بهینه‌سازی محدب ۱

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲

مدرس: دکتر یاسایی

دانشکده علوم ریاضی

تمرین سری دوم

نام و نام‌خانوادگی: آیلار خرسندنیا — شماره دانشجویی: ۹۸۱۰۰۴۱۸

پرسش ۱ برآورد درست نمایی بیشینه

(بخش ۱)
فرض کنید هر کدام از متغیرهای تصادفی N_t است و مشاهدات ما k_tها بودند. در این صورت تابع لگاریتم likelihood به صورت زیر است

$$-\lambda_t + k_t log(\lambda_t) - log(k_t!)$$

توجه کنید که عبارت آخر با تغییر λ_t تغییری نمی‌کند پس تاثیری در بهینه‌سازی ندارد. پس مساله‌ی بهینه‌سازی این سوال به شکل زیر خواهد بود.

$$\text{maximize} \quad -\lambda_t + k_t log(\lambda_t) \tag{۱}$$

هر دو جمله‌ی بالا مقعر هستند (چون $k_t \geq 0$) پس نقطه‌ی بهینه‌اش باید مشتقش را صفر کند.

$$-1 + \frac{k_t}{\lambda_t} = 0 \Rightarrow \lambda_t = k_t$$

اگر $k_t = 0$ آنگاه تابع هزینه برابر $-\lambda_t$ است پس برای بیشینه شدنش باید $\lambda_t = 0 = k_t$.

(بخش ۲)
طبق فرض سوال N_tها مستقل هستند پس

$$log(\mathbb{P}(N_1 = k_1,\ N_2 = k_2 \ ...\ N_{24} = k_{24})) = log(\mathbb{P}(N_1 = k_1)...\mathbb{P}(N_{24} = k_{24}))$$

$$= \sum_{t=1}^{24} log(\mathbb{P}(N_t = k_t)) = \sum_{t=1}^{24}(-\lambda_t + k_t log(\lambda_t) - log(k_t!))$$

که در عبارت بالا مشابه قسمت قبل حمله‌ی آخر تاثیری روی بهینه‌سازی ندارد پس مساله‌ی بهینه سازی با در نظر گرفتن هموراری با ضریب ρ به صورت زیر است،

$$\text{maximize} \quad \sum_{t=1}^{24}(-\lambda_t + k_t log(\lambda_t)) - \rho((\sum_{t=1}^{23}(\lambda_{t+1} - \lambda_t)^2) + (\lambda_1 - \lambda_{24})^2) \tag{۲}$$

که تمام توابع در آن مقعر هستند پس قرینه‌ی تابع بالا را می‌توان با بهینه‌سازی محدب کمینه کرد.

(بخش ۳)
با هرچقدر بیشتر شدن ρ وزن جمله هموارسازی بیشتر می‌شود و کمینه کردن آن تاثیر بیشتری روی تابع هدف می‌گذارد. پس وقتی $\rho \to \infty$ جمله‌ی هموارسازی باید صفر شود و نتیجه می‌شود تمام λ_tها باید برابر باشند. جمله‌ی غیر ثابتی که در تابع هدف باقی می‌ماند $-24\lambda + (\sum_{t=1}^{24} k_t) log(\lambda)$ است که برای بیشینه کردنش باید $\lambda = \frac{\sum_{t=1}^{24} k_t}{24}$

پرسش ۲ سطوح فعالیت بهینه

(بخش ۱)
خواسته‌ی سوال درواقع کمینه کردن تابع $-\sum_{j=1}^{n} r_j(x_j)$ است.

$$p_j x_j \geq p_j q_j + p_j^{disc}(x_j - q_j) \Leftrightarrow p_j(x_j - q_j) \geq p_j^{disc}(x_j - q_j) \Leftrightarrow x_j \geq q_j$$

$$\Leftrightarrow -r_j(x_j) = -p_j q_j - p_j^{disc}(x_j - q_j) \geq -p_j x_j$$

$$\implies -r_j(x_j) = \max\{-p_j x_j, -p_j q_j - p_j^{disc}(x_j - q_j)\}$$

پس مشابه تمرینات مربوط به مسائل LP مساله‌ی زیر معادل مساله‌ی خواسته‌شده است.

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & 1^T s \\ \text{subject to} & -\operatorname{diag}(p) x \preceq s \\ & -\operatorname{diag}(p) q + \operatorname{diag}(p^{disc})(x - q) \preceq s \\ & Ax \preceq c^{max} \\ & x \succeq 0 \end{array} \qquad (۳)$$

پرسش ۳ برنامه ریزی بهینه سرعت وسیله نقلیه

(بخش ۱)

به وضوح $t_i = \dfrac{d_i}{s_i}$ نشان می‌دهد که هواپیما برای طی کردن بخش iـ‌ام با سرعت s_i به چه زمانی نیاز دارد. اگر پارامترهای دیگر سوال را با این متغیر جدید بازنویسی کنیم داریم،

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi(s_i)\frac{d_i}{s_i} = \sum_{i=1}^{n} \Phi(\frac{d_i}{t_i})t_i$$

$$s_i^{min} \leq s \leq s_i^{max} \Leftrightarrow \frac{d_i}{s_i^{max}} \leq t_i \leq \frac{d_i}{s_i^{min}} \Leftrightarrow \frac{d}{s^{max}} \preceq t \preceq \frac{d}{s^{min}}$$

$$\tau_i^{min} \leq \sum_{j=1}^{i} t_j \leq \tau_i^{max} \Leftrightarrow \tau^{min} \preceq At \preceq \tau^{max}$$

که در آن ماتریس A ماتریسی است که سطر iـ‌ام آن $\sum_{j=1}^{i} e_j$ می‌باشد. پس مساله به این صورت خواهد شد.

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Phi(\frac{d_i}{t_i})t_i \\ \text{subject to} & \dfrac{d}{s^{max}} \preceq t \preceq \dfrac{d}{s^{min}} \\ & \tau^{min} \preceq At \preceq \tau^{max} \end{array} \tag{۴}$$

تابع هزینه‌ی مساله محدب است چون جمع تعدادی تابع پرسپکتیو است. قیدهای مساله نیز همگی محدب می‌باشند. پس یک مساله بهینه‌سازی محدب داریم.