线性方程组

- 高斯消元法
- 系数矩阵&增广矩阵
- 解的存在性与唯一性

矩阵代数

- 矩阵的代数运算
- 矩阵的初等变换
- A可逆

  $\Leftrightarrow \exists$初等阵P_1, P_2, L, P_k, 使得$P_k L P_2 P_1 A = E$

  $\Leftrightarrow AX = 0$只有0解

  $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
- 对称矩阵：$A^T = A$
- 反对称矩阵：$A^T = -A$
- 对角形矩阵
- 正交矩阵：$A^T = A^{-1}$

行列式

- 行列式的性质
- $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = |A||C| \quad \begin{vmatrix} A & 0 \\ B & C \end{vmatrix} = |A||C| \quad \begin{vmatrix} 0 & A \\ C & B \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||C| \quad \begin{vmatrix} B & A \\ C & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$

  $A是m阶矩阵,\ C是n阶矩阵$
- 范德蒙德行列式：

  $D_n=\begin{vmatrix}1&1&\dots&1\\x_1&x_2&\dots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\dots&x_n^2\\\vdots &\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\dots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod\limits_{n\ge i\gt j\ge 1}(x_i-x_j)$
- 伴随矩阵：$A^*,将每个元a_{ij}替换成其代数余子式A_{ij}$

  $AA^*=A^*A=|A|E$

  $\begin{aligned}A^{-1}=\frac1{|A|}A^*\end{aligned}$

  $|A^*|=|A|^{n-1}$
- 克莱姆(Grammer)法则

  $n元线性方程组 \begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2\\\dots\dots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$

$当|A|\neq0,存在唯一解:$

$\begin{aligned}x_j=\frac1{|A|}\begin{vmatrix}a_{11}&\dots&a_{1(j-1)}&b_1&a_{1(j+1)}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&\dots&a_{2(j-1)}&b_2&a_{2(j+1)}&\dots&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\dots&a_{n(j-1)}&b_n&a_{n(j+1)}&\dots&a_{nn} \end{vmatrix}=\frac{D_j}{|A|}\end{aligned}$

$D_j表示A的第j列换成常数列后的行列式$

向量空间

向量的线性相关性

- 线性方程组$BX=0$与$ABX=0$解的关系
  - $BX=0$的解一定是$ABX=0$的解
  - B的列向量线性相关，则AB的列向量也线性相关
  - AB的列向量线性无关，则B的列向量也线性无关
  - 若A的列向量线性无关，则$BX=0$与$ABX=0$同解，此时AB列向量线性相关（无关）当且仅当B的列向量线性相关（无关）。
- 向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,L,\alpha_p\}\（p\ge2)\ \ (I)$线性相关 ⇔ (I)中至少有一个向量可以由其余$p-1$个向量线性表出
- 向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,L,\alpha_p\}\ \ (I)$线性无关，$\{\alpha_1,\alpha_2,L,\alpha_p,\beta\}\ \ (II)$线性相关，则$\beta$可由$(I)$线性表出，且唯一线性表出。
- 向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,L,\alpha_p\}\ \ (I)$的一个部分组线性相关，则$(I)$线性相关。
- 向量组$a_j=(a_{1j},a_{2j},a_{3j})^T\ (j=1,2,3)\ \ (I)$线性无关，分别在$a_{j}$的后面添加一个分量得$\beta_j=(a_{1j},a_{2j},a_{3j},a_{4j})\ (j=1,2,3)$，则$\beta_1,\beta_2,\beta_3\ \ (II)$线性无关。
- n个n维列向量$\alpha_1,\alpha_2,L,\alpha_n$线性相关 ⇔ n阶行列式$\det(\alpha_1,\alpha_2,L,\alpha_n)=0$
- 如果向量组所含向量个数比向量的分量数目更多，则向量组必然线性相关。

向量组的极大无关线性组和秩

- 若向量组A和向量组B可以互相线性表出，称向量组A与向量组B**等价**
- 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,L,\alpha_p$可由$\beta_1,\beta_2,L,\beta_t$线性表出，且$p>t$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,L,\alpha_p$必线性相关。

  若线性无关向量组$\alpha_1,\alpha_2,L,\alpha_p$可由$\beta_1,\beta_2,L,\beta_t$线性表出，则$p\le t$。
- 两个等价的线性无关向量组，必包含相同个数的向量
- 极大无关组的一些性质：
  - 任意一个极大无关组都与向量组本身等价
  - 一个向量组的任意两个极大无关组等价，且所含向量个数相等。

子空间

- 列空间$ColA$是A的列向量的所有可能的线性组合构成的集合
- 行空间$RowA$是A的行向量的所有可能的线性组合构成的集合
- 零空间$NulA$是齐次线性方程组$Ax=0$的所有解向量构成的集合
- 解空间是m个方程n个未知量的齐次线性方程组$Ax=0$的解集构成的集合

基和维数

- 基和维数

  > 对于矩阵 $A=\begin{bmatrix}-3&6&-1&1&-7\\1&-2&2&3&-1\\2&-4&5&8&-4\end{bmatrix}$
  >
  > $A\rightarrow\begin{bmatrix}1& -2&0&-1&3\\0&0&1&2&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$
  >
  > 取x_2,x_4,x_5为自由变量，则解为：
  >
  > $x_1=2x_2+x_4-3x_5$，$x_3=-2x_4+2x_5$
  >
  > $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}-3\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix}=x_2\alpha+x_4\beta+x_5\gamma$
  >
  > 因此，
  >
  > $\{\alpha,\beta,\gamma\}$是$NulA$的一组基，有3个向量，则维数$dimNulA=3$
  >
  > $\{\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5\}$是$ColA$的一组基，有3个向量，则维数$dimColA=3$

- 过渡矩阵

  设$\epsilon_1,\epsilon_2,L,\epsilon_n\ (I)$与$\eta_1,\eta_2,L,\eta_n\ (II)$是$n$维列向量空间$R^n$的两组基，则基$(II)$可由基$(I)$线性表出，即

  $(\eta_1,\eta_2,L,\eta_n)=(\epsilon_1,\epsilon_2,L,\epsilon_n)\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&L&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&L&a_{2n}\\M&M&&M\\a_{n1}&a_{n2}&L&a_{nn}\end{bmatrix}$

  则称$A=(a_{ij})_{n\times n}$是基(I)到基(II)的过渡矩阵，其中的第j列是η_j在基(I)下的坐标

- $rankA+dimNulA=n$

矩阵的秩

- $r(A)=r(A^T)$
- $r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$
- $A_{s\times n},B_{s\times m},r[A,B]\le r(A)+r(B)$
- $A_{s\times n},B_{s\times n},A与B等价\ \ \Leftrightarrow\ \ r_A=r_B$
- $r(A)=n\ \ \Leftrightarrow\ \ |A|\neq0$

- $r_{AB}\le min\{r_A,r_B\}$

特征值与特征向量

矩阵的特征值与特征向量

- 特征值与特征向量的定义
- 特征值的性质：
  - $\begin{aligned}\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i=\sum\limits_{i=1}^na_{ii}\end{aligned}$
  - $\begin{aligned}\prod\limits_{i=1}^n\lambda_i=|A|\end{aligned}$
  - 若λ是A的特征值，则$f(\lambda)$是$f(A)$的特征值

    若α是A的对应特征值λ的特征向量，则α也是$f(A)$的对应特征值$f(\lambda)$的特征向量
  - 方阵对应于不同特征值的特征向量线性无关

矩阵的相似及对角化

- 相似的定义：$\exist P,P^{-1}AP=B$，则A与B相似，记为$A\sim B$
- 相似的性质：
  - $|A|=|B|$
  - $rank(A)=rank(B)$
  - $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$
  - $trA=trB$
  - $A^m\sim B^m,\ m\in N,\ 若A可逆,\ 则m可\in Z$
  - $A^T\sim B^T$
  - $kA\sim kB$
  - $h(A)\sim h(B),\ h(x)为任意多项式$
- 可对角化的条件

实对称矩阵的对角化

- 存在正交矩阵$Q(Q^T=Q^{-1})$，使得$Q^{-1}AQ$为对角形矩阵（称为A正交相似于对角形矩阵）
- 施密特正交化：

  $设\Sigma_1:\alpha_1,\alpha_2,⋯,\alpha_t是R^n中的线性无关组，令\\$

  $\begin{aligned}&\beta_1=\alpha_1,\\&\beta_2=\alpha_2-(\beta_1,\beta_1)^{-1}(\alpha_2,\beta_1)\beta_1\\&\dots\dots\\&\beta_t=\alpha_t-\sum\limits_{i=1}^{t-1}(\beta_i,\beta_i)^{-1}(\alpha_t,\beta_i)\beta_i\end{aligned}$

$则\sum_2:\beta_1,\beta_2,⋯,\beta_t为一正交组，将其单位化得\sum_3:\gamma_1=\frac1{|\beta_1|}\beta_1,\gamma_2=\frac1{|\beta_2|}\beta_2,⋯,\gamma_t=\frac1{|\beta_t|}\beta_t$

$则\sum_3为一规范正交组，且对\forall k=1,2,⋯,t,向量组\alpha_1,\alpha_2,⋯,\alpha_k与\gamma_1,\gamma_2,⋯,\gamma_k等价$

二次型

- 二次型的基本形式：
    - 标准型：只有平方项
    - 规范型：系数为1,-1,0的标准型
- 化为标准型的方法：
    - 配方法
    - 正交变换发
- 分类：正定、负定、半正定、半负定、不定