四川大学期末考试试题（闭卷）

（2019—2020 学年第 1 学期）A 卷

评分标准

课程号：304156050　　课序号：　　课程名称：离散数学　　任课教师：　　成绩：

适用专业年级：2018 级计算机科学与技术　　学生人数：　　印题份数：

学号：　　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

一、单项选择题（本大题共 15 小题，每小题 1 分，共 15 分）在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将选项填写在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
④	③	③	④	③	④	③	③	②	④	③	③	②	②	②

二、多项选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分 ）在每小题列出的四到五个备选项中有二个至五个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选、少选或未选均无分。

1、（　1、3、5　）。

2、（　2、4、5　）。

3、（　2、4、5　）。

4、（　1、2、3、4　）。

5、（1、2、5　）。

6、

三、填空题（本大题共 5 小题，每空 1 分，共 10 分）

1、设 S 为非空有限集，代数系统 $<2^S, \cup>$ 中幺元为 $\underline{\quad\varnothing\quad}$，零元为 $\underline{\quad S\quad}$。

2、设 X={3，5，9，15，45，90}，R 是 X 上的整除关系，则 R 是 X 上的偏序关系，其最大元是 90＿＿＿＿＿，极小元是＿＿3，5＿＿＿。

3、树是不包含＿＿圈＿＿的连通图，其图中结点 n 和边 m 的关系是＿＿m=n-1＿＿＿。

4、设 e 是群 G 上的幺元，若 a∈G 且 $a^2=e$，则 a^{-1}=＿a＿＿，a^{-2}=＿e＿＿＿。

5、设<L,∨,∧,0,1>是有界格，a，b∈L，若 a∨b=1 且 a∧b=0，则 $\bar{a}$ =＿b＿；$\bar{b}$ =＿a＿。

四、演算题（本大题共 5 小题，共 35 分）

1. （7 分）求解公式 P∧(Q∨R)的主合取范式。

解：1) $P\wedge(Q\vee R)=(P\vee(Q\wedge\sim Q)\vee(R\wedge\sim R))\wedge((Q\vee R)\vee(P\wedge\sim P))$ **（3 分）**

$=((P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\sim R)\wedge(P\vee\sim Q\vee R)\wedge(P\vee\sim Q\vee\sim R))\wedge$

$((Q\vee R\vee P)\wedge(Q\vee R\vee\sim P))$ **（2 分）**

$=(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\sim R)\wedge(P\vee\sim Q\vee R)\wedge(P\vee\sim Q\vee\sim R)\wedge$

$(Q\vee R\vee\sim P)$ **（2 分）**

2) **（列出真值表 3 分）**

P	Q	R	P∧(Q∨R)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

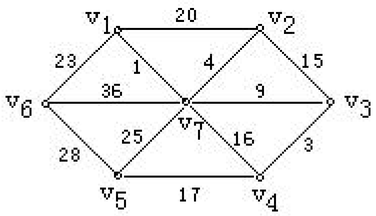
共有 5 个极大项

$(P\vee Q\vee R)$，$(P\vee Q\vee\sim R)$，$(P\vee\sim Q\vee R)$，$(P\vee\sim Q\vee\sim R)$， $(Q\vee R\vee\sim P)$ **（2 分）**

∴ $P\wedge(Q\vee R)=(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\sim R)\wedge(P\vee\sim Q\vee R)\wedge(P\vee\sim Q\vee\sim R)\wedge$

$(Q\vee R\vee\sim P)$ **（2 分）**

2. （7 分）如下图所示的赋权图表示某乡七个村$v_1,v_2,\cdots\cdots,v_7$及预先算出它们之间的公路造价（单位：万元），试给出一个设计方案，使得各村之间既能够互通又使整个工程的总造价最小。



解：解：　用克鲁斯克尔（Kruskal）算法求产生的最优树。算法为：

$w(v_1,v_7)=1$　　选$e_1=v_1v_7$

$w(v_7,v_2)=4$　　选$e_2=v_7v_2$

$w(v_7,v_3)=9$　　选$e_3=v_7v_3$

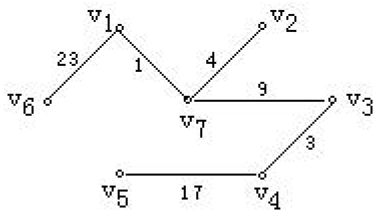
$w(v_3,v_4)=3$　　选$e=v_3v_4$

$w(v_4,v_5)=17$　　选$e=v_4v_5$

$w(v_1,v_6)=23$　　选$e=v_1v_6$

（以上每个选项 1 分）

结果如图：



树权 C(T)=23+1+4+9+3+17=57（万元）即为总造价**（1 分）**

3.（7 分）设树 G 中有 6 个结点度数为 2，5 个结点度数为 3，4 个结点度数为 6，其余结点度数均为 1，试求 G 中的总结点数目。

解：设一度结点的个数为 L，总的结点数为 n，树的边数为 m，

由握手定理：6×2+5×3+4×6+L=2m　　　　**（2 分）**

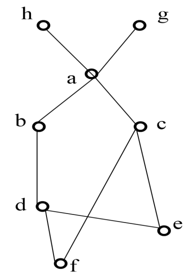
由树的基本性质：m=n-1　　　　**（ 2 分）**

⇒　　51+L=2(n-1)　　①

由题意　15+L=n　　　　②

由①②解得　　n=38　　　　**（ 3 分）**

4. （7 分）已知有如图的偏序关系，求出其子集 A={a,b,c,d} 的极大元、极小元、最大元、最小元、上界和下界，最小上界和最大下界。.



解：极大元：a，极小元：c，d，最大元和最小元： a ，无，
上界：a，h，g，下界：e，f，最小上界： a ，最大下界：无
（以上每个选项 1 分）

5. （7 分）按右边格式列出模为 5 的剩余类乘群 $\langle Z_5 - \{[0]\}, \otimes\rangle$ 的运算表，并求出该群的幺元及每个元的逆元。

解：运算表如图所示（2 分）

该群的幺元为[1]，（1 分）

[2] 和[3]互为逆元，（2 分）

[4]的逆元为[4] （1 分）

[1]的逆元为[1] （1 分）

⊗	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]				
[2]				
[3]				
[4]				

⊗	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[3]	[1]	[4]	[2]
[4]	[4]	[3]	[2]	[1]

五、推理与证明题（本大题共 3 小题，共 21 分）

1. （7 分）请用演绎法证明：$(P\rightarrow(Q\rightarrow S))\wedge(\neg R\vee P)\wedge Q\Rightarrow R\rightarrow S$

注明：

（1）R 附加前提 （2 分）

（2）$\neg R\vee P$ P

（3）P　　　　　T(1)(2)，I　　　　　（1 分）

（4）P→(Q→S)　　P

（5）Q→S　　　　T(3)(4)，I　　　　　（1 分）

（6）Q　　　　　P

（7）S　　　　　T(5)(6)，I　　　　　（1 分）

（8）R→S　　　　CP　　　　　　　　（2 分）

2.（7 分）如果集合 A 上的关系 R 和 S 是自反的、对称的和传递的，证明：R∩S 是 A 上的等价关系。

证明：（1）$\forall a \in A, \because R, S$自反$, \therefore <a,a> \in R, <a,a> \in S$,

$\therefore <a,a> \in R \cap S$，$\therefore R \cap S$ 自反。　（2 分）

（2）$\forall a,b \in A$，若$<a,b> \in R \cap S$，则$<a,b> \in R, <a,b> \in S$，由 R，S 对称，所以，$<b,a> \in R, <b,a> \in S, \therefore <b,a> \in R \cap S$，所以 $R \cap S$ 对称。　（2 分）

（3）$\forall a,b,c \in A$，若$<a,b> \in R \cap S, <b,c> \in R \cap S$，则$<a,b> \in R, <a,b> \in S$,

$<b,c> \in R, <b,c> \in S$，　由 R，S 传递性知，$<a,c> \in R, <a,c> \in S$，从而

$<a,c> \in R \cap S$，所以，$R \cap S$ 传递。　（3 分）

综上所述，$R \cap S$ 是 A 上的等价关系。

3.（7 分）设 $<\mathbf{R}, *>$ 是一个代数系统，$*$ 是 R 上的二元运算，即对，$\forall$a，b ∈ R，a $*$ b = a + b + a · b，+，• 是普通加法和乘法运算，则 0 是幺元且 $<\mathbf{R}, *>$ 是含幺半群。

证明：

[幺]　$\forall a \in R$，$0*a = 0 + a + 0 \cdot a = a$，$a*0 = a + 0 + a \cdot 0$

即 $0*a = a*0 = a$　$\therefore 0$为幺元　（2 分）

[闭]　$\forall a,b \in R$，由于+，• 在 R 封闭。所以$a*b = a + b + a \cdot b \in R$ 即*在 R 上封闭。（2 分）

[结]　$\forall a,b,c \in R$

$(a*b)*c = (a+b+a\cdot b)*c = a+b+a\cdot b+c+(a+b+a\cdot b)\cdot c$

$= a+b+c+a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+a\cdot b\cdot c$

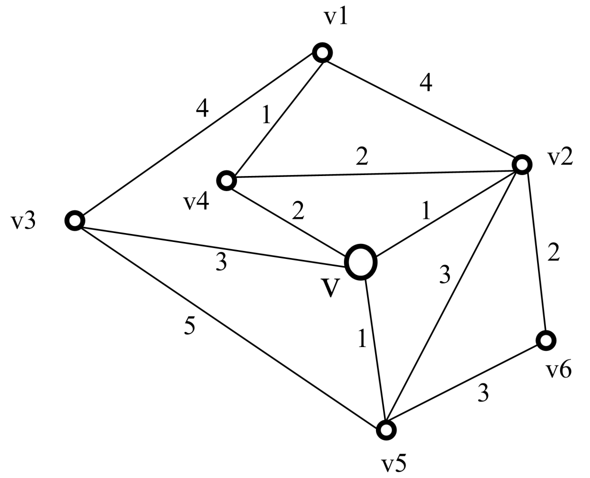
$a*(b*c) = a+b+c+a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+a\cdot b\cdot c$

所以　$(a*b)*c = a*(b*c)$　　　（3 分）

因此，〈R，*〉是含幺半群。

六、应用题（9 分）

一个快递员每天所负责的投递区域如下图所示，图中每条边代表一条街道，快递员每天从快递站 V 出发，将所负责区域的街道走完一遍再回到快递站，请为快递员规划一条路径使得他所走的总里程数最少。



解：图中有 4 个奇度结点：v1, v2, v3, v4

d(v1, v2)=3, d(v1, v3)=4, d(v1, v4)=1

d(v2, v3)=4, d(v2, v4)=2, d(v3, v4)=5 （3 分）

∵ d(v1, v2)+d(v3, v4)=8

d(v1, v3)+d(v2, v4)=6

d(v1, v4)+d(v2, v3)=5 （3 分）

∴ 选择二条长度总和最小的道路 P_1=v1v4, P_2=v2vv3（2 分）

构造图 G’，则快递员按以下道路走的总里程数最少：

Vv2v1v4v1v3vv3v5v6v2v5vv2v4V （1 分）