# 知识点清单

> Karry - 本清单只列举所有的定义和定理 以及常题型

# 第一部分 数理逻辑

> 包含命题逻辑和一阶谓词逻辑

## Chapter 1 命题逻辑

### 1.1 命题

延伸概念

- 真值 0 || 1 T || F
- 命题标识符（抽象的命题，可表示任何东西）
- 命题变元 （命题标识符就是命题变元）可能真也可能假

  **赋值 / 解释 / 指派**
- 命题常量 （就是给定的一个具体命题）一定有明确的真假

**题型：给一句话判断是否为命题**

> 能明确**判断正误 陈述句 悖论**

### 1.2 命题的构成

**分类**

- 原子命题 -> 不能再分的命题 就算带否也不行 所以小明今天不去上学不是原子命题
- 复合命题 -> 不是原子的就是复合

**运算**

- 非
- 合取
- 析取 -> 可兼或和不可兼或
- 条件
- 双条件

**题型：翻译题**

### 1.3命题公式及其赋值

**命题合适公式<考点>：**正确的表达，没有语法错误

- 子公式 子合式公式
- 命题函数
- 真值表
- 永真公式（重言式）
- 矛盾式（不可满足公式）
- 可满足公式

**题型：判断永真公式**

> 真值表法
>
> 公式等价变换法

## 1.4 等价

- 等价的定义
- 等价和双条件的关系
- 公式大全 最基本的一定要会做
- 迪摩根定律的推广 -> 对偶公式（如何得到一个公式的对偶公式）

  > 把**合取变析取**把**析取变合取**，**T 变 F， F 变 T**
  >
  > 如果原公式等价那么对偶公式也等价

**常见题型：证明 A 和 B 公式等价**

## 1.5 联接词完备集

- 与非 ⬆️ 或非⬇️
- 功能完备集

  > 这一个集里面的可以实现每一个联接词的功能

- 最小功能完备集

  > 第一次出现**最**这个概念 最小的意思就是缺一个就不行

**常见题型：是否会判断功能完备集和最小功能完备集**

## 1.6 命题公式范式 —— 一定要读清楚题目

- 句节（原子公式）
- 句节析取 -> 子句 >> 合取 -> 合取范式
- 句节合取 -> 短语 >> 析取 -> 析取范式
- 主合取范式 -> 极大项
- 主析取范式 -> 极小项

**常见题型：你会不会求最大项 以及 你用的方法是什么**

**< 一般来讲我们用的方法都是真值表法求结果 再用等价公式法写过程>**

> 真值表变换法太好做了：
>
> 列表左栏式变量，右边栏待转变的式子
>
> 主合取范式 以 1 为真
>
> 主析取范式 以 0 为真

## 1.7命题公式的蕴含

- 蕴含基本的定义
- 掌握基本的蕴含关系式（推理的方法和手段）
- 考点：**那如何推理呢?**

  three ways —— 在用 CP 和 反证法的时候一定要写清楚 附加 or 假设 其他的也要尽量写清楚

  > 总归都要记清楚公式 一定要记清楚公式

  - **常规方法**——用蕴含关系式来从前往后推<找到入手点 所有的都好说>
    - P规则
    - TE 规则 和 TI 规则
  - **CP 法则 <附加前提>** 这个前提不能丢啊 丢了就是几千万啊

    一般来说适用于 结论是 A->B 的情况

    那我们起手就是一个 A (附加前提)
  - **反证法 <假设前提>**

    一般来说适用于 结论是 A(结论只有一个命题在这) 的情况

    那我们起手就是一个 ~A (假设前提)
  - **消解法**(和反正法是有异曲同工之妙的， 但是这个使用的范围要广得多 基本上可以说是所有的都能用)

    把结论的非和所有的条件都合取起来，看看条件和条件能否推出空子句

**常见题型：base on 上面的四种方法**

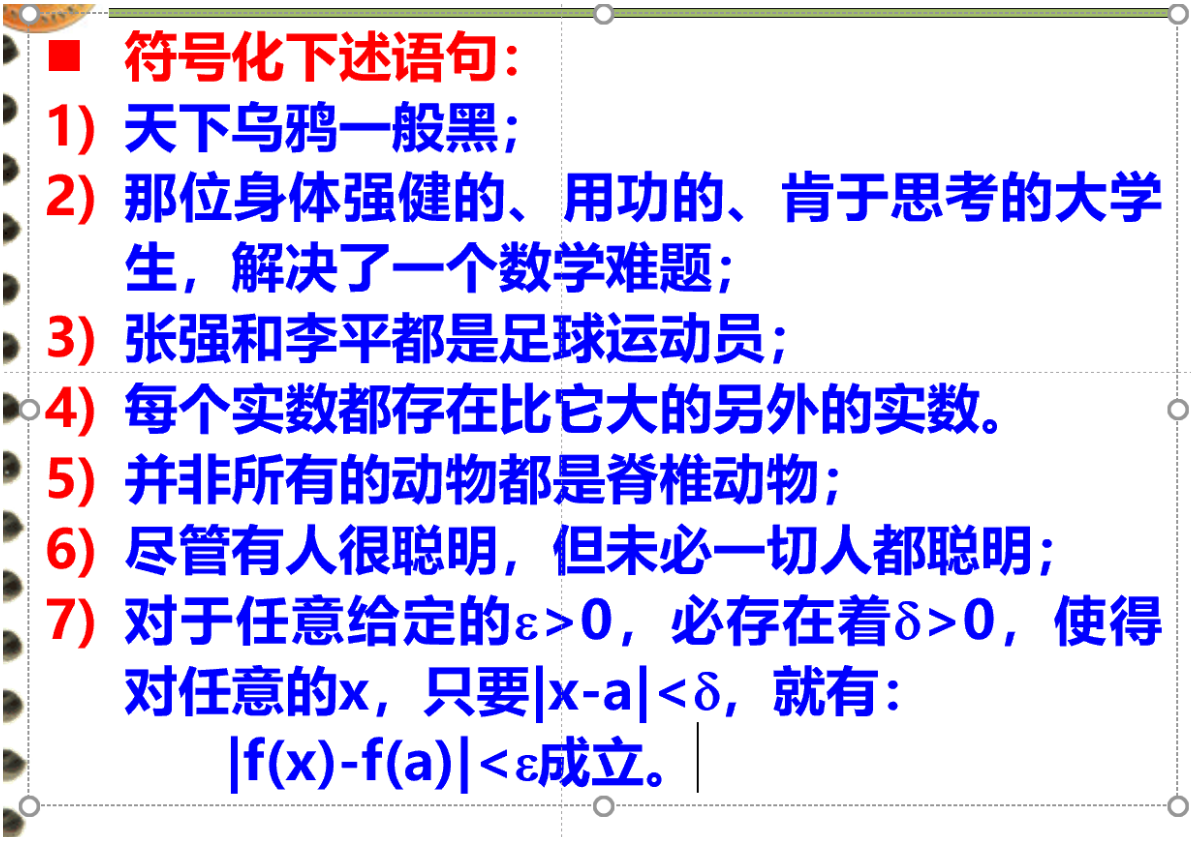
- 硬推理
- 翻译+推理

# Chapter 2 一阶谓词逻辑

## 2.1 谓词

- 什么是谓词 （函数）
- 个体域
- 全称量词
- 特称量词
- 指导变元
- 换名规则 / 代入规则 （自由变元 && 约束变元）

**主要题目：翻译成谓词逻辑**




## 2.2 赋值

**谓词合适公式：**没有语法错误的公式

- 永真式（重言式）
- 矛盾式（永假式）
- 可满足式

**主要题目：判断是否一个式子是什么类型 这个的判断还真不像是命题推断一样，而是将其翻译成自然语言就可以直接看出**

## 2.3 等价

- 公式 13大公式
  - 8大：如果无关就可以提出量词
  - 5大：需要更换一下变量名字 （唯一的理解方法只有一个变成现实语言）
- 前束合取范式
- 前束析取范式
- Skolem 函数（去掉存在量词） （并不等价）

**主要题目：证明两个式子的等价，转变为前束 和 skolem**

## 2.4 谓词公式的蕴含

- 公式
- 如何推理
  - 基本的从前往后推理
    - P规则
    - T规则
    - US、ES、UG、EG
  - CP法 同上
  - 反证法 同上
  - 消解法 同上

# 第二部分 集合与关系

> 包括
>
> - 集合代数
> - 二元关系
> - 特殊关系
> - 函数关系

## Chapter 3 集合代数

so easy

幂集合：所有子集

笛卡尔集： A x B ——配对

还有一个圈加号运算 其实就是一个在 A 不在B或者 在B 不在A

**题型：写出幂集合，笛卡尔积**

## Chapter 4 二元关系

**关系的定义：** 无非就是一个由数对构成的集合

**自我二元关系的性质：**

- 自反性
- 对称性
- 传递性
- 反自反性
- 反对称性

> 自反和反自反永远都不是对立的

**关系的运算：**

- 复合关系运算有四条法则
- 逆运算

**关系的闭包：**

- 自反 r
- 对称 s
- 传递 t

**考点：证明一些结论 写一些东西 求一些闭包**

# Chapter 5 特殊关系

## 等价关系

- 自反
- 对称
- 传递

**题型：证明为等价关系**

  等价类 分化 等价关系之间的联系

## 偏序关系

- 自反
- 非对称
- 传递

**概念：** —— 必考点

- 极大元
- 极小元
- 最大元
- 最小元
- 最小上界
- 最大下界

**题型：证明为偏序关系**

  绘出Hase图

## 全序集与良序集

全部元素都可以比较的叫做**全序集**

- 全序集中有一个链长度的概念（和后面的距离是统一的都是看边有多少条）

**良序集：**任意一个子集和都有最小元

# Chapter 6 函数

## 函数的定义与性质

定义很简单

**性质：**

- 单射
- 满射

- 双射

### 集合的基数、有限集 和 可数集

**等势**：可以建立双射关系

**有限集**：空集合 或者 有限自然数集双射

- 自然数集是无限集

**可数集**：与自然数集等势的叫做可数集

- 不可数集就是和 (0，1)等势的

# 第四部分 图论

> 包括
>
> - 图的基本概念
> - 树及其应用
> - 平面图及其应用
> - 欧拉图及哈密顿图

# Chapter 10 图的基本概念

## 一、海量的琐碎基本概念

- **图**：

  > 理解什么是结点集什么是边集

  ■ **定义10.1 一个图是一个序偶(V,E)，记为 G = (V,E)，其中：**

  **1)** V（G） = $\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_n\}$是一个有限的非空集合，$v_i$(i = 1,2,3,...,n)称为结点,简称点，V为结点集；

  **2)** E（G） = $\{e_1,e_2,e_3,\ldots,e_m\}$是一个有限的集合，$e_i$(i = 1,2,3,...,m)称为边，E为边集，E中的每个元素都是由V中不同结点所构成的无序对，且不含重复元素。

- **图的阶** 结点个数
- 无向边——端点 && 有向边——入边、出边 || 始点、终点

  > 无向图 有向图 混合图

- 相关联——邻接点
- 零图（由孤立结点构成）平凡图（仅含一个结点的零图）
- 赋权图

# 二、 重点概念

- **结点的度数**：无向图中的度，有向图中的入度出度

> 如果有环度要计算两次
>
> 分类
>
> - 奇度数节点
> - 偶度数结点
>
> 有向图包括入度和出度

- **k阶正则图**：各点度数相等且均为k
- **完全图**：每个点都相互关联的图，边的条数是固定的（注意区分有向和无向）
- **二部图**：说白了就是一刀能不能把所有的边劈开 然后所有的点清晰的分在这一刀的两侧 记作 k（x， y）

# 三、考点

## 握手定理

**定理10.1（握手定理）对于任何（n,m）图G =（V，E），所有结点的度数的总和等于边数的两倍，即：**

$$\sum_{v\in V}\deg(v)=2m;$$

**证明：根据结点度数的定义，在计算结点度数时每条边对于它所关联的结点被计算了两次，因此，G中结点度数的总和恰好为边数m的2倍。■**

## 握手定理推论

- **任何图中**奇数度结点数必是偶数
- **有向图中** 入度 = 出度 = 边的个数

## 子图

- **定义**：子结点和子边构成的图
- **真子图**：都是真子集
- **生成子图**：子图 + 结点集是原结点集
- **平凡子图**： 子图 + 结点集是原节点集 + 边集是原本边集或者是空集
- **删点子图**：以点为核心，**删掉点**+与其相关联所有边
- **删边子图**：以边为核心，**删掉边**+与其相关的所有点
- **点诱导子图**：以点为核心，**放上点**+与其相关联所有边
- **边诱导子图**：以边为核心，**放上边**+与其相关联的所有点
- **补图**：对于一个图G 他对应的完全图中 G 没有的部分 就是 G的补图

## 图的同构

> 只能判断哪些不是，而很难判断哪些是

- 结点数目相同
- 边数相同
- 度数相同的结点数相同

## 道路与回路

- **道路**：结点a走到结点b经过的边+点
  - a && b 道路的起点和终点（端点）其余的都是内部节点
  - 边的数目称为道路长度
  - 零道路：只有一个结点的道路
  - 开道路：起点与终点不同的道路，否则为闭道路
  - **简单道路**：**所有边都不相同** 但可以有相同的点！ 闭的简单道路叫做回路

    > 欧拉回路

  - **基本道路**： **所有点都不同** 但可以有相同的边！ 闭的基本道路叫做圈

    > 哈密顿圈
    >
    > 长度为奇的圈->奇圈 || 长度为偶的圈->偶圈

    **基本道路一定是简单道路**
- **道路图**：一个图可以用一条基本道路表示出来
- **圈图**：一个图可以用一个圈表示出来
- 在一个具有 n 个结点的图中，如果从结点 a 到结点 b 存在一条道路，则定存在一条长度不多于 n-1 的道路

## 无向图的连通性

- **连通**：图G 中两点 u, v之间存在道路，即连通
- **连通图**：图G中任意两个结点都是连通的
- **支**：一个图中有几个连通图 一般用欧米噶表示
- **距离**：

  **定义 10.11 在图 G = <V， E> 中， 对 $\forall v_i$， $v_j \in V$，如果从 $v_i$ 到 $v_j$ 存在道路，则称长度最短的道路为从 $v_i$ 到 $v_j$ 的距离，记为 $d(v_i, v_j)$。**

  **$d(v_i, v_j)$ 满足下列性质：**

  ① $d(v_i,v_j) \geq 0$;　　**(非负性)**

  ② $d(v_i,v_j) = d(v_j,v_i)$;　　**(对称性)**

  ③ $d(v_i,v_k) + d(v_k, v_j) \geq d(v_i, v_j)$;**(三角不等式)**

  ④ $d(v_i,v_j) = \infty$　　**(当 $v_i$ 到 $v_j$ 不存在道路时)**

- **点割集**：连通图去掉点割集中的点以后，图不再连通
  - **基本点割集**：去掉点割集当中的任何**真子集**图仍然连通
  - **割点**：去掉这一个点，图就不再连通了
- **边割集**：连通图去掉边个集中的点后，图不再连通
  - **基本边割集**：去掉边割集当中的任何**真子集**图仍然连通
  - **割边**：去掉这一个边，图就不再连了

## 无向图连通性深究

- **点连通度**：在一个连通图中，最少最少删去多少个点它才不连通
- **边连通度**：在一个连通图中，最少最少删去多少条边它才不连通

- 定理：对任意无向图$G=<V,E>$，均有下面不等式成立：$\kappa(G)\le\lambda(G)\le\delta(G)$。其中，$\kappa(G)$、$\lambda(G)$和$\delta(G)$分别为G的点连通度、边连通度和结点的最小度数。

## 有向图连通性

- **连通：**a到b是有向连通的，b到a不一定
- **单向连通图：**G的任何一对结点之间，至少有**一个结点到另一个结点**是可达的，G为单向连通图。
- **强连通图：**G中**任何一对结点之间**都是相互可达的
- **弱连通图：**基图是连通的
- **单向分图：**简单有向图的极大单向连通子图
- **强分图：**简单有向图的极大强连通子图
- **弱分图：**简单有向图的极大弱连通子图
- **定理：**在简单有向图中每个结点**位于且仅位于**一个强分图中。

## 图的矩阵表示

> 本节的基本目的很简单：用矩阵方法表示图从而解决上面出现的问题

- **无向图的邻接矩阵表示**
  - 邻接矩阵与道路的关系<十分十分重要>

    **8) 令$B=(b_{ij})=A^2=A\times A=(a_{ij}^{(2)})_{n\times n}$，则有：**

    $$b_{ij}=a_{ij}^{(2)}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}$$

    **此时，$b_{ij}$表示从$v_i$到$v_j$长度为2的道路数目，如$b_{ij}=0$，则无长度为2的道路，而$b_{ii}$表示经过$v_i$的长度为2的回路数目；$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(2)}$ 为G中长度为2的道路（含回路）总数，主对角线上元素之和 $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(2)}$ 为G中长度为2的回路总数。**
  - 也正是基于上面的关系我们可以得到
    - 判断点a到点b的距离

      **推论10.9.1 $A=(a_{ij})_{n\times n}$为G的邻接矩阵，对$k\ge1$，令$A^k=(a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$。则 $a_{ij}^{(k)}>0$的最小k值，正是结点$v_i$到结点$v_j$的距离$d(v_i,v_j)$。**
    - 判断点a到点b长度为k的有向道路数目

      邻接矩阵的k次方
    - 判断a是否可达于b

      **$A=(a_{ij})_{n\times n}$为G的邻接矩阵，对$k\ge1$，令$A^k=(a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$。则对$1\le k\le n-1$，$a_{ij}^{(k)}=0$恒成立（$i\ne j$）当且仅当从结点$v_i$到结点$v_j$不可达。**

■ 定义10.18 设G = <V,E>是一个n阶简单有向图，其中 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，并假定结点已经有了从$v_1$到$v_n$的次序，定义相应的n阶方阵$P=(p_{ij})_{n\times n}$，其中

- 可达矩阵

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{到}v_j\text{至少存在一条非零长度的通路}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

(i，j = 1，2，3，……，n)

称矩阵P为图G的可达性矩阵。

■可达性矩阵表明了图中任何两个不同的结点之间是否存在至少一条道路，以及在任何结点处是否存在回路。

**■无向图的可达性矩阵是对称的，而有向图的可达性矩阵则不一定对称。**

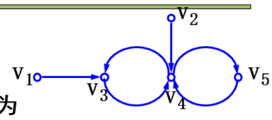
- **一道大题 求一个图的强分图**（必考点）
  - Step 1 写出该图的邻接矩阵 p
  - Step 2 求出该图的可达矩阵 **P**（Warshall 算法）
  - Step 3 求出该图的强分矩阵

**设G = <V,E>为有向图，$P=(p_{ij})_{n\times n}$是图G的可达性矩阵，$P^T$是P的转置矩阵，定义P与$P^T$的布尔交$P\odot P^T=(g_{ij})_{n\times n}$如下：**

$$g_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ p_{ij}\wedge p_{ji}, & i\neq j\,,\end{cases}$$

将P看为布尔矩阵

利用可达性矩阵求右图的所有强分图。




解 该图的邻接和可达性矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\quad P=\begin{bmatrix}0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\quad P^T=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

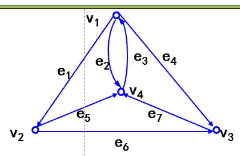
$$P\odot P^T=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}$$

**这说明，$v_1$在一个强分图中，$v_2$在一个强分图中，$v_3$, $v_4$和$v_5$在一个强分图中，因此该图的所有强分图分别为结点子集$\{v_1\}$, $\{v_2\}$，$\{v_3, v_4, v_5\}$导出的子图。**

- **有向图的关联矩阵表示**

> 关联的含义是将点与边关联起来

  - **定义：**该边为本点的入边为-1， 出边为1， 否则为0




**上图的关联矩阵如下：**

$$M=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}e_1&e_2&e_3&e_4&e_5&e_6&e_7\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1&1&-1&1&0&0&0\\-1&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&-1&0&-1&1\\0&-1&1&0&-1&0&-1\end{bmatrix}\end{array}$$

# Chapter 11 树及其应用

## 无向图的琐碎知识点

- **树**：连通无圈图

  **定理11.1 设G是非平凡的图（n,m）（其中：m是图G中的所有边的边数，n是图G中的所有结点的结点数）。则以下关于树的命题都是等价的：**

  **1) G连通且无圈；**
  **2) G无圈且m=n-1；**
  **3) G连通且m=n-1；**
  **4) G无圈，但在G中任何二结点之间增加一条新边后有且仅有一个圈；**
  **5) G连通的，但删除G中的任意一条边后，便不连通；(n≥2)**
  **6) G中每一对结点之间有且仅有一条道路(n≥2)。**

  - 树中度数为 1 的结点称为树叶。度数大于1的结点称为枝点或内点
- **森林**：去掉连通的条件就叫树
- **两个不重要的定理**：
  - 任何非平凡树都至少有两个叶
  - 阶数大于2的树必有割点

## 生成树

**■ 定义11.2 若连通图G的某个生成子图是一棵树，则称该树为G的生成树。**

**➢生成树T中的边称为树枝；**
**➢G中不在T中的边称为树补边；**
**➢G-T称为树补。（这是一个边集合）**

**■对连通图G=(n,m)，G的生成树T有n个结点，n-1条边，m-n+1条树补边。**

- **定理**：任何一个无向连通图都含有生成树
- **性质**：

  **定理11.3设T是无向连通图G的生成树，则：**
  **1）G的任何边割集与T至少有一公共边；**
  **2）G的任何圈与树补至少有一公共边。**

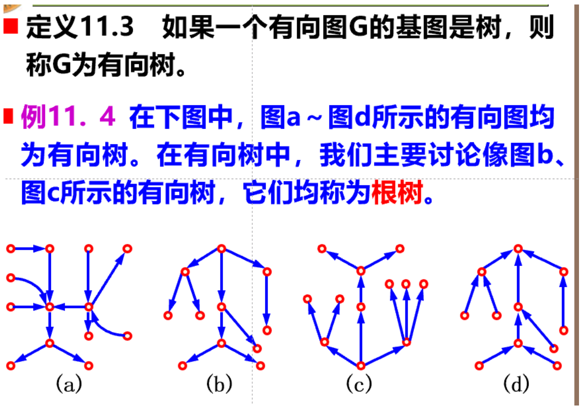
- 考点——最小生成树 so easy！
  - 定义

    **■定义：设G=<V,E>是n阶连通的赋权图，T是G的一棵生成树，T的每个树枝所赋权值之和称为T的权，记为w(T)。G中具有最小权的生成树称为G的最小生成树。**

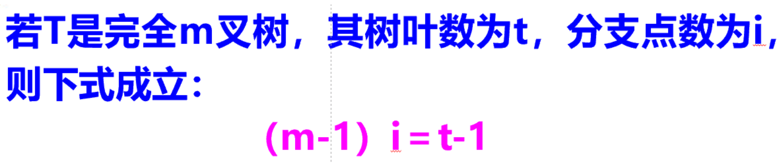
  - 求法：Kruskal 算法

## 有向树的琐碎知识点

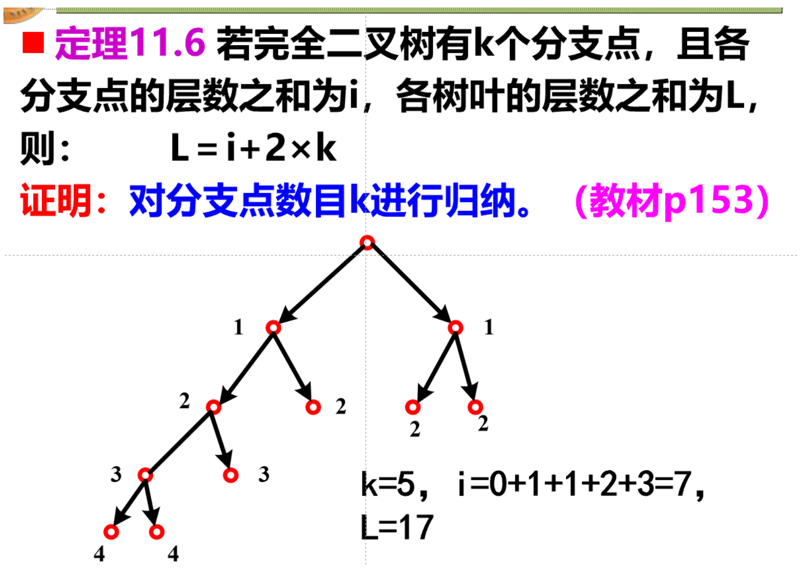
- **定义**：




- **正则m叉树：** 全部叶子结点都在一层
- **完全m叉树：** 每一个结点的出度都为m
    - 完全m叉树定理：
        - 1.

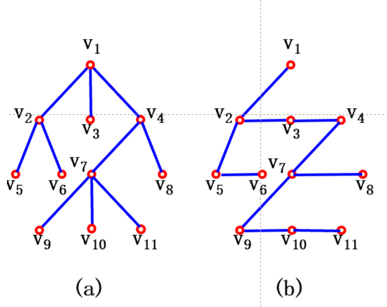



        - 2.




## 有向图考点

- 把树或者森林转化为二叉树 —— 太容易了 儿子（在左）兄弟（在右）转换法



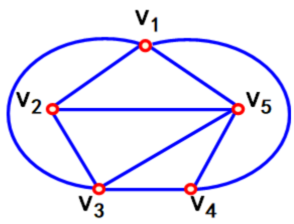

- 哈夫曼树——数据结构熟的不要不要的

# Chapter 12 平面图及其应用

## 平面图的基本概念

- **定义12.1　如果能把一个无向图G的所有结点和边画在平面上，使得任何两边除公共结点外没有其他交叉点，则称G为平面图，否则称G为非平面图。**

例如

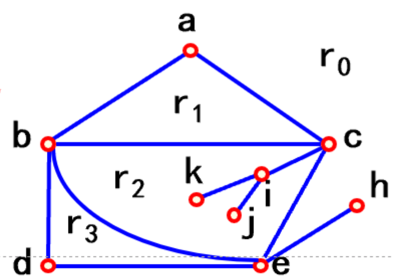


(b)

> **这也是判断平面图的唯一方法**

- 平面图的面
  - **概念：**边围成的一个闭合区间被称为面
  - **边界：**包围该面的边
  - **面的度：**包围该面的边数
  - 一个平面图只有一个无限面
  - 例子:

**在右图中有9个结点，11*条边，把平面分成4个面*** ***$r_0$、$r_1$、$r_2$、$r_3$，其中***
**$r_0$的边界为abdeheca，*$D(r_0)=7$;***
**$r_1$的边界为abca，$D(r_1)=3$;**
**$r_2$的边界为becijikicb，$D(r_2)=9$;**
**$r_3$的边界为bdeb，$D(r_3)=3$。**
**$r_1$、$r_2$和$r_3$是有限面，$r_0$是无限面。**




## 欧拉公式

**定理12.4设G=<V,E>是连通平面图，若它有n个结点、m条边和f个面，则有：n-m+f=2。**

- 推论一

**■推论12.4.1 对于具有k（k≥2）个连通分支的平面图G，有: n- m+ f=k+1，n、m、f分别为G的顶点数、边数和面数。（教材p158）**

- 推论二

**定理12.5** 设G是一个(n,m)简单连通平面图，若m > 1，则有m≤3n-6。

> 这个地方建立在一个基础定理上：**连通简单平面图每个面的度不小于3**
>
> 例题：证明具有6个结点，12条边的简单连通平面图 它的面度数都为3

- 推论三

■**推论12.5.1 任何简单连通平面图中，至少存在一个其度不超过5的结点。（教材p159）**

## 其他发现

**围长：**

- 概念：一个图的**围长**为它包含的最短圈的长度。
- 性质：

**定理12.6** **设G是一个(n,m)简单连通平面图，其围长k > 2，则有：**

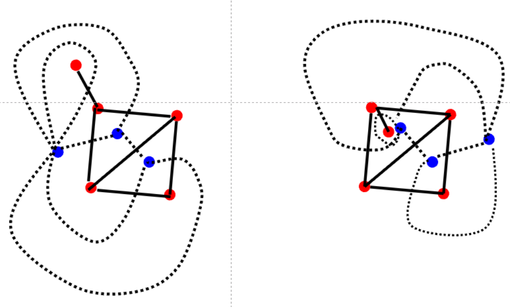
$$m \le \frac{k}{k-2}(n-2)$$

> 上面这些性质说白了没什么大用，只是用逆否命题来判断哪些图不是平面图

**对偶图**

> Step 1 找每一个面对应的一个点
>
> Step 2 穿线连点 只要面相邻就连接

实线边图为平面图，虚线边图为其对偶图。



# Chapter 13 欧拉图与哈密顿图

## 欧拉图与中国邮递员问题

### 欧拉图的定义

■**定义13.1** **设G是一个无孤立结点的图，包含G的每条边的简单道路（回路）称为该图的一条欧拉道路（回路）。具有欧拉回路的图称为欧拉图。**

### 欧拉图的判定——最最重要

- 无向欧拉图

**定理13.1 无向连通图G = <V，E>是欧拉图当且仅当G的所有结点的度数都为偶数。**

**推论13.1.1非平凡连通G = <V，E>含有欧拉道路当且仅当G仅有零个或者两个奇数度结点。**

- 有向欧拉图

**ii）有向连通图G含有有向欧拉回路，当且仅当G中的所有结点的入度等于出度。**

**i）有向连通图G含有有向欧拉道路，当且仅当除了两个结点以外，其余结点的入度等于出度，而这两个例外的结点中，一个结点的入度比出度大1，另一个结点的出度比入度大1。**

### 在一个欧拉图中找到欧拉回路

- **设G = <V，E>是一个欧拉图**

1. **任取$v_0 \in V$，令$P_0 = v_0$；**
2. **设$P_0 = v_0e_1v_1e_2 \ldots e_iv_i$，按下面的方法从**

   **$G_K=E-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中选取$e_{i+1}$：**

   *1) $e_{i+1}$与$v_i$相关联；*

   *2) 除非无别的边可选取，否则$e_{i+1}$不应该为*

   *$G_k = G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中的桥；*

3. **当$G_k$为零图时，算法结束；否则，返回2。**

### 中国邮递员问题——必考题

一个例子胜过千军万马

1. 因为G含有奇数度结点，所以

2. G中有2K=4(K=2)个奇结点：

- $V_1$，$V_2$，$V_3$，$V_5$。
- 这4点间的距离：
- $d(V_1,V_2)=3$，　$d(V_1,V_3)=5$，
- $d(V_1,V_5)=4$，　$d(V_2,V_3)=2$，
- $d(V_2,V_5)=3$，　$d(V_3,V_5)=4$

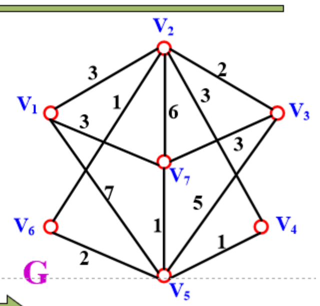
各路径：$V_1V_2(3)$，$V_3V_5(4)$—7

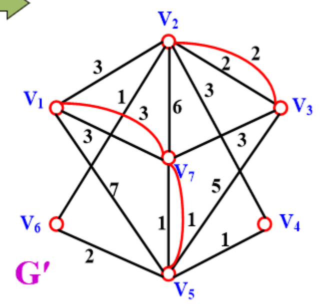
$V_1V_3(5)$，$V_2V_5(3)$—8

$V_1V_5(4)$，$V_2V_3(2)$—6

∴两条长度最短$P_1=V_1V_7V_5$，$P_2=V_2V_3$

3. 构造G'的任一E图就是中国邮递员问题的解。




## 哈密顿圈——基本掌握就行

### 定义

**定义13.2**　设G是一个连通图，若G中存在一条包含**全部结点的基本道路**，则称这条道路为G的哈密顿道路；若G中存在一个包含全部结点的圈，则称这个圈为G的哈密顿圈；含有哈密顿圈的图称为哈密顿图。

规定平凡图为哈密顿图。

哈密顿道路是经过图中所有结点的道路中长度最短的道路；

**哈密顿圈是经过图中所有结点的圈中长度最短的圈。**

### 性质

一个**必要条件**：常用这个的逆反命题来证明哪些图不是哈密顿图

设无向连通图G = <V,E>是哈密顿图，S是V的任意非空真子集，则

$$\omega(G-S)\le|S|$$

其中$\omega(G-S)$是从G中删除S后所得到图的连通分支数。

一个**充分条件**：——很重要 个人认为哈密顿图唯一考点

设G = <V，E>是具有n个结点的简单图。
如果对任意两个结点u,v∈V，均有
$$\deg(u)+\deg(v)\geq n-1$$
则G中存在哈密顿道路。

**定理13.5** 设G = <V,E>是具有n个结点（n≥3）的简单图。如果对任意的两个结点u,v∈V，均有：deg(u)+deg(v)≥n， 则G必是哈密顿图。

**附加 —— 一个充要条件**

**定理13.6** 一个简单图G是哈密顿图当且仅当其闭包图是哈密顿图。

设G = <V,E>是一个n阶无环的连通平面图。
若G含有哈密顿圈C，则：$\sum_{i=1}^{n}(i-2)(f_i^{(1)}-f_i^{(2)})=0$
其中$f_i^{(1)}$和 $f_i^{(2)}$分别是含在圈C内部和外部的i度面的数目。

# 第五部分 代数结构

## Chapter 14 代数系统

### 二元运算

**定义**：太简单了，无非就是一个抽象的，对于某个集合的运算罢了

**性质**：

- **定义14-1.2**：设“·”是一个S上的二元代数运算，如果：
  1. 对任意的a，b∈S，都有a·b∈S，则称“·”在S上是封闭的；
  2. 对任意的a，b∈S，都有a·b = b·a,则称“·”在S上是可交换的，或称满足交换律。
  3. 对任意的a，b，c∈S，都有(a·b)·c = a·(b·c),则称“·”在S上是可结合的，或称满足结合律。
  4. 对任意的a∈S，满足a·a = a，则称“·”是幂等的。

> **考点**：证明封闭性，交换性，结合性，幂等性 一定要注意如何书写

### 代数系统

**定义**：说白了就是定义在一个集合上的一些运算+这个集合本身。——**一定满足封闭性！**

**特异元**：幺元，零元，幂等元

■ **定义14-2.2** 设“*”是集合S上的二元运算，<S,*>是一个代数系统，

1)若∃e∈S，使得对∀a∈S，都有：a*e=e*a=a，则称e为(代数系统）的单位元或幺元；

2)若∃θ∈S,使得对∀a∈S，都有：a*θ=θ*a=θ，则称θ为(代数系统)的零元；

3)若元素a∈S，满足a*a＝a，则称a是(代数系统)的一个幂等元。

- **有关性质：**——十分重要

**定理14-2.1** 设〈S,*〉是一个代数系统：

1）若〈S,*〉存在幺元，则该幺元唯一；

2）若〈S,*〉存在零元，则该零元唯一；

3）若“*”满足结合律且e是〈S,*〉的幺元(即幺元存在)，则对∀a∈S，若a存在逆元,则该逆元唯一。

- 例子：

1）〈P（S），∪，∩〉
对运算∪，∅是单位元， S是零元，
对运算∩，S是单位元，∅是零元。
2）〈N，+〉
有单位元0，无零元。

**逆元：**

**定义14-2.3**设“*”是集合S上的二元运算,〈S,*〉是一个代数系统，e是〈S,*〉的幺元，若对a∈S，∃b∈S，使得：a*b=b*a=e，则称b是a的逆元，a也称为可逆的，记为b=$a^{-1}$（同样，a也为b的逆元，b也称为可逆的，记为$b^{-1}$）；

## 群

■ **定义14-2.4**设<S，*>是一个二元代数系统：

1）当“*”是封闭的，称<S，*>为广群；

2）如果<S，*>是广群，且“*”是可结合的运算，则称<S，*>为半群；

3）<S，*>是半群，且存在幺元e，则称此半群<S，*>是含幺半群，常记为<S，*，e>；

4）如果<S，*>是含幺半群，且每个元素都有逆元，则称<S，*>为群。（闭、结、逆、幺）

最重要的一类题了出现了——**证明某个代数系统是群**

## Ch 15 半群与群

> 可以说是最最重要的一章了

### 半群

**定义：** 闭 结 （幺->含幺半群）

**重要的半群幂运算：**

定理15.1 设<S，*>是半群，$a \in S$，m和n是正整数，则：① $a^m * a^n = a^{m+n}$； ② $(a^m)^n = a^{mn}$ 。当<S，*>是含幺半群时，上述结论对任意非负整数m和n都成立。

**必有幂等元定理：**

> 注意：无限半群则不一定有幂等元

定理15.2 有限半群〈S，∗〉必有幂等元，即

存在 $a \in S$， $a^2 = a$ 。

证明：如果S中有幺元 e，则 e 就是幂等元。

如果S中没有幺元，任取 $b \in S$。由集合S的有限性，必有：

$b^i = b^j = b^{j-i} * b^i \quad (j > i)$

所以，对任何t >i 都有：

$b^t = b^{j-i} * b^t$ (例如:$t=i+l$, $b^t = b^{i+l} = b^i * b^1$ )

$= b^{2(j-i)} * b^t$

$= \ldots$ （反复迭代）

$= b^{k(j-i)} * b^t$ （此处$k(j-i) > i$）

令$t=k(j-i)$, 则得到 $b^t = b^t * b^t$

即 $b^t$是幂等元。

### 子半群

> **考点：** 证明某个代数系统是另一个代数系统的子半群
>
> 太简单了些：子 + 闭 + 结 + （幺->含幺半群的子群）

■ 定义15.1

① 如果<S,*>是半群，T是S的非空子集，且T对运算*是封闭的，则称<T,*>是半群<S,*>的子半群；

② 如果<S,*,e>是含幺半群，T∈S，e∈T，且T对运算*是封闭的，则称<T,*,e>是含幺半群<S,*,e>的子含幺半群。

■ 例：半群<R，×>的子代数<[0，1]，×>，<Z，×>，<$R^+$，×>都是<R，×>的子半群。

# 群

### 先看一些基本的群

例：我们已经知道<Z,+>是含幺半群，由于每个整数a都有加法逆元-a，所以<Z,+>是群，一般叫做**整数加群**。

同理，是<R,+>**实数加群**，<Q,+>是**有理数加群**。

对于数的乘法，<Z,×>是含幺半群而不是群，因为整数一般无Z中的乘法逆元。 <R-{0},×>是**实数乘群**，它的幺元是1，每元的乘法逆元为1/a。

### 最最重要的群——剩余累加和剩余累乘（群）

例：设$Z_k$表示整数集Z上的模k剩余类集合，即：$Z_k$={[0],[1],[2],…,[k-1]}。在$Z_k$上定义运算 和$\oplus$ $\otimes$如下：

$$[i]\oplus[j]=[t] \Leftrightarrow (i+j)\equiv t(\mathrm{mod}\,k),$$
$$[i]\otimes[j]=[t] \Leftrightarrow ij\equiv t(\mathrm{mod}\,k),$$

那么，$<Z_k,\oplus>$是群。这是因为封闭性和可结合性是明显成立的，[0]是幺元，每元[i]的逆元是[k-i]。

群 $<Z_k,\oplus>$习惯上又称为**剩余类加群**。

### 一定要会写的群——n次对称群

设n个元素的集合A上的全体置换构成集合$S_n$，证明<$S_n$，∘>构成群。（n次对称群）

证明： 1）$S_n$中两个置换的复合仍然是A上的一个置换，所以运算是封闭的；

2）由于函数的复合是可结合的，所以置换的复合也是可结合的；

3）$S_n$中存在幺置换(单位置换）π=（1），使对 $\forall\sigma\in S_n$，$\pi\circ\sigma=\sigma\circ\pi=\sigma$

所以π=（1）是幺元；

4）每个置换将x变成y，而逆置换是将y变成x，所以，每个置换都有逆。

### 群的一些性质

- 判定群的方法：**定理15.3** 如果<G,*>是半群，并且对∀a，b∈G，都存在x，y∈G 使x*a=b，a*y=b，则<G,*>是群。群中元素的数目称为群的阶。

- 三大重要特性：

群G中每个元素都是可消去的，即运算满足消去律；（即如果a*b=a*c，则必有b=c）

群G中除幺元e外无其它幂等元；

群G的运算表中任意一行(列)都没有两个相同的元素（重复元素）；

**来看看子群**

- 定义——判断子群的第一种方法（也是最重要最常用的一种方法）

定义15.2　设<G，*>是一个群，S是G的一个非空子集，若S也是群，则称<S，*>是<G，*>的一个子群。一般来说，对任意的群<G，*>，都有两个子群<{e}，*>，<G，*>，我们称此两个子群为该群的平凡子群,而若有子群<S,*>,且S≠{e}和S⊂G，则称<S，*>为<G，*>的真子群。

- 性质1：定理15.6　设<G，*>是一个群，对任意的a∈G，令　S＝{$a^n$|n∈Z，Z是整数}，则<S，*>是<G，*>的子群。
- 性质2：子群和原本群共享幺元和逆元

定理15.7 设<G,*>是一个群,<S,*>是<G,*>的子群,则:
1）子群<S，*>的幺元$e_S$也是群<G，*>的幺元$e_G$；
2）对∀a∈S，a在S中的逆元$a_S^{-1}$就是a在G中的逆元$a_G^{-1}$。

- 判断子群的第二种方法（不常用）

定理15.8　设<G，*>是一个群，S是G的一个非空子集，则<S，*>是<G，*>的子群的充要条件是：对∀a，b∈S，有$a*b^{-1}$∈S。

例子就是解决下面的这道题：

设<G，*>是一个群，令：

C＝{a|a∈G且对∀x∈G，有：a*x＝x*a}

证明<C，*>是<G，*>的一个子群。

**再来看看特殊群——交换群&&循环群**

- **交换群**
  - 定义：定义15.3　若群<G，*>中的运算“*”满足交换律，则称该群<G，*>是一个交换群（或阿贝尔(Abel)群）。
  - 证明的方法：定理15.9　设<G，*>是一个群，则<G，*>为交换群的充分必要条件是：对∀a，b∈G，有$(a*b)^2=a^2*b^2$
- **循环群**——取得是循环复始的意思
  - 定义：设<G，*>是一个群，若G中存在元素a，使得G＝{$a^k$| k∈Z}，则称<G，*>是(由a所生成的)循环群；而a称为G的一个生成元，并记作G＝(a)。

定义15.4 设<G，*>是一个群，若G中存在元素a，使得G能由a生成，即G=（a），则称<G，*>是由a所生成的循环群；而a称为G的一个生成元，群G中的一切生成元的集合叫做该群G的生成集。

- 生成元：

例如：1）整数加群<Z，+>是一个无限循环群，1和-1都是生成元，而除此以外别无其它生成元。

2）剩余类加群$<Z_k, \oplus>$是一个有限循环群，只要[a]满足gcd(a,k)=1，则 $Z_k$=（[a]），即[a]是$Z_k$的一个生成元。

- 一个例子

例：设有代数系统<Z，*>，运算“*”的定义为：对任意的a、b∈Z，有a*b=a+b-2。试证明<Z，*>是循环群。

证明：∀a,b,c∈Z，

$(a*b)*c=(a+b-2)*c=a+b+c-4$

$a*(b*c)=a*(b+c-2)=a+b+c-4$

∴ *满足结合律。

∀a∈Z，a*2=a+2-2=a，2*a=a ∴ 2是幺元。

∀a∈Z，(4-a)*a=(4-a)+a-2=2 ∴a的逆元是4-a。

∴<Z，*>是群。

对于任意正数n，$1^n=2-n$,即$n=1^{2-n}$，∴1是生成元，也可以验证3也是生成元，$3^n=n+2$。因此，<Z，*>是循环群。

- 围绕着生成元引出**周期**

定义15.5 设<G，*>是一个群，对∀a∈G，若有$a^n=e$，(其中：$n\in Z^+$，且n是使得$a^n=e$成立的最小的正整数)，则称n为元素a的周期或为元素a的阶数；若对a∈G，这样的n不存在，则称元素a的周期为∞。

例如：在剩余类加群$<Z_6, \oplus>$中，

元素[1]、[5]的周期是6；

元素[2]、[4]的周期是3；

元素[3]的周期是2；元素[0]的周期是1。

- 有关周期的一大性质

设<G，*>是一个群，对∀a∈G，若a的周期为n，则：

① $a^m=e$当且仅当 n|m；

② $a^i=a^j$ 当且仅当 n|（i-j）

③ 由a生成的子群恰有n个元素，即

$(a)=\{e, a, a^2, a^3, \ldots, a^{n-1}\}$

- 例题：

  **例** 设<G，*>是一个群，对∀a，b∈G，若a的周期为2，b的周期为3，且有：a*b=b*a，证明a*b的周期为6。

  **解：** 设a*b的周期为n，则有$(a*b)^n=e$，由于a*b=b*a，且运算"*"满足结合定律，所以有：

  $(a*b)^6=a^6*b^6=e*e=e$，

  由定理知： n|6，即n=1，2，3，6，

  若n=1，2，3，则有：

  $(a*b)^1=a*b\neq e$（因若a*b=e，则由$a^2=e$，有a*a=a*b，由消去律知：a=b，矛盾）

  $(a*b)^2=a^2*b^2=e*b^2=b^2\neq e$（因b的周期为3），

  $(a*b)^3=a^3*b^3=a^3*e=a\neq e$（因a的周期为2），

  所以，只有当n=6时，才有 $(a*b)^n=e$。

**陪集+拉格朗日定理**

- **陪集**
  - 定义

    **定义15.6** 设<G，*>是一个群，<H，*>是<G，*>的任一个子群，a∈G。

    ①集合：Ha＝{b*a|b∈H} 称为由a确定的H在<G，*>中的一个右陪集；元素a∈Ha称为右陪集的代表元。

    ②集合：aH＝{a*b|b∈H)}称为由a确定的H在<G，*>中的一个左陪集；元素a∈aH称为左陪集的代表元。

    群中任一元素a与子群H中所有元素左*运算所得的结果集为a确定的H在G中的左陪集。

    由左（右）陪集构成的集合的基数称为子群的指数。

  - 重要的例子：

    【例 15-4. 1】三次对称群<$S_3$，∘>的一个子群为 H={(1)，(1 2)}，由此可得到左陪集

    (1)H=(1 2)H=H，

    (1 3)H=(1 2 3)H={(1 3)，(1 2 3)}，

    (2 3)H=(1 3 2)H={(2 3)，(1 3 2)}。

    同样，可以得到右陪集为

    H(1)=H(1 2)={(1)，(1 2)}，

    H(1 3)=H(1 3 2)={(1 3)，(1 3 2)}，

    H(2 3)=H(1 2 3)={(2 3)，(1 2 3)}。

  - 两个不怎么重要的定理
    - **定理15.11**

      设H是群G的子群，a，b∈G，在G中建立二元关系：aRb⇔b∈aH，则R是G上的一个等价关系。（这里的R是以同属一个左陪集为判断标准）
    - **定理15.12** 设<H，*>是群<G，*>的子群，则H的所有左（右）陪集都是等势的。

- **拉格朗日定理**——必考点
  -

**定理15.13** 一个n阶有限群<G，*>的任一个子群<H，*>的阶必是n的因子。即若$|G|=n$，$|H|=m$，则$k=|G|/|H|=n/m$是一个整数，且称k为G内H的指数（即子群的指数），该k正好是关于H的一切不同的左(右)陪集的个数。

拉格朗日定理是从元素的数目角度给出了群的子集成为子群的必要条件,但它不是充分条件。即当m是n的因子时,n阶群不一定有m阶子群。

(如8是24的因子，但<$S_4$，∘>却无8阶子群)

- **推论15.13.1** 有限群<G，*>中任意元素a的周期都能整除群的阶。

- 必考题

1 阶群是平凡的，显然是交换群.

2、3 和 5 都是素数，由拉格朗日定理的推论（15 章 PPT：171：n 阶群中任何元素的周期都是 n 的因子）可知，2 阶、3 阶和 5 阶群都是由一个元素生成的，它们都是交换群 .（∵ $\forall a^i, a^j \in G$，有 $a^i \cdot a^j = a^{i+j} = a^{j+i} = a^j \cdot a^i$）

对于 4 阶群 G，若 G 中有周期为 4 的元素，设为 a，则 G=( a)，G 是交换群；若 G 中无 4 阶元（周期为 4 的元素，即元素的周期也称为元素的阶。），则由拉格朗日定理，G 只可能含 1 阶元和 2 阶元，G 也是交换群。

**正规子群**

- 定义

**定义15.7** 设<H,*>是群<G，*>的一个子群，如果对$\forall a \in G$，都有$aH=Ha$，则称H是G的不变子群(或正规子群)，此时H的一个左、右陪集叫做H的陪集。

- **定理15.14** 群<G，*>的子群<H，*>是不变子群⇔对$\forall a \in G$，有：$aHa^{-1} \subseteq H$。

  即：对$\forall h \in H$ 有 $a*h*a^{-1} \in H$。

**同态同构**

- 定义 如果要证明的话 先证明函数的双射单射性，再将该函数套入定义
- 例子
- 性质——照镜子
- 同态核

**定义15.10**

设f是群〈G，*〉到〈H，o〉的同态映射，

令：$K = Kerf = \{a | a \in G \wedge f(a) = e'\}$

其中e'是H的单位元，则称Kerf为f的**同态核**，

$f(G) = \{f(a) | a \in G\}$称为f的**象集**。

同态核就是群H的幺元所对应的原象的集合

# Ch 16 环与域

## 环

- 定义

■ 定义16.1

一个代数系统<R,+, * >，如果满足：

（1）<R，+>是阿贝尔群；

（2）<R, * >是半群；

（3）乘法*在加法+上可分配。即对任意a，b，c ∈ R有

a*(b+c)= (a*b) + (a*c)

(b+c)*a= (b*a) + (c*a)

则称<R,+, *>是一个环。

- 例子：普通环 和 剩余累环（k = 2: 布尔环）
- 零因子（必考）

定义16.2设<R,+,*>是环，a,b∈R。如果a≠θ且b≠θ,而a*b=θ，则称a和b是R中的零因子。

## 整环

- 定义

■ 定义16.3 设<R,+, * >是一个环:

① 如果<R, *>是可交换的，称<R,+, *>是交换环；

② 如果<R, *>是含幺半群，称<R,+, *>是含幺环；

③ 如果对于R中某些非零元素a≠θ、b≠θ,能使a*b=θ,称<R,+, *>是含零因子环；a、b称为零因子；

④ 如果<R,+, *>是可交换的、含幺、而无零因子，则称它是整环。

- 例子 记住质数剩余类环
- 性质

定理16.3 设<R,+, *>是一个环，则R中无零因子当且仅当对∀a,x,y∈R，当a≠0时，a*x=a*y ⇒ x=y 或 x*a=y*a ⇒ x=y（即满足可约律）

> 要会证明

- 子+环 >> 子环
- 环同构映射 两个条件罢了

定义16.5
设<S,+,*>和<T,⊕,⊗>是两个环，如在集合S与T之间存在映射f: S→T，使得对∀a，b∈S，有：
f(a+b)=f(a)⊕f(b)
f(a*b)=f(a)⊗f(b)
则称f是从<S,+,*>到<T,⊕,⊗>的环同态映射， f(S)为S的一个同态象。当f是一个满射时，则称f为满同态；当f是一个双射时，则称f是环同构映射；

## 域

- 定义(无非就是环继续加条件) + 一个小性质

定义16.6 设<R,+, *>是一个环，如果<R,+>和<R-{θ},*>都是交换群，则称<R,+, *>是域。
一般情况下，整环不是域，但当环的元素个数有限时，有以下结论：定理16.5有限整环<R,+,*>必是域。（教材p198）

- 有限整环必是域

实数环<R,+,×>、有理数环<Q,+,×>、剩余类环<$Z_p$，⊕，⊗>(p是素数）都是域。

整数环<Z,+,×>、剩余类环<$Z_m$，⊕，⊗>(m是合数）都不是域。
因为<Z-{0}，×>、<$Z_m$–{[0]}，⊗>都不是群。

# Ch 17 格与布尔代数

## 格

- **定义**（这个定义一定要理解到位）——可以将上三角理解为两个数中较小的那个，下三角理解为两个数中较大的那个

■ 定义17.1（代数格）设<L，∨，∧>是一个代数系统，如果∨，∧满足：
① 交换律：a∨b=b∨a，a∧b=b∧a,
② 结合律：a∨(b∨c)=(a∨b)∨c, a∧(b∧c)=(a∧b)∧c
③ 吸收律：a∨(a∧b)=a，a∧(a∨b)=a
则称<L，∨，∧>是一个代数格。

■ 2个典型的格:
集合代数系统<$2^A$，∪，∩>
命题逻辑系统<℘，∨，∧>

- **偏序格**定义：

定义17.2 设<L，≤>是一个偏序集，对∀a，b∈L，集合{a，b}都有最大下界(glb)和最小上界(lub)，则称<L，≤>是一个偏序格，简称L是一个格，若L是一个有限集，则称<L，≤>为有限格。

从定义知道：有限偏序集要成为格，必须有一个最大元和最小元。

- **代数格与偏序格无非就是一个格的不同表现罢了 要找到二者的对应关系**
    - 代数格 >> 偏序格

定理17.2 设<L，∨，∧>是一个代数格，定义格上的自然偏序“≤”：a≤b当且仅当a∧b=a，则<L，≤>是一个偏序格；

- 偏序格 >> 代数格

定理17.3 设<L，≤>是一个偏序格，在格上定义“∨”、“∧”：a∧b=glb（a，b），a∨b= lub（a，b），则 <L，∨，∧>是一个代数格。

- 基于此证明的一些结论

定理17.5、17.6 设<L，∨，∧>是一个格，≤是对应的偏序，a,b,c,d∈L，则：（教材p202)

$$\left.\begin{aligned} a\le b &\Rightarrow a\vee c\le b\vee c\\ a\le b &\Rightarrow a\wedge c\le b\wedge c\end{aligned}\right\}\text{(保序性)}$$

a≤b且c≤d ⇒ a∧c≤b∧d

a≤b且c≤d ⇒ a∨c≤b∨d

a≤b且a≤c ⇒ a≤b∧c

a≤c且b≤c ⇒ a∨b≤c

$$\left.\begin{aligned} &a\vee(b\wedge c)\le(a\vee b)\wedge(a\vee c)\\ &(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\le a\wedge(b\vee c)\end{aligned}\right\}\text{(准分配关系)}$$

- 子格 -> 子 + 格
- 对偶格 **两极反转**

定义17.4 设<L，≤>和<L，≤'>是两个偏序格，如果偏序关系≤'是≤的逆关系，则称此两个偏序格为对偶格。

设L是由18的正因子组成的集合，则L关于整除关系构成的逆关系是倍数关系；设倍数关系用“||”表示，那么<L，||>是格，并和<L，|>互为对偶。

在一个格中的最大（小）元必是对偶格中的最小（大）元；即两个对偶格的Hasse图是相互颠倒的。

- 性质

定义17.5 设<L，∨，∧>是一个格，E是格中的公式。将E中的0（最小元）和1（最大元）互换、∨和∧互换后得到的新公式$E^*$称为E的对偶公式。

对偶原理：设X和Y是格<L，∨，∧>上的两个公式，$X^*$和$Y^*$是相对应的对偶公式。如果X=Y，则$X^*=Y^*$。

定理17.4 设X和Y是格<L，∨，∧>上的两个公式，≤是对应的偏序。如果X≤Y，则$Y^*\le X^*$。

证明：由偏序集的定义及对偶原理有：

$X\le Y \Leftrightarrow X\wedge Y=X$ （偏序定义）

$\Leftrightarrow X^*\vee Y^*=X^*$ （对偶原理）

$\Leftrightarrow Y^*\le X^*$ （偏序定义）

- **格同构**
  - 定义

定义17.6 设<L,∨，∧>和<S，⊕，⊗>是两个格，ψ是L到S的映射。如果对任意x,y∈L，都有：

$\psi(x\vee y)=\psi(x)\oplus\psi(y)$ $\psi(x\wedge y)=\psi(x)\otimes\psi(y)$，

则称ψ为从格<L,∨，∧>到格<S，⊕，⊗>的格同态映射，当ψ分别是单射、满射和双射时，ψ分别称为单一格同态、满格同态和格同构。

- 一个例子——拉通了代数格和偏序格

■ 例 设$D_6$表示6的正因子集，证明因子格 < $D_6$，|>和幂集格<$2^{\{a,b\}}$，⊆>是同构的。

证明：定义映射f：$D_6\to 2^{\{a,b\}}$，使得

f(1)=ϕ,f(2)={a},f(3)={b},f(6)={a,b}

∵ < $D_6$，|>对应的代数格为< $D_6$，lcm，gcd>

<$2^{\{a,b\}}$，⊆>对应的代数格为<$2^{\{a,b\}}$，∪，∩>

lcm:最小公倍数
gcd：最大公约数

∴f(lcm(1,3))=f(3)={b}= ϕ∪{b}=f(1)∪f(3)

f(gcd(2,6))=f(2)={a}={a}∩{a,b}=f(2)∩f(6)

f(lcm(2,3))=f(6)={a,b}={a}∪{b}=f(2)∪f(3)

f(gcd(2,3))=f(1)=ϕ={a}∩{b}=f(2)∩f(3)

其余情况也可一一验证，又因为是双射，所以，命题得证。

- 保序定理一定要会
  - 保序定理的含义 注意同态一定保序但保序不一定同态

**定理17.7** 设$<L_1, \vee, \wedge>$和$<L_2, \oplus, \otimes>$是两个格，对应的偏序关系为$\preceq$、$\subseteq$，则有：

如果f：$L_1 \to L_2$是一个格同态，则对$\forall a, b \in L_1$，$a \preceq b \Rightarrow f(a) \subseteq f(b)$；

**证明：** 对$\forall a, b \in L_1$，由f是函数，所以有

$$f(a)、f(b) \in L_2,$$

因为$a \preceq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$，于是，由同态等式知：

$$f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \otimes f(b)$$

所以：$f(a) \subseteq f(b)$。

即：对$\forall a, b \in L_1$，$a \preceq b \Rightarrow f(a) \subseteq f(b)$

  - **同构和保序之间的等价关系——很重要** 要会证明

**定理17.8** 双射f：$L \to P$为格$<L, \vee, \wedge>$到格$<P, \oplus, \otimes>$的格同构的充分必要条件是：对任意的$a, b \in L$，$a \leq b \Leftrightarrow f(a) \subseteq f(b)$，其中$\leq$和$\subseteq$分别是格L和P对应的偏序。

> 先证明有上界再证明最小上界

- 分配格与有补格
  - 分配格——只需要证明一个就ok——书上有一个例题证明最大公约数和最小公倍数的分配格——**证明题热点**

**定义17.7** 设$<L, \vee, \wedge>$是一个格，如果对任意$a, b, c \in L$，都有：

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad (1)$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad (2)$$

则称$<L, \vee, \wedge>$是一个分配格。

**注意：** 式(1)和式(2)的两个分配律是对偶的，由对偶原理，定义17.7可简化为只含式(1)和式(2)中一个的分配律。

1) 设A为任意一个集合，则幂集格$<2^A, \cap, \cup>$是否是分配格?

2) 设P为命题公式集合，$\wedge$、$\vee$分别是命题合取与析取运算，则$<P, \wedge, \vee>$是否是分配格?

**解：** 1) 对任意P、Q、$R \in 2^A$，有：

$$P \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$$

$$P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$$

所以，格$<2^A, \cap, \cup>$是一个分配格。

2) 对任意R、S、$T \in P$，有

$$R \wedge (S \vee T) = (R \wedge S) \vee (R \wedge T)$$

$$R \vee (S \wedge T) = (R \vee S) \wedge (R \vee T)$$

所以，格$<P, \wedge, \vee>$是一个分配格。

在图a）、b）中都取b,c,d三个元素来验证。用“∧”和“∨”表示它们的交和并运算。

在图a）中，

$b\wedge(c\vee d)=b\wedge a=b$，

而 $(b\wedge c)\vee(b\wedge d)=e\vee e=e$。

在图b）中，

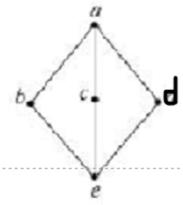
$b\wedge(c\vee d)=b\wedge a=b$，

而 $(b\wedge c)\vee(b\wedge d)=e\vee d=d$。

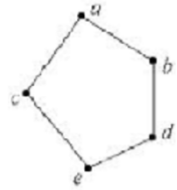
因此，在图a）和图b）中都有：

$b\wedge(c\vee d)\neq(b\wedge c)\vee(b\wedge d)$。

故它们都不是分配格。




a)




- 有界格——hase图上下各收为一点

**定义17.8** 设<L,≤>（或<L, ∨, ∧>）是一个格，若存在元素a∈L，使得对任意x∈L，都有

$a\leq x$(或$x\leq a$)，

则称a为格<L,≤>的最小元(或最大元)，分别记为0(或1)，而具有最大元和最小元的格称为有界格。

- 有补格

**定义17.9、17.10** 设<L,∨,∧>为有界格，1和0分别为它的最大元和最小元，对于∀a∈L。如果存在b∈L，使得：

$a\wedge b=0$，$a\vee b=1$（同时成立），

则称a和b互为补元。若对任意a∈L，都有补元 $\bar{a}$ 存在，则称<L,∨,∧>为有补格。

- 有补 + 分配

**定理17.10** 在有补分配格(既是有补格又是分配格，简称为有补分配格)<L,∨,∧>中，如元素∀a∈L有补元存在，则此元素的补元必唯一。

证明：

设a有两个补元b和c，由补元的定义知：

$a\wedge b=0=a\wedge c$，$a\vee b=1=a\vee c$

由消去律（分配格所具有）知，b = c。

- 布尔代数——说白了就是有补分配格

**布尔代数是有补分配格，有补分配格<B，∨，∧>必须满足：**

1) 是格
2) 分配律成立
3) 有最大元和最小元（有界）；
4) 每个元的补元存在；

**最大元1和最小元0可以用下面的同一律和零律来描述：在L中存在两个元素0和1，使得对任意a∈L，有：**

**$a \wedge 1 = a$，$a \vee 0 = a$；$a \vee 1 = 1$，$a \wedge 0 = 0$。**

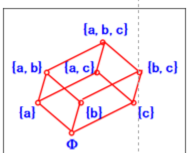
- 原子：

**■ 定义17.11 在布尔格〈B，≤〉中，直接盖住最小元0的元素称为原子。**

**解释：**

**即a是格中的原子，则不能存在元素b使得$0 < b < a$。**

**例如在幂集格〈$2^S$，⊆〉中，由S中单元素构成的子集都是原子，其余的就不是原子。**




〈$2^C$，⊆〉

# 根据历年重点整理的考点题库

## 单项选择题

### 考点一：判断是否为永真式

- 直接变化式子，不要用真值表
- 有时间检查再用真值表看一下

### 考点二：特殊的式子的类型

- 前束范式
- Sk里穆范式

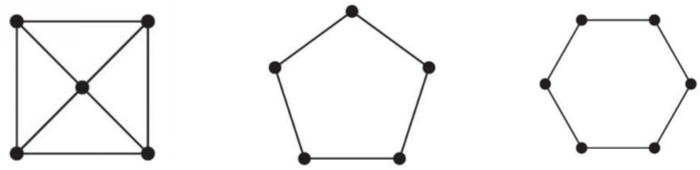
### 考点三：多少种等价关系？

- 多少种分化

### 考点四：很偏僻的一些概念

- 二部图

> 很容易就被虚晃到，一旦考到二部图就要疯狂想书上的那一个最典型的二部图，然后看看这些图能不能做**同构**构建出来。虽然同构不好想象，但是可以先把各个边拉直后再变

> **10. 下面哪个图是二部图？（ C ）**
>
> 
>
> 都不是
>
> (A) (B) (C) (D)

- 平面图

> 说白了就是不断调整边 做到无交叉

- 格

15、下面是布尔代数的是（ A ）

（A）幂集格 $\langle 2^A, \cup, \cap \rangle$ （B）因子格 $\langle D_{12}, \mathrm{lcm}, \mathrm{gcd} \rangle$

（C）全序格 $\langle \{1, 2, 3, 4, 5\}, \leq \rangle$ （D）5 点格

- 偏序集 => 全序集 (+ 有限) => 良序集
  - 偏序集就是最普通的偏序关系
  - 全序集就是可以全排的出大小
  - 良序集是对于全序集的任何一个部分都有最大元 最小元
- 生成元

13、$\langle G, * \rangle$ 是 7 阶群，则 G 有（ ）个生成元

（A） 2 （B） 4 （C） 5 （D） 6

## 单选注意事项：

- 一定要想清楚，为什么选或者为什么不选 一定要紧扣定义，找反例
- 遇到不把握的，看到选项之间的关系，选择范围更大的

# 多项选择题

### 考点一：命题的定义

- 陈述句
- 能判断对错
- 非悖论

### 考点二：给一个图表示关系，判断该关系是否有xxx性质

- 注意反自反，反对称

### 考点三：判断 群，环，域，格

### 多选一定要多思考 一定一定要多思考

## 填空题

### 考点一：翻译

> 一定要参透原命题的含义

> 2、设：P(x)：x 是液体；G(x)：x 是金属；R(x, y)：x 溶解于。则自然语言“任何金属均可溶解于某种液体之中”可以符号化为：$\underline{\exists x(P(x)\wedge\forall y(G(y)\rightarrow R(x,y))}$。

## 演算题

### 考点一：主析取主合取

### 考点：可达矩阵 + 强分图

- 邻接矩阵
- 可达矩阵
- 强分矩阵

### 考点二：克鲁斯卡尔算法

- 一定要列出选择哪些边
- 一定要画出最后的结果
- 一定要写出最后的权重

### 靠点三：各种计算

- 树的计算
- 握手定理
- （广义）欧拉定理

### 考点四：偏序关系中的各种概念

- 最大元 最小元
- 极大元 极小元
- 上界 下界
- 最小上界 最大下界

### 考点五：等价关系

3.（8 分）设 A={a，b，c，d，e，f}，

（1）写出 A 上的一个等价关系 R，使 R 可以产生分划{{a，b}，{c}，{d，e，f}}.

解：R= $\{a,b\}\times\{a,b\}\cup\{c\}\times\{c\}\cup\{d,e,f\}\times\{d,e,f\}$ ---2 分

(2) 决定 A 上的最大等价关系有多少个元素？最小等价关系有多少个元素？

解：A 上的最大等价关系是 $A\times A$，有 36 个元素； ---3 分

A 上的最小等价关系是 $I_A$，有 6 个元素 ---3 分

### 考点六

- 生成元

> 找到该关系中的生成元 b d

| * | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | a | b | c | d |
| b | b | c | d | a |
| c | c | d | a | b |
| d | d | a | b | c |

## 推理证明题

### 考点一：命题的演绎推理

- CP 反证法必须要会
- 可能会有谓词的推理<难> 参考下面这个天花板

2.（6 分）令 L(x)：x 小于零；N(x)：x 是自然数；H(x)：x 是负数。符号化语句："不存在小于零的自然数。负数都是小于零的，因此，负数都不是自然数。"并用演绎方法证明其结论。

证明：$\neg(\exists x)[N(x)\wedge L(x)]$，$(\forall x)[H(x)\to L(x)]\Rightarrow(\forall x)[H(x)\to\neg N(x)]$ --2 分

（1）$\neg(\exists x)[N(x)\wedge L(x)]$ P

（2）$(\forall x)[\neg N(x)\vee\neg L(x)]$ TE(1)

（3）$\neg N(x)\vee\neg L(x)$ US(2)

（4）$L(x)\to\neg N(x)$ TE(3)

（5）$(\forall x)[H(x) \to L(x)]$ P

（6）$H(x) \to L(x)$ US(5)

（7）$H(x) \to \neg N(x)$ TI(4)(6)

（8）$(\forall x)[H(x) \to \neg N(x)]$ UG(7) --证明过程 4 分

证法不唯一

### 考点二：等价关系

### 考点三：群、环、域、格

3、设<{a，b}，*>是半群，并且 a*a=b。试证明：b*b=b。（6 分）

只有定义在手中 你能怎么办？ 只能定义硬推

因为 b*b=（a*a）*b=a*(a*b)。(2 分)

因<{a，b}，*>是半群，二元运算*具有封闭性。因此，a*b 只能为 a 或 b。

（1）若 a*b=a，则 b*b=a*（a*b）=a*a=b；（2 分）

（2）若 a*b=b，则 b*b=a*b=b。（2 分）

因此，综合（1）和（2）可知 b*b=b。

### 容易被忽略的点

**3.(6 分)设 $G=(V,E)$ 是简单连通图，$T_1=(V,E_1)$ 和 $T_2=(V,E_2)$ 都是 $G$ 的生成树，且 $E_1 \oplus E_2 = E$.**

**证明：$G$ 中无割边.**

证明：（反证法）设 $G$ 有割边 e，则 $e \in E_1 \cap E_2$，则 $E_1 \oplus E_2 = (E_1 \cup E_2) - (E_1 \cap E_2) \subset E$，与 $E_1 \oplus E_2 = E$ 矛盾，所以假设不成立，即 $G$ 中无割边.

## 应用题

### 考点：中国邮递员算法 99%

完全copy下面的写法

```
STEP 1 找出所有的奇度数结点
    图中有 n 格奇度数结点

STEP 2 分别写出每两个奇度数结点之间的距离
    c n 2种组合

STEP 3 分别写出 n-1 种组合距离值
    写出距离值
    并说明最小值为 xxx

STEP 4 写出欧拉回路
```

解：图中有 4 个奇度结点：v1, v2, v3, v4

d(v1, v2)=3，d(v1, v3)=4，d(v1, v4)=1

d(v2, v3)=4，d(v2, v4)=2，d(v3, v4)=5　　（3 分）

∵ d(v1, v2)+d(v3, v4)=8

d(v1, v3)+d(v2, v4)=6

d(v1, v4)+d(v2, v3)=5　　（3 分）

∴ 选择二条长度总和最小的道路 $P_1$=v1v4, $P_2$=v2vv3（2 分）

构造图 G'，则快递员按以下道路走的总里程数最少：

Vv2v1v4v1v3vv3v5v6v2v5vv2v4V　　（1 分）