四川大学期末考试试题（闭卷）

（2015——2016 学年第 2 学期） A 卷

课程号：201018030　课序号：　课程名称：概率统计（理工）　任课教师：　成绩：
适用专业年级：　学生人数：　印题份数：　学号：　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

注：考试时间 120 分钟。请将答案写在答题纸规定的方框内，否则记 0 分。这里的“样本”都是指“简单随机样本”。

附：标准正态分布的分布函数值：$\Phi(3.8)=0.9999, \Phi(2.81)=0.9975, \Phi(2.68)=0.9963,$

$\Phi(1.96)=0.9750, \Phi(1.645)=0.9500, \Phi(0.4)=0.6554, \Phi(0.3)=0.6179.$

一、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

1．甲乙两人进行乒乓球比赛，甲每局获胜的概率为 0.6，假设每局结果独立，比赛采用 7 局 4 胜制，则甲 4:1 获胜的概率为__________.

2．随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，令 $Y=2X-1$，则 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 为__________.

3. 设 $X \sim U(-1,1)$（均匀分布），以 Y 表示对 X 的 4 次独立重复观察中事件 $(X<0)$ 发生的次数，则 $P(Y>1)$ =__________.

4．设 $(X,Y) \sim N(1,2;4,25;-\frac{1}{2})$（正态分布），$Z=2X+Y$，则 $E(Z^2)=$__________ .

5．设 $\{X_k, k\ge 1\}$ 为独立同分布的随机变量序列，且 $X_k \sim P(2)$（泊松分布），则当 $n\to\infty$ 时，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2$ 依概率收敛于__________.

6．X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的一组样本，则 $\frac{X_1^2+X_2^2+X_3^2}{3X_4^2}$ 服从__________分布（须写出分布参数）.

二、解答题 （共 82 分）

1．（14 分）某生物群体在 $t=0$ 时刻只有一个个体，在 $t=1$ 时刻，该个体要么一分为二，要么死亡．如果一分为二，在 $t=2$ 时刻，两个新的个体独立演化（要么一分为二，要么死亡）。假设每个个体在演化时一分为二的概率均为 0.5，用 X 和 Y 分别表示 $t=1$ 和 $t=2$ 时该群体的个体数量，请回答下列问题：

（1）计算该群体在 $t=2$ 时刻灭绝（即 $Y=0$）的概率；

（2）该群体在 $t=2$ 时刻灭绝的条件下，在 $t=1$ 时刻没有灭绝的概率；

（3）计算 (X,Y) 的联合概率分布。

2．（12 分）考虑两种投资方案，收益率分别为随机变量 X 和 Y，已知 X 和 Y 独立且 $E(X)=\mu_1, E(Y)=\mu_2, D(X)=\sigma_1^2, D(Y)=\sigma_2^2$，现将总资本的 $\alpha\ (0\le\alpha\le 1)$ 投到第一种，剩余的投到第二种，则投资的收益率为 $Z=\alpha X+(1-\alpha)Y$，请回答下列问题：

（1）若只考虑期望收益率，不考虑风险（即方差），求最优的（即期望收益率最大）投资方案；

（2）若 $\mu_1=\mu_2,\sigma_1=\sigma_2$，求最优的投资方案（提示：分别考虑期望收益率和投资风险与 α 的关系）。

3.（18 分）设 (X,Y) 为区域 G 上的均匀分布，$G=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1,\ -y\le x\le y\}$。

（1）计算 X 和 Y 的边际密度函数并判断独立性；

（2）计算概率 $P(X\le 0\,|\,Y=\frac{1}{2})$ 和 $P(X\le 0\,|\,Y\le\frac{1}{2})$;

（3）若 $Z=X+Y$，求 Z 的密度函数。

4. （12 分）一醉汉从酒吧回家，沿一条南北向的大道做如下随机游走：每 *10* 秒向北或向南走一步，每步距离 0.5 米，每步独立且向北概率为 0.5。 假定他的家在酒吧北边，我们以酒吧为坐标原点，以向北为正，记 X 为他从酒吧出发一小时后的位置，请用中心极限定理回答下列问题：

（1）计算一小时后他在酒吧北边超过 36 米的概率，即 $P(X>36)$；

（2）若他每步向北走的概率为 $\frac{2}{3}$，其他条件不变，重新计算 $P(X>36)$。

5. （14 分）设总体 X 具有如下密度函数： $f(x)=\begin{cases}3e^{-3(x-\theta)}, & x\ge\theta, \\ 0, & 其它,\end{cases}$

其中 $\theta>0$ 为未知参数； $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本：

（1） 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$；

（2） 求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_2$；

（3） 判断这两个估计的无偏性。

6. （12 分）某化工原料原来的含脂率服从正态分布 $N(0.27,0.16^2)$，现对其进行工艺处理，处理后的含脂率 X 仍服从正态分布且方差不变，但数学期望 μ 未知，即 $X\sim N(\mu,0.16^2)$。对处理后的原料抽取 *10* 个样本测试，含脂率如下：

0. 19, 0. 24, 0. 04, 0. 08, 0. 20, 0. 12, 0. 31, 0. 29, 0. 13, 0. 07.

（1）求 μ 的置信度为 95%的置信区间（结果保留四位小数)；

（2）能否认为处理后的平均含脂率比处理前明显降低（显著性水平 $\alpha=0.05$ ）？