: Wenn $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
- Fall 3: Wenn $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$, und wenn zusätzlich $af(n/b) \leq kf(n)$ für ein $k < 1$ und hinreichend große n.

Für $T_1(n)$ haben wir:

- $a = 4$
- $b = 2$
- $f(n) = n^2$
- $\log_b a = \log_2 4 = 2$

Die Funktion $f(n) = n^2$ passt zum dritten Fall des Mastertheorems, da $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^2)$. Also gilt $T_1(n) = \Theta(n^2 \log n)$.

Die Größenordnung der Funktion $T_1(n)$ ist $\Theta(n^2 \log n)$ gemäß dem Mastertheorem.

Funktion $T_2(n)$

$$T_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 2 \cdot T_2(n-1) + 4 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Mastertheorem ist nicht direkt anwendbar, da der rekursive Term nicht die Form $T(n/b)$ hat. Wir müssen also die Substitutionsmethode verwenden, um die Größenordnung von $T_2(n)$ zu bestimmen.

1. $T_2(1) = 1$
2. $T_2(2) = 2 \cdot T_2(1) + 4 = 2 \cdot 1 + 4 = 6$
3. $T_2(3) = 2 \cdot T_2(2) + 4 = 2 \cdot 6 + 4 = 16$

4. $T_2(4) = 2 \cdot T_2(3) + 4 = 2 \cdot 16 + 4 = 36$
5. $T_2(5) = 2 \cdot T_2(4) + 4 = 2 \cdot 36 + 4 = 76$

Es lässt sich ein Muster erkennen: Jeder Schritt verdoppelt den vorherigen Wert und addiert 4. Wir können die Rekursion wie folgt ausdrücken:

$$T_2(n) = 2^n - 4$$

Die Größenordnung der Funktion $T_2(n)$ ist $O(2^n)$, wie aus der Substitutionsmethode abgeleitet. Da der dominante Term 2^n ist, bestimmt er die Größenordnung der gesamten Funktion.

Funktion $T_3(n)$

$$T_3(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 42 \cdot T_3(\lceil n/3 \rceil) + 39 \cdot T_3(\lfloor n/3 \rfloor) + 5n^3 + 69n & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Mastertheorem ist hier nicht direkt anwendbar. Normalerweise behandelt das Mastertheorem Fälle, in denen die Rekursion eine einzige Teilfunktion mit einem konstanten Faktor hat (z.B. $a \cdot T(n/b)$). Bei $T_3(n)$ haben wir aber zwei rekursive Aufrufe mit Teilungen.

Für $T_3(n)$, betrachten wir den dominanten Term der Rekursion, der $5n^3$ ist.

Da die rekursiven Terme durch $5n^3$ dominiert werden könnten, ist es wahrscheinlich, dass der Gesamtausdruck von $T_3(n)$ durch $5n^3$ dominiert wird. Das bedeutet, dass die Größenordnung von $T_3(n)$ wahrscheinlich $O(n^3)$ ist.