线性方程组

- 高斯消元法
- 系数矩阵&增广矩阵
- 解的存在性与唯一性

矩阵代数

- 矩阵的代数运算
- 矩阵的初等变换
- A可逆
  $\Leftrightarrow \exists$初等阵P_1, P_2, L, P_k, 使得$P_k L P_2 P_1 A = E$
  $\Leftrightarrow AX = 0$只有0解
  $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
- 对称矩阵：$A^T = A$
- 反对称矩阵：$A^T = -A$
- 对角形矩阵
- 正交矩阵：$A^T = A^{-1}$

行列式

- 行列式的性质
- $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = |A||C| \quad \begin{vmatrix} A & 0 \\ B & C \end{vmatrix} = |A||C| \quad \begin{vmatrix} 0 & A \\ C & B \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||C| \quad \begin{vmatrix} B & A \\ C & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$
  A是m阶矩阵，C是n阶矩阵
- 范德蒙德行列式：
  $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$
- 伴随矩阵：A^*, 将每个元a_{ij}替换成其代数余子式A_{ij}
  $AA^* = A^*A = |A|E$
  $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$
  $|A^*| = |A|^{n-1}$
- 克莱姆(Grammer)法则

n元线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$

当$|A| \neq 0$,存在唯一解：

$$x_j=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\frac{D_j}{|A|}$$

D_j表示A的第j列换成常数列后的行列式

向量空间

向量的线性相关性

- 线性方程组$BX=0$与$ABX=0$解的关系
  - $BX=0$的解一定是$ABX=0$的解
  - B的列向量线性相关，则AB的列向量也线性相关
  - AB的列向量线性无关，则B的列向量也线性无关
  - 若A的列向量线性无关，则$BX=0$与$ABX=0$同解，此时AB列向量线性相关（无关）当且仅当B的列向量线性相关（无关）。
- 向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,L,\alpha_p\}$ $(p\geq 2)$ (I)线性相关 $\Leftrightarrow$ (I)中至少有一个向量可以由其余$p-1$个向量线性表出
- 向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,L,\alpha_p\}$ (I)线性无关，$\{\alpha_1,\alpha_2,L,\alpha_p,\beta\}$ (II)线性相关，则β可由(I)线性表出，且唯一线性表出。
- 向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,L,\alpha_p\}$ (I)的一个部分组线性相关，则(I)线性相关。
- 向量组$a_j=(a_{1j},a_{2j},a_{3j})^T$ $(j=1,2,3)$ (I)线性无关，分别在a_j的后面添加一个分量得$\beta_j=(a_{1j},a_{2j},a_{3j},a_{4j})$ $(j=1,2,3)$，则β_1,β_2,β_3 (II)线性无关。
- n个n维列向量$\alpha_1,\alpha_2,L,\alpha_n$线性相关 $\Leftrightarrow$ n阶行列式$\det(\alpha_1,\alpha_2,L,\alpha_n)=0$
- 如果向量组所含向量个数比向量的分量数目更多，则向量组必然线性相关。

向量组的极大无关线性组和秩

- 若向量组A和向量组B可以互相线性表出，称向量组A与向量组B**等价**
- 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,L,\alpha_p$可由$\beta_1,\beta_2,L,\beta_t$线性表出，且$p>t$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,L,\alpha_p$必线性相关。

  若线性无关向量组$\alpha_1,\alpha_2,L,\alpha_p$可由$\beta_1,\beta_2,L,\beta_t$线性表出，则$p\leq t$。
- 两个等价的线性无关向量组，必包含相同个数的向量
- 极大无关组的一些性质:
  - 任意一个极大无关组都与向量组本身等价

- 一个向量组的任意两个极大无关组等价，且所含向量个数相等。

子空间

- 列空间$ColA$是A的列向量的所有可能的线性组合构成的集合
- 行空间$RowA$是A的行向量的所有可能的线性组合构成的集合
- 零空间$NulA$是齐次线性方程组$Ax = 0$的所有解向量构成的集合
- 解空间是m个方程n个未知量的齐次线性方程组$Ax = 0$的解集构成的集合

基和维数

- 基和维数

  > 对于矩阵$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$
  >
  > $A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  >
  > 取x_2, x_4, x_5为自由变量，则解为：
  >
  > $x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5$，$x_3 = -2x_4 + 2x_5$
  >
  > $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2\alpha + x_4\beta + x_5\gamma$
  >
  > 因此，
  >
  > $\{\alpha, \beta, \gamma\}$是$NulA$的一组基，有3个向量，则维数$dimNulA = 3$
  >
  > $\{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5\}$是$ColA$的一组基，有3个向量，则维数$dimColA = 3$

- 过渡矩阵

  设$\epsilon_1, \epsilon_2, L, \epsilon_n \ (I)$与$\eta_1, \eta_2, L, \eta_n \ (II)$是$n$维列向量空间$R^n$的两组基，则基$(II)$可由基$(I)$线性表出，即

  $$(\eta_1, \eta_2, L, \eta_n) = (\epsilon_1, \epsilon_2, L, \epsilon_n) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  则称$A = (a_{ij})_{n \times n}$是基$(I)$到基$(II)$的过渡矩阵，其中的第$j$列是$\eta_j$在基$(I)$下的坐标

- $rankA + dimNulA = n$

矩阵的秩

- $r(A) = r(A^T)$
- $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$
- $A_{s\times n}, B_{s\times m}, r[A, B] \leq r(A) + r(B)$
- $A_{s\times n}, B_{s\times n}, A$与$B$等价 $\Leftrightarrow$ $r_A = r_B$
- $r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$
- $r_{AB} \leq min\{r_A, r_B\}$

特征值与特征向量

矩阵的特征值与特征向量

- 特征值与特征向量的定义
- 特征值的性质：
  - $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
  - $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |A|$
  - 若λ是A的特征值，则$f(\lambda)$是$f(A)$的特征值

    若α是A的对应特征值λ的特征向量，则α也是$f(A)$的对应特征值$f(\lambda)$的特征向量
  - 方阵对应于不同特征值的特征向量线性无关

矩阵的相似及对角化

- 相似的定义：$\exists P, P^{-1}AP = B$，则A与B相似，记为$A \sim B$
- 相似的性质：
  - $|A| = |B|$
  - $rank(A) = rank(B)$
  - $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$
  - $trA = trB$
  - $A^m \sim B^m$，$m \in N$，若A可逆，则m可$\in Z$
  - $A^T \sim B^T$
  - $kA \sim kB$
  - $h(A) \sim h(B)$，$h(x)$为任意多项式
- 可对角化的条件

实对称矩阵的对角化

- 存在正交矩阵$Q(Q^T=Q^{-1})$，使得$Q^{-1}AQ$为对角形矩阵（称为A正交相似于对角形矩阵）
- 施密特正交化:

  设$\Sigma_1:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$是$R^n$中的线性无关组，令
  $\beta_1=\alpha_1,$
  $\beta_2=\alpha_2-(\beta_1,\beta_1)^{-1}(\alpha_2,\beta_1)\beta_1$
  $\cdots\cdots$
  $$\beta_t=\alpha_t-\sum_{i=1}^{t-1}(\beta_i,\beta_i)^{-1}(\alpha_t,\beta_i)\beta_i$$
  则$\sum_2:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$为一正交组，将其单位化得$\sum_3:\gamma_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1,\gamma_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2,\cdots,\gamma_t=\frac{1}{|\beta_t|}\beta_t$
  则$\sum_3$为一规范正交组，且对$\forall k=1,2,\cdots,t,$向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$与$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k$等价

二次型

- 二次型的基本形式:
  - 标准型：只有平方项
  - 规范型：系数为1,-1,0的标准型
- 化为标准型的方法:
  - 配方法
  - 正交变换发
- 分类：正定、负定、半正定、半负定、不定