

衍生品复习纲要

Karry Ran

The way of salvation is in it.

选择

判断（不需要修改）

填空

计算题 40 or 50

简答题（送分题）

1 第一章 导论

【名词】做填空用：

- 衍生产品（基本变量派生）
- 公开喊价系统 电子交易
- 场外交易市场 OTC 中央交易对手
 - OTC 只能 通过 CCP 进行交易？（×）
- 做市商 买入价（它们的买入 我们的卖出） 卖出价
- 远期合约、期货合约（哪个在交易所中）、期权合约
- 多头、空头（卖出期权也叫 期权承约）
- 期权

交易员类型（填空题）

1.1 对冲者

- 对冲者采用衍生产品合约来降低自己所面临的由于市场变化而产生的风险
- 期货/远期 对冲思路参考小麦-啤酒（手中有标的）
- 期权对冲思路就是买保险
- 对冲的目的是降低风险，对冲的结果并不一定保证比不对冲好（判断题）

1.2 投机者

- 投机者利用这些产品对今后市场变量的走向下赌注
- 期货/远期 投机（青山控股 伦敦镍事件）

- 远期投机
- 投机者使用期时，潜在的损失与收益都很大。但采用期权产品时，不管市场有多么糟糕，投机者的损失不会超过所支付的期权费用。

1.3 套利者（会算套利 买低卖高）

- 采用两个或更多相互抵消的交易锁定盈利
- 正是由于套利者的存在，所以才没有那么多套利机会

例题：

5. 一个投资者承约了一个远期合约的空头：在该合约中，投资者能够以 1.50 的汇率（美元/英镑）卖出 100 000 英镑。当远期合约到期时的汇率为：（a）1.49；（b）1.52 时，投资的损益分别为多少？

答：当远期合约到期时的汇率为：

（a）1.49 时 收益 $100000 \times (1.50 - 1.49) = 1000$ (美元)

（b）1.52 时 损失 $100000 \times (1.52 - 1.50) = 2000$ (美元)

6. 场外交易市场和交易所市场的区别是什么？场外交易市场的做市商给出的买卖差价是什么

答：

（1）区别：场外交易市场中，交易双方可以将交易递交到中央交易对手或进行双边清算；而在场内交易中必须要通过交易所的清算中心来进行清算。

（2）买卖差价是做市商取得的收益。

7. 假设你认为某股票价格将要上升，股票的当前价格为 29 美元，而 3 个月期限、执行价格为 30 美元的看涨期权价格为 2.9 美元，你总共有 5800 美元的资金。说明两种投资方式：一种是利用股票，另一种是利用期权。每种方式的潜在盈亏是什么？

答：由题意可知：若利用股票投资，我可以购买 $5800/29 = 200$ 支股票；若利用期权投资，我可有购买 $5800/2.9 = 2000$ 支股票期权。假设 3 个月后的现货价格为 x 美金，则有两种情况：

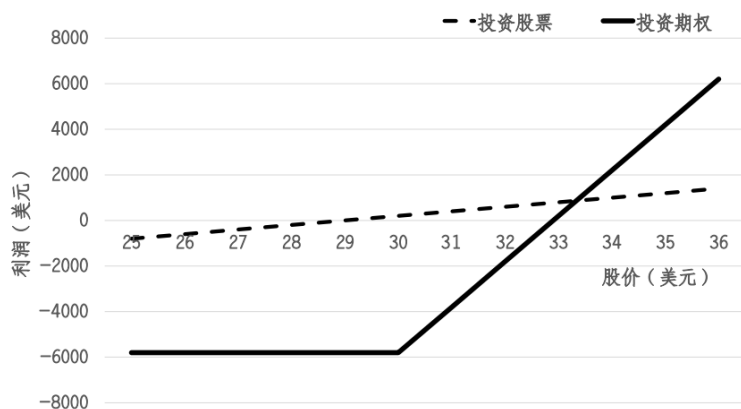
（1） $x \geq 30$ 若利用股票则盈利 $200 \times (x - 29)$ 美元；

若利用期权则盈（亏） $2000 \times (x - 30) - 5800$ 美元。

(2) $x < 30$ 若利用股票则盈（亏） $200 \times (x - 29)$ 美元；

若利用期权则亏 5800 美元。

图 1. 更为直观地展示了本题的答案。



对价格为 29 美元的股票两种投资方式的盈亏

图 1. 第 9 题答案示意图

8. 一位交易员卖出了 12 月到期的看跌期权，执行价格为 30 美元。期权价格为 4 美元。在什么情况下交易员会有盈利？

答：同上一题购买看涨期权的思路：设 12 月现货价格为 x ，则有两种情况：

(1) $x \geq 30$ 则交易员每股盈利 4 美元；

(2) $x < 30$ 则交易员每股盈（亏） $4 - (30 - x)$ 美元；

因此：当 12 月现货价格大于 26 美元时，交易员会有盈利。

27. 某交易员按 5 美元的价格卖出一份执行价格为 40 美元的看跌期权。交易员的最大盈利与最大亏损为多少？解释你的答案。

答：交易员的最大盈利为每股 5 美元；最大亏损为每股 $40 - 5 = 35$ 美元。

延续上一题的思路，设期权执行时现货的价格为 x ，则有两种情况：

(1) $x \geq 30$ 则期权不会被执行，交易员每股最大盈利为 5 美元；

(2) $x < 30$ 则期权会被执行，交易员亏损最大的情况为：现货价格 $x = 0$ ，此时交易员的亏损为每股 $40 - 5 = 35$ 美元。

图 2. 更为直观地展示了本题的答案。

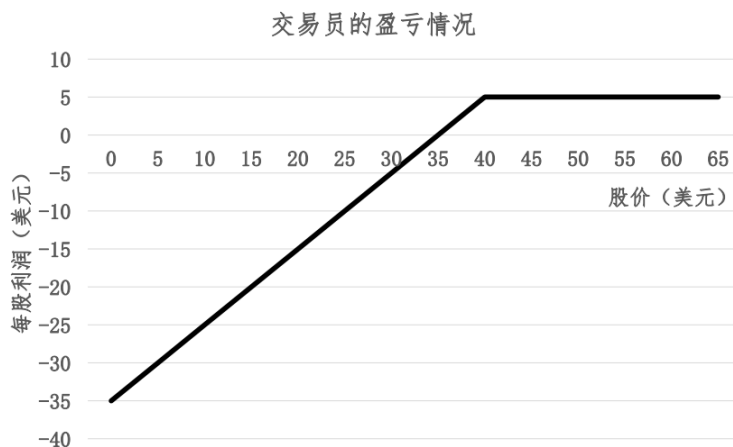


图 2. 第 27 题答案示意图

2 远期与期货市场

【名词】

- 交割意向书（期货）
- 合约规模
- 随着期货和约的交割月份逼近，期货价格会逐渐收敛至标的的资产即期价格
- 维持保证金、保证金催付、追加保证金

2.1 远期和期货的不同（估计是填空题）

对于远期合约，只有在最后到期时才会进行结算，而期货合约每天都需要进行结算，按照保证金制度进行每日定时结算

远期合约	期货合约
交易双方私下合约（OTC）	在交易所内交易
没有被标准化	标准化
通常指明一个交割日	有一系列交割日
在合约到期时结算	每日结算
通常会发生实物或现金交割	合约通常在到期前会被平仓
有信用风险	几乎没有信用风险

2.2 标准化

是指开发一种新合约时，交易所必须详细注明双方协议中的具体条款，尤其是资产品种、合约规模、交割地点以及交割时间。

2.3 保证金制度的目的和作用

避免发生违约

2.4 保证金的计算（大概会考计算）

就相当于期货的计算了

2.5 例题

- 假定你承销了一份纽约商品交易所的 7 月白银期货合约的空头，在合约中你能够以每盎司 17.20 美元的价格卖出白银，期货规模为 5000 盎司。最初保证金为 4000 美元，维持保证金为 3000 美元。期货价格如何变动才会导致保证金催付？你如果不满足保证金催付通知会有什么后果？

答：

- （1）当期货价格上升到 17.40 美元时会导致保证金催付（具体过程可见下表）

交易日	交易价格	结算价格	累计收益	保证金余额
1	17.20			4000
x		17.40	-1000	3000

(2) 如果不满足保证金催付通知经纪人就会强制对合约进行平仓

10. 说明为什么保证金可以使投资者免受违约风险？

答：保证金相当于投资者存在经纪人账上的资金，它是投资者用于弥补期货合约损失的保证。保证金账户金每天都会进行调整，以反映投资者在期货合约上的收益或损失。如果损失超过一定额度，那么投资者需要补充更多的保证金，这个机制排除了投资者违约的可能性。在投资者的经纪人和清算中心会员间买卖期货合约时，类似的机制排除了经纪人违约的可能性。再者，在清算中心会员和清算中心之间的交易中，也排除了清算中心会员违约的可能性。

3 跨期对冲 —— 牢牢记住 我们是对冲者

【填空】

- 完美对冲
- 交叉对冲
- 对冲比率，对冲效率（期货变化量和现货变化量的回归 R^2
-

3.1 基本操作（会说明 会计算）

3.1.1 空头对冲 —— 小麦农场主

思路：6 月份小麦产出，为了对冲小麦价格波动风险，打算做空来进行对冲，

- 完美对冲：呈约一个 6 月份的期货，约定价格为： F_0 期货到期日小麦产出后，做多期货进行平仓消耗 F_1 ，卖出现货获得 S_0 。此时相当于小麦的价格为：

$$F_0 - F_1 + S_0 = F_0$$

- 上述是完美对冲，那要是不完美呢？我小麦 5 月份出来了，总不能等到六月份，所以就出现了基差风险。

3.1.2 多头对冲 —— 啤酒厂厂长

3.2 基差风险 (important)

第一章有一个假设：在期货到期日时，标的价格会和期货价格相同。这样的话，不论最终标的价格是多少，我都是完全对冲的因为期货中约定的价格就是最后交割的价格。

但事实却是有时我们会在到期日前平仓，这个时候二者价格还会相同吗？

基差的定义

基差 = 被对冲资产的即期价格 - 用于对冲期货的合约价格

- 基差增强：基差变大
- 基差减弱：基差变小

基差风险

- 定义：对冲的风险与基差的不确定性有关，此风险就是基差风险。
- 产生的原因：在交割日前进行了平仓

公式推演

假设在 t_1 时刻建立对冲头寸，在 t_2 时刻（早于交割日期）平仓

- t_1 : 期货价格 F_1 ; 标的价格 S_1
- t_2 : 期货价格 F_2 ; 标的价格 S_2

Case1 : 如果是小麦农场主， t_1 时刻做空期货，那么最后平仓并销售小麦时，小麦的价格为：

$$S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2$$

Case 2 : 如果是啤酒厂厂长， t_1 时刻做多期货，那么最后平仓并购买小麦时，小麦的价格为：

$$S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2$$

对对冲者的影响

基差风险可以使得对冲者的头寸得到改善或者导致恶化。

- 对于空头对冲者（小麦农场主）
 - 基差增强，头寸会有所改善，这是因为在考虑了期货的盈亏后，卖出资产时会拿出更好的价格。
 - 基差减弱，头寸将会恶化
- 对于多头对冲者（啤酒厂厂长）
 - 基差增强，头寸会有所恶化，这是因为在考虑的期货的盈亏后，买入资产时要支付更高的价格。
 - 价差减弱，头寸将会改善

3.3 对合约的选择 —— 如何选择交割月份（判断）

一般来讲，当对冲期限与期货的交割月份之间的差距增大时，基差风险也会随之增大。因此一个经验法则是：尽量选择与对冲期最近，但却是其之后的交割月份。

3.4 交叉对冲

定义：对冲者给带来风险的资产用于对冲的合约标的资产并不一样。

假设在 t_1 时刻建立对冲头寸，在 t_2 时刻（早于交割日期）平仓

- t_1 ：非同一期货价格 F_1^* ；此标的的价格 S_1^*
- t_2 ：对冲资产期货价格 F_2 ；对冲资产的价格 S_2
非同一期货价格 F_2^* ；此标的的价格 S_2^*

$$S_2 + (F_1^* - F_2) + S_2^* - S_2^* = F_1^* + (S_2^* - F_2) + (S_2 - S_2^*)$$

基差风险分为两个部分：

- $(S_2^* - F_2)$ 表示期货标合约标的资产的基差风险
- $(S_2 - S_2^*)$ 表示由于被对冲资产与期货合约标的资产不一样而产生的基差

对冲比率：是指持有期货合约的头寸与资产风险敞口数量的比率，就是说对于每一份现货乘约多少份期货。

- 当期货标的与资产完全相同时，对冲比率肯定选为 1
- 如果采用交叉对冲，对冲比率就不一定为 1 了

3.4.1 对冲比率的选择

推导来源（可会可不会）设 对冲比率为 h

$$\pi = S - hF$$
$$h^* = \operatorname{argmin}(\Delta(\pi))$$

可以得到（填空题）

$$h^* = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F}$$

ρ 为期货和标的资产价格的相关系数

σ_S 为标的资产价格变动的标准差

σ_F 为期货价格变动的标准差

例子：小麦农村主选择大麦期货进行对冲，二者相关系数为 1；

$\sigma_{\text{小麦}} = 1$ $\sigma_{\text{大麦}} = 2$ 那 1 份小麦该选多少大麦期货做对冲呢？

$$h^* = 1 \times \frac{1}{2} = 0.5$$

这个结果是显然的，因为期货价格是标的资产价格变动的二倍嘛，谁的波动大肯定买的就少呗

3.4.2 最优合约对冲数量

知道了比率该如何求合约数目呢？假设：

- 需要对冲的标的资产价值为 Q_A
- 每一份期货价值为 Q_F
- 所需合约数目为 N
- 期货价格变动的标准差为 σ_F ； 标的价格变动的标准差为 σ_S
- 二者价格变动的相关系数为 ρ

那么：

$$N = \frac{Q_A * h}{Q_F}$$
$$h = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F}$$

3.4.3 上述推导变换为每一天（更关注百分比）

知道了比率该如何求合约数目呢？假设：

- 需要对冲的标的资产价值为 V_A
- 每一份期货价值为 V_F
- 所需合约数目为 \hat{N}

- 期货价格变动百分比的标准差为 $\hat{\sigma}_F$ ；标的价格变动百分比的标准差为 $\hat{\sigma}_S$
- 二者价格变动百分比的相关系数为 ρ

那么：

$$\hat{N} = \frac{V_A * \hat{h}}{V_F}$$

$$h = \rho \frac{\hat{\sigma}_S}{\hat{\sigma}_F}$$

这样细小的改善被称为 **尾随对冲**（填空题）

3.5 股指期货（必考 计算题）

股指跟踪一个虚拟股票组合的价值变化，每个股票在组合中的权重等于股票组合投资于这一股票的比例。（填空）<在此我们就将其称为“大盘”>

$$N^* = \beta \frac{V_A}{V_F}$$

V_F 为一份股指期货的价值

这个公式不难理解， $\hat{h} = \beta$ 意思是很清晰的 β 就是标的股票价格变化对大盘的回归

这样如果对自己的股票进行完全对冲后，市场风险全部被抵消没有 β 风险，只保留了所选股票的 α 收益和无风险利率（判断，对冲后就没收益了？）

3.5.1 改变组合的 β （必考计算）

在公司金融中了解到想要改变组合的 β 可以通过改变权重，现在学习如何从衍生品的角度来改变 β 很简单！

如果想要将 $\beta \Rightarrow \beta^*$ 那么有：

- 调高 β 系数 即 $\beta^* > \beta$ 那么就该做多期货，份数： $N_1^* = (\beta^* - \beta) \frac{V_A}{V_F}$
- 调低 β 系数 即 $\beta^* < \beta$ 那么就该做空期货，份数： $N_1^* = (\beta - \beta^*) \frac{V_A}{V_F}$

3.6 习题：

假设一家公司持有价值 2000 万美元、beta 值为 1.2 的股票组合。该公司利用股指期货来对冲风险。股指期货的当前水平是 1080，每一份期货合约是关于 250 美元乘以股指。什么样的对冲可以使风险极小化？公司怎么做才可以将组合的beta 值降低到 0.6？

答：

(1) 风险极小化对冲时，应购空头股指期货合约数 $N^* = \beta \frac{V_A}{V_F}$

$$V_F = 1080 \times 250 = 270000$$

$$\text{所以：} N^* = 1.2 \times \frac{20000000}{270000} = 88.9$$

即购买 89 份的空头股指期货合约数来进行对冲可使风险极小化

(2) 应购买的空头股指期货合约数为： $N = (1.2 - 0.6) \times \frac{V_A}{V_F} = 44.4$

即：公司应当购买 45 份的空头股指期货合约才可以将组合的 beta 值降低到 0.6

4 利率 —— 何处都有

【填空】

- n 年的零息利率是指在今天投入资金并连续保持 n 年后所得的收益率，所有的利息以及本金都在第 n 年年末支付给投资者，在 n 年期满之前，不支付任何利息收益。
- LIBOR 伦敦同业拆借利率
- 平价收益率
- 瞬时远期利率

零息利率与期限关系的图形叫零息利率曲线。

4.1 债券定价

应该只会考一个债券定价，其他的一任何算利率的都不会考查到，找准零息利率贴现回去就好。会根据国债价格来定零息利率。就一期一期的回算就可。

4.2 远期利率

远期利率是由当前零息利率所隐含的对应于将来时间段的利率，也就是说站在今天时间点上推算未来某个时点的零息利率

- T_1 时零息利率为 R_1
- T_2 时零息利率为 R_2
- T_1 到 T_2 时间期限内的零息利率为 R_F

$$e^{R_1 T_1} \times e^{R_F (T_2 - T_1)} = e^{R_2 T_2}$$

$$R_F = \frac{R_2 T_2 - R_1 T_1}{T_2 - T_1}$$

4.3 远期利率合约 FRA

4.3.1 FRA 的基本说明

定义：

- R_K ：FRA 中的约定利率
- R_F ：今天计算的介于 T_1 和 T_2 之间的远期 LIBOR
- R_M ：在时间 T_1 观察到的 T_1 和 T_2 之间真正的 LIBOR
- L ：合约的本金

注意：一般情况下 $R_K = R_F$ 这是肯定的，刚开始签订时远期利率合约价值为 0

那么公司 X 签订了 FRA 收固定利率付浮动利率，对手盘 Y 收浮动利率付固定利率

所以：

- X 会收到： $L(R_K - R_M)(T_2 - T_1)$
- Y 会收到： $L(R_M - R_K)(T_2 - T_1)$

尽管这笔现金到 T_2 才能拿到，但是在 T_1 就知道能够拿到了多少了。

4.3.2 远期利率的价值（必考计算题）

签订 FRA 时，因为 $R_K = R_F$ 所以 FRA 价值为 0，后面 R_K 就不会变了 R_F 会变，所以 FRA 就有了价值。

站在今天的时间点上，FRA 价值几何？无非是将 T_2 的现金流贴现罢了

$$V_{FRA} = L(R_K - R_M)(T_2 - T_1)e^{-R_2 T_2}$$

R_2 为站在本时间点看 T_2 时刻的无风险利率

4.4 例题

4. 一个投资者在年初投入 1000 美元，年末收入 1100 美元。计算在不同复利频率下的收益率：（1）一年复利一次；（2）一年复利两次；（3）每月复利一次（4）连续复利

答：

（1）一年复利一次：设收益率为 r_1 则 $1000 \times (1 + r_1) = 1100$

解得： $r_1 = 10\%$

（2）一年复利两次：设收益率为 r_2 则 $1000 \times (1 + \frac{r_2}{2})^2 = 1100$

解得： $r_2 = 9.76\%$

（3）每月复利一次：设收益率为 r_3 则 $1000 \times (1 + \frac{r_3}{12})^{12} = 1100$

解得： $r_3 = 9.57\%$

（4）连续复利：设收益率为 r_4 则 $1000 \times e^{r_4} = 1100$

解得： $r_4 = 9.53\%$

11. 假设 6 个月期、12 个月期、18 个月期、24 个月期和 30 个月期得零息利率分别为每年 4%、4.2%、4.4%、4.6% 和 4.8%，按照连续复利。估计一个面值为 100 美元的债券价格，假定债券在第 30 个月后到期，债券券息率为每年 4%，每半年付息一次

答：

设债券价格为 y ，每半年付息为 $100 \times 2\% = 2$ ，则有：

$$y = 2 \times e^{-0.04 \times 0.5} + 2 \times e^{-0.042 \times 1} + 2 \times e^{-0.044 \times 1.5} + 2 \times e^{-0.046 \times 2} + 102 \times e^{-0.048 \times 2.5}$$

可得 $y = 98.4$

12. 假设一个 3 年期债券得券息率为 8% ，每半年付息一次，债券的现金价格为 104，债券的收益率为多少？

答：

设债券收益率为 r ，则有：

$$4 \times e^{-r \times 0.5} + 4 \times e^{-r \times 1} + 4 \times e^{-r \times 1.5} + 4 \times e^{-r \times 2} + 4 \times e^{-r \times 2.5} + 104 \times e^{-r \times 3} = 104$$

可得 $r = 6.407\%$

13. 3 年期 无风险利率（连续复利）为 3.7%，第三年内支付 5% 利率（按年复利）并收取 LIBOR 面值为 100 万美元，第三年的远期 LIBOR 为 5.5%（按年）

答：

$$V_{\text{FRA}} = 100 \times (5.5\% - 5\%) \times e^{-0.037 \times 3} = 0.447 \text{ (万)} \$$$

即 FRA 在当下的价值为 0.447 万元

5 确定远期和期货价格

5.1 三类资产

- 投资资产：至少有一些交易员仅仅是为了投资目的而持有的资产。并不是说投资资产一定只能用来投资（白银也有自己的工业价值）但是一个条件是至少有一些人是仅仅为了投资。（判断题）
- 货币
- 消费资产：持有的主要目的是消费而不是投资

5.2 投资资产的远期价格

无风险套利方案：

- 如果 $F_0 > \text{理论的远期价格}$ ：做空期货，做多现货
- 如果 $F_0 < \text{理论的远期价格}$ ：做多期货，做空现货

5.2.1 最简单的情况

这样去理解，如果我想要在 t_1 处有一份现货，在时间点 t_0 处我有两种选择：

1. 花 S_0 直接买现货存到 t_1 我有一份现货
2. 签订一份期货期货，约定到 t_1 交割我以 F_0 的价格进行交割

这样在 t_1 时刻完全等价，那在 t_0 也应该完全等价，因此有

$$F_0 e^{-rT} = S_0$$
$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

5.2.2 不许卖空

没有任何影响，因为市场上存在手里有标的资产的人

$$F_0 e^{-rT} = S_0$$
$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

5.2.3 提供中间间断收入（例如股息）

如果仍然采用刚刚的思路

1. 花 S_0 直接买股票现货存到 t_1 我有一份股票现货 + 所派发的股息
2. 签订一份期货，约定到 t_1 交割我以 F_0 的价格进行交割

这样要想在 t_1 时刻完全等价 t_0 时刻选择 1 就要欠一些钱

假设 I 为所有股息贴现至 t_1 时的价值（一定要会算）

$$F_0 e^{-rT} = (S_0 - I)$$
$$F_0 = (S_0 - I) e^{rT}$$

5.2.4 提供中间连续收入（例如股票收益率已知）

$$F_0 e^{-rT} = S_0 e^{-qT}$$
$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T}$$

一定要注意这里面的 r q 都是连续复利率，如果出现不是的还要进行换算

5.2.5 补充：远期和期货的价格相等吗？

期货要交保证金，就损失了利息嘛

- 当资产价格与利率正相关时，期货价格往往会高于远期价格
- 资产价格与利率负相关时，期货价格往往会低于远期价格

5.3 投资资产的远期合约价值（必考计算）

签订了期货后，有：

- 远期约定的到期交割价格： K （固定了）
- 远期的价格 F_0 还在浮动

刚开始签订时肯定有 $K = F_0$ 但每一天远期的价格 F_0 都会浮动（每天标的的价格都在变，远期的价格为什么不变？）

牢牢记住这个 F_0 一定是根据标的现货价格推出来的

因此有远期合约价值 f

$$f = (F_0 - K)e^{-rT}$$

可以将上述三种根据 S_0 计算 F_0 的方式分别代入可以得到三种结果

【例题（必须会做）】一个无股息股票的远期合约多头是在之前成交的，这个远期合约还有 6 个月到期，无风险利率（连续复利）为 10%，当前股票价格为 25 美元，远期合约的交割价格为 24 美元。

STEP 1 先根据 S_0 计算 F_0 : $F_0 = S_0 e^{rT} = 26.28$

STEP 2 再根据公式进行贴现: $Val = (F_0 - K)e^{-rT} = 2.17$

5.4 货币上的汇率远期和期货合约

就把外币当成一个能够提供确定利率（外币的利率）的股票

汇率在这个地方为：一单位外币价值多少美元。（把外币当成商品）

在 t_1 时拥有 1 单位外币有以下两种选择：

- 持有外币，外币无风险投资，到 t_2 换回美元，则 t_2 时有： $e^{r_f T} F_0$
- 当期换回美元，美元无风险投资则 t_2 时有： $S_0 e^{r T}$

二者应该等价，所以有：

$$F_0 = S_0 e^{(r - r_f)T}$$

注意：

- 如果远期汇率大于理论汇率，那么做多外币，做空远期
- 如果远期汇率小于理论汇率，那么做空外币，做多远期

（参看 P97 那道例题）

5.5 商品期货

5.5.1 需要存储的

思路和之前是一样的，只不过存有现货需要存储资金

$$F_0 = (S + U)e^{rT}$$
$$F_0 = e^{(r+u)T}$$

5.5.2 消费商品

只是为了投资的话，上面的公式仍然适用

但是为了使用的话必定有：

$$F_0 \leq (S + U)e^{rT}$$
$$F_0 \leq e^{(r+u)T}$$

5.6 持有成本（必考点）

换一个角度思考期货价值罢了，为什么期货价格和即期价格之间有差别？

股票拿在手里面没有股息的话，什么都做不了，因此产生了 r 的持有成本

设持有成本为 c ：

- 股指的持有成本： $\$r - q\$$
- 货币的持有成本： $\$r - r_f\$$
- 对于提供中间收益率 q 和储存成本 u 的资产持有成本： $\$r - q + u\$$

所以综合起来，期货的价格满足：

$$F_0 = S_0 e^{cT}$$

【填空】

- 期货价格低于当前即期价格 \Rightarrow 现货溢价（贴水）
- 期货价格高于当前即期价格 \Rightarrow 期货溢价（升水）

5.7 例题

4. 一个股指的当前价格为 350，无风险利率为每年 4%(连续复利)，股指的股息收益率为每年 3%。4个月期的期货价格为多少？

答：由 $F_0 = S_0 e^{\{(4\% - 3\%)\frac{4}{12}\}}$ 可得 $F_0 = 351.17\$$

即 4个月期的期货价格为 351.17

12. 假设无风险利率为每年 6%（连续复利），股指股息收益率为每年 4%。股指的当前价格为 400，在 4 个月后交割的期货合约中期货价格为 405。这时会存在什么样的套利机会？

答：根据无套利原则，可以求得 4 个月期的期货价格 F_0 应该为：

$$F_0 = S_0 e^{\{(6\% - 4\%) \times \frac{4}{12}\}} \text{ 可得 } F_0 = 402.68$$

很明显当前的期货价格定高了，所以发现一个套利机会：可以先以 6% 的无风险利率向银行借入资金来做多股票现货，同时承约 4 个月期货合约中的空头。

26. 2012 年年初，瑞士法郎与美元之间的汇率为 1.0404（每法郎对应的美元数）。美国和瑞士的利率分别是每年 0.25% 和 0（连续复利）。3 个月期限的远期汇率为 1.0300（每法郎对应的美元数）。这时存在什么样的套利机会？如果汇率是 1.0500（每法郎对应的美元数），你的答案会如何改变？

答：根据无套利原则，可以求得 3 个月期限的远期汇率的价格 F_0 应该为：

$$F_0 = S_0 e^{\{(0.25\% - 0\%) \times \frac{3}{12}\}} \text{ 可得 } F_0 = 1.0411$$

1. 远期汇率为 1.0300 的情况

明显定低了，发现这样的套利机会，即：

- 以 0% 的利率借入法郎，期限 3 个月。将法郎全部转化为美元，并以 0.25% 的利率投资 3 个月。
- 同时承约一份 3 个月的远期合约，在合约中以 1.0300（每法郎对应的美元数）的汇率用美元买入法郎

2. 远期汇率为 1.0500 的情况

明显定高了，发现这样的套利机会，即：

- 以 0.25% 的利率借入美元，期限 3 个月。将美元全部转化为法郎，并以 0 的利率投资 3 个月。

- 同时承约一份3个月的远期合约，在合约中以 1.0500（每法郎对应的美元数）的汇率用法郎买入美元

28. 当前美元/欧元的汇率每欧元兑1.2美元，6个月期的远期汇率为 1.1950，6个月的美元利率为每年1%（连续复利）。估计6个月的欧元利率

答：设6个月欧元利率为 r_q

由于 $F_0 = S_0 e^{\{(r - r_q) \frac{6}{12}\}}$

带入可解得： $r_q = 1.00835\%$

估计 6 个月的欧元利率为 1.00835%

6 互换

和远期利率最大的不同就是在于：远期只有一次，互换可以有多个点持续

一定要注意：每一笔互换都是通过前一期的差得到的！！

6.1 利率互换的相对优势

	固定利率	浮动利率
AAACrop	4.0%	6月期 LIBOR - 0.1%
BBBCrop	5.2%	6月期 LIBOR + 0.6%

由于 A 的信誉比较好，所以 A 不管是借用浮动利率还是固定利率都要低于 B，但是在固定利率上低 1.2% 浮动利率上只低了 0.7% 因此我们说 B 在浮动利率上有优势，A 在固定利率上有优势。但是现在 A 想借入浮动利率，B 想借入固定利率，怎么办？能不能来点优惠？肯定可以，而且双方都公平的话肯定是都节约 0.25%

策略就是相对优势互换：

- A 以固定利率 4% 从银行贷款
- B 以 LIBOR + 0.6% 从银行贷款
- 然后 A 定期给 B LIBOR，B 定期给 A 4.35% 的利率

- 这样 B 总共是 4.95% 的固定利率，A 则是 LIBOR - 0.35% 的浮动利率

大家谁也不信任谁，找银行，银行要赚钱呀，他想分 0.1% 此时最多双方各拿 0.2%

- A 以固定利率 4% 从银行贷款
- B 以 LIBOR + 0.6% 从银行贷款

6.2 利率互换的定价（必考点）

利率互换说白了：就是多个 FRA 的集合体，每一个 FRA 分别定价并且贴现就得到了整体互换的价值。

注意互换价值为 0 并不意味着每个 FRA 都为零，只是说 FRA 价值总和为 0

步骤：

- 对于每个确定现金流的 LIBOR 计算相应远期利率
- 在假设 LIBOR 等于远期利率的情况下，计算现金流
- 以无风险利率贴现

【P132 例题 考前梳理一遍】

完全掌握，其实没有任何难度

6.3 货币互换的相对优势

本质上和利率互换没有任何区别

	美元	澳元
通用	5.0%	7.6%
快达	7%	8%

可以看到通用在美元上有优势，快达在澳元上有优势，差 1.6 %

通用要借澳元，快达要借美元，怎么办，加个中介做互换呗

- 通用：以 5.0% 借入美元

- 快达：以 8% 借入澳元
- 然后按照利率的思想换就可以了

6.4 货币互换定价

理论和操作上均同利率互换定价

到时候画表仔细点，就可以了

相较于利率不同的地方是，这个地方多了个远期汇率，需要由第一期定价

6.5 例题（必须全部会做）

1. 解：
我设计的互换方案如图 1. 所示



图 1. 互换方案

可以看到本方案的最终结果：

- 银行净赚 0.1% 的净收益
- 公司 A 得到浮动利率 $\text{LIBOR} - 0.3\%$ 节省了 0.4% 的利率
- 公司 B 得到固定利率 6.0% 节省了 0.4% 的利率

因此对两家公司而言这一互换方案有同样的吸引力

2. 解：
- 因为所有期限的 6 个月期 LIBOR 远期利率均为 3% 在此假设 LIBOR 等于远期利率。
- 对于支付浮动利息方其现金流以及现金流贴现值展现在表 1. 中，现金流的单位均为（百万美元）

时间（月）	固定利率现金流	浮动现金流	净现金流	贴现因子	净现金流贴现值
4	+2	-1.2	+0.8	0.991	+0.793
10	+2	-1.5	+0.5	0.975	+0.488
总计					+1.281

表 1.

对于支付固定利息方其现金流以及现金流的贴现值展现在表 2. 中，现金流的单位均为（百万美元）

时间（月）	固定利率现金流	浮动现金流	净现金流	贴现因子	净现金流贴现值
4	-2	+1.2	-0.8	0.991	-0.793
10	-2	+1.5	-0.2	0.975	-0.488
总计					-1.281

表 2.

因此：

- 对于支付浮动利息方，互换的价值为：+128.1万美元
- 对于支付固定利息方，互换的价值为：-128.1万美元

3. 解：

我设计的互换方案如图 2. 所示

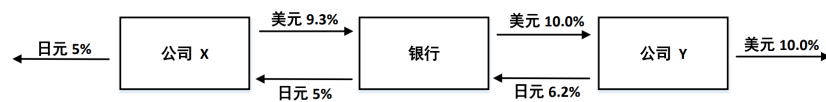


图 2. 互换方案

可以看到本方案的最终结果是：

- 公司 X 支付 9.3% 的美元利息 获得 0.3% 的改善
- 公司 Y 支付 6.2% 的日元利息 获得 0.3% 的改善
- 银行赚取 1.2% 的日元利息，损失 0.7% 的美元利息 承担所有的汇率风险

7 （第十章 期权）

7.1 期权的基本概念

看涨期权：给期权持有者将来某个日期以一定价格买入某资产的权利

看跌期权：给期权持有者将来某个日期以一定价格卖出某资产的权利

美式期权：在到期日之前的任何时刻行驶权利

欧式期权：只有到到期日才能行驶权利

实值期权：本身就具有价值的期权

- 看涨 行权价格 < 股票价格
- 看跌 行权价格 > 股票价格

虚值期权：本身没有价值的期权

- 看涨 行权价格 > 股票价格
- 看跌 行权价格 < 股票价格

平值期权： $S = K$

内含价值：期权立即被行使时所具有的价值。

- 看涨期权的内在价值为 $\text{Max}(S - K, 0)$
- 看跌期权的内在价值为 $\text{Max}(K - S, 0)$

时间价值：美式看涨期权的最优做法不会是立即行权，这个时候期权有时间价值。

期权整体价值 = 内含价值 + 时间价值

7.2 期权图

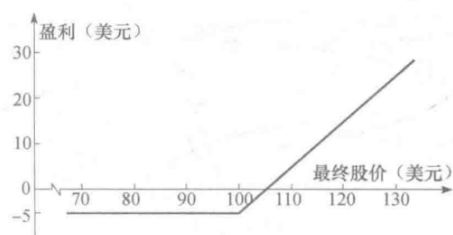


图 10-1 买入 1 股股票上欧式看涨期权的盈亏
(期权价格 = 5 美元, 执行价格 = 100 美元)

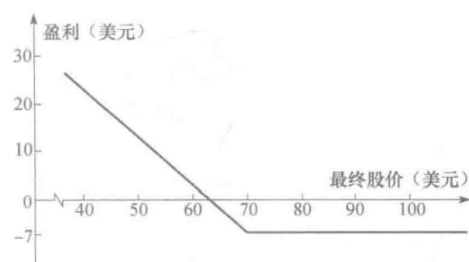


图 10-2 买入 1 股股票上看跌期权的盈利
(期权价格 = 7 美元, 执行价格 = 70 美元)

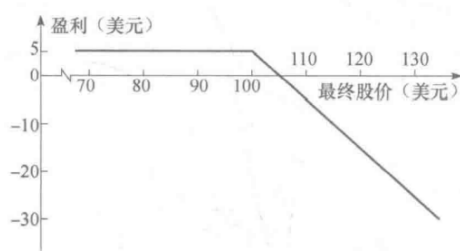


图 10-3 卖出看涨期权的盈亏图
(期权价格 = 5 美元, 执行价格 = 100 美元)

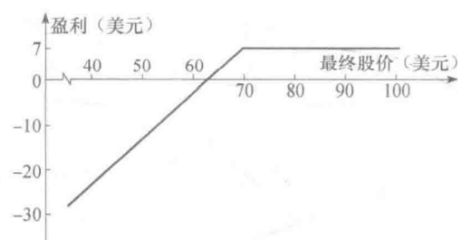


图 10-4 卖出看跌期权的盈亏图
(期权价格 = 7 美元, 执行价格 = 70 美元)

8 (第十一章 股票期权的性质)

8.1 六大因素对期权价格的影响(必考填空、选择)

表 11-1 当一个变量增加而其他变量保持不变时, 对于股票期权价格的影响

变量	欧式看涨	欧式看跌	美式看涨	美式看跌
当前股票价格	+	-	+	-
执行价格	-	+	-	+
时间期限	?	?	+	+
波动率	+	+	+	+
无风险利率	+	-	+	-
股息数量	-	+	-	+

注: + 代表当这一变量增加时, 期权价格增加或保持不变; - 代表当这一变量增加时, 期权价格减小或保持不变; ? 代表变化关系不明确。

8.1.1 股票价格与执行价格

期权收益 = 股票价格 - 行权价格

- **股票价格增加**：看涨期权的收益会增加，价值增加，看跌期权价值会减少。
- **执行价格增加**：看涨期权的收益会减少，价值减少，看跌期权价值增加

或者换个角度：

- 股票价格越高看涨期权越容易行权，看跌期权越难以行权
- 执行价格越高看跌期权越容易行权，看涨期权越难以行权

8.1.2 时间期限

对于美式期权而言：长时期期权持有者拥有比短时期期权持有者行权的更多机会，因此时间期限越长，价格至少不可能越低。

对于欧式期权而言：因为只能在到期日才能行权，所以如果中间出现波动可能会使时间价值功亏一篑，变动就不明确了

8.1.3 波动率

波动率衡量的是未来股票价格变动的不确定性，由于期权的存在，造成收益不对称，因此随着波动率增加期权的价值都会增加

8.1.4 无风险利率——卖权；借钱买正股对冲

无风险利率越高

- 看涨期权价格越高（借钱的成本高了）
- 看跌期权价格越低

8.2 期权价格的上下限

8.2.1 上限：

欧式看涨 c ： $c \leq S_0$

美式看涨 C ： $C \leq S_0$

看涨期权的价格不会超过股票自身的价格

- 如果超过了：干嘛不去直接买股票？
- 如果超过了：买股票卖期权无风险套利

欧式看跌 p ： $p \leq Ke^{-rt}$

美式看跌 P : $P \leq K$

看跌期权在行权时价格不可能超过行权价格

- 如果超过了，就算股票跌倒 0 也不可能有收益
- 如果超过了：卖权，无风险利率投资

8.2.2 下限 —— 记忆方法：看涨期权是要买的，所以要有一笔钱，看跌期权是要卖的，所以要有股

目前只考虑欧式期权的

欧式看涨 c：考虑两种投资

- 组合 A：一份欧式看涨期权 + 在行权时间 T 提供收益 K 的零息债券
- 组合 B：一份股票现货

T_0	$S_T > K$	$S_T < K$
$A (c + Ke^{-rT})$	行权: S_T	不行权: K
$B(S_0)$	S_T	S_0

不管怎么样在 T 时间的价值 A 都要大于 B

所以有：

$$\begin{aligned} c + Ke^{-rT} &\geq S_0 \\ c &\geq S_0 - Ke^{-rT} \end{aligned}$$

欧式看跌 p：考虑两种投资

- 组合 A：在行权时间 T 提供收益 K 的零息债券
- 组合 B：一份股票现货 + 一份欧式看跌

T_0	$S_T > K$	$S_T < K$
$A (Ke^{-rT})$	K	K
$B(S_0 + p)$	不行权: S_T	行权: K

所以有：

$$\begin{aligned} S_0 + p &\geq Ke^{-rT} \\ p &\geq Ke^{-rT} - S_0 \end{aligned}$$

8.3 看涨看跌平价公式

现在我们再构建两个组合

- 组合 A：一份欧式看涨期权 + 在行权时间 T 提供收益 K 的零息债券
- 组合 B：一份股票现货 + 一份欧式看跌

T_0	$S_T > K$	$S_T < K$
$A (c + Ke^{-rT})$	行权: S_T	不行权: K
$B(S_0 + p)$	不行权: S_T	行权: K

看涨看跌平价公式

$$S_0 + p = c + Ke^{-rT}$$

付股息的看跌看涨平价关系式（同样方式去推导）

$$p + S_0 = c + D + Ke^{-rt}$$

8.4 一些其他重要的推导

无股息美式看涨期权不会提前行权

Case: 期限1个月的美式看涨期权，股票价格为 70 行权价格为 40

- 如果觉得会涨，想保留股票：不能行权！
 - 股票又不会派息，干嘛把股票留手里？
 - 股票可能会跌
- 如果觉得会跌，想直接卖股走人做无风险投资？不能行权，因为期权有时间价值
 - 保留期权，做空股票
 - 卖期权

无股息美式看跌期权会提前行权

无股息美式看涨期权平价关系式

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

由平价公式：

$$p + S_0 = c + Ke^{-rt}$$

因为 $P \geq p$ 所以 $P \geq c + Ke^{-rt} - S_0$ 并且 $C = c$

所以 $P \geq C + Ke^{-rt} - S_0$ 即 $C - P \leq Ke^{-rt} - S_0$
右边得证

下证左边，先构建两个投资组合：

- I：一个欧式看涨期权与一个数量为 K 的现金组合
- II：一个美式看跌期权与一个股票组合

对于美式看跌期权会有两种情况：

1) 组合 I 中的现金进行无风险投资，且组合 II 在 T 时间点前不行权

则投资组合 II 在 T 时刻的价值为 $\text{Max}(S_T, K)$

又组合 I 的在 T 时刻的价值为 $\text{Max}(S_T - K, 0) + Ke^{rT} = \text{Max}(S_T, K) - K + Ke^{rT}$

因为 r 大于零 所以投资组合 I 在 T 时刻的价值大于投资组合 II

2) 组合 I 中的现金进行无风险投资，且组合 II 在 T 时间点前的时间点 t 行权

此时组合 II 在 t 时刻的价值为 K 投资组合 I 在 t 时刻的价值为 Ke^{rt}

也即投资组合 I 的价值仍然大于投资组合 II 的价值

因此不论何时均有投资组合 I 的价值大于投资组合 II

故： $c + K \geq P + S_0 \Rightarrow C + K \geq P + S_0$ 即 $C - P \geq S_0 - K$ 左边得证

含股息美式期权看涨看跌平价关系式

$$S_0 - D - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

采用后一个平价关系式：

$$p + S_0 = c + D + Ke^{-rt}$$

因为 $P \geq p$ 所以 $P \geq c + D + Ke^{-rt} - S_0$ 并且 $C = c$

所以 $P \geq C + D + Ke^{-rt} - S_0$ 即 $C - P \leq Ke^{-rt} - S_0$ 右边得证

下证左边，先构建两个投资组合：

- I：一个欧式看涨期权与一个数量为 $D + K$ 的现金组合
- II：一个美式看跌期权与一个股票组合

对于美式看跌期权会有两种情况：

1) 组合 I 中的现金进行无风险投资，且组合 II 在 T 时间点前不行权

则投资组合 II 在 T 时刻的价值为 $\max(S_T, K) + De^{rT}$

又组合 I 的在 T 时刻的价值为 $\max(S_T - K, 0) + (K+D)e^{rT} = \max(S_T, K) - K + (K+D)e^{rT}$

因为 r 大于零 所以投资组合 I 在 T 时刻的价值大于投资组合 II

2) 组合 I 中的现金进行无风险投资，且组合 II 在 T 时间点前的时间点 t 行权此时组合 II 在 t 时刻的价值为 $K + De^{rt}$ 投资组合 I 在 t 时刻的价值为 $(K+D)e^{rt}$

也即投资组合 I 的价值仍然大于投资组合 II 的价值

因此不论何时均有投资组合 I 的价值大于投资组合 II

故： $C + K + D \geq P + S_0 \Rightarrow C + K + D \geq P + S_0$ 即 $C - P \geq S_0 - D - K$

左边得证

9 （第十三章 二叉树）

9.1 推导风险中性概率的两种方法：

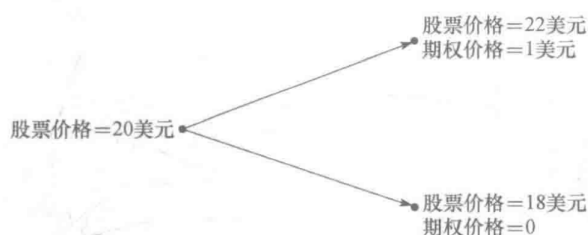
9.1.1 无风险投资组合的方法 —— 既然毫无风险，利率只能是无风险利率

理论推导其实很简单，但是为了表述方便，在这个地方直接用书上的例子来手推

做空期权这么理解：

- T_0 时刻借了别人的权卖掉，欠别人 f

- T_1 时刻买回来花 f_t 可能欠的多了也可能欠的少了



考虑一个由 Δ 单位的股票多头和一份看涨期权空头所构成的投资组合。我们将求出使投资组合成为无风险的 Δ 。当股票价格由 20 美元变为 22 美元时，所持股票的价值为 22Δ ，期权的价值为 1 美元，投资组合的总价值为 $22\Delta - 1$ ；当股票价格由 20 美元变为 18 美元时，所持股票的价值变为 18Δ ，期权的价值为 0，投资组合的总价值为 18Δ 。当投资组合在以上两种可能性下价值相等时，投资组合没有任何风险，这意味着：

$$22\Delta - 1 = 18\Delta$$

即

$$\Delta = 0.25$$

因此，无风险投资组合为：

- 多头：0.25 单位的股票；
- 空头：1 份期权。

如果股票价格上涨为 22 美元，投资组合价值为

$$22 \times 0.25 - 1 = 4.5 \text{ (美元)}$$

如果股票价格下跌到 18 美元，投资组合价值为

$$18 \times 0.25 = 4.5 \text{ (美元)}$$

无论股票价格上涨还是下跌，在期权到期时投资组合的价值总是 4.5 美元。

在无套利机会时，无风险投资组合的收益率等于无风险利率。假设这时的（连续复利）无风险利率为每年 4%，那么该投资组合在今天的价值必须为 4.5 美元的贴现值，即

$$4.5e^{-0.04 \times 3/12} = 4.455 \text{ (美元)}$$

股票在今天的价格已知为 20 美元，如果将期权的价格记为 f ，那么投资组合在今天的价值是

$$20 \times 0.25 - f = 5 - f$$

因此

$$5 - f = 4.455$$

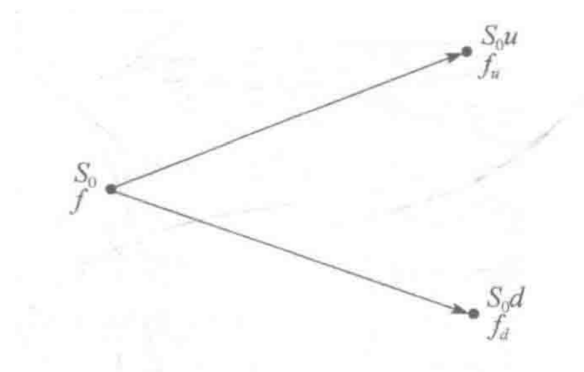
或

$$f = 0.545$$

以上讨论说明，在无套利机会时，期权的目前价值必须为 0.545 美元。如果期权价值高于 0.545 美元，那么构造投资组合的费用就会低于 4.455 美元，而投资组合的收益率就会高于无风险利率；如果期权价值低于 0.545 美元，那么卖空这一投资组合将会提供一个低于无风险利率的借款机会。

拓展推导见课本【P217】

结论：对于下方的二叉树可以得到：（必考点）



$$f = e^{-rT} [pf_u + (1-p)f_d]$$

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

可以看出针对固定的 T, u, d, r 只有一个 p 不管是多少步

9.1.2 莽求法，既然是无风险，那么在股票上的期望收益率肯定是无风险利率

这种方法就太简单了

$$S_0 u \times p + S_0 d \times (1-p) = S_0 e^{rT}$$

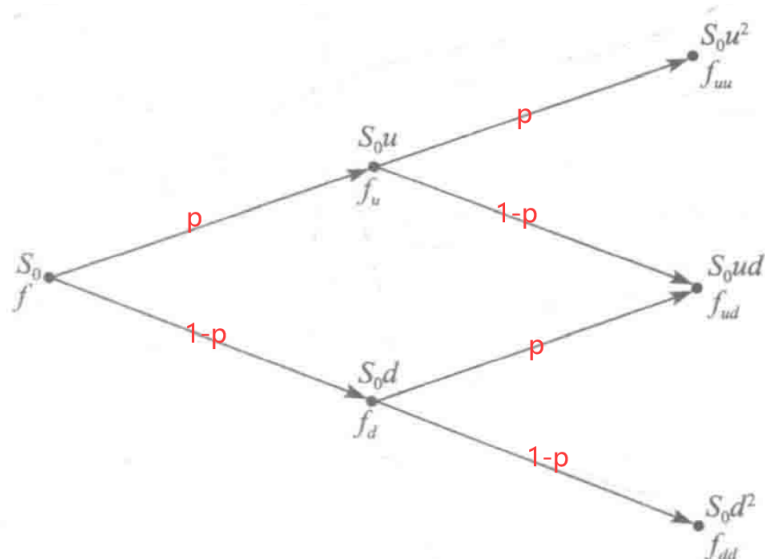
$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

对 P 的理解：就是在风险中性中股票涨跌的概率，赌球的概率

9.2 两步二叉树

很简单的哦

9.2.1 欧式美式看涨期权完全相同（美式不会提前行权）



一步步推到最后 + 贴现就完了

$$f = e^{-2r\Delta t} [p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}]$$

9.2.2 欧式美式看跌期权可不一样

看下面的例子：

- 2 年期，步长为 1 年
- 执行价格 52 美元
- 股票当前价格为 50
- 一年只可能涨 20% or 跌 20%

欧式看跌 不能提前行权，直接到最后一期

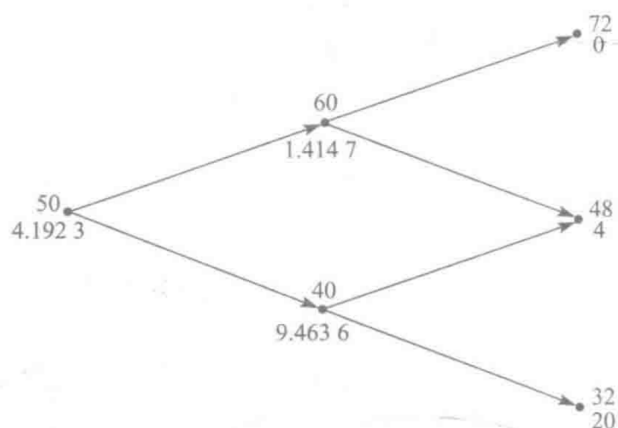


图 13-7 利用两步二叉树来对欧式看跌期权定价。节点上面的数字为股票价格，下面的数字为期权价格

美式看跌 可以提前行权（必考点）

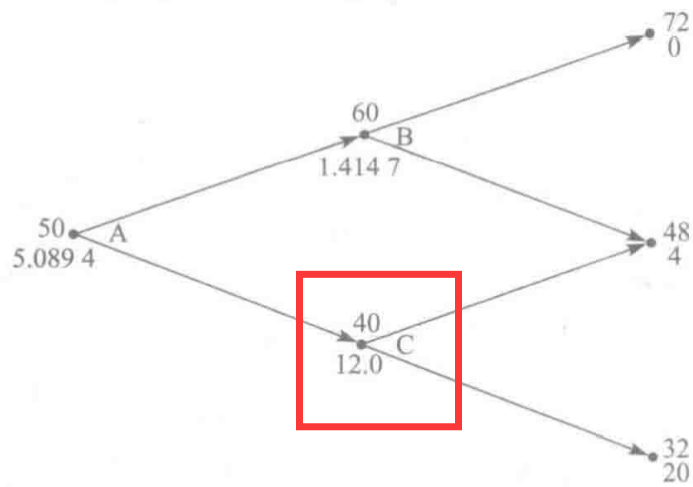
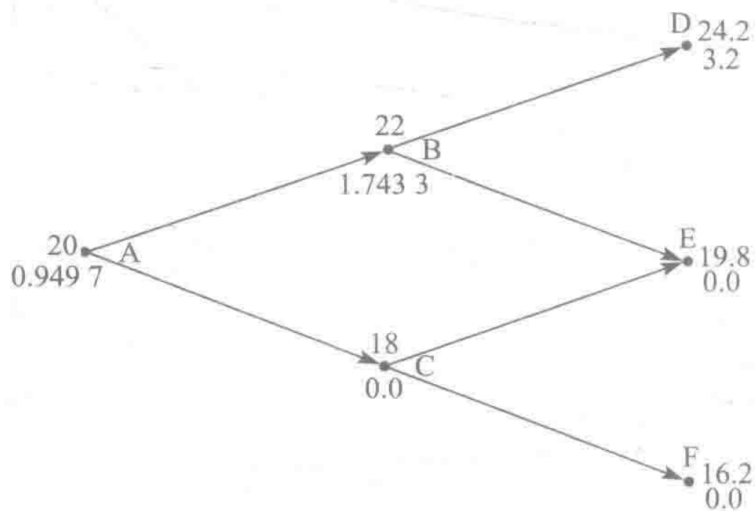


图 13-8 利用两步二叉树对美式看跌期权定价。在每个节点上面的数字为股票价格，下面的数字为期权价格

9.3 Δ （考查可能性不大）

一份期权能对冲多少份股票呢？和第一章的 h 表示是一样的



会算即可：（说白了就是用期权价格差 / 标的价格差）

在图 13-4 中，对应于股票价格在第 1 步变化的 delta 为

$$\frac{1.7433 - 0}{22 - 18} = 0.4358$$

如果在第 1 步后股票价格上涨，第 2 步的 delta 为

$$\frac{3.2 - 0}{24.2 - 19.8} = 0.7273$$

如果在第 1 步后股票价格下跌，在第 2 步的 delta 为

$$\frac{0 - 0}{19.8 - 16.2} = 0$$

9.4 u 和 d (会算即可)

构建任意步长的二叉树，该怎么取 u 和 d？

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad \text{及} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

σ 是股票价格波动率

9.5 例题

1. 当前价格为 40，1 个月后可能为 42 或 38，无风险利率为每年 8%

执行价格为 39，一个月后到期欧式期权价格？

答：风险中性概率 p:

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} = \frac{e^{0.08 \times \frac{1}{12}} - 0.95}{1.05 - 0.95} = 0.567$$

因此期权价值为：

$$f = e^{-0.08 \times \frac{1}{12}} \times [p \times 3 + (1 - p) \times 0] = 1.69$$

即本欧式期权的价值为 1.69

2. 当前价格为 100，六个月内可能涨 10% 或者跌 10%，无风险利率为每年 8%

执行价格为 100，一年期的欧式价格为多少？

答：风险中性概率 p ：

风险中性概率 p

$$p = \frac{e^{rt} - d}{u - d} = \frac{e^{0.08 \times 0.5} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.704$$

因此期权价值为：

$$f = e^{-2 \times 0.08 \times 1} \times p^2 \times 21 = 9.61$$

即本欧式期权的价值为 9.61

3. 股指当前取值 1500，波动率 18%，无风险利率每年 4% 股息收益率 2.5%

计算 u d p ，行权价格 1480 两步二叉树（6个月1步共两步）看跌期权价值为多少？

答：因为无风险利率为 4% 股息收益率为 2.5% 所以期望收益率为 1.5%

$$u = e^{\{0.18 \times \sqrt{\frac{6}{12}}\}} = 1.136; \quad d = \frac{1}{u} = 0.88$$

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} = \frac{e^{0.015 \times 0.5} - d}{u - d} = 0.498$$

$$f = e^{-2 \times 0.015 \times 0.5} \times (p^2 \times 0 + 2p \times (1 - p) \times 0 + (1 - p)^2 \times 318.4) = 78.41$$

即看跌期权的价值为：78.41