四川大学期末考试试题（闭卷）

（2018——2019 学年第 2 学期）　　A 卷

课程号：201018030　　课序号：　　课程名称：概率统计（理工）　任课教师：　　　成绩：

适用专业年级：　　　学生人数：　　印题份数：　　　学号：　　　　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

注：考试时间 120 分钟。请将答案写在答题纸规定的方框内，否则记 0 分。这里的“样本”都是指“简单随机样本”。除不尽的结果请保留最简分数或指数形式。

附：标准正态分布的分布函数值：$\Phi(0.03)=0.5120, \Phi(0.05)=0.5199, \Phi(0.3)=0.6179,$
$\Phi(0.333)=0.6304, \Phi(0.5)=0.6915, \Phi(1.645)=0.9500, \Phi(1.96)=0.9750.$

t 分位数：$t_{0.95}(25)=1.7081, t_{0.975}(25)=2.0595, t_{0.95}(24)=1.7109, t_{0.975}(24)=2.0639.$

一、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

这题很简单

1．10 人随机围绕圆桌就座，则甲、乙两人之间恰有 2 人的概率为_________.

2．设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{2}, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$，则 $P(X=1)=$_________.

3．X 与 Y 均服从 $B(1,0.5)$（二项分布），若已知 $P(X=Y)=0.8$，则 $P(XY=0)=$_________.

4．设 $(X,Y)\sim N(3,2;4,25;\ 0.1)$（正态分布），$Z=X-2Y$，则 $P(Z>4)=$_________.

5．设 $X\sim P(2)$（泊松分布），$Y\sim U(0,6)$（均匀分布），X,Y 相互独立，则 $P(2<X+Y<8)\ge$ _________.（利用切比雪夫不等式）

6．设 $X\sim N(3,\sigma^2)$ 和 $Y\sim N(2,\sigma^2)$ 为两个相互独立的总体，X_1,X_2,X_3,X_4 和 $Y_1,\cdots,Y_9$ 分别为来自 X 和 Y 的两组样本，$\bar{X},\bar{Y}$ 和 S_1^2,S_2^2 分别为样本均值和样本方差，若 $\dfrac{a(2\bar{X}-3\bar{Y})}{S_2}$ 服从 t 分布，则 $a=$_________.

试卷编号：

二、解答题 （共 82 分）

1. （12 分）某单项选择题有 4 个选项，假设某考生有 40%的可能知道答案，若他不知道答案，则从四个选项中等可能地猜一个．试求:

（1）该考生能够答对该题的概率;（2）在他答对该题目的条件下， 他的确知道答案的概率.

2．（10 分）已知 X 的概率分布为:

X	-2	-1	0	1	2	3
p	$2a$	0.1	$3a$	a	a	$2a$

(1) 求 a 的值; (2) 求 $Y = X^2 - 1$ 的分布函数.

3．（10 分）班上有 50 个学生， 每个人都有一项自己的帽子．现将所有的 50 顶帽子放在一个盒子里， 然后每个人依次从盒子里面随机的取一顶帽子．若刚好拿到自己的帽子， 则称为一个匹配.

(1) 求第二个学生拿到自己帽子的概率；(2) 记 X 为总的匹配数，求 X 的数学期望 $E(X)$.

4．（15 分）设 (X,Y) 的联合密度函数为: $f(x,y)=\begin{cases}3y, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

（1）求 X 和 Y 的边缘密度函数并判断独立性；

（2）求条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ 并计算概率 $P\left(X \ge \frac{1}{2} \middle| Y = \frac{3}{4}\right)$;

（3）若 $Z = Y - X$，求 Z 的密度函数.

5．（8 分）$g(x)$ 为区间 $[0,1]$ 上的连续函数，现按照如下Monte Carlo方法计算 $I=\int_0^1 g(x)dx$.

首先从 $[0,1]$ 区间随机取 n 个数，即生成 n 个独立同分布的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，且

$X_i \sim U(0,1)$，然后计算 $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)$ 并将它作为积分 I 的近似.

(1) 证明：随机变量序列 $\{Y_n\}$ 依概率收敛到 I；

(2) 若 $g(x)=x^{1.5}, n=100$，用中心极限定理计算误差小于0.01的概率，即 $P(|Y_n - I| < 0.01)$.

6．（15 分）总体 X 的密度函数为: $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{3x^2}{\theta^3}, & x\in[0,\ \theta]\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，其中 $\theta>0$ 为未知参数；

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本:（1）求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$；(2) 求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_2$；

(3) 请判断估计量 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的无偏性并说明理由.

7．（12 分）某型弹壳直径 X（单位:mm）服从正态分布，即 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，规定标准为 $\mu = 8$.

从一批弹壳中随机调查了 25 个，得到样本均值为 7.9，样本标准差为 0.5，请回答下列问题:

（1）求弹壳平均直径 μ 的置信度为 95%的置信区间;（计算结果四舍五入保留两位小数）

（2）能否认为这批弹壳直径较标准值显著偏小（显著性水平 $\alpha = 0.05$）？