

# 1 Einleitung

**Stand: 18. September 2017**

TODO: schreiben

TODO: Quellen und Literaturverweise

# 2 Grundlagen

## 2.1 Definitionen

Das Definitions-Kapitel wurde auf Grundlage von [BV15b] und [Sch16] zusammengestellt und teilweise von [BFLV16] beeinflusst.

**Definition 2.1 (*Modal Error-I/O-Transitionssystem*).** Ein Modales Error-I/O-Transitionssystem (MEIO) ist ein Tupel  $(P, I, O, \longrightarrow, \dashrightarrow, p_0, E)$  mit:

- $P$ : Menge der Zustände,
- $p_0 \in P$ : Startzustand,
- $I, O$ : disjunkte Mengen der (sichtbaren) Input- und Output-Aktionen,
- $\longrightarrow \subseteq P \times \Sigma_\tau \times P$ : must-Transitions-Relation,
- $\dashrightarrow \subseteq P \times \Sigma_\tau \times P$ : may-Transitions-Relation,
- $E \subseteq P$ : Menge der Fehler-Zustände.

Es wird vorausgesetzt, dass  $\longrightarrow \subseteq \dashrightarrow$  (syntaktische Konsistenz) gilt.

Das Alphabet bzw. die Aktionsmenge eines MEIO ist  $\Sigma = I \cup O$ . Die interne Aktion  $\tau$  ist nicht in  $\Sigma$  enthalten. Jedoch wird  $\Sigma_\tau := \Sigma \cup \{\tau\}$  definiert. Die Signatur eines MEIOs entspricht  $\text{Sig}(P) = (I, O)$ .

Falls  $\longrightarrow = \dashrightarrow$  gilt, wird  $P$  auch Implementierung genannt.

Implementierungen entsprechen den z.B. in [Sch16] behandelten EIOs.

Must-Transitions sind Transitions, die von einer Verfeinerung implementiert werden müssen. Die may-Transitions sind hingegen die zulässigen Transitions für eine Verfeinerung. Alle nicht vorhandenen must- und may-Transitions dürfen auch in keiner Verfeinerung einer Spezifikation in MEIO-Form auftauchen. Diese Forderungen werden in den Definitionen der Verfeinerungen in 2.3 und 2.4 berücksichtigt.

MEIOs werden in dieser Arbeit durch ihre Zustandsmenge (z.B.  $P$ ) identifiziert und falls notwendig werden damit auch die Komponenten indiziert (z.B.  $I_P$  anstatt  $I$ ). Falls das MEIO selbst bereits einen Index hat (z.B.  $P_1$ ) kann an der Komponente die Zustandsmenge als Index wegfallen und nur noch der Index des gesamten Transitionssystems verwendet werden (z.B.  $I_1$  anstatt  $I_{P_1}$ ). Zusätzlich stehen  $i, o, a, \omega$  und  $\alpha$  für Buchstaben aus den Alphabeten  $I, O, \Sigma, O \cup \{\tau\}$  und  $\Sigma_\tau$ .

Es wird die Notation  $p \xrightarrow{\alpha} p'$  für  $(p, \alpha, p') \in \dashrightarrow$  und  $p \xrightarrow{\alpha} p'$  für  $\exists p' : (p, \alpha, p') \in \dashrightarrow$

## 2 Grundlagen

verwendet. Dies kann entsprechend auf Buchstaben-Sequenzen  $w \in \Sigma_\tau^*$  erweitert werden:  $p \xrightarrow{w} p'$  ( $p \xrightarrow{w}$ ) steht für die Existenz eines *Ablaufes*  $p \xrightarrow{\alpha_1} p_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots p_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} p'$  ( $p \xrightarrow{\alpha_1} p_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots p_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n}$ ) mit  $w = \alpha_1 \dots \alpha_n$ .

Desweiteren soll  $w|_B$  die Aktions-Sequenz bezeichnen, die man erhält, wenn man aus  $w$  alle Aktionen löscht, die nicht in  $B \subseteq \Sigma$  enthalten sind.  $\hat{w}$  steht für  $w|_\Sigma$ . Es wird  $p \xRightarrow{w} p'$  für ein  $w \in \Sigma^*$  geschrieben, falls  $\exists w' \in \Sigma_\tau^* : \hat{w}' = w \wedge p \xrightarrow{w'} p'$ , und  $p \xRightarrow{w}$ , falls  $p \xRightarrow{w} p'$  für ein beliebiges  $p'$  gilt. Falls  $p_0 \xRightarrow{w} p$  gilt, dann wird  $w$  *Trace* genannt und  $p$  ist ein *erreichbarer Zustand*.

Analog zu  $\xrightarrow{\quad}$  und  $\xRightarrow{\quad}$  werden  $\longrightarrow$  und  $\Longrightarrow$  für die entsprechenden Relationen der must-Transition verwendet.

Outputs und die interne Aktion werden *lokale Aktionen* genannt, da sie lokal vom ausführenden MEIO kontrolliert sind.

Um die Notation zu vereinfachen soll  $p \xrightarrow{a} p'$  und  $p \xrightarrow{a}$  für  $\neg \exists p' : p \xrightarrow{a} p'$  und  $\neg \exists p' : p \xrightarrow{a} p'$  stehen.  $p \xrightarrow{a} \xRightarrow{\varepsilon} p'$  wird geschrieben, wenn  $p''$  existiert, so dass  $p \xrightarrow{a} p'' \xRightarrow{\varepsilon} p'$  gilt. Diese Transition wird auch als *schwach-nachlaufende must-Transition* bezeichnet. Entsprechend steht  $\xrightarrow{a} \xRightarrow{\varepsilon}$  für die *schwach-nachlaufende may-Transition*.

In Grafiken wird eine Aktion  $a$  als  $a?$  notiert, falls  $a \in I$  und  $a!$ , falls  $a \in O$ . Must-Transitionen (may-Transitionen) werden als durchgezogener Pfeil gezeichnet (gestrichelter Pfeil). Entsprechend der syntaktischen Konsistenz repräsentiert jede gezeichnete must-Transition auch gleichzeitig die zugrundeliegende may-Transitionen.

**Definition 2.2 (Parallelkomposition).** Zwei MEIOs  $P_1 = (P_1, I_1, O_1, \longrightarrow_1, \xrightarrow{\quad}_1, \xRightarrow{\quad}_1, p_{01}, E_1)$  und  $P_2 = (P_2, I_2, O_2, \longrightarrow_2, \xrightarrow{\quad}_2, \xRightarrow{\quad}_2, p_{02}, E_2)$  sind komponierbar, falls  $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ . Für solche MEIOs ist die Parallelkomposition  $P_{12} := P_1 \parallel P_2 = ((P_1 \times P_2), I, O, \longrightarrow_{12}, \xrightarrow{\quad}_{12}, \xRightarrow{\quad}_{12}, (p_{01}, p_{02}), E)$  definiert mit: TODO: erzwungenen Zeilenumbrüche kontrollieren

- $I = (I_1 \cup I_2) \setminus (O_1 \cup O_2),$
- $O = (O_1 \cup O_2),$
- $\longrightarrow_{12} = \left\{ ((p_1, p_2), \alpha, (p'_1, p'_2)) \mid p_1 \xrightarrow{\alpha}_1 p'_1, \alpha \in \Sigma_\tau \setminus \text{Synch}(P_1, P_2) \right\} \\ \cup \left\{ ((p_1, p_2), \alpha, (p_1, p'_2)) \mid p_2 \xrightarrow{\alpha}_2 p'_2, \alpha \in \Sigma_\tau \setminus \text{Synch}(P_1, P_2) \right\} \\ \cup \left\{ ((p_1, p_2), \alpha, (p'_1, p'_2)) \mid p_1 \xrightarrow{\alpha}_1 p'_1, p_2 \xrightarrow{\alpha}_2 p'_2, \alpha \in \text{Synch}(P_1, P_2) \right\},$
- $\xrightarrow{\quad}_{12} = \left\{ ((p_1, p_2), \alpha, (p'_1, p'_2)) \mid p_1 \xrightarrow{\alpha}_1 p'_1, \alpha \in \Sigma_\tau \setminus \text{Synch}(P_1, P_2) \right\} \\ \cup \left\{ ((p_1, p_2), \alpha, (p_1, p'_2)) \mid p_2 \xrightarrow{\alpha}_2 p'_2, \alpha \in \Sigma_\tau \setminus \text{Synch}(P_1, P_2) \right\} \\ \cup \left\{ ((p_1, p_2), \alpha, (p'_1, p'_2)) \mid p_1 \xrightarrow{\alpha}_1 p'_1, p_2 \xrightarrow{\alpha}_2 p'_2, \alpha \in \text{Synch}(P_1, P_2) \right\},$
- $E = (P_1 \times E_2) \cup (E_1 \times P_2) \quad \left. \begin{array}{l} \} \text{ geerbte Fehler} \\ \cup \left\{ (p_1, p_2) \mid \exists a \in O_1 \cap I_2 : p_1 \xrightarrow{a}_1 \wedge p_2 \xrightarrow{a}_2 \right\} \\ \cup \left\{ (p_1, p_2) \mid \exists a \in I_1 \cap O_2 : p_1 \xrightarrow{a}_1 \wedge p_2 \xrightarrow{a}_2 \right\} \end{array} \right\} \text{ neue Kommunikationsfehler.}$

## 2 Grundlagen

Dabei bezeichnet  $\text{Synch}(P_1, P_2) = (I_1 \cap O_2) \cup (O_1 \cap I_2) \cup (I_1 \cap I_2)$  die Menge der zu synchronisierenden Aktionen. Die synchronisierten Aktionen werden zu Inputs (im Fall  $(I_1 \cap I_2)$ ) bzw. Outputs (alle anderen Fälle) der Komposition.

$P_1$  ist ein Partner von  $P_2$ , wenn  $P_1$  und  $P_2$  duale Signaturen  $\text{Sig}(P_1) = (I, O)$  und  $\text{Sig}(P_2) = (O, I)$  haben.

Die Definition der Parallelkomposition sagt aus, dass ein neuer Fehler entsteht, wenn eines der MEIOs die Möglichkeit für einen Output hat (may-Transition) und das andere MEIO den passenden Input nicht sicher stellt (keine must-Transition vorhanden). Es muss also in möglichen Implementierungen nicht wirklich zu diesem Fehler kommen, da die Output-Transition nicht zwingendermaßen implementiert werden muss und die may-Input-Transition trotzdem erlaubt sein kann.

Durch die Synchronisation von Inputs kann es zu keinen neuen Fehler kommen, da die Inputs in beiden Transitionssystemen keine lokal kontrollierten Aktionen sind. Falls jedoch nur eines der Transitionssysteme einen Input sicherstellt, der synchronisiert wird, wird dieser Input in der Parallelkomposition nicht mehr sicher gestellt. Es kann also in der Kommunikation mit einem weiteren MEIO dort zu einem neuen Fehler kommen.

**Definition 2.3 (alternierende Simulation).** Eine Relation  $\mathcal{R} \subseteq P \times Q$  auf zwei MEIOs  $P$  und  $Q$  mit gleicher Signatur ist eine (starke) alternierende Simulation, wenn für alle  $(p, q) \in \mathcal{R}$  mit  $q \notin E_Q$  und alle  $\alpha \in \Sigma_\tau$  gilt:

1.  $p \notin E_P$ ,
2. falls  $q \xrightarrow{\alpha}_Q q'$  gilt, gibt es eine Transition  $p \xrightarrow{\alpha}_P p'$  für ein  $p'$  mit  $p' \mathcal{R} q'$ ,
3. falls  $p \xrightarrow{\alpha}_P p'$  gilt, gibt es eine Transition  $q \xrightarrow{\alpha}_Q q'$  für ein  $q'$  mit  $p' \mathcal{R} q'$ .

Die Vereinigung  $\sqsubseteq_{\text{as}}$  aller dieser Simulations-Relationen wird als (starke) as-Verfeinerung(-s Relation) (auch modal Verfeinerung) bezeichnet. Falls für die Startzustände von zwei MEIOs  $p_0 \sqsubseteq_{\text{as}} q_0$  gilt, wird auch  $P \sqsubseteq_{\text{as}} Q$  für die Transitionssysteme geschrieben.  $P \sqsubseteq_{\text{as}} Q$  bedeutet, dass  $P$   $Q$  (stark) as-verfeinert oder dass  $P$  eine (starke) as-Verfeinerung von  $Q$  ist.

Für ein MEIO  $Q$  und eine Implementierung  $P$  mit  $P \sqsubseteq_{\text{as}} Q$ , ist  $P$  eine as-Implementierung von  $Q$  und es wird  $\text{as-impl}(Q)$  für die Menge aller as-Implementierungen von  $Q$  verwendet.

Da für zwei MEIOs  $P$  und  $Q$  und alle möglichen Zustands-Tupel  $(p, q)$  in einer alternierenden Simulations-Relation  $\mathcal{R}$  gelten muss, dass aus  $q \notin E_Q$  folgt, dass auch  $p$  nicht in  $E_P$  enthalten ist, gilt auch die Implikation  $p \in E_P \Rightarrow q \in E_Q$ .

Für LTS (Labelled Transition Systems), die nach Definition keine Modalitäten und keine Fehler-Zustände enthalten, entspricht die as-Verfeinerung einer Bisimulation. Dafür müssen die Transitionen eines LTS als must-Transitionen aufgefasst werden. Man kann also auf LTS mit einer as-Verfeinerungs-Relation zwischen zwei Systemen deren Äquivalenz beweisen.

TODO: falls möglich passendes Quellen Beispiel einfügen

Auf den EIO, die z.B. in [Sch16] betrachtet wurden, lässt die as-Verfeinerungs-Relation zu, dass es in einer Verfeinerung möglicherweise weniger Fehler gibt und zusätzliches Verhalten, dass die Spezifikation nicht hatte. Die EIOs entsprechen Implementierungen von MEIOs, es ist also möglich, eine Implementierung mit Fehler durch eine andere as zu verfeinern, die keine Fehler enthält, aber potentiell zusätzliches Verhalten aufweist.

**TODO: Beispiel einfügen** TODO: Beispiel einfügen

Falls eine Implementierung bereits frei von Fehler-Zuständen ist, entspricht sie einem LTS und kann somit nur noch durch äquivalente Implementierungen „verfeinert“ werden.

**Definition 2.4 (schwache alternierende Simulation).** Eine Relation  $\mathcal{R} \subseteq P \times Q$  auf zwei MEIOs  $P$  und  $Q$  mit gleicher Signatur ist eine schwache alternierende Simulation, wenn für alle  $(p, q) \in \mathcal{R}$  mit  $q \notin E_Q$  und  $i \in I$  und  $\omega \in O \cup \{\tau\}$  gilt:

1.  $p \notin E_P$ ,
2. falls  $q \xrightarrow{i}_Q q'$  gilt, gibt es eine Transition  $p \xrightarrow{i}_P \xRightarrow{\varepsilon}_P p'$  für ein  $p'$  mit  $p' \mathcal{R} q'$ ,
3. falls  $q \xrightarrow{\omega}_Q q'$  gilt, gibt es eine Transition  $p \xRightarrow{\hat{\omega}}_P p'$  für ein  $p'$  mit  $p' \mathcal{R} q'$ ,
4. falls  $p \xrightarrow{i}_P p'$  gilt, gibt es eine Transition  $q \xrightarrow{i}_Q \xRightarrow{\varepsilon}_Q q'$  für ein  $q'$  mit  $p' \mathcal{R} q'$ ,
5. falls  $p \xrightarrow{\omega}_P p'$  gilt, gibt es eine Transition  $q \xRightarrow{\hat{\omega}}_Q q'$  für ein  $q'$  mit  $p' \mathcal{R} q'$ .

Analog zur starken alternierenden Simulation, wird hier  $\sqsubseteq_{w-as}$  als Relationssymbol für die Vereinigung aller schwachen Simulations-Relationen verwendet und man kann auch entsprechend schwache as-Verfeinerungen definieren.

Für ein MEIO  $Q$  und eine Implementierung  $P$  mit  $P \sqsubseteq_{w-as} Q$ , ist  $P$  eine w-as-Implementierung von  $Q$  und es wird  $w-as-impl(Q)$  für die Menge aller w-as-Implementierungen von  $Q$  verwendet.

Die schwache Simulation erlaubt interne Aktionen des MEIO, das eine Aktion matchen muss. Jedoch ist es zwingend notwendig, dass ein Input sofort ausgeführt wird und erst dann interne Aktinen möglich sind, da ein Input die Reaktion auf eine Aktion ist, die die Umwelt auslöst, welche nicht auf das Transitionssystem warten kann. Outputs hingegen können auch verzögert werden, da die Umgebung diese dann als Inputs aufnimmt und für die Umgebung diese Aktionen nicht lokal kontrolliert sind.

Auch für alle Tupel  $(p, q)$  in einer schwach alternierenden Simulations-Relation  $\mathcal{R}$  gilt  $p \in E_P \Rightarrow q \in E_Q$ .

Wie üblich kann man zeigen, dass  $\sqsubseteq_{as}$  (bzw.  $\sqsubseteq_{w-as}$ ) eine starke (bzw. schwache) alternierende Simulation ist und die Eigenschaft der Transitivität erfüllt. Die Beweise für diese Aussagen sollen hier entfallen.

Die in der folgende Definition vorgestellte Parallelkomposition von Wörtern und Mengen kann z.B. aus [BV15a] übernommen werden.

**Definition 2.5 (*Parallelkomposition auf Traces*).**

- Für zwei Wörter  $w_1 \in \Sigma_1$  und  $w_2 \in \Sigma_2$  ist deren Parallelkomposition definiert als:  
 $w_1 \parallel w_2 := \{w \in (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^* \mid w|_{\Sigma_1} = w_1 \wedge w|_{\Sigma_2} = w_2\}$ .
- Für zwei Mengen von Wörtern bzw. Sprachen  $W_1 \subseteq \Sigma_1^*$  und  $W_2 \subseteq \Sigma_2^*$  ist deren Parallelkomposition definiert als:  $W_1 \parallel W_2 := \bigcup \{w_1 \parallel w_2 \mid w_1 \in W_1 \wedge w_2 \in W_2\}$ .

Die Wörter  $w_1$  und  $w_2$  sind für gewöhnlich Traces von MEIO, die komponiert werden. Das Wort  $w_1 \parallel w_2$  ist dann eine Aktionsfolge aus Input und Outputs. Es existiert in einer Parallelkomposition ein Transitionsfolge vom Startzustand aus, die mit den Aktionen aus  $w \in w_1 \parallel w_2$  beschriftet ist. Der Trace  $w_1 \parallel w_2$  der Parallelkomposition kann also auch als Wort aufgefasst werden, dass verarbeitet wird während es Ablauf des Systems.

Definitionen der Funktionen *prune* und *cont* zum Abschneiden und Verlängern von Traces können ebenso wie die letzte Definition aus z.B. [BV15a] übernommen werden. Hierbei ist zu beachten, dass in dieser Arbeit  $\varepsilon$  das leere Wort und  $\mathfrak{P}(M)$  die Potenzmenge der Menge  $M$  bezeichnet.

**Definition 2.6 (*Pruning- und Fortsetzungs-Funktion*).**

- $\text{prune} : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*, w \mapsto u$ , mit  $w = uv, u = \varepsilon \vee u \in \Sigma^* \cdot I$  und  $v \in O^*$ ,
- $\text{cont} : \Sigma^* \rightarrow \mathfrak{P}(\Sigma^*), w \mapsto \{wu \mid u \in \Sigma^*\}$ ,
- $\text{cont} : \mathfrak{P}(\Sigma^*) \rightarrow \mathfrak{P}(\Sigma^*), L \mapsto \bigcup \{\text{cont}(w) \mid w \in L\}$ .

**Definition 2.7 (*Sprache*).** Die Sprache eines MEIOs  $P$  ist definiert als:

$$L(P) := \{w \in \Sigma^* \mid p_0 \xRightarrow{w}_P\}.$$

Somit entspricht die Sprache einer Implementierung der Definition aus [Sch16] für EIOs. Jedoch muss die Sprache einer as-Verfeinerung eines MEIOs nicht mehr Teilmenge der Sprache des MEIOs sein, da Definition 2.3 beliebiges Verhalten nach einem Fehler-Zustand in dem zu verfeinernden MEIO zulässt. Falls jedoch das MEIO bereits frei von Fehler-Zuständen ist, ist seine Sprache die Vereinigung der Sprachen all seine möglichen as-Implementierungen.

Von der Sprache einer as-Verfeinerung eines MEIOs kann man nur wenig Rückschlüsse auf die ursprüngliche Sprache ziehen, da man nicht weiß, welche Fehler-Zustände in der Verfeinerung übernommen wurden und welche als normale Zustände mit beliebigen Verhalten umgesetzt wurden.

Man hätte alternativ die Sprache eines MEIOs auf andere Weise definieren können um einen eindeutigen Zusammenhang zwischen dieser und den Sprachen der as-Implementierungen zu erhalten, jedoch wäre dann die Äquivalenz zur EIO Sprach-Definition in [Sch16] verloren gegangen. Eine Implementierung mit Fehler-Zuständen hätte dann eine Sprache mit Wörtern, die sie nicht ausführen können muss.

## 2.2 Allgemeine Folgerungen

**Proposition 2.8 (*Sprache und Implementierungen*).** *Für die Sprache eines MEIOs  $P$  gilt  $L(P) \subseteq \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} L(P')$ .*

*Beweis.*

Sei  $P'$  die as-Implementierung von  $P$ , die alle may- und must-Transitionen von  $P$  implementiert. Die Definition von  $P'$  lautet also:

- $P' = P$ ,
- $p'_0 = p_0$ ,
- $I_{P'} = I_P$  und  $O_{P'} = O_P$ ,
- $\longrightarrow_{P'} = \dashrightarrow_{P'} = \dashrightarrow_P$ ,
- $E_{P'} = \emptyset$ .

Die entsprechende starke as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$ , die zwischen  $P'$  und  $P$  gilt, ist die Identitäts-Relation zwischen den Zuständen der Transitionssysteme. Für 2.3.3 betrachten wir  $(p, p) \in \mathcal{R}$  mit  $p \dashrightarrow_{P'} p'$  in  $P'$ . Diese Transition muss auch in  $P$  existieren und da  $\mathcal{R}$  die Identitäts-Relation ist auch  $(p', p') \in \mathcal{R}$  gelten. Alle must-Transitionen in  $P$  haben zugrunde liegende may-Transitionen. Es gibt also zu jeder must-Transition  $p \xrightarrow{\alpha}_P p'$  in  $P$  auch die Transition  $p \dashrightarrow_{P'} p'$ . Es folgt dann auch  $(p', p') \in \mathcal{R}$  und dadurch ist auch 2.3.2 erfüllt. Der erste Punkt von 2.3 gilt, da  $E_{P'}$  leer ist. Für alle  $w \in L(P) = \{w \in \Sigma^* \mid p_0 \xRightarrow{w}_P\}$  gilt  $w \in L(P') = \{w \in \Sigma^* \mid p'_0 \xRightarrow{w}_{P'}\}$ , da alle Transitionen von  $P$  in  $P'$  implementiert werden.  $\square$

**Proposition 2.9 (*Sprache der Parallelkomposition*).** *Für zwei komponierbare MEIOs  $P_1$  und  $P_2$  gilt:  $L_{12} := L(P_{12}) = L_1 \parallel L_2$ .*

*Beweis.* Jedes Wort, dass in  $L_{12}$  enthalten ist, hat einen entsprechenden Ablauf, der in  $P_{12}$  ausführbar ist. Dieser Ablauf kann auf Abläufe von  $P_1$  und  $P_2$  projiziert werden und die Projektionen sind dann in  $L_1$  und  $L_2$  enthalten.

In einer Parallelkomposition werden die Wörter der beiden MEIOs gemeinsam ausgeführt, falls es sich um synchronisierte Aktionen handelt, und verschränkt sequenziell, wenn es sich um unsynchronisierte Aktionen handelt. Somit sind alle Wörter aus  $L_1 \parallel L_2$  auch Wörter der Parallelkomposition  $L(P_{12})$ .  $\square$

**Lemma 2.10 (*w-as-Verfeinerung und Parallelkomposition*).** *Seien  $P_1$  und  $P_2$  komponierbar MEIOs und  $P'_1$  eine schwache as-Verfeinerung von  $P_1$  aufgrund der schwachen as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}_1$ . Dann gelten für die Relation  $\mathcal{R}_{12} = \{((p'_1, p_2), (p_1, p_2)) \mid (p'_1, p_1) \in \mathcal{R}_1, p_2 \in P_2\}$  die Aussagen 2. bis 5. aus der Definition 2.4.*

*Beweis.* Um zu beweisen, dass  $\mathcal{R}_{12}$  die Aussagen 2. bis 5. der Definition 2.4 erfüllt, müssen diese geprüft werden.

Für alle folgenden Fälle wird  $((p'_1, p_2), (p_1, p_2))$  immer aus  $\mathcal{R}_{12}$  mit  $(p_1, p_2) \notin E_{12}$  gewählt.

2. Aus der Definition der schwachen alternierenden Simulation in 2.4 folgt, dass für diesen Punkt zu zeigen ist:  $(p_1, p_2) \xrightarrow{i}_{12} (q_1, q_2)$  impliziert  $(p'_1, p_2) \xrightarrow{i}_{P'_1 \parallel P_2} \xRightarrow{\varepsilon}_{P'_1 \parallel P_2} (q'_1, q_2)$  für ein  $(q'_1, q_2)$  mit  $((q'_1, q_2), (q_1, q_2)) \in \mathcal{R}_{12}$ .  
Die  $i$ -must-Transition in  $P_1 \parallel P_2$  kann entweder aus der Synchronisation von zwei must-Inputs entstanden sein oder als unsynchronisierte Aktion aus einem der komponierten MEIOs übernommen worden sein.

- Fall 1 ( $i \notin \text{Synch}(P_1, P_2)$ ): Für den Fall  $i$  in  $I_2$  ist der Input in  $P_2$  via must-Transition ausführbar und somit sowohl in der Parallelkomposition  $P'_1 \parallel P_2$  wie auch in  $P_1 \parallel P_2$  als must-Transition vorhanden. Es gilt dann auch  $p_1 = q_1$  und  $p'_1 = q'_1$ , da  $i$  kein Input von  $P_1$  ist. Es gilt also die geforderte Transitionsfolge und das geforderte Element der Relation  $\mathcal{R}_{12}$  direkt durch die Voraussetzungen.

Für den Rest dieses Punktes wird davon ausgegangen, dass  $i$  in  $I_1$  enthalten ist. Es muss also in  $P_1$  die  $i$ -Transition als must-Transition von  $p_1$  ausgehen ( $p_1 \xrightarrow{i}_1 q_1$ ). Mit der Relation  $\mathcal{R}_1$  und 2.4.2 folgt, dass in  $P'_1$   $i$  als schwache Transition in der Form  $p'_1 \xrightarrow{i}_{P'_1} \xRightarrow{\varepsilon}_{P'_1} q'_1$  ausführbar ist und  $(q'_1, q_1) \in \mathcal{R}_1$  gelten muss.  $p_2 = q_2 \in P_2$  muss erfüllt sein, da  $i$  nicht in  $\Sigma_2$  enthalten ist und  $p_2$  nach Voraussetzung ein Zustand von  $P_2$  sein muss. In der Komposition von  $P'_1$  mit  $P_2$  entsteht die Transitionsfolge  $(p'_1, p_2) \xrightarrow{i}_{P'_1 \parallel P_2} \xRightarrow{\varepsilon}_{P'_1 \parallel P_2} (q'_1, q_2)$ . Mit der Definition von  $\mathcal{R}_{12}$  kann daraus  $((q'_1, q_2), (q_1, q_2)) \in \mathcal{R}_{12}$  gefolgert werden.

- Fall 2 ( $i \in \text{Synch}(P_1, P_2)$ ): Damit  $i$  auch in  $P_1 \parallel P_2$  ein Input ist, muss  $i \in I_1 \cap I_2$  gelten. Um die Transition  $(p_1, p_2) \xrightarrow{i}_{12} (q_1, q_2)$  in der Komposition möglich zu machen, muss in beiden Transitionssystemen  $P_j$   $p_j \xrightarrow{i}_j q_j$  gelten. Durch  $\mathcal{R}_1$  und die Definition 2.4.2 folgt  $p'_1 \xrightarrow{i}_{P'_1} \xRightarrow{\varepsilon}_{P'_1} q'_1$  mit  $(q'_1, q_1) \in \mathcal{R}_1$ . Daraus ergibt sich  $((q'_1, q_2), (q_1, q_2)) \in \mathcal{R}_{12}$  mit der Definition von  $\mathcal{R}_{12}$ . Durch die Synchronisation der  $i$ -Inputs von  $P'_1$  und  $P_2$  gilt  $(p'_1, p_2) \xrightarrow{i}_{P'_1 \parallel P_2} \xRightarrow{\varepsilon}_{P'_1 \parallel P_2} (q'_1, q_2)$ .

3. Analog zu 2. kann für diesen Punkt  $(p_1, p_2) \xrightarrow{\omega}_{12} (q_1, q_2)$  impliziert  $(p'_1, p_2) \xRightarrow{\hat{\omega}}_{P'_1 \parallel P_2} (q'_1, q_2)$  für ein  $(q'_1, q_2)$  mit  $((q'_1, q_2), (q_1, q_2)) \in \mathcal{R}_{12}$  gezeigt werden.

Die  $\omega$ -Transition in  $P_1 \parallel P_2$  ist entweder aus einem synchronisierten oder aus einem unsynchronisierten  $\omega$  entstanden.

- Fall 1 ( $\omega \notin \text{Synch}(P_1, P_2)$ ): Der Fall  $\omega$  ist eine Aktion, die in  $P_2$  ausgeführt wird, verläuft analog zum Fall  $i$  in  $I_2$  im Fall 1 des zweiten Punkt dieses Beweises. Es sei also im folgenden  $\omega$  ein Output oder eine internen Aktion von  $P_1$ . Um in der Komposition  $P_1 \parallel P_2$  die must-Transition zu erhalten muss bereits für die Transition in  $P_1$   $p_1 \xrightarrow{\omega}_1 q_1$  gelten sowie  $p_2 = q_2$  in  $P_2$ . Mit 2.4.3 kann für  $\mathcal{R}_1$  gefolgert werden, dass  $p'_1 \xRightarrow{\hat{\omega}}_{P'_1} q'_1$  mit  $(q'_1, q_1) \in \mathcal{R}_1$  gilt. In



## 2 Grundlagen

der Komposition folgt dann  $(p'_1, p_2) \xRightarrow{\hat{\omega}}_{P'_1 \parallel P_2} (q'_1, q_2)$ . Zusätzlich gilt auch die Zugehörigkeit des Zustands-Tupels  $((q'_1, q_2), (q_1, q_2))$  zur Relation  $\mathcal{R}_{12}$ .

- Fall 2 ( $\omega \in \text{Synch}(P_1, P_2)$ ): Da in der Menge  $\text{Synch}(P_1, P_2)$  nur Inputs und Outputs enthalten sein können, muss in diesem Fall  $\omega \neq \tau$  gelten. Um einen Output  $\omega$  in der Parallelkomposition von  $P_1$  und  $P_2$  zu erhalten, muss entweder  $\omega \in I_1 \cap O_2$  oder  $\omega \in O_1 \cap I_2$  gelten. Für beide Fälle müssen die Transitionen  $p_1 \xrightarrow{\omega}_1 q_1$  und  $p_2 \xrightarrow{\omega}_2 q_2$  in den einzelnen Komponenten enthalten sein. Mit  $\mathcal{R}_1$  und 2.4.2 folgt im Fall  $\omega \in I_1$   $p'_1 \xrightarrow{\omega}_{P'_1} \xRightarrow{\varepsilon}_{P'_1} q'_1$  und  $q'_1 \mathcal{R}_1 q_1$ . Im Fall  $\omega \in O_1$  erhält man durch  $\mathcal{R}_1$  und 2.4.3 die Transition  $p'_1 \xRightarrow{\omega}_{P'_1} q'_1$  mit  $q'_1 \mathcal{R}_1 q_1$ . Da  $\omega$  in beiden Fällen keine interne Aktion ist, gilt  $\omega = \hat{\omega}$ . In der Parallelkomposition von  $P'_1$  und  $P_2$  werden zuerst die internen Aktionen von  $P'_1$  ausgeführt, falls diese existieren, bis dort die Aktion  $\omega$  erreicht ist, dann wird  $\omega$  synchronisiert und danach werden die restlichen internen Aktionen ausgeführt, bis man beim Zuständen  $q_1$  angekommen ist. Es ergibt also die Transitionsfolge  $(p'_1, p_2) \xRightarrow{\hat{\omega}}_{P'_1 \parallel P_2} (q'_1, q_2)$  und das Tupel  $((q'_1, q_2), (q_1, q_2))$  in der Relation  $\mathcal{R}_{12}$ .
4.  $(p'_1, p_2) \xrightarrow{i}_{P'_1 \parallel P_2} (q'_1, q_2)$  impliziert  $(p_1, p_2) \xrightarrow{i}_{12} \xRightarrow{\varepsilon}_{12} (q_1, q_2)$  für ein  $(q_1, q_2)$  mit  $((q'_1, q_2), (q_1, q_2)) \in \mathcal{R}_{12}$  ist die Voraussetzung des 4. Punktes, um zu beweisen, dass  $\mathcal{R}_{12}$  eine schwache as-Verfeinerungs-Relation, bis auf die Erfüllung von 1. aus der Definition 2.4, ist.
- Die Transition  $i$  kann durch Synchronisation von zwei Transitionen entstanden sein oder durch eine Transition aus einer der beiden Komponenten mit der Voraussetzung  $i \notin \text{Synch}(P'_1, P_2)$ .

- Fall 1 ( $i \notin \text{Synch}(P'_1, P_2)$ ): Der Fall  $i$  in  $I_2$  verläuft analog zum selben Fall im Fall 1 des Beweis des zweiten Punktes. Es muss nur must durch may ersetzt werden. Es kann also für den Rest diese Punktes davon ausgegangen werden, dass  $i$  in  $I_1$  enthalten ist. Es muss in  $P'_1$  eine ausgehende  $i$ -Transition von Zustand  $p'_1$  geben, so dass  $p'_1 \xrightarrow{i}_1 q'_1$  gilt. Mit der Relation  $\mathcal{R}_1$  und 2.4.4 folgt, dass in  $P_1$   $i$  als schwache Transition der Form  $p_1 \xrightarrow{i}_1 \xRightarrow{\varepsilon}_1 q_1$  ausführbar sein und  $q'_1 \mathcal{R}_1 q_1$  gelten muss. Mit der Definition von  $\mathcal{R}_{12}$  kann dann  $((q'_1, q_2), (q_1, q_2)) \in \mathcal{R}_{12}$  gefolgert werden. In der Parallelkomposition von  $P_1$  und  $P_2$  entsteht die Transitionsfolge  $(p_1, p_2) \xrightarrow{i}_{12} \xRightarrow{\varepsilon}_{12} (q_1, q_2)$  mit  $p_2 = q_2$ .
- Fall 2 ( $i \in \text{Synch}(P'_1, P_2)$ ): Damit  $i$  auch in  $P'_1 \parallel P_2$  ein Input ist, muss  $i \in I_1 \cap I_2$  gelten. Um die Transition  $(p'_1, p_2) \xrightarrow{i}_{P'_1 \parallel P_2} (q'_1, q_2)$  in der Komposition möglich zu machen, muss in den Transitionssystemen  $P'_1$  und  $P_2$   $p'_1 \xrightarrow{i}_{P'_1} q'_1$  bzw.  $p_2 \xrightarrow{i}_2 q_2$  gelten. Durch  $\mathcal{R}_1$  und die Definition 2.4.4, die für diese Relation gilt, folgt  $p_1 \xrightarrow{i}_1 \xRightarrow{\varepsilon}_1 q_1$  mit  $(q'_1, q_1) \in \mathcal{R}_1$ . Es gilt also  $((q'_1, q_2), (q_1, q_2)) \in \mathcal{R}_{12}$ . Durch die Synchronisation des Inputs  $i$  in der Komposition von  $P_1$  und  $P_2$  ergibt sich  $(p_1, p_2) \xrightarrow{i}_{12} \xRightarrow{\varepsilon}_{12} (q_1, q_2)$ .

5. Analog zu 3. und 4. kann für diesen Punkt  $(p'_1, p_2) \xrightarrow{\omega}_{P'_1 \parallel P_2} (q'_1, q_2)$  impliziert  $(p_1, p_2) \xRightarrow{\hat{\omega}}_{12} (q_1, q_2)$  für ein  $(q_1, q_2)$  mit  $((q'_1, q_2), (q_1, q_2)) \in \mathcal{R}_{12}$  gezeigt werden. Die  $\omega$  Transition in  $P'_1 \parallel P_2$  ist entweder aus einem synchronisierten oder aus einem unsynchronisierten  $\omega$  entstanden.

- Fall 1 ( $\omega \notin \text{Synch}(P'_1, P_2)$ ): Im Fall  $\omega$  ist eine Aktion von  $P_2$  folgt das zu zeigende direkt aus den Voraussetzungen, ebenso wie in allen vorangegangenen Punkten. Somit wird im folgenden davon ausgegangen, dass  $\omega$  in  $O_1$  enthalten oder eine interne Aktion ist, die von  $P'_1$  geerbt wurde. Um in  $P'_1 \parallel P_2$  die may-Transition zu erhalten muss also bereits in  $P'_1$  die Transition  $p'_1 \xrightarrow{\omega}_{P'_1} q'_1$  möglich gewesen sein. Mit 2.4.5 kann für  $\mathcal{R}_1$  gefolgert werden, dass  $p_1 \xRightarrow{\hat{\omega}}_1 q_1$  mit  $(q'_1, q_1) \in \mathcal{R}_1$  gilt. Für die Komposition folgt daraus  $(p_1, p_2) \xRightarrow{\hat{\omega}}_{12} (q_1, q_2)$  mit  $p_2 = q_2$ . Es gilt auch die Zugehörigkeit des Zustands-Tupels  $((q'_1, q_2), (q_1, q_2))$  zur Relation  $\mathcal{R}_{12}$ .
- Fall 2 ( $\omega \in \text{Synch}(P'_1, P_2)$ ): Es muss  $\omega \neq \tau$  gelten und somit können die Fälle  $\omega \in I_1 \cap O_2$  und  $\omega \in O_1 \cap I_1$  unterschieden werden. Es folgt in beiden Fällen  $p'_1 \xrightarrow{\omega}_{P'_1} q'_1$  und  $p_2 \xrightarrow{\omega}_2 q_2$ . Mit  $\mathcal{R}_1$  und 2.4.4 folgt im Fall  $\omega \in I_1$   $p_1 \xrightarrow{\omega}_1 q_1 \xRightarrow{\varepsilon}_1 q_1$  und  $q'_1 \mathcal{R}_1 q_1$ . Im Fall  $\omega \in O_1$  wendet man  $\mathcal{R}_1$  mit 2.4.5 an und erhält  $p_1 \xRightarrow{\omega}_1 q_1$  und  $q'_1 \mathcal{R}_1 q_1$ . Da  $\omega$  eine sichtbare Aktion ist, gilt  $\omega = \hat{\omega}$ . In der Parallelkomposition von  $P_1$  und  $P_2$  werden zuerst mögliche internen Aktionen von  $P_1$  ausgeführt, bis dort die sichtbare Aktion erreicht ist, dann wird  $\omega$  synchronisiert und danach werden die restlichen internen Aktionen ausgeführt, bis man beim Zustand  $q_1$  angekommen ist. Es ergibt sich also die Transitionsfolge  $(p_1, p_2) \xRightarrow{\hat{\omega}}_{12} (q_1, q_2)$  und das Tupel  $((q'_1, q_2), (q_1, q_2))$  in der Relation  $\mathcal{R}_{12}$ .

□

**Proposition 2.11 (*w-as-Verfeinerung und Parallelkomposition*).** *Für zwei komponierbare MEIOs  $P_1$  und  $P_2$  und eine schwache as-Verfeinerung  $P'_1$  von  $P_1$  muss  $P'_1 \parallel P_2$  keine schwache as-Verfeinerung von  $P_1 \parallel P_2$  sein. Spezielle erfüllt die Relation  $\mathcal{R}_{12}$  aus dem Lemma 2.10 den ersten Punkt der Definition 2.4 im allgemeinen nicht.*

*Beweis.* Die Aussage 1. der Definition 2.4 ist im Allgemeinen für die Relation  $\mathcal{R}_{12}$  aus 2.10 nicht erfüllt. Es gilt also für ein  $((p'_1, p_2), (p_1, p_2))$  aus  $\mathcal{R}_{12}$  mit  $(p_1, p_2) \notin E_{12}$  nicht unbedingt, dass  $(p'_1, p_2)$  kein Element der Menge  $E_{P'_1 \parallel P_2}$  ist.  $P'_1 \parallel P_2$  muss also keine schwache as-Verfeinerung von  $P_1 \parallel P_2$  sein.

Die Voraussetzung besagt, dass  $(p_1, p_2) \notin E_{12}$  für das Zustands-Tupel  $((p'_1, p_2), (p_1, p_2))$  aus  $\mathcal{R}_{12}$  gilt. Nach Definition von  $\mathcal{R}_{12}$  erhält man  $(p'_1, p_1) \in \mathcal{R}_1$  und  $p_2 \in P_2$ . Die  $p_j$  ( $j \in \{1, 2\}$ ) dürfen keine Fehler-Zustände sein, da sonst auch  $(p_1, p_2)$  ein solcher wäre. Somit folgt mit Definition 2.4.1 auch  $p'_1 \notin E_1$ . Die Zustände  $p'_1$  und  $p_2$  vererben also keinen Fehler. Jedoch könnte  $(p'_1, p_2)$  aufgrund eines nicht erzwungenen Inputs ein neuer Fehler-Zustand sein. Der nicht sichergestellte Input kann in beiden Systemen auftreten.

## 2 Grundlagen

Für den Fall, dass  $P'_1$  einem vom Zustand  $p'_1$  ausgehenden Output hat, für den  $P_2$  im Zustand  $p_2$  nicht den passenden Input sicherstellt gilt  $p'_1 \not\stackrel{a}{\rightarrow}_{P'_1}$  und  $p_2 \not\stackrel{a}{\rightarrow}_2$  für ein  $a$  aus  $O_1 \cap I_2$ .  $\mathcal{R}_1$  erzwingt nach Definition nur die schwache Ausführbarkeit des Outputs  $a$  in  $P_1$  vom Zustand  $p_1$  ausgehend, d.h.  $p_1 \stackrel{a}{\Rightarrow}_1$ . Dadurch kann es in der Parallelkomposition von  $P'_1 \parallel P_2$  zu einem neuen Kommunikationsfehler kommen, der in  $P_1 \parallel P_2$  keiner ist.

Um zu zeigen, dass dieser Fall wirklich auftreten kann, ist ein Beispiel mit diesem Verhalten in Abbildung 2.1 dargestellt. Dabei soll  $a$  im Schnitt der Outputs  $O_1$  von  $P_1$  bzw.  $P'_1$  und der Inputs  $I_2$  von  $P_2$  enthalten sein. Die Relation  $\mathcal{R}_1$  enthält die Zustands-Tupel  $(p'_{01}, p_{01})$  und  $(p'_1, p_1)$ . Somit ist  $((p'_{01}, p_{02}), (p_{01}, p_{02}))$  in  $\mathcal{R}_{12}$  enthalten und es gilt  $(p_{01}, p_{02}) \notin E_{12}$ . Jedoch ist  $(p'_{01}, p_{02})$  trotzdem ein Fehler-Zustand in der Parallelkomposition von  $P'_1$  und  $P_2$ .

Es kann auch keine andere schwache as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$  für  $P'_1 \parallel P_2$  und  $P_1 \parallel P_2$  geben, da  $(P'_1 \parallel P_2) \mathcal{R} (P_1 \parallel P_2)$  nur gilt, wenn die Startzustände der Transitionssysteme in der Relation  $\mathcal{R}$  stehen. Das Tupel  $((p'_{01}, p_{02}), (p_{01}, p_{02}))$  muss also in  $\mathcal{R}$  enthalten sein. Für diese Tupel ist jedoch der erste Punkt der Definition 2.4 nicht erfüllt mit der analogen Begründung wie für die Relation  $\mathcal{R}_{12}$ .

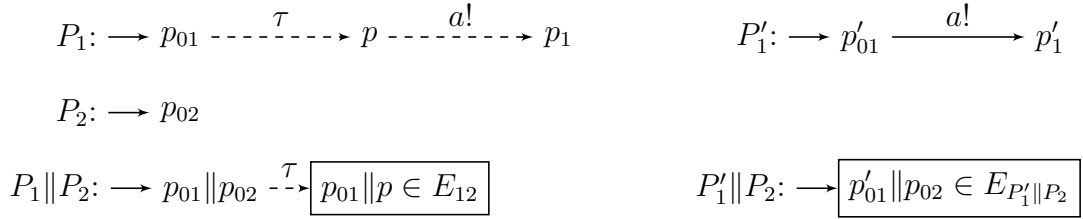


Abbildung 2.1: Gegenbeispiel für 1. von  $\mathcal{R}_{12}$  bzgl. Definition 2.4 mit  $a \in O_1 \cap I_2$

Es wäre auch möglich, dass  $P_1$  ebenfalls eine Implementierung ist. Die must- $\tau$ -Transition würde dann eine schwache Implementierung in  $P'_1$  fordern, jedoch muss es dafür keine echte Transition in  $P'_1$  geben, da  $\tau$  die interne Aktion ist. Die Implementierung von  $a$  würde ebenfalls schwach gefordert werden, ist jedoch bereits stark vorhanden.  $P_1 \parallel P_2$  würde mit der must- $\tau$ -Transition dann ebenfalls zu einer Implementierung werden. Die must- $a$ -Transition in  $P'_1$  könnte auch eine may-Transition sein, solange die  $a$ -Transition in  $P_1$  keine must-Transition ist.

Um dieses Problem zu lösen könnte man die Definition der Parallelkomposition verändern. Es wäre denkbar, dass alle Zustände, die lokal Fehler-Zustände erreichen können ebenfalls bereits als Fehler angesehen werden. Jedoch wird erwartet dass die Definition der Parallelkomposition dann eine stärkere Forderung an die Transitionssysteme stellt. Für Implementierungen wäre die Forderung sogar stärkere, wie die der EIOs in z.B. [Sch16]. Dieser Ansatz käme jedoch dem Vorgehen des Abschneidens der Fehler-Zustände mit ihren lokalen Vorgängern in [BFLV16] näher.  $\square$

**Korollar 2.12 (as-Verfeinerungen und Parallelkomposition).** *Für zwei komponierbar MEIOs  $P_1$  und  $P_2$  gilt, falls  $P'_1$  eine as-Verfeinerung von  $P_1$  ist, dann ist auch  $P'_1 \parallel P_2$  eine as-Verfeinerung von  $P_1 \parallel P_2$ .*

*Beweis.* Falls die Relation  $\mathcal{R}_1$  aus dem Lemma 2.10 keine schwachen as-Verfeinerungs-Relation sondern eine starke as-Verfeinerungs-Relation ist, ist auch  $\mathcal{R}_{12}$  eine as-Verfeinerungs-Relation zwischen  $P'_1 \parallel P_2$  und  $P_1 \parallel P_2$ . Dazu ist also nur zu zeigen, wie aus den einzelnen Beweispunkten des Beweises von 2.10 folgt, dass  $\mathcal{R}_{12}$  eine starke as-Verfeinerungs-Relation ist und dass hier zusätzlich der erste Punkt erfüllt ist. Es wird hier ebenso für alle Punkte jeweils ein  $((p'_1, p_2), (p_1, p_2))$  aus  $\mathcal{R}_{12}$  mit  $(p_1, p_2) \notin E_{12}$  gewählt.

1. Dieser Punkt kann im Gegensatz zum ersten Punkt der Definition 2.4 für die schwache as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}_{12}$  aus Lemma 2.10 für die starke as-Verfeinerungs-Relation bewiesen werden. Dies ist möglich, da für  $p_1$  im Falle eines Outputs  $a$  dieser nicht nur schwach sondern direkt ausführbar ist. Es ist also zu zeigen, dass  $(p'_1, p_2)$  kein Element von  $E_{P'_1 \parallel P_2}$  ist.

In dem man auf  $\mathcal{R}_{12}$  die Definition anwendet, erhält man  $(p'_1, p_1) \in \mathcal{R}_1$  und  $p_2 \in P_2$ . Die  $p_j$  dürfen beide keine Fehler-Zustände sein, da sonst auch  $(p_1, p_2)$  ein solcher wäre. Somit folgt mit Definition 2.3.1  $p'_1 \notin E_{P'_1}$ . Die Zustände  $p'_1$  und  $p_2$  in Parallelkomposition können also keinen geerbten Fehler produzieren. Jedoch könnte  $(p'_1, p_2)$  aufgrund eines nicht sichergestellten Inputs ein neuer Fehler-Zustand sein. Dafür müsste entweder  $p'_1 \xrightarrow{a} P'_1$  und  $p_2 \xrightarrow{a} P_2$  für ein  $a$  aus  $I_1 \cap O_2$  oder  $p'_1 \xrightarrow{a} P'_1$  und  $p_2 \xrightarrow{a} P_2$  für ein  $a$  aus  $O_1 \cap I_2$  gelten. Mit 2.3.2 und  $\mathcal{R}_1$  folgt im Fall  $a \in I_1$   $p_1 \xrightarrow{a} P_1$ .  $\mathcal{R}_1$  erzwingt mit 2.3.3 die direkte Ausführbarkeit des Outputs  $a$  in  $P_1$  im Fall  $a \in O_1$ , d.h.  $p_1 \xrightarrow{a} P_1$ . Somit müsste auch  $(p_1, p_2) \in E_{12}$  in beiden Fällen gelten, was ein Widerspruch zur Voraussetzung wäre.  $(p'_1, p'_2)$  kann also weder ein geerbter noch ein neuer Fehler in  $P'_1 \parallel P_2$  sein und deshalb gilt  $(p'_1, p_2) \notin E_{P'_1 \parallel P_2}$ .

2.  $\alpha$  kann sowohl Input, Output wie auch internen Aktion sein. Um diesen Punkt zu beweisen muss man 2. und 3. aus dem Beweis von Lemma 2.10 kombinieren. Da  $\mathcal{R}_1$  die Transition in  $P'_1$  ohne zusätzliche  $\tau$ -Transitionen fordern, entstehen keine schwachen Transitionen für die  $\alpha$ s und somit ist  $\alpha$  auch in der Parallelkomposition  $P'_1 \parallel P_2$  eine direkte Transition ohne zusätzliche  $\tau$ s. Es folgt das  $\mathcal{R}_{12}$  die Forderungen für die starke as-Verfeinerungs-Relation dieses Punktes erfüllt.
3. Hierfür werden die Punkte 3. und 4. aus dem Beweis des Lemmas 2.10 kombiniert. Analog wie bei 2. diese Beweises fallen die zusätzlichen  $\tau$ -Transitionen durch die stärkere Forderung an  $\mathcal{R}_1$  weg. Dieser Punkt gilt also ebenfalls.

□

Die drei vorangegangenen Ergebnisse fordern nur die Verfeinerung der ersten Komponente. Die Parallelkomposition wurde so definiert, dass sie kommutativ ist. Somit ist ebenso die Verfeinerung der zweiten Komponente möglich. Da man beide Komponenten nach einander verfeinern kann und jede Verfeinerung einer Verfeinerung auch eine Verfeinerung das ursprünglichen Systems ist, kann man auch beide Komponenten gleichzeitig verfeinern und erhält in der Parallelkomposition die gleiche Verfeinerung.

**Korollar 2.13 (*as-Implementierungen und Parallelkomposition*).** Für zwei komponierbare MEIOs  $P_1$  und  $P_2$  gilt:  $P'_1 \in \text{as-impl}(P_1) \wedge P'_2 \in \text{as-impl}(P_2) \Rightarrow (P'_1 \parallel P'_2) \in \text{as-impl}(P_1 \parallel P_2)$ .

*Beweis.*  $P'_1$  und  $P'_2$  sind aufgrund der Definition 2.3 auch starke as-Verfeinerungen von  $P_1$  bzw.  $P_2$ . Somit ist die Parallelkomposition  $P'_1 \parallel P'_2$  auch eine starke as-Verfeinerung von  $P_1 \parallel P_2$ , nach Korollar 2.12. Für Implementierungen gilt  $\longrightarrow = \dashrightarrow$ . Durch die Definition der Parallelkomposition in 2.2 können aus zwei komponierbaren Implementierungen in der Komposition keine may-Transitionen ohne zugehörige must-Transitionen entstehen. Es gilt also auch  $\longrightarrow_{P'_1 \parallel P'_2} = \dashrightarrow_{P'_1 \parallel P'_2}$  und somit ist  $P'_1 \parallel P'_2$  eine Implementierung und eine as-Verfeinerung von  $P_1 \parallel P_2$ . Dies entspricht der Definition der starken as-Implementierung, sodass  $(P'_1 \parallel P'_2) \in \text{as-impl}(P_1 \parallel P_2)$  gilt.  $\square$

Für schwache as-Implementierungen kann es kein analoges Korollar zu 2.13 geben, da die Verfeinerung im allgemeinen bereits scheitert (Proposition 2.11); man beachte auch die Diskussion des Beispiels 2.1. Die Parallelkomposition von Implementierungen ist jedoch immer eine Implementierung. Somit würde in den Fällen, in denen auch 2.4.1 erfüllt ist für die Parallelkomposition schwacher as-Implementierungen, eine analoge Aussage gelten.

Die umgekehrte Richtung von Korollar 2.12 gilt im allgemeinen nicht, d.h. es muss zu einer as-Verfeinerung  $P'$  einer Parallelkomposition  $P_1 \parallel P_2$  keine as-Verfeinerungen  $P'_1$  und  $P'_2$  der einzelnen Komponenten geben, deren Parallelkomposition  $P'_1 \parallel P'_2$  der as-Verfeinerung der Parallelkomposition  $P'$  entsprechen. Die Problematik wird in Abbildung 2.2 an einem Beispiel dargestellt. In der Parallelkomposition wird die may-Transition von  $P_2$  zu zwei may-Transitionen, für die in einer as-Verfeinerung unabhängig entschieden werden kann, ob sie übernommen, implementiert oder weggelassen werden. Für eine as-Verfeinerung von  $P_2$  ist es nur möglich, dass keine Transition umgesetzt wird oder die  $o'$  Transition entweder als may- oder must-Transition in die Verfeinerung übernommen wird. Somit kommt es in  $P'$  zu dem Problem, dass keine as-Verfeinerung von  $P_2$  in Parallelkomposition mit der Implementierung  $P_1$  den geforderten MEIO  $P'$  ergeben würde. Auch im Spezialfall von as-Implementierungen kann dieses Gegenbeispiel angewendet werden, da  $P'$  auch eine Implementierung von  $P_1 \parallel P_2$  ist und es auch keine passende as-Implementierung von  $P_2$  geben kann, wenn es schon keine passende Verfeinerung gibt.

Ein neuer Fehler in einer Parallelkomposition zweier MEIOs muss in einer Implementierung (as oder w-as) dieser Parallelkomposition nicht auftauchen, auch nicht in der Parallelkomposition von Implementierungen der einzelnen Komponenten. Dies liegt daran, dass für den Input nur vorausgesetzt wird, dass keine must-Transition für die Synchronisation der Aktion vorhanden ist. Es kann trotzdem eine may-Transition für den Input geben, die auch implementiert werden kann. Falls es aber in der Parallelkomposition zweier MEIO zu einem neuen Fehler kommt, dann gibt es auch immer mindestens eine mögliche Implementierung, die diesen Fehler enthält und es gibt auch immer mindestens

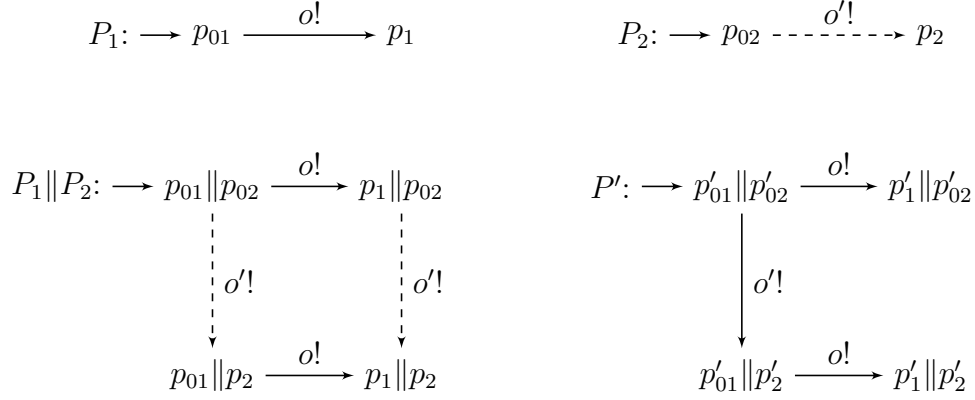


Abbildung 2.2: Gegenbeispiel für Umkehrung von Lemma 2.12

ein Implementierungs-Paar der Komponenten, in deren Parallelkomposition sich dieser Fehler ebenfalls zeigt.

Lemma 2.10 und Korollar 2.12 lassen schon die Vermutung zu, dass es einen Zusammenhang zwischen den beiden Verfeinerungs-Relation  $\sqsubseteq_{w-as}$  und  $\sqsubseteq_{as}$  gibt. Durch Proposition 2.11 fällt jedoch schon auf, dass es Stellen gibt, an denen sich die Relationen unterscheiden. Durch die Definitionen wird klar, dass der Unterschied der beiden Relationen in den  $\tau$ -Transitionen liegt. Die nächste Aussage, dass jede starke as-Verfeinerungs-Relation auch eine schwache ist, jedoch die Umkehrung nicht gilt sollte somit nicht überraschen.

**Lemma 2.14 (Zusammenhang der Verfeinerungs-Relationen).** *Jede starke as-Verfeinerungs-Relation ist auch eine schwache as-Verfeinerungs-Relation. Jedoch ist eine schwache as-Verfeinerungs-Relation im allgemeinen keine starke as-Verfeinerungs-Relation. Es gilt also:  $P \sqsubseteq_{as} Q \Rightarrow P \sqsubseteq_{w-as} Q$  und im allgemeinen  $P \sqsubseteq_{as} Q \not\Rightarrow P \sqsubseteq_{w-as} Q$ .*

*Beweis.*

„ $\Rightarrow$ “:

Um diese Implikation zu zeigen, muss man nachweisen, dass jede starke as-Verfeinerungs-Relation auch die Definition 2.4 der schwachen as-Verfeinerungs-Relation erfüllt. In beiden Simulations-Definitionen (2.3 und 2.4) müssen die Punkte für alle  $(p, q) \in \mathcal{R}$  mit  $q \notin E_Q$  gelten. Sei  $\mathcal{R}$  nun eine as-Verfeinerungs-Relation. Es gilt also mit 2.3.1, dass  $p$  kein Fehler-Zustand von  $P$  ist. Somit ist auch 1. von 2.4 erfüllt. Für alle  $\alpha \in \Sigma_\tau$  impliziert 2.3.2  $q \xrightarrow{\alpha}_Q q' \Rightarrow p \xrightarrow{\alpha}_P p'$  für ein  $p'$  mit  $p' \mathcal{R} q'$ . Da  $\Sigma_\tau = I \cup O \cup \{\tau\}$  gilt, sind dadurch 2. und 3. der Definition 2.4 erfüllt. Die schwache  $\varepsilon$ -Transition aus 2. führt keine echten Transitionen aus, sondern bleibt beim Zustand  $p'$ . Die schwache  $\hat{\omega}$ -Transition aus 3. entspricht in  $\mathcal{R}$  nur einer einzigen Transition für  $\omega$ . Die Punkte 4. und 5. aus Definition 2.4 werden durch 2.3.3 erfüllt. Es gilt für  $\mathcal{R}$   $p \xrightarrow{\alpha}_P p'$  impliziert  $q \xrightarrow{\alpha}_Q q'$  für ein  $q'$  mit  $p' \mathcal{R} q'$ . Die in 2.4 geforderten schwachen may-Transitionen werden hier jeweils stark

## 2 Grundlagen

durch eine einzige Transition umgesetzt.  $\mathcal{R}$  ist also auch eine schwache as-Verfeinerungs-Relation.

„ $\neq$ “:

Im Abbildung 2.3 wird ein Gegenbeispiel dargestellt mit einem MEIO  $Q$  und einer schwachen as-Verfeinerung  $P$  von  $Q$ , die jedoch keine starke as-Verfeinerung von  $Q$  ist. Die schwache as-Verfeinerungs-Relationen  $\mathcal{R}$  zwischen  $P$  und  $Q$  enthält die Tupel  $(p_0, q_0)$  und  $(p_1, q_{12})$ . Damit  $\mathcal{R}$  eine schwache Simulations-Relation zwischen  $P$  und  $Q$  sein kann müssen die Startzustände in Relation stehen. Dies ist durch  $(p_0, q_0) \in \mathcal{R}$  erfüllt. Es sind keine Fehler-Zustände in  $Q$  und  $P$  enthalten, somit ist 1. der Definition 2.4 bereits für beide Zustands-Tupel erfüllt. Für das Tupel  $(p_1, q_{12})$  sind auch 2.-5. von 2.4 erfüllt, da weder  $p_1$  noch  $q_{12}$  ausgehende Transitionen besitzen. Für  $(p_0, q_0) \in \mathcal{R}$  gibt es keine ausgehende must-Transitionen. Also ist 2. und 3. von 2.4 bereits erfüllt. Falls  $\alpha$  ein Input ist, fordert 2.4.4, dass die Transition  $p_0 \xrightarrow{\alpha}_P p_1$  in  $Q$  schwach ausführbar ist in der Form  $q_0 \xrightarrow{\alpha}_Q \xRightarrow{\varepsilon}_Q q$ . Ein entsprechendes  $q$  ist in diesem Fall  $q_{12}$  und es gilt  $p_1 \mathcal{R} q_{12}$ . Falls  $\alpha$  eine lokale Aktion ist, lautet die Forderung  $q_0 \xRightarrow{\alpha}_Q q$  für  $Q$  und  $q_{12}$  ist wieder der passende Zustand für  $q$ , der mit  $p_1$  in Relation stehen.  $\mathcal{R}$  ist also eine schwache as-Verfeinerungs-Relation zwischen  $P$  und  $Q$ .

Angenommen es gibt auch eine starke as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}'$  zwischen  $P$  und  $Q$ , dann muss  $p_0 \mathcal{R}' q_0$  gelten. Mit 2.3.3 wird gefordert, dass die Transition  $p_0 \xrightarrow{\alpha}_P p_1$  durch eine Transition der Form  $q_0 \xrightarrow{\alpha}_Q q$  in  $Q$  gematched werden muss. Für den Zustand  $q$  kommt dieses mal nur  $q_{11}$  in Frage. Es muss also  $(p_1, q_{11}) \in \mathcal{R}$  gelten. Der zweite Punkt der Definition 2.3 fordert, dass die  $\tau$ -must-Transition aus  $Q$  auch in  $P$  auftauchen muss. Es müsste also ein  $p$  geben, für dass  $p_1 \xrightarrow{\tau}_P p$  gilt und das Tupel  $(p, q_{12})$  müsste in  $\mathcal{R}$  enthalten sein. Da es keine solche Transition gibt, tritt ein Widerspruch zur Annahme auf. Es kann also keine starke as-Verfeinerungs-Relation zwischen  $P$  und  $Q$  geben.

$$Q: \longrightarrow q_0 \xrightarrow{\alpha} q_{11} \xrightarrow{\tau} q_{12} \qquad P: \longrightarrow p_0 \xrightarrow{\alpha} p_1$$

Abbildung 2.3: Gegenbeispiel zu  $\sqsubseteq_{\text{as}} \Leftarrow \sqsubseteq_{\text{w-as}}$

□

# 3 Verfeinerungen für Kommunikationsfehler-Freiheit

## 3.1 gröbster Präkongruenz-Ansatz

Dieses Kapitel hat das Ziel die Präkongruenz für Error bei EIOs aus z.B. [Sch16] auf die hier betrachten MEIOs zu erweitern.

**Definition 3.1 (fehler-freie Kommunikation).** Ein Fehler-Zustand ist lokal erreichbar in einem MEIO  $P$ , wenn ein  $w \in O^*$  existiert mit  $p_0 \xRightarrow{w}_P p \in E$ . Ein MEIO  $P$  ist lokal fehler-frei, wenn  $\neg \exists w \in O^* : p_0 \xRightarrow{w}_P p \in E$ .

Zwei MEIOs  $P_1$  und  $P_2$  kommunizieren fehler-frei, wenn keine as-Implementierungen ihrer Parallelkomposition  $P_{12}$  einen Fehler-Zustände lokal erreichen kann.

**Definition 3.2 (Kommunikationsfehler-Verfeinerungs-Basisrelation).** Für zwei MEIOs  $P_1$  und  $P_2$  mit der gleichen Signatur wird  $P_1 \sqsubseteq_E^B P_2$  geschrieben, wenn nur dann ein Fehler-Zustand in einer as-Implementierung von  $P_1$  lokal erreichbar ist, wenn es auch eine as-Implementierung von  $P_2$  gibt, in der ein Fehler-Zustand ebenfalls lokal erreichbar ist. Die  $\sqsubseteq_E^B$  stellt als Basisrelation eine Verfeinerung bezüglich Kommunikationsfehler-Freiheit dar.

$\sqsubseteq_E^C$  bezeichnet die vollständig abstrakte Präkongruenz von  $\sqsubseteq_E^B$  bezüglich  $\cdot\|\cdot$ , d.h. die gröbste Präkongruenz bezüglich  $\cdot\|\cdot$ , die in  $\sqsubseteq_E^B$  enthalten ist.

Für as-Implementierungen  $P_1$  und  $P_2$  entspricht  $\sqsubseteq_E^B$  der Basisrelation  $\sqsubseteq_E^B$  aus [Sch16].

Wie z.B. in [Sch16] werden die Fehler hier Trace-basiert betrachtet.

**Definition 3.3 (Kommunikationsfehler-Traces).** Für ein MEIO  $P$  wird definiert:

- strikte Fehler-Traces:  $StET(P) := \{w \in \Sigma^* \mid p_0 \xRightarrow{w}_P p \in E\}$ ,
- gekürzte Fehler-Traces:  $PrET(P) := \{\text{prune}(w) \mid w \in StET(P)\}$ ,
- Input-kritische-Traces:  $MIT(P) := \{wa \in \Sigma^* \mid p_0 \xRightarrow{w}_P p \wedge a \in I \wedge p \not\xrightarrow{a}_P\}$ .

Da die Basisrelation über as-Implementierungen spricht, ist es wichtig bereits in den Trace-Mengen eine Beziehung zwischen der allgemeinen Definition für MEIOs und deren as-Implementierungen herzustellen. Die nächste Proposition stellt eine Teilmengen-



Beziehung zwischen den Traces eines MEIOs und den Traces seiner as-Implementierungen dar. Die Teilmengen-Beziehung in die andere Richtung gilt im allgemeinen nicht, da as-Verfeinerungs-Relationen beliebiges Verhalten nach Fehler-Zuständen in der Spezifikation zulassen.

**Proposition 3.4 (Kommunikationsfehler-Traces und Implementierungen).** Sei  $P$  ein MEIO.

1. Für die strikten Fehler-Traces von  $P$  gilt:  $StET(P) \subseteq \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} StET(P')$ .
2. Für die gekürzten Fehler-Traces von  $P$  gilt:  $PrET(P) \subseteq \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} PrET(P')$ .
3. Für Input-kritischen-Traces von  $P$  gilt:  $MIT(P) \subseteq \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} MIT(P')$ .

*Beweis.*

1. Um die Inklusion zu zeigen wird eine Implementierung  $P'$  angegeben, die die strikten Fehler-Traces von  $P$  implementiert und zusätzlich auch noch eine passende as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$  zwischen den beiden Transitionssystemen.  $P'$  implementiert wie im Beweis zu Proposition 2.8 alle Transitionen von  $P$ . Das  $P'$  wird hier jedoch im Gegensatz zu Beweis von 2.8 auch noch alle Fehler-Zustände aus  $P$  implementieren. Die entsprechende as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$  ist hier ebenfalls die Identitäts-Relation zwischen den Zuständen der Transitionssysteme. Die Definition von  $P'$  lautet:

- $P' = P$ ,
- $p'_0 = p_0$ ,
- $I_{P'} = I_P$  und  $O_{P'} = O_P$ ,
- $\longrightarrow_{P'} = \longrightarrow_P$ ,
- $E_{P'} = E_P$ .

Die Tupel, die von 2.3.2 und 3. als Elemente der as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$  gefordert werden, sind bereits durch die Identitäts-Relation garantiert, wie im Beweis von 2.8. Für 2.3.1 muss für jedes in der as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$  enthaltene Zustands-Paar gelten, wenn der Zustand aus  $P$  kein Fehler-Zustand ist, dann ist auch der Zustand aus  $P'$  keiner. Dies folgt aus der Gleichheit der Mengen  $E_P$  und  $E_{P'}$ . Jeder Trace aus  $StET(P)$  ist via may-Transitionen in  $P$  ausführbar und führt dort zu einem Fehler-Zustand. Der analoge Trace ist auch in  $P'$  möglich, da alle may-Transitionen aus  $P$  in  $P'$  als must-Transitionen implementiert wurden. Der dabei erreichte Zustand steht mit dem Fehler-Zustand in  $P$  in der Identitäts-Relation  $\mathcal{R}$ , die Zustände entsprechen sich also. Es gilt mit  $E_{P'} = E_P$ , dass auch der in  $P'$  erreichte Zustand ein Fehler-Zustand ist. Für die as-Implementierung  $P'$  von  $P$  und die Identitäts-Relation  $\mathcal{R}$  als starke as-Verfeinerungs-Relation zwischen den Transitionssystemen gilt also  $StET(P) = StET(P')$ .

2. Da der erste Punkt dieser Proposition bereits bewiesen wurde, gilt bereits, dass alle strikten Fehler-Traces von  $P$  in der Vereinigung aller strikten Fehler-Traces der as-Implementierungen von  $P$  enthalten sind. Wenn auf alle Wörter in beiden Mengen die prune-Funktion angewendet wird, gilt die Inklusion der daraus entstanden Mengen weiterhin. Dies entspricht der Behauptung des Punktes.
3. Auch für diese Inklusion wird eine starke as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$  und eine Implementierung  $P'$  angegeben. Jedoch werden nicht wie bei 1. alle Transitionen von  $P$  in  $P'$  implementiert. Es wird auch für jedes  $wa$  aus  $MIT(P)$  eine eigene Implementierung  $P'$  geben und nicht eine für alle. Es werden alle must-Transitionen aus  $P$  in  $P'$  implementiert und zusätzlich die may-Transitionen, die zum Ausführen von  $w$  benötigt werden, so dass das  $a$  danach in  $P$  nicht gefordert wird. Es kann aufgrund möglicher Schleifen in  $P$  auch nicht mehr die Identitäts-Relation als as-Verfeinerungs-Relation gewählt werden. Der Trace  $w$  wird entsprechend seiner Länge abgewickelt, so dass sicher gestellt wird, dass der Zustand am Ende dieses Traces wirklich einen fehlenden Input aufweist. Für das Abwickeln werden die Zustände entsprechend ihrer Position im Ablauf, auf dem  $w$  ausgeführt wird, durchnummeriert. Für ein  $w$ , für das  $wa \in MIT(P)$ , gilt:  $\exists w' \in \Sigma_\tau^*, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \exists p_1, p_2, \dots, p_n : \hat{w}' = w \wedge w' = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \wedge p_0 \xrightarrow{\alpha_1}_P p_1 \xrightarrow{\alpha_2}_P \dots p_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n}_P p_n \not\xrightarrow{a}_P$ . Die starke as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$  enthält in diesem Fall Tupel  $((p, j), p)$  für alle  $0 \leq j \leq n$ . Die entsprechende Definition für das  $P'$ , das  $wa$  als Input-kritischen-Trace enthalten soll lautet:

- $P' = P \times \{0, 1, \dots, n\}$ ,
- $p'_0 = (p_0, 0)$ ,
- $I'_P = I_P$  und  $O'_P = O_P$ ,
- $\xrightarrow{a}_P = \xrightarrow{a}_{P'} = \left\{ ((p, j), \alpha, (p', j+1)) \mid p \xrightarrow{\alpha}_P p', 0 \leq j < n \right\} \cup \left\{ ((p, j), \alpha, (p', j)) \mid p \xrightarrow{\alpha}_P p', 0 \leq j \leq n \right\}$ ,
- $E_{P'} = \emptyset$ .

Der Ablauf von  $w$  aus  $P$  wird in  $P'$  durch  $(p_0, 0) \xrightarrow{\alpha_1}_{P'} (p_1, 1) \xrightarrow{\alpha_2}_{P'} \dots (p_{n-1}, n-1) \xrightarrow{\alpha_n}_{P'} (p_n, n)$  simuliert.  $w$  ist also in  $P'$  ausführbar.  $a$  ist für  $(p_n, n)$  nicht ausführbar, da in  $P$  für  $p_n$   $p_n \not\xrightarrow{a}_P$  gilt und für die Zustände mit der Nummer  $n$  in  $P'$  nur die must-Transitionen implementiert werden. Die Transitionen  $p \xrightarrow{\alpha}_P p'$  aus  $P$  werden in  $P'$  durch die Transitionen  $(p, j) \xrightarrow{\alpha}_{P'} (p', j)$  gematched. Für die may-Transitionen  $(p, j) \xrightarrow{\alpha}_{P'} (p', j+1)$  (bzw.  $(p', j)$ ) in  $P'$  sind die entsprechenden matchenden Transitionen in  $P$  die Transition  $p \xrightarrow{\alpha}_P p'$ . Da die Menge  $E_{P'}$  leer ist, gelten alle Bedingungen, damit  $\mathcal{R}$  eine as-Verfeinerungs-Relation zwischen  $P'$  und  $P$  ist. Mit der Begründung von oben folgt auch  $wa \in MIT(P')$ . Da für alle  $wa$  aus  $MIT(P)$  eine entsprechende Implementierung mit as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$  angegeben werden kann, gilt die Inklusion.

□

**Definition 3.5 (Kommunikationsfehler-Semantik).** Sei  $P$  ein MEIO.

- Die Menge der Fehler-Traces von  $P$  ist  $ET(P) := \text{cont}(\text{PrET}(P)) \cup \text{cont}(\text{MIT}(P))$ .
- Die Fehler-geflutete Sprache von  $P$  ist  $EL(P) := L(P) \cup ET(P)$ .

Für zwei MEIOs  $P_1, P_2$  mit der gleichen Signatur wird  $P_1 \sqsubseteq_E P_2$  geschrieben, wenn  $ET_1 \subseteq ET_2$  und  $EL_1 \subseteq EL_2$  gilt.

Hierbei ist zu beachten, dass die Mengen  $StET$ ,  $PrET$ ,  $MIT$ ,  $ET$  und  $EL$  nur denen aus [Sch16] entsprechen, wenn  $P$  bereits eine as-Implementierung ist.

Im weiteren Verlauf wird immer wieder eine Aussage den Zusammenhang von Abläufen in as-Verfeinerungen bzw. schwachen as-Verfeinerungen und ihren Spezifikationen benötigt. Um nicht immer wieder ähnliche Argumentationen zu benötigen, wird diese Aussage nun hier allgemein zunächst für schwache as-Verfeinerungen bewiesen. Die analoge Aussage für starke as-Verfeinerungen folgt dann mit Lemma 2.14.

**Lemma 3.6 (Abläufe in schwachen as-Verfeinerungen und Spezifikationen).**

Sei  $P$  eine schwache as-Verfeinerung eines MEIOs  $Q$  und  $\mathcal{R}$  die schwache as-Verfeinerungs-Relation zwischen den beiden Transitionssystemen. Ein Ablauf  $p_0 \xrightarrow{\alpha_1}_P p_1 \xrightarrow{\alpha_2}_P \dots p_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n}_P p_n$  aus  $P$  kann durch einen Ablauf  $q_0 \xRightarrow{\hat{\alpha}_1}_Q q_1 \xRightarrow{\hat{\alpha}_2}_Q \dots q_{n-1} \xRightarrow{\hat{\alpha}_n}_Q q_n$  mit  $p_j \mathcal{R} q_j$  für alle  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$  in  $Q$  gematched werden oder  $\exists k : q_0, \dots, q_k \in Q$  und  $0 \leq k < n$  mit  $q_j \mathcal{R} q_j$  für alle  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$  und  $q_k \in E_Q$ . Aus  $w \in L(P)$  folgt also  $w \in L(Q)$  oder  $w \in \text{cont}(StET(Q)) \subseteq ET(Q)$ .

*Beweis.* Die Existenz des Traces in  $Q$  soll induktiv über die einzelnen Transitionen bewiesen werden. Für alle  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$  gilt  $\exists k : 0 \leq k < j \wedge p_k \mathcal{R} q_k \wedge q_k \in E_Q$  oder es gilt  $p_j \mathcal{R} q_j$ .

Die Verankerung  $p_0 \mathcal{R} q_0$  folgt direkt aus der Voraussetzung, dass  $\mathcal{R}$  eine schwache as-Verfeinerungs-Relation für  $P$  und  $Q$  ist.

Es kann also nun davon ausgegangen werden, dass  $p_j \mathcal{R} q_j$  oder  $\exists 0 \leq k < j : p_k \mathcal{R} q_k \wedge q_k \in E_Q$  für ein  $j$  mit  $0 \leq j < n$  erfüllt ist.

- Fall 1 ( $\exists 0 \leq k < j : q_k \in E_Q \wedge p_k \mathcal{R} q_k$ ): Es gilt auch  $k < j + 1$ , somit ist die Behauptung auch für  $j + 1$  erfüllt.
- Fall 2 ( $p_j \mathcal{R} q_j \wedge q_j \in E_Q$ ): Es galt bereits  $\leq j$  und für  $j + 1$  ist auch  $j < j + 1$  erfüllt.  $j$  ist also das  $k$ , dass kleiner wie  $j + 1$  ist, für das  $q_k$  ein Fehler-Zustand ist.
- Fall 3 ( $p_j \mathcal{R} q_j \wedge q_j \notin E_Q$ ): In der Verfeinerung  $P$  existiert die Transition  $p_j \xrightarrow{\alpha_{j+1}}_P p_{j+1}$ .  $\alpha_{j+1}$  kann ein Input oder eine lokale Aktion sein. Falls  $\alpha_{j+1} \in I$  gilt, folgt mit Definition 2.4.4 die Transition  $q_j \xrightarrow{\alpha_{j+1}}_Q \xRightarrow{\varepsilon}_Q q_{j+1}$  in  $Q$  für ein  $q_{j+1}$  mit  $(p_{j+1}, q_{j+1}) \in \mathcal{R}$ . Die schwach-nachlaufenden may-Transition ist nur eine spezielle Form der schwachen may-Transition es gilt also auch  $q_j \xRightarrow{\hat{\alpha}_{j+1}}_Q q_{j+1}$ .  $\alpha_{j+1}$  kann

jedoch auch eine lokale Aktion sein. Mit Definition 2.4.4 folgt dann die Existenz der Transition  $q_j \xRightarrow{\widehat{\alpha_{j+1}}} q_{j+1}$  in der Spezifikation  $Q$  mit  $p_{j+1}\mathcal{R}q_{j+1}$ .

Für jedes  $w$  aus  $L(P)$  gibt es einen Ablauf wie er in diesem Lemma vorausgesetzt wurde, so dass  $w = (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n)|_\Sigma$  gilt. Im Fall 1 bzw. Fall 2 wurden bis  $q_k$  bzw.  $q_j$  die Aktionen  $\alpha$  in ihrer Reihenfolge schwach ausgeführt. Es gibt also ein Präfix  $v$  von  $w$ , dass in  $Q$  zu einem Fehler-Zustand führt und somit  $v \in StET(Q)$  erfüllt.  $w$  ist eine Fortsetzung von  $v$  somit gilt die Aussage  $w \in \text{cont}(StET(Q)) \subseteq ET(Q)$  ebenfalls. Falls der Fall 3 für  $j = n - 1$  angewendet werden kann, folgt daraus  $p_n\mathcal{R}q_n$  und  $(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n)|_\Sigma$  ist die Folge der sichtbaren Transitionsbeschriftungen, die vom Startzustand  $q_0$  zum Zustand  $q_n$  in  $Q$  führen. Das Wort  $w$  ist also in  $Q$  ausführbar und somit in der Sprache  $L(Q)$  enthalten.  $\square$

Man könnte durch das gerade eben bewiesene Lemma die gleiche Aussage für starke as-Verfeinerungen zeigen, in dem man Lemma 2.14 anwendet. Die Aussage wäre zunächst auch stark genug, jedoch sobald Divergenz mit betrachtet wird, kann es durch das schwache Transitions-Matching zu Problemen kommen, da dadurch zusätzliches Divergenz-Verhalten möglich ist. Das nächste Lemma ist somit nur ähnlich zum vorangegangenen, hat jedoch eine etwas stärkere Aussage.

**Lemma 3.7 (Abläufe in as-Verfeinerungen und Spezifikationen).** *Sei  $P$  eine as-Verfeinerung eines MEIOs  $Q$  und  $\mathcal{R}$  die as-Verfeinerungs-Relation zwischen den beiden Transitionssystemen. Ein Ablauf  $p_0 \xrightarrow{\alpha_1}_P p_1 \xrightarrow{\alpha_2}_P \dots p_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n}_P p_n$  aus  $P$  kann durch einen Ablauf  $q_0 \xrightarrow{\alpha_1}_Q q_1 \xrightarrow{\alpha_2}_Q \dots q_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n}_Q q_n$  mit  $p_j\mathcal{R}q_j$  für alle  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$  in  $Q$  gematched werden oder  $\exists k : q_0, \dots, q_k \in Q$  und  $0 \leq k < n$  mit  $q_j\mathcal{R}q_j$  für alle  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$  und  $q_k \in E_Q$ . Aus  $w \in L(P)$  folgt also  $w \in L(Q)$  oder  $w \in \text{cont}(StET(Q)) \subseteq ET(Q)$ .*

*Beweis.* Aus  $w \in L(P)$  folgt  $w \in L(Q)$  oder  $w \in \text{cont}(StET(Q)) \subseteq ET(Q)$  ist eine Aussage, die genau so auch in Lemma 3.6 für schwache as-Verfeinerungen galt. Jede starke as-Verfeinerung ist auch eine schwache (Lemma 2.14), somit folgt diese Aussage direkt aus Lemma 3.6.

Aus dem vorausgesetzten Trace für  $P$  würde mit den Lemmata 3.6 und 2.14 nur der Ablauf  $q_0 \xRightarrow{\alpha_1}_Q q_1 \xRightarrow{\alpha_2}_Q \dots q_{n-1} \xRightarrow{\alpha_n}_Q q_n$  in  $Q$  folgen. In diesem Lemma sollen die Transitionen jedoch ohne zusätzliche oder entfallende  $\tau$ s möglich sein. Die Induktion aus dem Beweis von 3.6 kann jedoch entsprechend verstärkt werden. Die Behauptung lautet gleich und somit könne die Fälle 1 und 2 unverändert übernommen werden. Für Fall 3 entfällt die Unterscheidung, ob  $\alpha_{j+1}$  ein Input oder eine lokale Aktion ist. Mit Definition 2.3.3 kann begründet werden, dass die  $\alpha_{j+1}$ -Transition direkt zum Zustand  $q_{j+1}$  führt. Es gilt also in jedem Schritt der Induktion, der Fall 3 betrifft,  $q_j \xrightarrow{\alpha_{j+1}}_Q q_{j+1}$ . Es folgt also der Ablauf, der hier gezeigt werden sollte, falls kein Fehler-Zustand in  $Q$  angetroffen wird.

Man kann das hier angewendete Vorgehen auch auf unendliche Abläufe anwenden. Falls die Spezifikation  $Q$  keine unendlichen Verzweigungen hat, also lokal endlich ist, gibt es

auch dort dann einen unendlichen Ablauf nach dem Königs Lemma der Graphentheorie. Dieser Punkt wird in einem späteren Kapitel für unendliche  $\tau$ -Abläufe bezüglich Divergenz relevant.

TODO: Quelle für Königs Lemma (Petrietze Vorlesung, keine unendlichen Verzweigungen/lokal endlich)

□

Aus den Propositionen für die Sprache und die Traces konnte für die Vereinigung der gleichen Mengen über die Implementierungen immer nur eine Inklusionsrichtung gefolgert werden, da die Definition 2.3 nach einen Fehler-Zustand in  $P$  beliebiges Verhalten in dessen as-Implementierungen zulässt. Mit dem Einsatz der cont-Funktion zum beliebigen fortsetzen der Traces kann dies ausgeglichen werden. Somit gilt wie die nächsten Proposition behauptet für die Fehler-Traces und die Fehler-geflutete Sprache Gleichheit und nicht nur die Inklusion, die aus den vorangegangenen Propositionen bereits folgen.

**Proposition 3.8 (*Kommunikationsfehler-Semantik und Implementierungen*).**  
*Sie  $P$  ein MEIO.*

1. Für die Menge der Fehler-Traces von  $P$  gilt  $ET(P) = \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} ET(P')$ .
2. Für die Fehler-geflutete Sprache von  $P$  gilt  $EL(P) = \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} EL(P')$ .

*Beweis.*

1. „ $\subseteq$ “:

$$\begin{aligned}
 ET(P) &\stackrel{3.5}{=} \text{cont}(PrET(P)) \cup \text{cont}(MIT(P)) \\
 &\stackrel{3.4}{\subseteq} \text{cont} \left( \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} PrET(P') \right) \cup \text{cont} \left( \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} MIT(P') \right) \\
 &\stackrel{\text{cont monotone}}{=} \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} \text{cont}(PrET(P')) \cup \text{cont}(MIT(P')) \\
 &\stackrel{3.5}{=} \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} ET(P').
 \end{aligned}$$

1. „ $\supseteq$ “:

Da für  $P$   $ET(P) = \text{cont}(PrET(P)) \cup \text{cont}(MIT(P))$  gilt und für alle as-Implementierungen  $P'$  von  $P$  die analogen Gleichungen für  $ET(P')$  gelten, genügt es ein präfix-minimales  $w$  aus  $ET(P')$  für eine as-Implementierung  $P'$  von  $P$  zu betrachten. Da  $w$  präfix-minimal ist für  $P'$  ist  $w$  entweder vollständig oder bis auf den letzten Buchstaben in  $P'$  ausführbar. Dies hängt davon ab, ob  $w \in PrET(P')$  oder  $w \in MIT(P')$  gilt. Für  $P$  muss jedoch nicht mal das Präfix von  $w$  ohne den letzten Buchstaben von  $w$  ausführbar sein. Da  $P'$  eine as-Implementierung von  $P$  ist, gibt es eine as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$  zwischen den beiden Transitionssystemen. Es muss  $p'_0 \mathcal{R} p_0$  gelten für die Startzustände von  $P'$  und  $P$ .

- Fall 1 ( $w \in PrET(P')$ ): In  $P'$  existiert eine Verlängerung  $v \in O^*$  von  $w$ , so dass  $wv \in StET(P')$  gilt. Das Wort  $wv$  ist in  $P'$  ausführbar ( $wv \in L(P')$ ). Es kann somit das Lemma 3.7 angewendet werden, wobei vorausgesetzt werden kann, dass der Trace in  $P'$  zu einem Zustand  $p'_n$  führt, der in  $E_{P'}$  enthalten ist. Falls ein  $p_j$  mit  $0 \leq j < n$  in  $E_P$  enthalten ist, dann ist ein Präfix von  $wv$  ein strikter Fehler-Trace in  $P$  und mit  $w = \text{prune}(wv)$  ist somit ein Präfix von  $w$  in  $ET(P)$  enthalten. Da  $ET$  unter Fortsetzung der Traces abgeschlossen ist, gilt auch  $w \in ET(P)$ . Falls für alle  $p_j$  mit  $j < n$   $p_j \notin E_P$  gilt, kann  $p'_n \mathcal{R} p_n$  gefolgert werden durch den Beweis von 3.7. Da  $p'_n \in E_{P'}$  gilt, folgt draus mit 2.3.1, dass bereits  $p_n$  in  $E_P$  enthalten sein muss. Es gilt also  $wv \in StET(P)$  und mit der Argumentation von oben folgt daraus  $w \in ET(P)$ .
- Fall 2 ( $w \in MIT(P') \setminus PrET(P')$ ): Da  $w$  in  $MIT(P')$  enthalten ist, gibt es ein  $a \in I$  für das  $w = va$  gilt mit  $v \in \Sigma^*$ . Analog zu Fall 1 kann das  $v$  in  $P'$  ausgeführt werden und davor die Proposition 3.7 angewendet werden, wobei das erreicht  $p'_n$  den Input  $a$  nicht als ausgehenden must-Transition besitzen soll. Falls es ein  $p_j \in E_P$  mit  $0 \leq j \leq n$  gibt, gilt  $v \in ET(P)$  und wegen des Abschlusses unter cont auch  $w \in ET(P)$ . Ansonsten kann davon ausgegangen werden, dass  $p'_n \mathcal{R} p_n$  für einen Zustand  $p_n$  aus  $P$  erfüllt ist. Falls  $a$  für  $p_n$  eine ausgehende must-Transition wäre, würde 2.3.2 auch für  $p'_n$  die Implementierung der  $a$  Transition fordern, dies wäre jedoch ein Widerspruch zur Wahl des Zustandes  $p'_n$ . Es gilt also  $p \not\rightarrow^a$  und  $va \in MIT(P)$ . Daraus ergibt sich direkt  $w \in ET(P)$ .

2. „ $\subseteq$ “:

$$\begin{aligned}
 EL(P) &\stackrel{3.5}{=} L(P) \cup ET(P) \\
 &\stackrel{2.8}{\subseteq} \left( \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} L(P') \right) \cup ET(P) \\
 &\stackrel{1.}{=} \left( \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} L(P') \right) \cup \left( \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} ET(P') \right) \\
 &= \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} L(P') \cup ET(P') \\
 &\stackrel{3.5}{=} \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} EL(P').
 \end{aligned}$$

2. „ $\supseteq$ “:

Da der erste Punkt dieser Proposition bereits bewiesen ist, reicht es aus für diesen Punkt zu zeigen, dass  $\bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} EL(P') \setminus ET(P')$  eine Teilmenge von  $EL(P)$  ist. Die

Menge  $EL(P') \setminus ET(P')$  entspricht  $L(P') \setminus ET(P')$ . Es muss also ein Wort  $w$  aus der Sprache einer as-Implementierung von  $P$  betrachtet werden, dass nicht in den Fehler-Traces dieser as-Implementierung enthalten ist. Das Wort  $w$  ist also in  $P'$  ausführbar. Falls das  $w$  in  $P$  jedoch nicht ausführbar ist, folgt wie zuvor  $w \in ET(P) \subseteq EL(P)$ , da

ein Präfix von  $w$  in  $P$  zu einem Fehler-Zustand führen muss. Falls  $w$  ausführbar ist in  $P$  gilt  $w \in L(P) \subseteq EL(P)$ .  $\square$

**Korollar 3.9 (lokale Fehler Erreichbarkeit).**

- (i) *Es ist ein Fehler lokal erreichbar in einem MEIO  $P \Leftrightarrow \exists$  as-Implementierung von  $P$ , in der ein Fehler lokal erreichbar ist.*
- (ii) *Falls für zwei MEIOs  $P_1 \sqsubseteq_E^B P_2$  gilt und in  $P_1$  ein Fehler lokal erreichbar ist, dann ist auch in  $P_2$  ein Fehler lokal erreichbar.*

*Beweis.*

(i)  $\Rightarrow$ :

Da ein Fehler in  $P$  lokal erreichbar ist, gilt  $\varepsilon \in PrET_P \subseteq ET_P$ . Es muss aufgrund von Proposition 3.8.1 mindestens ein  $P' \in \text{as-impl}(P)$  geben, für dass  $\varepsilon \in ET_{P'}$  gilt. Dies kann nur der Fall sein, wenn durch lokale Aktionen in  $P'$  ein Fehler-Zustand erreicht werden kann. Es ist also auch in der as-Implikation  $P'$  ein Fehler lokal erreichbar, da  $ET$  die Fortsetzungen von  $PrET$  und  $MIT$  enthält und Elemente aus  $MIT$  mindestens die Länge 1 haben müssen.

(i)  $\Leftarrow$ :

Sei  $P'$  die as-Implementierung von  $P$ , in der ein Fehler lokal erreichbar ist. Es gilt dann  $\varepsilon \in PrET(P') \subseteq ET_{P'}$ . Mit Proposition 3.8.1 folgt daraus  $\varepsilon \in ET_P$ . Es muss also auch in  $P$  ein Fehler-Zustand lokal erreichbar sein.

(ii):

Da für  $P_1$  ein Fehler lokal erreichbar ist folgt mit 1. dass es auch eine as-Implikation  $P'_1$  von  $P_1$  gibt, für die ein Fehler lokal erreichbar ist. Mit  $P_1 \sqsubseteq_E^B P_2$  ergibt sich daraus, dass es auch eine as-Implementierung  $P'_2$  von  $P_2$  geben muss, die lokal einen Fehler-Zustand erreichen kann.  $P_2$  muss aufgrund von 1. ebenfalls einen Fehler lokal erreichen können, da es eine as-Implementierung gibt, die dies kann.  $\square$

**Satz 3.10 (Kommunikationsfehler-Semantik für Parallelkompositionen).** *Für zwei komponierbare MEIOs  $P_1, P_2$  und ihre Komposition  $P_{12}$  gilt:*

1.  $ET_{12} = \text{cont}(\text{prune}((ET_1 \parallel EL_2) \cup (EL_1 \parallel ET_2))),$
2.  $EL_{12} = (EL_1 \parallel EL_2) \cup ET_{12}.$

*Beweis.*

1. „ $\subseteq$ “:

Da beide Seiten der Gleichung unter der Fortsetzung  $\text{cont}$  abgeschlossen sind, genügt es ein präfix-minimales Element  $w$  aus  $ET_{12}$  zu betrachten. Diese Element ist aufgrund der Definition der Menge der Fehler-Traces in  $MIT_{12}$  oder in  $PrET_{12}$  enthalten.

- Fall 1 ( $w \in MIT_{12}$ ): Aus der Definition von  $MIT$  folgt, dass es eine Aufteilung  $w = xa$  gibt mit  $(p_{01}, p_{02}) \xRightarrow{x}_{12} (p_1, p_2) \wedge a \in I_{12} \wedge (p_1, p_2) \not\xrightarrow{a}_{12}$ . Da  $I_{12} = (I_1 \cup I_2) \setminus (O_1 \cup O_2)$  ist, folgt  $a \in (I_1 \cup I_2)$  und  $a \notin (O_1 \cup O_2)$ . Es wird unterschieden, ob  $a \in (I_1 \cap I_2)$  oder  $a \in (I_1 \cup I_2) \setminus (I_1 \cap I_2)$  ist.
  - Fall 1a) ( $a \in (I_1 \cap I_2)$ ): Durch Projektion des Ablaufes auf die einzelnen Transitionssysteme erhält man oBdA  $p_{01} \xRightarrow{x_1}_1 p_1 \not\xrightarrow{a}_1$  und  $p_{02} \xRightarrow{x_2}_2 p_2 \not\xrightarrow{a}_2$  oder  $p_{02} \xRightarrow{x_2}_2 p_2 \xrightarrow{a}_2$  mit  $x \in x_1 \parallel x_2$ . Daraus kann  $x_1 a \in MIT_1 \subseteq ET_1$  und  $x_2 a \in EL_2$  ( $x_2 a \in MIT_2$  oder  $x_2 a \in L_2$ ) gefolgert werden. Damit folgt  $w \in (x_1 \parallel x_2) \cdot \{a\} = (x_1 a) \parallel (x_2 a) \subseteq ET_1 \parallel EL_2$ , und somit ist  $w$  in der rechten Seite der Gleichung enthalten.
  - Fall 1b) ( $a \in (I_1 \cup I_2) \setminus (I_1 \cap I_2)$ ): OBdA gilt  $a \in I_1$ . Durch die Projektion auf die einzelnen Komponenten erhält man:  $p_{01} \xRightarrow{x_1}_1 p_1 \not\xrightarrow{a}_1$  und  $p_{02} \xRightarrow{x_2}_2 p_2$  mit  $x \in x_1 \parallel x_2$ . Daraus folgt  $x_1 a \in MIT_1 \subseteq ET_1$  und  $x_2 \in L_2 \subseteq EL_2$ . Somit gilt  $w \in (x_1 \parallel x_2) \cdot \{a\} \subseteq (x_1 a) \parallel x_2 \subseteq ET_1 \parallel EL_2$ . Dies ist eine Teilmenge der rechten Seite der Gleichung.
- Fall 2 ( $w \in PrET_{12}$ ): Aus der Definition von  $PrET$  und  $prune$  folgt, dass ein  $v \in O_{12}^*$  existiert, so dass  $(p_{01}, p_{02}) \xRightarrow{w}_{12} (p_1, p_2) \xRightarrow{v}_{12} (p'_1, p'_2)$  gilt mit  $(p'_1, p'_2) \in E_{12}$  und  $w = \text{prune}(wv)$ . Durch Projektion auf die Komponenten erhält man  $p_{01} \xRightarrow{w_1}_1 p_1 \xRightarrow{v_1}_1 p'_1$  und  $p_{02} \xRightarrow{w_2}_2 p_2 \xRightarrow{v_2}_2 p'_2$  mit  $w \in w_1 \parallel w_2$  und  $v \in v_1 \parallel v_2$ . Aus  $(p'_1, p'_2) \in ET_{12}$  folgt, dass es sich entweder um einen geerbten oder einen neuen Fehler handelt. Bei einem geerbten wäre bereits einer der beiden Zustände  $p'_1$  bzw.  $p'_2$  ein Fehler-Zustand gewesen. Ein neuer Fehler hingegen wäre durch das fehlende Sicherstellen der Synchronisation (fehlende must-Input-Transition) in einer der Komponenten entstanden.
  - Fall 2a) (geerbter Fehler): OBdA gilt  $p'_1 \in E_1$ . Daraus folgt,  $w_1 v_1 \in StET_1 \subseteq \text{cont}(PrET_1) \subseteq ET_1$ . Da  $p_{02} \xRightarrow{w_2 v_2}_2$  gilt, erhält man  $w_2 v_2 \in L_2 \subseteq EL_2$ . Dadurch ergibt sich  $wv \in ET_1 \parallel EL_2$  mit  $w = \text{prune}(wv)$  und somit ist  $w$  in der rechten Seite der Gleichung enthalten.
  - Fall 2b) (neuer Fehler): OBdA gilt  $a \in I_1 \cap O_2$  mit  $p'_1 \not\xrightarrow{a}_1$  und  $p'_2 \xrightarrow{a}_2$ . Daraus folgt  $w_1 v_1 a \in MIT_1 \subseteq ET_1$  und  $w_2 v_2 a \in L_2 \subseteq EL_2$ . Damit ergibt sich  $wva \in ET_1 \parallel EL_2$ , da  $a \in O_1 \subseteq O_{12}$  gilt  $w = \text{prune}(wva)$  und somit ist  $w$  in der rechten Seite der Gleichung enthalten.

1. „ $\supseteq$ “:

Wegen der Abgeschlossenheit beider Seiten der Gleichung gegenüber  $\text{cont}$  wird auch in diesem Fall nur ein präfix-minimales Element  $x \in \text{prune}((ET_1 \parallel EL_2) \cup (EL_1 \parallel ET_2))$  betrachtet. Da  $x$  durch die Anwendung der  $\text{prune}$ -Funktion entstanden ist, existiert ein  $y \in O_{12}^*$  mit  $xy \in (ET_1 \parallel EL_2) \cup (EL_1 \parallel ET_2)$ . OBdA wird davon ausgegangen, dass  $xy \in ET_1 \parallel EL_2$  gilt, d.h. es gibt  $w_1 \in ET_1$  und  $w_2 \in EL_2$  mit  $xy \in w_1 \parallel w_2$ .

Im Folgenden wird für alle Fälle von  $xy$  gezeigt, dass es ein  $v \in PrET_{12} \cup MIT_{12}$  gibt, das ein Präfix von  $xy$  ist. Also: entweder endet  $v$  auf einen Input  $I_{12}$  oder  $v = \varepsilon$ . Damit muss  $v$  ein Präfix von  $x$  sein, denn  $\varepsilon$  ist Präfix von jedem Wort und sobald  $v$  mindestens



einen Buchstaben enthält, muss das Ende von  $v$  vor dem Anfang von  $y \in O_{12}^*$  liegen. Dadurch ist ein Präfix von  $x$  in  $PrET_{12} \cup MIT_{12}$  enthalten und somit gilt  $x \in ET_{12}$ , da  $ET$  die Fortsetzung der Mengenvereinigung aus  $PrET$  und  $MIT$  ist.

Sei  $v_1$  das kürzeste Präfix von  $w_1$  in  $PrET_1 \cup MIT_1$ . Falls  $w_2 \in L_2$ , so sei  $v_2 = w_2$ , sonst soll  $v_2$  das kürzeste Präfix von  $w_2$  in  $PrET_2 \cup MIT_2$  sein. Jede Aktion in  $v_1$  und  $v_2$  hängt mit einer aus  $xy$  zusammen. Es kann nun davon ausgegangen werden, dass entweder  $v_2 = w_2 \in L_2$  gilt oder die letzte Aktion von  $v_1$  vor oder gleichzeitig mit der letzten Aktion von  $v_2$  statt findet. Ansonsten endet  $v_2 \in PrET_2 \cup MIT_2$  vor  $v_1$ . Es gilt dann  $w_2 \in ET_2$  und somit ist dieser Fall analog zu  $v_1$  endet vor  $v_2$ .

- Fall 1 ( $v_1 = \varepsilon$ ): Da  $\varepsilon \in PrET_1 \cup MIT_1$ , ist bereits in  $P_1$  ein Fehler-Zustand lokal erreichbar.  $\varepsilon \in MIT_1$  ist nicht möglich, da jedes Element aus  $MIT$  nach Definition mindestens die Länge 1 haben muss. Mit der Wahl  $v'_2 = v' = \varepsilon$  ist  $v'_2$  ein Präfix von  $v_2$ .
- Fall 2 ( $v_1 \neq \varepsilon$ ): Aufgrund der Definitionen von  $PrET$  und  $MIT$  endet  $v_1$  auf ein  $a \in I_1$ , d.h.  $v_1 = v'_1 a$ .  $v'$  sei das Präfix von  $xy$ , das mit der letzten Aktion von  $v_1$  endet, d.h. mit  $a$  und  $v'_2 = v'|_{\Sigma_2}$ . Falls  $v_2 = w_2 \in L_2$ , dann ist  $v'_2$  ein Präfix von  $v_2$ . Falls  $v_2 \in PrET_2 \cup MIT_2$  gilt, dann ist durch die Annahme, dass  $v_2$  nicht vor  $v_1$  endet,  $v'_2$  ein Präfix von  $v_2$ . Im Fall  $v_2 \in MIT_2$  weiß man zusätzlich, dass  $v_2$  auf  $b \in I_2$  endet. Es kann jedoch  $a = b$  gelten.

In den beiden vorangegangenen Fällen erhält man  $v'_2 = v'|_{\Sigma_2}$  ist ein Präfix von  $v_2$  und  $v' \in v_1 \| v'_2$  ist ein Präfix von  $xy$ . Es kann nur für die Fälle  $a \notin I_2$  gefolgert werden, dass  $p_{02} \xRightarrow{v'_2}_2$  gilt. (\*) Falls  $p_{02} \not\xRightarrow{v'_2}_2$  nicht gilt, ist  $v'_2 = v_2 \in MIT_2$  und  $v'_2$  endet auf  $b = a \in I_2$ .

- Fall I ( $v_1 \in MIT_1$ ): Da  $v_1 \in MIT_1$  gilt, muss  $v_1$  ungleich  $\varepsilon$  sein. Es gibt einen Ablauf der Form  $p_{01} \xRightarrow{v'_1}_1 p_1 \not\xrightarrow{a}_1$  und es gilt  $v' = v'' a$ .
  - Fall Ia) ( $a \notin \Sigma_2$ ): Es gilt  $p_{02} \xRightarrow{v'_2}_2 p_2$  mit  $v'' \in v'_1 \| v'_2$ . Dadurch erhält man  $(p_{01}, p_{02}) \xRightarrow{v''}_{12} (p_1, p_2) \not\xrightarrow{a}_{12}$  mit  $a \in I_{12}$ . Somit wird  $v := v'' a = v' \in MIT_{12}$  gewählt.
  - Fall Ib) ( $a \in I_2$  und  $v'_2 \in MIT_2$ ): Es gilt  $v'_2 = v'' a$  mit  $p_{02} \xRightarrow{v''}_2 p_2 \not\xrightarrow{a}_2$  und  $v'' \in v'_1 \| v''$ .  $a$  ist für  $P_2$ , ebenso wie für  $P_1$ , ein nicht sichergestellter Input. Daraus folgt, dass  $(p_1, p_2) \not\xrightarrow{a}_{12}$  gilt. Es wird ebenfalls  $v := v'' a = v' \in MIT_{12}$  gewählt.
  - Fall Ic) ( $a \in I_2$  und  $v'_2 \notin MIT_2$ ): Es gilt  $p_{02} \xRightarrow{v''}_2 p_2 \xrightarrow{a}_2$  mit  $v'_2 = v'' a \in L_2$ , wegen (\*). Da die gemeinsamen Inputs synchronisiert werden, folgt  $(p_1, p_2) \not\xrightarrow{a}_{12}$  bereits aus  $p_1 \not\xrightarrow{a}_1$ . Somit kann hier nochmals  $v := v'' a = v' \in MIT_{12}$  gewählt werden.

- Fall Id) ( $a \in O_2$ ): Es gilt  $v'_2 = v''_2 a$  und  $p_{02} \xRightarrow{v'_2}_2$ . Man erhält also  $p_{02} \xRightarrow{v''_2}_2$   $p_2 \xrightarrow{a}_2$  mit  $v'' \in v'_1 \| v''_2$ . Daraus ergibt sich  $(p_{01}, p_{02}) \xRightarrow{v''}_{12} (p_1, p_2)$  mit  $p_2 \xrightarrow{a}_1$ ,  $p_1 \not\xrightarrow{a}_1$ ,  $a \in I_1$  und  $a \in O_2$ , somit gilt  $(p_1, p_2) \in E_{12}$ . Es wird  $v := \text{prune}(v'') \in \text{PrET}_{12}$  gewählt.
- Fall II ( $v_1 \in \text{PrET}_1$ ):  $\exists u_1 \in O_1^* : p_{01} \xRightarrow{v_1}_1 p_1 \xRightarrow{u_1}_1 p'_1$  mit  $p'_1 \in E_1$ . Im Fall  $v_1 \neq \varepsilon$  kann das  $a$ , auf das  $v_1$  endet, ebenfalls der letzte Buchstabe von  $v_2$  sein. Im Fall von  $v_2 \in \text{MIT}_2$  kann somit  $a = b$  gelten, wodurch  $v_2 = v'_2$  gilt. Dieser Fall verläuft jedoch analog zu Fall Ic) und wird hier nicht weiter betrachtet. Es gilt für alle anderen Fälle  $p_{02} \xRightarrow{v'_2}_2 p_2$  mit  $(p_{01}, p_{02}) \xRightarrow{v'}_{12} (p_1, p_2)$ .
  - Fall IIa) ( $u_2 \in (O_1 \cap I_2)^*, c \in (O_1 \cap I_2)$ , sodass  $u_2 c$  Präfix von  $u_1|_{I_2}$  mit  $p_2 \xRightarrow{u_2}_2 p'_2 \not\xrightarrow{c}_2$ ): Für das Präfix  $u'_1 c$  von  $u_1$  mit  $(u'_1 c)|_{I_2} = u_2 c$  weiß man, dass  $p_1 \xRightarrow{u'_1}_1 p'_1 \not\xrightarrow{c}_1$ . Somit gilt  $u'_1 \in u'_1 \| u_2$  und  $(p_1, p_2) \xRightarrow{u'_1}_{12} (p'_1, p'_2) \in E_{12}$ , da für  $P_2$  der entsprechende Input nicht sichergestellt wird, der mit dem  $c$  Output von  $P_1$  zu koppeln wäre. Es handelt sich also um einen neuen Fehler. Es wird  $v := \text{prune}(v' u'_1) \in \text{PrET}_{12}$  gewählt, dies ist ein Präfix von  $v'$ , da  $u_1 \in O_1^*$ .
  - Fall IIb) ( $p_2 \xRightarrow{u_2}_2 p'_2$  mit  $u_2 = u_1|_{I_2}$ ): Es gilt  $u_1 \in u_1 \| u_2$  und  $(p_1, p_2) \xRightarrow{u_1}_{12} (p'_1, p'_2) \in E_{12}$ , da  $p'_1 \in E_1$  und somit handelt es sich in  $P_{12}$  um einen geerbten Fehler. Nun wird  $v := \text{prune}(v' u_1) \in \text{PrET}_{12}$  gewählt, das wiederum ein Präfix von  $v'$  ist.

2.:

Durch die Definitionen ist klar, dass  $L_j \subseteq EL_j$  und  $ET_j \subseteq EL_j$  gilt. Die Argumentation startet auf den rechten Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned}
 (EL_1 \| EL_2) \cup ET_{12} &\stackrel{3.5}{=} ((L_1 \cup ET_1) \| (L_2 \cup ET_2)) \cup ET_{12} \\
 &= (L_1 \| L_2) \cup \underbrace{(L_1 \| ET_2)}_{\substack{\subseteq (EL_1 \| ET_2) \\ \stackrel{1.}{\subseteq} ET_{12}}} \cup \underbrace{(ET_1 \| L_2)}_{\substack{\subseteq (ET_1 \| EL_2) \\ \stackrel{1.}{\subseteq} ET_{12}}} \cup \underbrace{(ET_1 \| ET_2)}_{\substack{\subseteq (EL_1 \| ET_2) \\ \stackrel{1.}{\subseteq} ET_{12}}} \cup ET_{12} \\
 &= (L_1 \| L_2) \cup ET_{12} \\
 &\stackrel{2.9}{=} L_{12} \cup ET_{12} \\
 &\stackrel{3.5}{=} EL_{12}.
 \end{aligned}$$

□

**Korollar 3.11 (Kommunikationsfehler-Präkongruenz).** Die Relation  $\sqsubseteq_E$  ist eine Präkongruenz bezüglich  $\cdot \| \cdot$ .

*Beweis.* Es muss gezeigt werden: Wenn  $P_1 \sqsubseteq_E P_2$  gilt, dann für jedes komponierbare  $P_3$  auch  $P_{31} \sqsubseteq_E P_{32}$ . D.h. es ist zu zeigen, dass aus  $ET_1 \subseteq ET_2$  und  $EL_1 \subseteq EL_2$ ,

$ET_{31} \subseteq ET_{32}$  und  $EL_{31} \subseteq EL_{32}$  folgt. Dies ergibt sich aus der Monotonie von  $\text{cont}$ ,  $\text{prune}$  und  $\cdot\|\cdot$  auf Sprachen wie folgt:

- $ET_{31} \stackrel{3.10.1}{=} \text{cont}(\text{prune}((ET_3\|EL_1) \cup (EL_3\|ET_1)))$   
 $\begin{array}{c} ET_1 \subseteq ET_2 \\ \text{und} \\ EL_1 \subseteq EL_2 \\ \subseteq \end{array} \text{cont}(\text{prune}((ET_3\|EL_2) \cup (EL_3\|ET_2)))$   
 $\stackrel{3.10.1}{=} ET_{32},$
- $EL_{31} \stackrel{3.10.2}{=} (EL_3\|EL_1) \cup E_{31}$   
 $\begin{array}{c} EL_1 \subseteq EL_2 \\ \text{und} \\ ET_{31} \subseteq ET_{32} \\ \subseteq \end{array} (EL_3\|EL_2) \cup ET_{32}$   
 $\stackrel{3.10.2}{=} EL_{32}.$

□

**Lemma 3.12 (Verfeinerung mit Kommunikationsfehlern).** *Gegeben sind zwei MEIOs  $P_1$  und  $P_2$  mit der gleichen Signatur. Wenn  $U\|P_1 \sqsubseteq_E^B U\|P_2$  für alle Partner  $U$  gilt, dann folgt daraus die Gültigkeit von  $P_1 \sqsubseteq_E P_2$ .*

*Beweis.* Da  $P_1$  und  $P_2$  die gleiche Signaturen haben wird  $I := I_1 = I_2$  und  $O := O_1 = O_2$  definiert. Für jeden Partner  $U$  gilt  $I_U = O$  und  $O_U = I$ .

Um  $P_1 \sqsubseteq_E P_2$  zu zeigen, wird nachgeprüft, ob folgendes gilt:

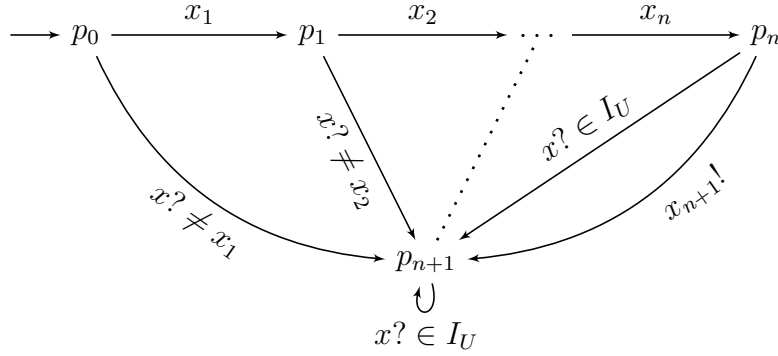
- $ET_1 \subseteq ET_2,$
- $EL_1 \subseteq EL_2.$

Für ein gewähltes präfix-minimales Element  $w \in ET_1$  wir gezeigt, dass dieses  $w$  oder eines seiner Präfixe in  $ET_2$  enthalten ist. Dies ist möglich, da die beiden Mengen  $ET_1$  und  $ET_2$  durch  $\text{cont}$  abgeschlossen sind.

- Fall 1 ( $w = \varepsilon$ ): Es handelt sich um einen lokal erreichbaren Fehler-Zustand in  $P_1$ . Für  $U$  wird ein Transitionssystem verwendet, das nur aus dem Startzustand und einer must-Schleife für alle Inputs  $x \in I_U$  besteht. Somit kann  $P_1$  die im Prinzip gleichen Fehler-Zustände lokal erreichen wie  $U\|P_1$ . Wegen 3.9 (ii) erreicht auch  $U\|P_2$  lokal einen Fehler-Zustand. Durch die Definition von  $U$  kann dieser Fehler nur von  $P_2$  geerbt sein. Es muss also in  $P_2$  ein Fehler-Zustand durch interne Aktionen und Outputs erreichbar sein, d.h. es gilt  $\varepsilon \in \text{Pr}ET_2$ .
- Fall 2 ( $w = x_1 \dots x_n x_{n+1} \in \Sigma^+$  mit  $n \geq 0$  und  $x_{n+1} \in I = O_U$ ): Es wird der folgende Partner  $U$  betrachtet (siehe auch Abbildung 3.1):

- $U = \{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}\},$
- $p_{0U} = p_0,$

- $\dashrightarrow_U = \rightarrow_U = \{(p_j, x_{j+1}, p_{j+1}) \mid 0 \leq j \leq n\}$   
 $\cup \{(p_j, x, p_{n+1}) \mid x \in I_U \setminus \{x_{j+1}\}, 0 \leq j \leq n\}$   
 $\cup \{(p_{n+1}, x, p_{n+1}) \mid x \in I_U\},$
- $E_U = \emptyset.$


 Abbildung 3.1:  $x? \neq x_j$  steht für alle  $x \in I_U \setminus \{x_j\}$ 

Für  $w$  können nun zwei Fälle unterschieden werden. Aus beiden wird folgen, dass für die Parallelkomposition  $U \parallel P_1$   $\varepsilon \in PrET(U \parallel P_1)$  gilt.

- Fall 2a) ( $w \in MIT_1$ ): In  $U \parallel P_1$  erhält man  $(p_0, p_{01}) \xrightarrow{x_1 \dots x_n}_{U \parallel P_1} (p_n, p')$  mit  $p' \not\xrightarrow{x_{n+1}}_1$  und  $p_n \xrightarrow{x_{n+1}}_U$ . Deshalb gilt  $(p_n, p') \in E_{U \parallel P_1}$ . Da alle Aktionen aus  $w$  bis auf  $x_{n+1}$  synchronisiert werden und  $I \cap I_U = \emptyset$ , gilt  $x_1, \dots, x_n \in O_{U \parallel P_1}$ . Da  $(p_n, p') \in E_{U \parallel P_1}$  in  $U \parallel P_1$  lokal erreichbar ist gilt  $\varepsilon \in PrET(U \parallel P_1)$ .
- Fall 2b) ( $w \in PrET_1$ ): In der Parallelkomposition von  $U$  und  $P_1$  erhält man  $(p_0, p_{01}) \xrightarrow{w}_{U \parallel P_1} (p_{n+1}, p'') \xrightarrow{u}_{U \parallel P_1} (p_{n+1}, p')$  für  $u \in O^*$  und  $p' \in E_1$ . Daraus folgt  $(p_{n+1}, p') \in E_{U \parallel P_1}$  und somit  $wu \in StET(U \parallel P_1)$ . Da alle Aktionen in  $w$  synchronisiert werden und  $I \cap I_U = \emptyset$ , gilt  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in O_{U \parallel P_1}$  und, da  $u \in O^*$ , folgt  $u \in O_{U \parallel P_1}^*$ . Somit ergibt sich  $\varepsilon \in PrET(U \parallel P_1)$ .

Da  $\varepsilon \in PrET(U \parallel P_1)$  gilt, kann durch  $U \parallel P_1 \sqsubseteq_E^B U \parallel P_2$  unter zuhelfenahme von 3.9 (ii) geschlossen werden, dass auch in  $U \parallel P_2$  ein Fehler-Zustand lokal erreichbar sein muss.

Der in  $U \parallel P_2$  erreichbare Fehler kann geerbt oder neu sein.

- Fall 2i) (neuer Fehler): Da jeder Zustand von  $U$  alle Inputs  $x \in O = I_U$  durch must-Transitionen sicherstellt, muss ein lokal erreichbarer Fehler-Zustand der Form sein, dass ein Output  $a \in O_U$  von  $U$  möglich ist, dessen Synchronisation in  $P_2$  mit einem passenden Input nicht sichergestellt ist ( $P_2$  enthält die entsprechende  $a$  Transitionen nicht als must-Transition). Durch die Konstruktion von  $U$  sind in  $p_{n+1}$  keine Outputs möglich. Ein neuer Fehler muss also die Form  $(p_i, p')$  haben mit  $i \leq n, p' \not\xrightarrow{x_{i+1}}_2$  und  $x_{i+1} \in O_U = I$ . Durch Projektion

erhält man dann  $p_{02} \stackrel{x_1 \dots x_i}{\Rightarrow}_2 p' \not\stackrel{x_{i+1}}{\Rightarrow}_2$  und damit gilt  $x_1 \dots x_{i+1} \in MIT_2 \subseteq ET_2$ . Somit ist ein Präfix von  $w$  in  $ET_2$  enthalten.

- Fall 2ii) (geerbter Fehler):  $U$  hat  $x_1 \dots x_i u$  mit  $u \in I_U^* = O^*$  ausgeführt und ebenso hat  $P_2$  dieses Wort abgearbeitet. Durch dies hat  $P_2$  einen Zustand in  $E_2$  erreicht, da von  $U$  keine Fehler geerbt werden können. Es gilt dann  $\text{prune}(x_1 \dots x_i u) = \text{prune}(x_1 \dots x_i) \in PrET_2 \subseteq ET_2$ . Da  $x_1 \dots x_i$  ein Präfix von  $w$  ist, führt in diesem Fall eine Verlängerung um lokale Aktionen eines Präfix von  $w$  zu einem Fehler-Zustand. Da  $ET$  der Menge aller Verlängerungen von gekürzten Fehler-Traces entspricht, ist  $x_1 \dots x_i$  in  $ET_2$  enthalten und somit auch  $w$  in  $ET_2$  enthalten.

Um die andere Inklusion zu beweisen, reicht es aufgrund der ersten Inklusion und der Definition von  $EL$  aus zu zeigen, dass  $L_1 \setminus ET_1 \subseteq EL_2$  gilt.

Es wird dafür ein beliebiges  $w \in L_1 \setminus ET_1$  gewählt und gezeigt, dass es in  $EL_2$  enthalten ist.

- Fall 1 ( $w = \varepsilon$ ): Da  $\varepsilon$  immer in  $EL_2$  enthalten ist, muss hier nichts gezeigt werden.
- Fall 2 ( $w = x_1 \dots x_n$  mit  $n \geq 1$ ): Es wird ein Partner  $U$  wie folgt konstruiert (siehe dazu auch Abbildung 3.2):

- $U = \{p_0, p_1, \dots, p_n, p\}$ ,
- $p_0 U = p_0$ ,
- $\dashrightarrow_U = \rightarrow_U = \{(p_j, x_{j+1}, p_{j+1}) \mid 0 \leq j < n\} \cup \{(p_j, x, p) \mid x \in I_U \setminus \{x_{j+1}\}, 0 \leq j < n\} \cup \{(p, x, p) \mid x \in I_U\}$ ,
- $E_U = \{p_n\}$ .

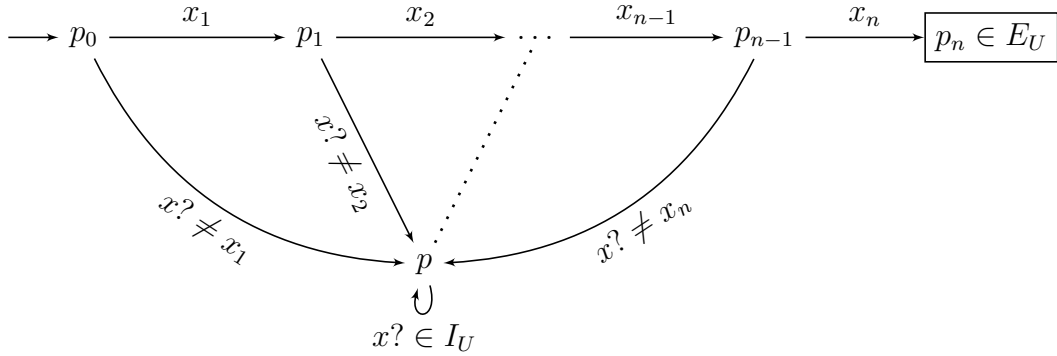


Abbildung 3.2:  $x? \neq x_j$  steht für alle  $x \in I_U \setminus \{x_j\}$ ,  $p_n$  ist der einzige Fehler-Zustand

Da  $p_{01} \stackrel{w}{\Rightarrow}_1 p'$  gilt, kann man schließen, dass  $U \parallel P_1$  einen lokal erreichbaren geerbten Fehler hat. Aufgrund von Korollar 3.9 (ii) muss ebenfalls ein Fehler-Zustand in  $U \parallel P_2$  lokal erreichbar sein.

- Fall 2a) (neuer Fehler aufgrund von  $x_i \in O_U$  und  $p_{02} \xrightarrow{x_1 \dots x_{i-1}}_2 p'' \not\xrightarrow{x_i}_2$ ): Es gilt  $x_1 \dots x_i \in MIT_2$  und somit  $w \in EL_2$ . Anzumerken ist, dass es nur auf diesem Weg Outputs von  $U$  möglich sind, deshalb gibt es keine anderen Outputs von  $U$ , die zu einem neuen Fehler führen könnten.
- Fall 2b) (neuer Fehler aufgrund von  $a \in O = I_U$ ): Der einzige Zustand, in dem  $U$  nicht alle Inputs erlaubt sind, ist  $p_n$ , der bereits ein Fehler-Zustand ist. Da in diesem Fall der Fehler-Zustand in  $U \parallel P_2$  erreichbar ist, besitzt das komponierte MEIO einen geerbten Fehler und es gilt  $w \in L_2 \subseteq EL_2$ , wegen dem folgenden Fall 2c).
- Fall 2c) (geerbter Fehler von  $U$ ): Da  $p_n$  der einzige Fehler-Zustand in  $U$  ist und alle Aktionen synchronisiert sind, ist dies nur möglich, wenn  $p_{02} \xrightarrow{x_1 \dots x_n}_2$  gilt. In diesem Fall ist  $w$  ausführbar und es gilt  $w \in L_2 \subseteq EL_2$ .
- Fall 2d) (geerbter Fehler von  $P_2$ ): Es gilt  $p_{02} \xrightarrow{x_1 \dots x_i u}_2 p' \in E_2$  für ein  $i \geq 0$  und  $u \in O^*$ . Somit ist  $x_1 \dots x_i u \in StET_2$  und damit  $\text{prune}(x_1 \dots x_i u) = \text{prune}(x_1 \dots x_i) \in PrET_2 \subseteq EL_2$ . Es gilt also  $w \in EL_2$ .

□

Der folgende Satz sagt aus, dass  $\sqsubseteq_E$  die größte Präkongruenz ist, die charakterisiert werden soll, also gleich der vollständig abstrakten Präkongruenz  $\sqsubseteq_E^C$ .

**Satz 3.13 (Vollständige Abstraktheit für Kommunikationsfehler-Semantik).**  
Für zwei MEIOs  $P_1$  und  $P_2$  mit derselben Signatur gilt  $P_1 \sqsubseteq_E^C P_2 \Leftrightarrow P_1 \sqsubseteq_E P_2$ .

*Beweis.*

„ $\Leftarrow$ “: Nach Definition gilt genau dann, wenn  $\varepsilon \in ET(P)$ , ist ein Fehler-Zustand lokal erreichbar in  $P$ .  $P_1 \sqsubseteq_E P_2$  impliziert, dass  $\varepsilon \in ET_2$  gilt, wenn  $\varepsilon \in ET_1$ . Somit ist ein Fehler-Zustand in  $P_1$  nur dann lokal erreichbar, wenn dieser auch in  $P_2$  lokal erreichbar ist. Falls es also eine as-Implementierung von  $P_1$  gibt, in der ein Fehler-Zustand lokal erreichbar ist, dann gibt es auch mindestens eine as-Implementierung von  $P_2$ , die einen Fehler-Zustand lokal erreichen kann. Diese as-Implementierung muss es geben, wenn  $P_1$  und  $P_2$  lokal erreichbare Fehler enthalten, wegen Korollar 3.9 (i). Daraus folgt, dass  $P_1 \sqsubseteq_E^B P_2$  gilt, da  $\sqsubseteq_E^B$  in Definition 3.2 über die lokale Erreichbarkeit der Fehler-Zustände in den as-Implementierungen definiert wurde. Es ist also  $\sqsubseteq_E$  in  $\sqsubseteq_E^B$  enthalten. Wie in Korollar 3.11 gezeigt, ist  $\sqsubseteq_E$  eine Präkongruenz bezüglich  $\cdot \parallel \cdot$ . Da  $\sqsubseteq_E^C$  die größte Präkongruenz bezüglich  $\cdot \parallel \cdot$  ist, die in  $\sqsubseteq_E^B$  enthalten ist, muss  $\sqsubseteq_E$  in  $\sqsubseteq_E^C$  enthalten sein. Es folgt also aus  $P_1 \sqsubseteq_E P_2$ , dass auch  $P_1 \sqsubseteq_E^C P_2$  gilt.

„ $\Rightarrow$ “: Durch die Definition von  $\sqsubseteq_E^C$  als Präkongruenz in 3.2 folgt aus  $P_1 \sqsubseteq_E^C P_2$ , dass  $U \parallel P_1 \sqsubseteq_E^C U \parallel P_2$  für alle MEIOs  $U$  gilt, die mit  $P_1$  komponierbar sind. Da  $\sqsubseteq_E^C$  nach Definition auch in  $\sqsubseteq_E^B$  enthalten sein soll, folgt aus  $U \parallel P_1 \sqsubseteq_E^C U \parallel P_2$  auch die Gültigkeit von  $U \parallel P_1 \sqsubseteq_E^B U \parallel P_2$  für alle diese MEIOs  $U$ . Mit Lemma 3.12 folgt dann  $P_1 \sqsubseteq_E P_2$ . □

Es wurde somit eine Kette an Folgerungen gezeigt, die sich zu einem Ring schließt. Dies ist in Abbildung 3.3 dargestellt.

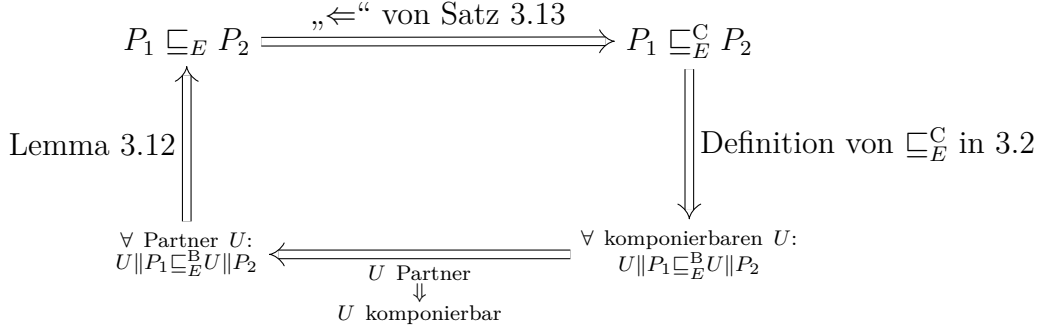


Abbildung 3.3: Folgerungskette der Fehler-Relationen

Angenommen man definiert, dass  $P_1 P_2$  verfeinern soll genau dann, wenn für alle Partner MEIOs  $U$ , für die  $P_2$  fehler-frei mit  $U$  kommuniziert, folgt, dass  $P_1$  ebenfalls fehler-frei mit  $U$  kommuniziert. Dann wird auch diese Verfeinerung durch  $\sqsubseteq_E$  charakterisiert.

**Korollar 3.14.** *Es gilt:  $P_1 \sqsubseteq_E P_2 \Leftrightarrow U \parallel P_1 \sqsubseteq_E^B U \parallel P_2$  für alle Partner  $U$ .*

## 3.2 Testing-Ansatz

Der grösste Präkongruenz-Ansatz aus dem letzten Teil stützt sich auf die Parallelkomposition von MEIOs, die wie bereits in Kapitel 2.2 erwähnt auch anders gestaltet hätte werden können. Spezielle bei neuen Fehler ist dort gezeigt worden, dass es zu einem ungewöhnlichen Verfeinerungs-Verhalten kommen kann, das möglicherweise gar nicht so gewollt ist. Deshalb ist es sinnvoll sich nur auf die Definition der Parallelkomposition von EIO zu stützen, die hier für die Implementierungen gilt. Dies führt zu dem in diesem Teil behandelten Testing-Ansatz. Dieser lässt jedoch keine Aussage zu grösste Präkongruenz zu, wie das im letzten Teil möglich war. Der Test ersetzt die Basisrelation als grundlegende Definition für den Ansatz. Die Präkongruenz, die sich ergibt, ist jedoch die selbe.

Der Testing-Ansatz stützt sich auf das Vorgehen, das in [BV15b] angewendet wurde. Jedoch sind Tests dort Tupel aus einer Implementierung und einer Menge an Aktionen, über denen synchronisiert werden soll. Die MEIOs, die hier komponiert werden bringen die Menge Synch an Aktionen, die synchronisiert werden bereits mit. Es wird im Gegensatz zu [BV15b] mit Inputs und Outputs gearbeitet und dadurch scheint der Ansatz die gemeinsamen Aktionen zu synchronisieren natürlicher, wie eine Menge an Aktionen beim Test vorzugeben.

Die Definition von lokaler Erreichbarkeit eines Fehler-Zustandes soll aus dem grössten

Präkongruenz-Ansatz übernommen werden. Es wird also trotzdem noch optimistisch davon ausgegangen, dass Fehler erst zu Problemen führen, wenn eine hilfreiche Umgebung dies nicht mehr verhindern kann.

**Definition 3.15 (Test und Verfeinerung für Kommunikationsfehler).** Sei  $P$  ein MEIO. Ein Test  $T$  für  $P$  ist eine zu  $P$  komponierbare Implementierung.  $P$  as-erfüllt  $T$  als einen Kommunikationsfehler-Test, falls  $S \parallel T$  lokal fehler-frei ist für alle  $S \in \text{as-impl}(P)$ . Es wird dann  $P \text{ sat}_{\text{as}}^E T$  geschrieben. Ein MEIO  $P$  Fehler-verfeinert  $P'$ , falls sie die selbe Signaturen haben und für alle ihre Tests  $T$ :  $P' \text{ sat}_{\text{as}}^E T \Rightarrow P \text{ sat}_{\text{as}}^E T$ .

Abgesehen von Korollar 3.9 (ii) erweisen sich Definition 3.3 bis Korollar 3.11 auch hier als nützlich.

Die Basisrelation aus dem größten Präkongruenz-Ansatz gibt es in diesem Teil nicht, somit kann das Lemma 3.12 nicht in dieser Art formuliert werden. Jedoch kann hier mit Tests gearbeitet werden und unter deren zuhelfenahme ein ähnliches Lemma formuliert werden.

**Lemma 3.16 (Testing-Verfeinerung mit Kommunikationsfehlern).** Gegeben sind zwei MEIOs  $P_1$  und  $P_2$  mit der gleichen Signatur. Wenn für alle Tests  $T$ , die Partner von  $P_1$  bzw.  $P_2$  sind,  $P_2 \text{ sat}_{\text{as}}^E T \Rightarrow P_1 \text{ sat}_{\text{as}}^E T$  gilt, dann folgt daraus die Gültigkeit von  $P_1 \sqsubseteq_E P_2$ .

*Beweis.* Da  $P_1$  und  $P_2$  die gleichen Signaturen haben wird  $I := I_1 = I_2$  und  $O := O_1 = O_2$  definiert. Für jeden Test Partner  $T$  gilt  $I_T = O$  und  $O_T = I$ .

Um  $P_1 \sqsubseteq_E P_2$  zu zeigen, wird nachgeprüft, ob folgendes gilt:

- $ET_1 \subseteq ET_2$ ,
- $EL_1 \subseteq EL_2$ .

Für ein gewähltes präfix-minimales Element  $w \in ET_1$  wird gezeigt, dass dies  $w$  oder eines seiner Präfixe in  $ET_2$  enthalten ist. Dies ist möglich, da die beiden Mengen  $ET_1$  und  $ET_2$  unter cont abgeschlossen sind.

Mit Proposition 3.8 folgt aus  $w \in ET_1$ , dass es auch eine as-Implementierung  $P'_1$  von  $P_1$  geben muss, für die  $w$  ebenfalls in  $ET_{P'_1}$  enthalten ist. Da  $w$  für  $P_1$  präfix-minimal ist, gilt  $w \in \text{Pr}ET_1$  oder  $w \in \text{MIT}_1$  mit Proposition 3.4 kann die as-Implementierung  $P'_1$  sogar so gewählt werden, dass  $w$  für  $P'_1$  ebenfalls präfix-minimal ist.

- Fall 1 ( $w = \varepsilon$ ): Es ist ein Fehler-Zustand in  $P'_1$  lokal erreichbar. Für  $T$  wird ein Transitionssystem verwendet, das nur aus dem Startzustand und einer must-Schleife für alle Inputs  $x \in I_T$  besteht. Somit kann  $P'_1$  die im Prinzip gleichen Fehler-Zustände lokal erreichen wie  $P'_1 \parallel T$ .  $P'_1$  ist in Parallelkomposition mit  $T$  nicht lokal fehler-frei somit gilt  $P_1 \text{ sat}_{\text{as}}^E T$  nicht. Es darf also auch  $P_2$  den Test  $T$  nicht as-erfüllen, wegen der Implikation  $P_2 \text{ sat}_{\text{as}}^E T \Rightarrow P_1 \text{ sat}_{\text{as}}^E T$ . Damit  $P_2$   $T$  nicht as-erfüllt muss es eine as-Implementierung  $P'_2$  geben, die in Parallelkomposition mit  $T$  zu einem nicht lokal fehler-freien System führt. Es muss also in  $P'_2 \parallel T$  ein Fehler lokal erreichbar



sein. Durch die Definition von  $T$  kann dieser Fehler nur von  $P'_2$  geerbt sein. In  $P'_2$  kann dieser Fehler-Zustand nur durch internen Aktionen und Outputs erreichbar sein, da  $T$  keine Outputs besitzt, die man mit Inputs aus  $P'_2$  synchronisieren könnte und unsynchronisierte Aktionen sind in einer Parallelkomposition von Partner nicht möglich. Somit gilt  $\varepsilon \in PrET_{P'_2} \subseteq ET_{P'_2}$ . Mit Proposition 3.8 folgt daraus  $\varepsilon \in ET_2$ .

- Fall 2 ( $w = x_1 \dots x_n x_{n+1} \in \Sigma^+$  mit  $n \geq 0$  und  $x_{n+1} \in I = O_T$ ): Es wird der folgende Partner  $T$  betrachtet (dieser entspricht bis auf die Benennungen der Mengen dem Transitionssystem  $U$  aus Abbildung 3.1):

- $T = \{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}\}$ ,
- $p_{0T} = p_0$ ,
- $\dashrightarrow_T = \longrightarrow_T = \{(p_j, x_{j+1}, p_{j+1}) \mid 0 \leq j \leq n\} \cup \{(p_j, x, p_{n+1}) \mid x \in I_T \setminus \{x_{j+1}\}, 0 \leq j \leq n\} \cup \{(p_{n+1}, x, p_{n+1}) \mid x \in I_T\}$ ,
- $E_T = \emptyset$ .

Für das präfix-minimale  $w$  können nun zwei Fälle unterschieden werden, für die beide  $\varepsilon \in PrET(P'_1 \parallel T)$  folgen wird.

- Fall 2a) ( $w \in MIT_{P'_1}$ ): In  $P'_1 \parallel T$  erhält man  $(p'_{01}, p_0) \stackrel{x_1 \dots x_n}{\equiv} (p', p_n)$  mit  $p' \xrightarrow{x_{n+1}}_{P'_1}$  und  $p_n \xrightarrow{x_{n+1}}_T$ . Deshalb gilt  $(p', p_n) \in E_{P'_1 \parallel T}$ . Da alle Aktionen aus  $w$  bis auf  $x_{n+1}$  synchronisiert werden und  $I \cap I_T = \emptyset$ , gilt  $x_1, \dots, x_n \in O_{P'_1 \parallel T}$ . Es folgt also  $\varepsilon \in PrET(P'_1 \parallel T)$ .
- Fall 2b) ( $w \in PrET_{P'_1}$ ): In der Parallelkomposition  $P'_1 \parallel T$  erhält man die Transitionsfolge  $(p_{01}, p_0) \stackrel{w}{\Rightarrow}_{P'_1 \parallel T} (p'', p_{n+1}) \stackrel{u}{\Rightarrow}_{P'_1 \parallel T} (p', p_{n+1})$  für  $u \in O^*$  und  $p' \in E_{P'_1}$ . Daraus folgt  $(p', p_{n+1}) \in E_{P'_1 \parallel T}$  und somit  $wu \in StET(P'_1 \parallel T)$ . Da alle Aktionen in  $w$  synchronisiert werden und  $I \cap I_T = \emptyset$ , gilt  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in O_{P'_1 \parallel T}$  und, da  $u \in O^*$ , folgt  $u \in O_{P'_1 \parallel T}^*$ . Somit ergibt sich  $\varepsilon \in PrET(P'_1 \parallel T)$ .

Da  $\varepsilon \in PrET(P'_1 \parallel T)$  gilt, kann durch  $P_2 sat_{as}^E T \Rightarrow P_1 sat_{as}^E T$  geschlossen werden, dass auch  $P_2 sat_{as}^E T$  nicht gelten kann. Die Relation gilt für  $P_2$  nicht, da es eine as-Implementierung  $P'_2$  von  $P_2$  gibt, so dass  $P'_2 \parallel T$  nicht lokal fehler-frei ist.

Der lokal erreichbar Fehler in  $P'_2 \parallel T$  kann geerbt oder neu sein. In beiden Fällen kann gezeigt werden, dass ein Präfix von  $w$  in der Menge  $ET_{P'_2}$  und mit Proposition 3.8 auch in der Menge  $ET_2$  enthalten ist.

- Fall 2i) (neuer Fehler): Da jeder Zustand von  $T$  alle Inputs  $x \in O = I_T$  zulässt, muss ein lokal erreichbarer Fehler-Zustand der Form sein, dass ein Outputs  $a \in O_T$  von  $T$  möglich ist, der nicht mit einem passenden Input aus  $P'_2$  synchronisiert werden werden kann. Durch die Konstruktion von  $T$  sind in  $p_{n+1}$  keine Outputs möglich. Ein neuer Fehler muss also die Form  $(p', p_i)$

haben mit  $i \leq n$ ,  $p' \not\rightarrow_{P'_2}^{x_{i+1}}$  und  $x_{i+1} \in O_T = I$ . Durch Projektion erhält man dann  $p_{02} \xrightarrow{x_1 \dots x_i}_{P'_2} p' \not\rightarrow_{P'_2}^{x_{i+1}}$  und damit gilt  $x_1 \dots x_{i+1} \in MIT_{P'_2} \subseteq ET_{P'_2}$ . Es ist also ein Präfix von  $w$  in  $ET_{P'_2}$  enthalten und mit Proposition 3.8 auch in  $ET_2$ .

- Fall 2ii) (geerbter Fehler):  $T$  hat  $x_1 \dots x_i u$  mit  $u \in I_T^* = O^*$  ausgeführt und ebenso hat  $P'_2$  dieses Wort abgearbeitet. Durch dies hat  $P'_2$  einen Zustand in  $E_{P'_2}$  erreicht, da von  $T$  keine Fehler geerbt werden können. Es gilt dann  $\text{prune}(x_1 \dots x_i u) = \text{prune}(x_1 \dots x_i) \in PrET_{P'_2} \subseteq ET_{P'_2}$ . Da  $x_1 \dots x_i$  ein Präfix von  $w$  ist, führt in diesem Fall eine Verlängerung um lokale Aktionen eines Präfix von  $w$  zu einem Fehler-Zustand. Da  $ET$  der Menge aller Verlängerungen von gekürzten Fehler-Traces entspricht, ist  $x_1 \dots x_i$  in  $ET_{P'_2}$  enthalten und somit ist mit Proposition 3.8 ein Präfix von  $w$  in  $ET_2$  enthalten.

Um die andere Inklusion zu beweisen, reicht es aufgrund der ersten Inklusion und der Definition von  $EL$  aus zu zeigen, dass  $L_1 \setminus ET_1 \subseteq EL_2$  gilt.

Es wird dafür ein beliebiges  $w \in L_1 \setminus ET_1$  gewählt und gezeigt, dass es in  $EL_2$  enthalten ist. Das  $w$  ist wegen der Propositionen 2.8 und 3.8 auch für eine as-Implementierung  $P'_1$  von  $P_1$  in  $L_{P'_1} \setminus ET_{P'_1}$  enthalten.

- Fall 1 ( $w = \varepsilon$ ): Da  $\varepsilon$  immer in  $EL_2$  enthalten ist, muss hier nichts gezeigt werden.
- Fall 2 ( $w = x_1 \dots x_n$  mit  $n \geq 1$ ): Es wird ein Partner  $T$  wie folgt konstruiert ( $T$  entspricht dabei  $U$  aus Abbildung 3.2 bis auf die Benennung der Mengen):

- $T = \{p_0, p_1, \dots, p_n, p\}$ ,
- $p_{0T} = p_0$ ,
- $\dashrightarrow_T = \rightarrow_T = \{(p_j, x_{j+1}, p_{j+1}) \mid 0 \leq j < n\} \cup \{(p_j, x, p) \mid x \in I_T \setminus \{x_{j+1}\}, 0 \leq j < n\} \cup \{(p, x, p) \mid x \in I_T\}$ ,
- $E_T = \{p_n\}$ .

Da  $p_{01} \xrightarrow{w}_{P'_1} p'$  gilt, kann man schließen, dass  $P'_1 \parallel T$  ein lokal erreichbaren geerbten Fehler hat. Es muss also auch eine as-Implementierung  $P'_2$  von  $P_2$  geben, für die  $P'_2 \parallel T$  einen lokal erreichbaren Fehler-Zustand hat.

- Fall 2a) (neuer Fehler aufgrund von  $x_i \in O_T$  und  $p_{02} \xrightarrow{x_1 \dots x_{i-1}}_{P'_2} p'' \not\rightarrow_{P'_2}^{x_i}$ ): Es gilt  $x_1 \dots x_i \in MIT_{P'_2}$  und somit  $w \in EL_{P'_2}$ . Anzumerken ist, dass es nur auf diesem Weg Outputs von  $T$  möglich sind, deshalb gibt es keine anderen Outputs von  $T$ , die zu einem neuen Fehler führen können. Es gilt  $w \in EL_2$  wegen Proposition 3.8.
- Fall 2b) (neuer Fehler aufgrund von  $a \in O = I_T$ ): Der einzige Zustand, in dem  $T$  nicht alle Inputs erlaubt sind, ist  $p_n$ , der bereits ein Fehler-Zustand ist. Da in diesem Fall der Fehler-Zustand in  $P'_2 \parallel T$  erreichbar ist, besitzt der

komponierte MEIO einen geerbten Fehler und es gilt  $w \in L_{P'_2} \subseteq EL_2$ , wegen dem folgenden Fall 2c).

- Fall 2c) (geerbter Fehler von  $T$ ): Da  $p_n$  der einzige Fehler-Zustand in  $T$  ist und alle Aktionen synchronisiert sind, ist dies nur möglich, wenn  $p_{02} \xrightarrow{x_1 \dots x_n}_{P'_2}$  gilt. In diesem Fall ist  $w \in L_{P'_2} \subseteq EL_{P'_2}$ . Daraus folgt mit Proposition 3.8  $w \in EL_2$ .
- Fall 2d) (geerbter Fehler von  $P'_2$ ): Es gilt  $p_{02} \xrightarrow{x_1 \dots x_i u}_{P'_2} p' \in E_{P'_2}$  für ein  $i \geq 0$  und  $u \in O^*$ . Somit ist  $x_1 \dots x_i u \in StET_{P'_2}$  und damit  $\text{prune}(x_1 \dots x_i u) = \text{prune}(x_1 \dots x_i) \in PrET_{P'_2} \subseteq EL_{P'_2}$ . Mit Hilfe von Proposition 3.8 folgt  $w \in EL_{P'_2} \subseteq EL_2$ .

□

**Satz 3.17.** *Falls  $P_1 \sqsubseteq_E P_2$  gilt folgt draus, dass  $P_1$   $P_2$  Fehler-verfeinert.*

*Beweis.* Für ein MEIO  $P$  gilt nach Definition  $\varepsilon \in ET_P$  genau dann, wenn ein Fehler-Zustand lokal erreichbar ist in  $P$ .

Um zu zeigen, dass  $P_1$  eine Fehler-Verfeinerung von  $P_2$  ist, muss nachgewiesen werden, dass für alle ihre Test  $T$   $P_2 \text{ sat}_{\text{as}}^E T \Rightarrow P_1 \text{ sat}_{\text{as}}^E T$  gilt. Diese Aussage ist analog zu der Aussage, dass für alle Test  $T$  von  $P_1$  und  $P_2$   $\neg P_1 \text{ sat}_{\text{as}}^E T \Rightarrow \neg P_2 \text{ sat}_{\text{as}}^E T$  gilt. Es wird ein beliebiger Test  $T$  gewählt für den  $\neg P_1 \text{ sat}_{\text{as}}^E T$  gilt. Es muss also eine as-Implementierung  $P'_1$  von  $P_1$  geben, die in der Parallelkomposition mit  $T$  einen Fehler lokal erreicht. Es gilt also  $\varepsilon \in ET_{P'_1 \| T}$ . Nach Satz 3.10.1 gilt die Gleichheit  $ET_{P'_1 \| T} = \text{cont}(\text{prune}((ET_{P'_1} \| EL_T) \cup (EL_{P'_1} \| ET_T)))$ .  $\varepsilon$  ist auf jeden Fall präfix-minimal, das cont hat also keinen Einfluss. Mit Proposition 3.8 folgt  $\varepsilon \in \text{prune}((ET_1 \| EL_T) \cup (EL_1 \| ET_T))$ . Es gibt also ein  $w \in O_{P_1 \| T}^*$ , dass in der Menge  $ET_1 \| EL_T$  oder in der Menge  $EL_1 \| ET_T$  enthalten ist. Es gibt also Wörter  $w_1$  und  $w_T$  mit  $w \in w_1 \| w_T$ ,  $w_1 \in ET_1$  bzw.  $w_1 \in EL_1$  und  $w_T \in EL_T$  bzw.  $w_T \in ET_T$ . Da  $P_1 \sqsubseteq_E P_2$  gilt, folgt  $w_1 \in ET_2$  bzw.  $w_1 \in EL_2$ . Es gibt durch Proposition 3.8 eine as-Implementierung  $P'_2$  von  $P_2$  für die  $w_1 \in ET_{P'_2}$  bzw.  $w_1 \in ET_{P'_2}$  gilt. In Parallelkomposition mit  $T$  ist das Wort  $w$  also in der Menge  $(ET_{P'_2} \| EL_T) \cup (EL_{P'_2} \| ET_T)$  enthalten.  $P_1$  und  $P_2$  müssen die gleiche Signatur besitzen, es gilt also auch  $w \in O_{P_2 \| T}$  und somit  $\varepsilon \in \text{prune}((ET_{P'_2} \| EL_T) \cup (EL_{P'_2} \| ET_T)) \subseteq ET_{P'_2 \| T}$ . Es ist also in  $P'_2 \| T$  ein Fehler lokal erreichbar und es folgt für die Spezifikation  $P_2$   $\neg P_2 \text{ sat}_{\text{as}}^E T$ . □

Auch die in diesem Abschnitt gezeigten Folgerungen schließen sich zu einem Ring. Dies ist in Abbildung 3.4 dargestellt.

Die in Abbildung 3.4 dargestellten Zusammenhänge lassen sich zu einer Äquivalenz zusammenfassen.

**Korollar 3.18.** *Es gilt:  $P_1 \sqsubseteq_E P_2 \Leftrightarrow P_1$  Fehler-verfeinert  $P_2$ .*

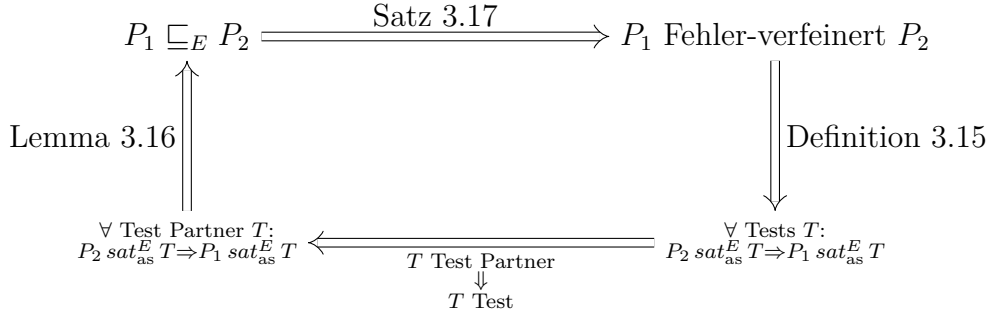


Abbildung 3.4: Folgerungskette der Testing-Verfeinerung und Fehler-Relation

### 3.3 Zusammenhänge

**Satz 3.19 (Zusammenhang der Verfeinerungs-Relationen mit der Fehler-Relation).** Für MEIOs  $P$  und  $Q$  gilt  $P \sqsubseteq_{w-as} Q \Rightarrow P \sqsubseteq_E Q$ . Die Implikation in die andere Richtung gilt jedoch nicht.

*Beweis.*

$P \sqsubseteq_{w-as} Q \Rightarrow P \sqsubseteq_E Q$ :

Um diese Implikation zu beweisen wird gezeigt, dass eine beliebige schwache as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$  zwischen  $P$  und  $Q$  auch die Eigenschaften der Relation  $\sqsubseteq_E$  erfüllt. Da  $\mathcal{R}$  eine schwache as-Verfeinerungs-Relation zwischen  $P$  und  $Q$  ist, muss  $p_0 \mathcal{R} q_0$  gelten. Es sind die folgenden Punkte nachzuweisen:

- $ET_P \subseteq ET_Q$ ,
- $EL_P \subseteq EL_Q$ .

Für den ersten Punkt wird ein beliebiges  $w$  aus  $ET_P$  betrachtet und gezeigt, dass dieses auch in  $ET_Q$  enthalten ist. Es kann davon ausgegangen werden, dass  $w$  präfix-minimal ist, da beide  $ET$ -Mengen unter  $\text{cont}$  abgeschlossen sind.  $w$  kann ein Element aus  $PrET(P)$  sein oder ein Element aus  $MIT(P)$ .

- Fall 1 ( $w \in PrET(P)$ ): Es existiert ein  $v \in O_P$ , sodass das Wort  $wv$  in  $P$  einen Fehler-Zustand erreicht. Es gibt eine Transitionsfolge wie in Lemma 3.6, so dass  $wv = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)|_\Sigma$  gilt und der dadurch erreichte Zustand  $p_n$  ein Zustand aus der Menge  $E_P$  ist. Falls eines des  $q_j$  für  $0 \leq j < n$  in  $E_Q$  enthalten ist, folgt mit dem Beweis von Lemma 3.6, dass ein Präfix von  $wv$  in  $StET(Q)$  enthalten ist. Mit  $w = \text{prune}(wv)$  und dem Abschluss von  $ET$  unter  $\text{cont}$  gilt dann  $w \in ET_Q$ . Ansonsten gibt es in  $Q$  einen Trace für das Wort  $wv$ , dass einen Zustand  $q_n$  erreicht, für den  $p_n \mathcal{R} q_n$  gilt. Mit 2.4.1 folgt, dass  $q_n \in E_Q$  gelten muss und somit auch  $w \in ET_Q$  mit der Begründung von oben.

- Fall 2 ( $w \in MIT(P)$ ):  $w$  ist in  $P$  ein Input-kritischer Trace. Es existiert also eine Aufteilung von  $w$  in  $va$  mit  $v \in \Sigma^*$  und  $a \in I$ , wobei  $v$  in  $P$  zu einem Zustand ausführbar ist, der den Input  $a$  nicht sicherstellt. Es gibt also ein Ablauf des Wortes  $v$  wie in Lemma 3.6, der zu einem Zustand  $p_n$  führt, der keine ausgehende must-Transition für  $a$  besitzt. Falls ein  $q_j$  für  $0 \leq j \leq n$  in  $E_Q$  enthalten ist, folgt mit dem Beweis des Lemmas 3.6 und dem Abschluss der Menge  $ET$  unter  $\text{cont}$   $w \in ET_Q$ . Ansonsten wird durch  $v$  in  $Q$  ein Zustand  $q_n$  erreicht, für den  $p_n \mathcal{R} q_n$  gilt. Da  $a$  für  $p_n$  in  $P$  keine ausgehende must-Transition sein kann, gilt mit 2.4.2 auch  $q_n \not\rightarrow^a$ .  $w$  ist in  $MIT_Q \subseteq ET_Q$  enthalten.

Für den zweiten Punkt kann man sich auf die Inklusion  $EL_P \setminus ET_P \subseteq EL_Q$  einschränken, da der erste Punkt bereits vorausgesetzt werden kann.  $EL_P \setminus ET_P$  ist eine Teilmenge der Sprache  $L_P$ . Somit ist ein  $w$  aus  $EL_P \setminus ET_P$  in  $P$  ausführbar. Es gibt also einen Trace für  $w$  in  $P$  der Form, wie sie in Lemma 3.6 vorausgesetzt wird. Falls ein  $q_j$  für  $0 \leq j \leq n$  in  $E_Q$  enthalten ist, gilt  $w \in ET_Q \subseteq EL_Q$ . Es wird also im Folgenden davon ausgegangen, dass kein  $q_j$  ein Fehler-Zustand ist. Es gilt dann  $q_0 \xrightarrow{\hat{\alpha}_1}_Q q_1 \xrightarrow{\hat{\alpha}_2}_Q \dots q_{n-1} \xrightarrow{\hat{\alpha}_n}_Q q_n$  in  $Q$  mit  $p_j \mathcal{R} q_j$  für  $0 \leq j \leq n$  und somit  $w \in L_Q \subseteq EL_Q$ .

$P \sqsubseteq_{\text{w-as}} Q \not\sqsubseteq_E P$ :

Die nicht Gültigkeit dieser Implikation beruht darauf, dass Simulationen strenger sind als Sprach Inklusionen. Das Gegenbeispiel hier ist also so aufgebaut, dass  $ET(P) = ET(Q) = \emptyset$  und  $L(P) \subseteq L(Q)$  gilt, jedoch keine schwache as-Verfeinerungs-Relation zwischen  $P$  und  $Q$  existieren kann.  $Q$  und  $P$  sind in der Abbildung 3.5 dargestellt. Damit  $ET(P) = ET(Q) = \emptyset$  gilt, dürfen keine der Zustände Fehler-Zustände sein und es muss gefordert werden, dass die Menge  $I$  der Inputs für die MEIOs leer ist, ansonsten würde es Input-kritische Traces gegen.  $P$  kann keine Aktionen ausführen und  $Q$  nur die Output Aktion  $o$  somit gilt für die Sprachen  $\{\varepsilon\} = L(P) \subset L(Q) = \{\varepsilon, o\}$ .

Angenommen es gibt eine schwache as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$  zwischen  $P$  und  $Q$ . Dafür muss  $(p_0, q_0) \in \mathcal{R}$  gelten. Da die Transition  $q_0 \xrightarrow{o}_Q q_1$  in  $Q$  vorhanden ist, wird die Verfeinerung dieser in  $P$  gefordert es müsste auch eine must-Output-Transition in  $P$  geben. Es gibt jedoch keine must-Transition in  $P$ , dies stellt einen Widerspruch zur Annahme dar und es folgt, dass es keine schwache as-Verfeinerungs-Relation zwischen  $P$  und  $Q$  geben kann.

$$Q: \rightarrow q_0 \xrightarrow{o!} q_1 \qquad P: \rightarrow p_0$$

Abbildung 3.5: Gegenbeispiel zu  $\sqsubseteq_{\text{w-as}} \Leftarrow \sqsubseteq_E$  mit  $I_P = I_Q = \emptyset$

□

In dieser Arbeit werden im Gegensatz zu [BFLV16] die Fehler bei einer Parallelkomposition beibehalten bzw. aus dieser entstehend angesehen. Es werden dabei alle Transitionen, die nicht durch fehlende Synchronisations-Möglichkeiten wegfallen, übernommen.

In [BFLV16] hingegen wird der Ansatz verfolgt alle Fehler zu entfernen und durch einen universal Zustand zu ersetzen, der nur eingehende may-Input-Transitionen zulässt. Außer dem universalen Zustand gibt es in einem MIA wie in [BFLV16] keine anderen Fehler-Zustände. Auf diese Normierung wurde hier mit Absicht verzichtet um sehen zu können, dass die Fehler einen Ursprung haben, den man später auch noch einsehen kann. Jedoch gibt es trotzdem einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Ansätzen.

Die Unterscheidung, die die Basisrelation  $\sqsubseteq_E^B$  hier herbei führt, würde dort der Unterscheidung zwischen Transitionssystemen, die den universal Zustand  $e$  als Startzustand haben und denen, die einen Startzustand ungleich  $e$  besitzen, entsprechen. Falls hier in einer as-Implementierung von  $P$  ein Fehler lokal erreichbar ist, dann muss auch in  $P$  ein Fehler-Zustand lokal erreichbar sein, wegen 3.9 (i). Dies entspricht  $\varepsilon \in \text{PrET}(P)$ . Das Abschneiden der lokalen Aktionen wird hier nur in der Trace Menge praktiziert, in [BFLV16] jedoch direkt auf den Transitionssystemen. Im Fall der lokalen Fehler-Erreichbarkeit bleibt also nur noch der Zustand  $e$  als universal Zustand übrig, für den jedes Verhalten zulässig ist. Für die Fehler-Zustände ist in dem hier verwendeten Ansatz nur auf Trace-Ebene bzw. bezüglich der Verfeinerungs-Relationen beliebiges Verhalten möglich. In den Transitionssystemen gibt es die Transitionen für das beliebige Verhalten im allgemeinen nicht.

Da auch der Testing-Ansatz die lokale Fehler-Erreichbarkeit verwendet, existiert der Zusammenhang auch dort für die Parallelkomposition mit dem entsprechenden Test.

Für eine entsprechende Normierung, die die Input-kritischen Traces zum universal Zustand führt und somit die MEIOs bis auf den Fehler-Zustand Input-enabled macht, gibt es zu jedem MEIO einen äquivalenten MIA. Mit dieser Normierung für die MEIOs entspricht  $\sqsubseteq_E$  der Relation  $\sqsubseteq$  aus [BFLV16] für Input-enabled MIAs bis auf den Zustand  $e$ .

Gibt es in  $Q$  jedoch einen Input-kritische Traces, würde  $P \sqsubseteq_E Q$  zulassen, dass  $P$  einen gekürzten Fehler-Trace anstatt dessen besitzt. Diese Art der Verfeinerung lässt  $\sqsubseteq$  nicht zu. Jedoch sind die Input-kritischen Traces auch dort die potentiellen Auslöser für neue Fehler-Zustände in einer Parallelkomposition. Dieses Problem basiert auf dem Problem, dass  $\sqsubseteq_E$  keine schwache as-Verfeinerungs-Relation sein muss, die in  $\sqsubseteq_{w-as}$  enthalten ist.

**Definition 3.20 (Normal Form).** *Ein MEIO  $P$  ist in Normal Form (NF), falls die Menge  $E_P$  der Fehler-Zustände nur ein einziges Element enthält  $E_P = \{e\}$  und  $P$  bis auf den Zustand  $e$  Input-enabled ist. Zusätzlich soll für jede Transition, für die  $p \xrightarrow{\alpha} e$  mit  $p \neq e$  gilt,  $\alpha$  ein Element der Menge der Input-Aktionen  $I$  sein.*

Die Normal Form von  $P$  ist ein MEIO  $NF(P)$ , das man aus  $P$  durch die nachfolgenden zwei Schritte erhält:

(i) Definiere  $\overline{E_P} = \{p \mid \exists p' \in E_P, w \in O^* : p \xRightarrow{w}_P p'\}$  und ersetze  $E_P$  durch  $\overline{E_P}$ .

(ii) Falls  $p_0 \in \overline{E_P}$ , ist  $NF(P) = (\{p_0\}, I, O, \emptyset, \emptyset, p_0, \{p_0\})$ .

Ansonsten, füge einen neuen Zustand  $e$  hinzu, der der einzige Fehler-Zustand wird. Wann immer  $p \xrightarrow{\alpha}_P p' \in \overline{E_P}$  und  $p \notin \overline{E_P}$  für ein  $\alpha \in \Sigma \cup \{\tau\}$  gilt (dann gilt zwingendermaßen  $\alpha \in I$ ), entferne alle  $\alpha$ -Transitionen, die von  $P$  ausgehen und

füge die Transition  $p \xrightarrow{\alpha}_{NF(P)} e$  hinzu. Für alle  $p \neq \overline{E_P}$ , für die  $p \not\xrightarrow{i}$  für einen Input  $i$  gilt, füge die Transitionen  $p \xrightarrow{i} e$  und  $p \xrightarrow{-i} e$  hinzu.

An allen Zuständen außer  $e$ , für die nicht alle Inputs sichergestellt wurden, wurde die entsprechende must-Transition zum Zustand  $e$  in der Normal Form hinzugefügt. Somit hat die Normal Form nur  $e$  als einzigen Fehler-Zustand und bis auf  $e$  sind auch für alle Zustände alle Inputs sichergestellt.

Schritt (i) den Normal Form Konstruktion verändert nicht an den Transitionen und auch nichts daran, ob ein Zustand einen nicht sichergestellten Input hat oder nicht. Die Menge  $StET$  wird verändert jedoch bleibt die Menge  $PrET$  gleich, da  $StET$  nach dem Schritt (i) alle Traces enthält, die direkt oder durch lokal Aktionen zu einem Fehler-Zustand des ursprünglichen MEIOs führen. Für die Menge  $MIT(P) \setminus \text{cont}(PrET(P))$  ändert sich nichts durch die Anwendung des ersten Schrittes auf  $P$ , da sich an den Zuständen ohne Zusammenhang zu Fehler-Zuständen nicht ändert. Das Ergebnis des Schrittes (i) entspricht also  $P$  bezüglich der Relation  $\sqsubseteq_E$ . Im ersten Fall von Schritt (ii) gilt  $ET(P) = \Sigma^* = ET(NF(P))$ . Im zweiten Fall ändert der Schritt (ii) nichts an Zuständen, die keine Transitionen zu Zuständen in der Menge  $\overline{E_P}$  besitzen und alle Inputs sicherstellen. Da jeweils die erste Transition, die zu einem Zustand in der Menge  $\overline{E_P}$  führt zum Zustand  $e$  umgebogen wird, sind die Traces, die in  $PrET(P)$  enthalten sind auch alle in  $PrET(NF(P))$  enthalten. Alle Traces aus  $MIT(P)$  waren in  $P$  nicht ausführbar. Durch das hinzufügen Input-Transitionen an den Zuständen mit nicht sichergestellten Inputs, führt dazu, dass die Menge  $MIT(NF(P))$  der Menge  $PrET(NF(P))$  entspricht, da der Zustand  $e$  als Fehler-Zustand keine ausgehenden Transitionen besitzt und alle fehlenden must-Input-Transitionen aus  $P$  in  $NF(P)$  zum Zustand  $e$  führen. Die Menge der Fehler-Traces  $ET$  bleibt somit im Schritt (ii) gleich. Die Sprache des MEIOs  $P$  wird durch die Konstruktion in (ii) um die Traces in  $(\text{cont}(PrET(P)) \setminus PrET(P)) \cup (\text{cont}(MIT(P)) \setminus MIT(P))$  verkleinert. Da diese Traces jedoch in der Menge  $ET$  enthalten sind, mit denen die Sprache  $L$  in  $EL$  geflutet wird, spielt diese bezüglich der Relation  $\sqsubseteq_E$  keine Rolle. Es gilt also auch  $EL(P) = EL(NF(P))$ . Somit ist  $NF(P)$  äquivalent zu  $P$  bezüglich der Relation  $\sqsubseteq_E$ . Es gilt also die folgende Proposition.

**Proposition 3.21 (Normal Form).** *Jedes MEIO  $P$  ist äquivalent zu seiner Normal Form  $NF(P)$  bezüglich der Relation  $\sqsubseteq_E$ .*

Durch die Konstruktion in Definition 3.20 kann man zu jedem MEIO  $P$  einen bezüglich der Relation  $\sqsubseteq_E$  äquivalenten MEIO in Normal Form konstruieren. Um zu zeigen, dass es auch immer einen bezüglich  $\sqsubseteq_E$  äquivalenten MIA wie in [BFLV16] definiert gibt, reicht es nun aus zu beweisen, dass ein MEIO in Normal Form in einem MIA umgewandelt werden kann.

**Satz 3.22 (Existenz äquivalenter MIAs).** *Für jeden MEIO  $P$  gibt es einen äquivalenten MIA  $P'$  bezüglich der Relation  $\sqsubseteq_E$ .*

*Beweis.* Man kann oBdA davon ausgehen, dass  $P$  ein MEIO in Normal Form ist.  $P$  besitzt also genau einen Fehler-Zustand. Dies ist der universale Zustand des MIAs. Alle eingehenden Transitionen in den Zustand  $e$  sind Input-Transitionen und alle must-Transitionen haben zugrundeliegende may-Transitionen. Das einzige noch vorhandene Problem besteht in der Signatur der must-Transitionen. Jedoch kann die Relation der must-Transitionen einen äquivalenten MIA  $P'$  auf Basis der must-Transitions-Relation des MEIOs  $P$  definiert werden als:  $\longrightarrow_{P'} = \{(p, \alpha, Q) \mid (\forall p' \in Q : p \xrightarrow{\alpha}_P p') \wedge (\neg \exists p' \in P \setminus Q : p \xrightarrow{\alpha}_P p')\}$ . Die Menge der Zustände von  $P'$  entspricht  $P$ . Die Startzustände von  $P$  und  $P'$  sind gleich, genau so wie die Mengen der Input- und Output-Aktionen. Für die Relation  $\dashrightarrow_{P'}$  gilt  $\dashrightarrow_{P'} = \dashrightarrow_P$ . Das daraus resultierende Transitionssystem  $P'$  ist ein MIA nach der Definition in [BFLV16].  $\square$

Die MIAs aus [BFLV16] müssen jedoch im allgemeinen nicht Input-enabled für alle Zustände außer  $e$  sein. Falls jedoch alle nicht sichergestellten Input-Transitionen in einem MIA ergänzt werden, wie in der Konstruktion in Definition 3.20, ist jeder MIA auch ein MEIO, wenn die must-Transitions-Relation in die entsprechenden einzelnen Transitionen aufgespalten wird, die nur noch einen Zustand als Ziel haben und keine Menge von Zuständen.



## 4 Verfeinerungen für Kommunikationsfehler- und Stillstand-Freiheit

In diesem Kapitel wird die Menge der betrachteten Zustandsmengen von den Kommunikations-basierten Fehlern im letzten Kapitel ergänzt um die Menge stiller Zustände. Es wird nur noch der Testing-Ansatz des letzten Kapitels fortgeführt, da dieser sich auf die Parallelkomposition von EIOs stützt und nicht auf die Definition der Parallelkomposition von MEIOs, die auch anders gestaltet hätte werden können.

### 4.1 Testing-Ansatz

In den EIOs aus z.B. [Sch16] ist ein stiller Zustand, ein Zustand, der keine ausgehenden Transitionen für lokale Aktionen besitzt. Im Fall der hier betrachteten MEIOs müssen solche Zustände ebenfalls als still angesehen werden, jedoch bereits Zustände, die keine ausgehenden must-Transitionen für Outputs und  $\tau$ s besitzen lassen in as-Implementierungen zu, dass an dort ein Stillstand entsteht. Falls also nur may-Transitionen für die lokalen Aktionen vorhanden sind, sollte der Zustand hier auch bereits still sein.

Zustände, die keine must-Transitionen für lokale Aktionen ohne einen Input ausführen können, werden als in einer Art Verklemmung angesehen, da sie ohne Zutun von Außen den Zustand nicht mehr verlassen können, falls ein möglicherweise vorhandener may-Transition für lokale Aktionen nicht implementiert wird. So ein Zustand hat also keine must-Transitions-Möglichkeiten für einen lokale Aktion, es ist also ein Deadlock-Zustand, in denen das System nichts mehr tun können muss ohne einen Input. Diese Zustände werden in dieser Arbeit als still bezeichnet, da wenn dieser Zustand erreicht wird, dass System still steht bis die Umwelt eine Aktion ausführt.

**Definition 4.1 (*Stillstand*).** *Ein stiller Zustand ist ein Zustand in einem MEIO  $P$ , der keine Outputs und kein  $\tau$  zulässt via must-Transitionen.*

*Somit ist die Menge der stillen Zustände in einem MEIO  $P$  wie folgt formal definiert:*  
 $Qui(P) := \{p \in P \mid \forall \alpha \in (O \cup \{\tau\}) : p \not\rightarrow_P^\alpha\}.$

Der Ansatz, dass stille Zustände keine Output und keine  $\tau$ -Transitionen sicherstellen basiert auf der Definition der Stille für EIOs in z.B. [Sch16].

Alternativ wäre es auch möglich gewesen eine andere Betrachtung zu wählen, die für

Stille Zustände nur fordert, dass keine must-Outputs möglich sein dürfen. Falls dieser Zustand die Möglichkeit für eine interne Aktion via einer must-Transition hat, darf durch die  $\tau$ s niemals ein Zustand erreicht werden, von dem aus ein Output in Implementierungen sicher gestellt wird. Zusätzlich zu den in dieser Arbeit betrachteten Verklemmungen der Art Deadlock, lässt die Betrachtungsweise mit den zugelassenen  $\tau$ -must-Transitionen auch Verklemmungen der Art Livelock zu, da diese Zustände möglicherweise beliebig viele interne Aktionen ausführen können, jedoch nie aus eigener Kraft einen wirklichen Fortschritt in Form eines Outputs bewirken können müssen. Die Menge der Zustände, die sich in einer Verklemmung befinden, würde also in einer alternativen Betrachtung durch  $\{p \in P \mid \forall a \in O : p \not\Rightarrow_P^a\}$  beschrieben werden. Somit wären dies alle Zustände, die keine Möglichkeit haben ohne einen Input von Außen oder eine implementierte may-Output-Transition je wieder einen Output machen zu können. Falls man diese Definition verwenden würde, müsste man immer alle Zustände betrachten, die durch  $\tau$ s erreichbar sind. Es ist unklar, zu Konsequenzen dies führen kann. Vor allem im Bezug auf Hiding ist es schwierig, da unterschiedliche Transitionen in einem System zu unterschiedlichem Verhalten führen, obwohl sie von der Transitionsbeschriftung her nicht zu unterscheiden sind. Hierzu ist auch das Beispiel in Abbildung 4.1 zu beachten. Die Sprachen beider MEIOs sind gleich und auch die strikten stille Traces stimmen überein, da jeweils durch beliebig viele  $o$ s (mindestens eins), die von einem  $o'$  gefolgt werden eine ruhiger Zustand erreicht wird. Bei  $P$  ist dies immer möglich. Falls aber in  $Q$  die erste  $o$  Transition nach rechts ausgeführt wird, kann kein stiller Zustand mehr erreicht werden. Die MEIOs können also auf Trace-Ebenen nicht von einander unterschieden werden, jedoch können durch lokal Entscheidungen sehr verschiedenen Ergebnisse entstehen. Falls man das  $o$  durch Hiding in ein  $\tau$  umwandelt, wäre  $p_1$  sicher nicht still.  $q_{12}$  hingegen würde in der alternativen Betrachtung still werden. Die davor über die Trace-Mengen nicht unterscheidbaren Systeme würden durch Hiding dann einen Unterschied in den Trace-Mengen aufweisen.

Im nächsten Kapitel, in dem Zustände mit Divergenz betrachtet werden, heben sich die Unterschiede in den Trace-Mengen, die die beiden unterschiedlichen Ansätze hier erzeugen würden auf. Da die Zustände die eine unendliche Folge an  $\tau$ s ausführen können als divergent betrachtet werden und die Stille als nicht so schlimm angesehen wird und auf Trace-Ebene somit geflutet wird.

Ob ein stiller Zustand relevant ist für einen Transitionssystem wird wie im letzten Kapitel für die Fehler-Zustände ein optimistischer Ansatz der lokalen Erreichbarkeit verwendet. Stille ist aber keine unabwendbare „Fehler-Art“, sondern kann durch einen Input repariert werden oder im Fall von vorhandenen may-Output-Transitionen oder may- $\tau$ -Transitionen, durch eine Implementierung dieser lokalen Aktionen. Daraus ergibt sich, dass Stille im Vergleich zu den Fehlern aus dem letzten Kapitel als weniger „schlimmer Fehler“ anzusehen ist. Somit ist ein stiller Zustand ebenso wie ein Fehler-Zustand unmittelbar relevant, sobald er durch Outputs und  $\tau$ s erreicht werden kann, jedoch ist nicht jede beliebige Fortsetzung eines Traces, das durch lokale Aktionen zu einem stillen Zustand führt ein Stille-Trace.

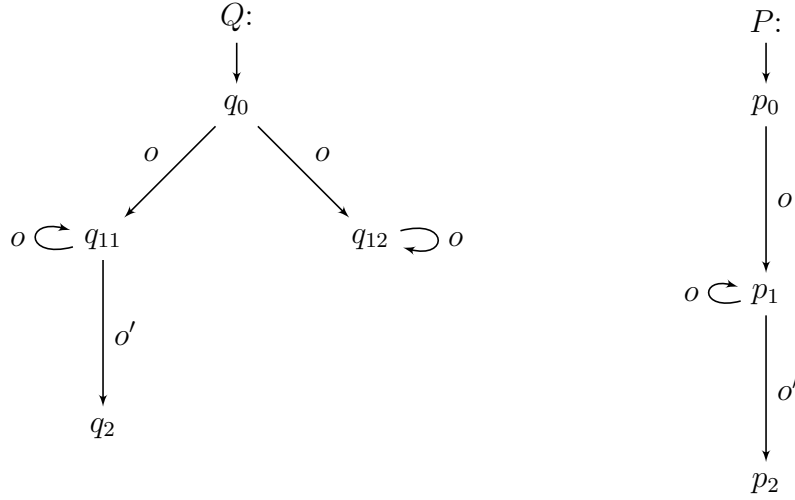


Abbildung 4.1:

**Definition 4.2 (Test und Verfeinerung für Stillstand).** Sei  $P$  ein MEIO. Ein Test  $T$  für  $P$  ist eine zu  $P$  komponierbare Implementierung.  $P$  as-erfüllt  $T$  als einen Stillstands-Test, falls  $S \parallel T$  lokal fehler- und stillstand-frei ist für alle  $S \in \text{as-impl}(P)$ . Es wird dann  $P \text{ sat}_{\text{as}}^{Qui} T$  geschrieben. Die Parallelkomposition  $S \parallel T$  ist lokal fehler- und stillstand-frei, wenn kein Fehler- und kein stiller Zustand lokal erreichbar ist. Ein MEIO  $P$  Stille-verfeinert  $P'$ , falls sie die selbe Signatur haben und für alle ihre Tests  $T$ :  $P' \text{ sat}_{\text{as}}^{Qui} T \Rightarrow P \text{ sat}_{\text{as}}^{Qui} T$ .

Um eine genauere Auseinandersetzung mit dem Fehlverhalten in unterschiedlichen Systemen zu ermöglichen, benötigt man wie im letzten Kapitel die Definition von Traces auf der Struktur. Wie bereits oben erwähnt, ist Stille ein reparierbares Fehlverhalten im Gegensatz zu Fehlern. Es genügt deshalb für Stille die strikten Traces ohne Kürzung zu betrachten.

**Definition 4.3 (Stillstands-Traces).** Sei  $P$  ein MEIO und definiere:

- strikte Stille-Traces:  $StQT(P) := \{w \in \Sigma^* \mid p_0 \xRightarrow{w}_P p \in Qui(P)\}$ .

Die Definition der strikten Stille-Traces befasst sich mit MEIOs im allgemeinen. Jedoch ist auch in diesem Kapitel der Zusammenhang mit den entsprechenden Traces der as-Implementierungen relevant.

**Proposition 4.4 (Stillstands-Traces und Implementierungen).** Für ein MEIO  $P$  gilt für die strikte Stille-Traces:  $StQT(P) \subseteq \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} StQT(P')$ .

*Beweis.* Analog zu den Propositionen 2.8 und 3.4 ist die Inklusion am Besten mit einer as-Implementierung zu zeigen und der entsprechenden as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$ .

Falls der Startzustand  $p_0$  von  $P$  ein stiller Zustand ist, muss man zwei as-Implementierungen betrachten, ansonsten genügt es eine für alle  $w$  aus  $StQT(P)$  anzugeben, wobei  $w$  möglicherweise nicht  $\varepsilon$  entsprechend darf.

Für alle  $w \neq \varepsilon$  und, mit  $w \in StQT(P)$  kann  $P'$  als die folgende as-Implementierung gewählt werden. Diese deckt auch für  $w = \varepsilon$  ab, wenn  $\varepsilon$  zu einem anderen stillen Zustand wie  $p_0$  führt.

- $P' = \{p' \mid p \in P\} \dot{\cup} \{p'' \mid p \in P\},$
- $p'_0 = p'_0,$
- $I_{P'} = I_P$  und  $O_{P'} = O_P,$
- $\longrightarrow_{P'} = \longrightarrow_{P'} = \left\{ (p'_j, \alpha, p'_k) \mid p_j \xrightarrow{\alpha} p_k \right\}$   
 $\cup \left\{ (p'_j, \alpha, p''_k) \mid p_j \xrightarrow{\alpha} p_k \right\}$   
 $\cup \left\{ (p''_j, \alpha, p''_k) \mid p_j \xrightarrow{\alpha} p_k \right\}$
- $E_{P'} = \emptyset.$

TODO: Beispiel einfügen

Als as-Verfeinerungs-Relation zwischen  $P$  und  $P'$  wird die Relation  $\mathcal{R} = \{(p'_j, p_j) \mid p_j \in P\} \cup \{(p''_j, p_j) \mid p_j \in P\}$  verwendet. Es werden in  $P'$  für die Zustände mit einem Strich  $p'$  werden die must- und may-Transitionen zu beiden „Arten“ von Zuständen implementiert und für die Zustände mit zwei Strichen  $p''$  nur die must-Transitionen zu den anderen Zuständen mit zwei Strichen. Die Zustände  $p''$  mit zwei Strich sind die potentiell ruhigen Zustände, die nur die zwingend notwendigen ausgehenden Transitionen besitzen. Die Zustände mit einem Strich  $p'$  hingegen sind die Zustände, die das gesamte erlaubte Verhalten umsetzen. Durch die Transitionen, die von den zweifach gestrichenen Zuständen zu den einfach gestrichenen führen, ist alles erlaubte möglich bis entschieden wird, nur noch das geforderte zu benötigen. Da die Menge der Fehler-Zustände leer ist, gilt 2.3.1 für  $\mathcal{R}$ . Die must-Transitionen werden für die einfach und zweifach gestrichenen Zustände umgesetzt, dies erfüllt zusammen mit  $\mathcal{R}$  die Definition 2.3.2. Ebenso wird der dritte Punkt der Definition 2.3 erfüllt, da sowohl die Zustände mit einem wie auch mit zwei Strichen mit den entsprechenden Zuständen aus  $P$  in der Relation  $\mathcal{R}$  stehen.  $\mathcal{R}$  ist also eine starke alternierende Simulations-Relation zwischen  $P'$  und  $P$ .

Falls ein Zustand  $p_j$  in  $P$  still ist, ist es auch der entsprechenden Zustand  $p''_j$  in  $P'$ , da für  $p''_j$  alle ausgehenden must-Transitionen von  $p''_j$  implementiert wurden, aber keine einzige may-Transition, die keiner der must-Transitionen entspricht. Wenn also für  $p_j$  keine Outputs und kein  $\tau$  möglich waren via must-Transitionen, dann ist es dies auch für  $p''_j$  nicht.  $p''_j$  ist in  $P'$  mit den selben Traces erreichbar wie  $p_j$  in  $P$ , da jeder Zustand in  $P'$  die selben eingehenden Transitionen hat wie der entsprechende Zustand in Relation  $\mathcal{R}$  stehende Zustand aus  $P$ . Von  $p'_0$  aus kann der Trace, der in  $P$  zu einem stillen Zustand  $p_j$ , in  $P'$  nachgemacht werden über die einfach gestrichenen Zustände. Die letzte Transition des Ablaufes muss dann zum Zustand  $p''_j$  genommen werden. Es gilt also  $StQT(P) \setminus \{\varepsilon\} = StQT(P') \setminus \{\varepsilon\}$ . Falls  $\varepsilon$  zu einem stillen Zustand  $p \neq p_0$  in  $P$

geführt hat, gilt sogar  $StQT(P) = StQT(P')$ , da ein Trace aus internen Aktionen in  $P$  und  $P'$  zu dem entsprechenden stillen Zustand  $p$  bzw.  $p''$  führt.

Die oben aufgeführte as-Implementierung und die as-Verfeinerungs-Relation lassen sich für fast alle Traces aus  $StQT$  einsetzen und zu zeigen, dass es diese auch in der Vereinigung dieser Traces aller as-Implementierungen gibt. Jedoch gibt es ein Problem, wenn der Trace in  $StQT(P)$  keine Transition in  $P$  ausführen muss, um den stillen Zustand zu erreichen. Für diesen Fall muss eine andere as-Implementierung mit einer entsprechend angepassten as-Verfeinerungs-Relation verwendet werden. Die as-Implementierung  $P'$  für den Fall, dass der Startzustand  $p_0$  in der Zustandsmenge  $Qui(P)$  enthalten ist, implementiert alle must-Transitionen, keine may-Transitionen und keine Fehler-Zustände von  $P$  und hat die Identitäts-Relation als starke as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$ . In diesem Fall gilt  $\varepsilon \in StQT(P)$ . Für alle  $a \in \Sigma$  folgt, wenn in  $P$  für einen Zustand  $p$   $p \xrightarrow{a} p'$ , gilt auch in  $P'$   $p \xrightarrow{a} p'$  für den Zustand, der mit  $p$  in Relation steht. Der Startzustand von  $P'$  ist mit  $\varepsilon$  erreichbar und ebenfalls still. Es gilt also  $p_0 \in Qui(P')$  für den Startzustand von  $P'$  und  $\varepsilon \in StQT(P')$ . Der 2. Punkt der Definition 2.3 ist für die Identitäts-Relation als as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$  erfüllt, da alle must-Transitionen aus  $P$  entsprechend in  $P'$  umgesetzt wurden. Alle must-Transitionen in  $P$  müssen zugrundeliegende may-Transitionen haben, somit gilt auch 3. von 2.3. Der 1. Punkt der Definition ist auch erfüllt, da  $E_{P'} = \emptyset$  gilt, wenn keine Fehler-Zustände implementiert werden.  $\square$

Man hätte anstatt des hier verwendeten  $P'$  mit zwei Arten von Zuständen auch den Ansatz des ausrollens für jeden Trace analog zu Proposition 3.4.3 anwenden können. Es wäre auch möglich die Inklusion der Input-kritischen Traces aus Proposition 3.4.3 mit dem  $P'$  aus dem Beweis der Proposition 4.4 zu begründen.

Für  $ET$  und  $EL$  gelten die Definitionen aus dem letzten Kapitel. Es wird nur für Stille eine neue Semantik definiert.

**Definition 4.5 (Stillstands-Semantik).** Sei  $P$  ein MEIO.

- Die Menge der fehler-gefluteten Stille-Traces von  $P$  ist  $QET(P) := StQT(P) \cup ET(P)$ .

Für zwei MEIOs  $P_1, P_2$  mit der gleichen Signatur wird  $P_1 \sqsubseteq_{Qui} P_2$  geschrieben, wenn  $P_1 \sqsubseteq_E P_2$  und  $QET_1 \subseteq QET_2$  gilt.

**Proposition 4.6 (Stillstands-Semantik und Implementierungen).** Für die Menge der fehler-gefluteten Stille-Traces von  $P$  gilt  $QET(P) = \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} QET(P')$ .

*Beweis.*

„ $\subseteq$ “:

$$\begin{aligned}
 QET(P) &\stackrel{4.5}{=} StQT(P) \cup ET(P) \\
 &\stackrel{4.4}{\subseteq} \left( \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} StET(P') \right) \cup ET(P) \\
 &\stackrel{3.8}{=} \left( \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} StET(P') \right) \cup \left( \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} ET(P') \right) \\
 &= \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} StQT(P') \cup ET(P') \\
 &\stackrel{4.5}{=} \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} QET(P').
 \end{aligned}$$

„ $\supseteq$ “:

Es wird hier für ein  $w \in QET(P')$  einer beliebigen as-Implementierung  $P'$  von  $P$  gezeigt, dass das Wort  $w$  auch in  $QET(P)$  enthalten ist. Es kann danach unterschieden werden, ob  $w$  aus  $StQT(P') \setminus ET(P')$  stammt oder aus  $ET(P')$ . Falls  $w \in ET(P')$  gilt, folgt mit Proposition 3.8 bereits, dass  $w \in ET(P) \subseteq QET(P)$  gilt. Somit wird für den Rest des Beweises davon ausgegangen, dass  $w \in StQT(P') \setminus ET(P')$  ist.  $w$  führt in  $P'$  also nur zu einem stillen Zustand und hat nichts mit Fehler-Zuständen in  $P'$  zu tun. Der Trace, der durch  $w$  in  $P'$  beschrieben wird, hat die folgende Form aus Lemma 3.7. Da  $P'$  eine as-Verfeinerung von  $P$  ist, gibt es auch eine as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$ , die zwischen den beiden MEIOs gilt. In  $P$  führt entweder ein Präfix von  $w$  zu einem Fehler-Zustand oder  $w$  ist in  $P$  zu einem Zustand ausführbar, für den  $p'_n \mathcal{R} p_n$  gilt, wegen 3.7. Falls ein Präfix von  $w$  zu einem Fehler-Zustand führt, gilt  $w \in ET_P \subseteq QET_P$ . Andernfalls wird also durch  $w$  ein Zustand  $p_n$  erreicht, der mit dem Zustand  $p'_n$  in der starken as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$  stehen.  $p'_n$  ist still, nach Voraussetzung. Es gilt also für alle  $\omega \in O \cup \{\tau\}$   $p'_n \xrightarrow{\omega}$ . Da  $(p'_n, p_n) \in \mathcal{R}$  gilt und beide Zustände keine Fehler-Zustände sind, muss auch  $p_n \xrightarrow{\omega}$  für alle  $\omega \in O \cup \{\tau\}$  gelten, da sonst 2.3.2 verletzt würde. Es gilt also in diesem Fall  $w \in StQT(P) \subseteq QET(P)$ .  $\square$

Wie im letzten Kapitel kann aus der vorangegangenen Proposition über die Gleichheit der betrachteten Trace Mengen in der Relation  $\sqsubseteq_{Qui}$  auch eine Aussage über die lokale Erreichbarkeit „fehlerhafter Zustände“ in einer Spezifikation und den zugehörigen Implementierungen getroffen werden.

**Korollar 4.7 (lokale Stillstands Erreichbarkeit).**

- (i) Falls in einem MEIO  $P$  ein Fehler lokal erreichbar ist, dann existiert auch eine as-Implementierung, in der ein Fehler lokal erreichbar ist.

- (ii) Falls ein MEIO  $P$  einen lokal erreichbaren stillen Zustand besitzt, dann existiert auch eine as-Implementierung, in der ein stiller Zustand lokal erreichbar ist.
- (iii) Falls es eine as-Implementierung von  $P$  gibt, die einen Fehler oder Stille lokal erreicht, dann ist auch ein Fehler oder Stille in  $P$  lokal erreichbar.

*Beweis.*

- (i) Dieser Punkt folgt direkt aus Korollar 3.9 (i).
- (ii) Da ein stiller Zustand in  $P$  lokal erreichbar ist, gilt  $w \in StQT_P$  für  $w \in O$ . Es muss wegen Proposition 4.4 mindestens ein  $P' \in \text{as-impl}(P)$  geben, für dass  $w \in StQT_{P'}$  gilt. Da  $w$  nur aus lokalen Aktion bestehen kann, ist auch in  $P'$  ein stiller Zustand lokal erreichbar.
- (iii) Sei  $P'$  die as-Implementierung von  $P$ , in der ein Fehler- oder stiller Zustand lokal erreichbar ist. Es gilt dann  $w \in QET_{P'}$  für  $w \in O$ . Mit Proposition 4.6 folgt draus  $w \in QET_P$ . Es muss also auch in  $P$  ein Fehler- oder stiller Zustand lokal erreichbar sein.

□

Für spätere Beweise werden noch Zusammenhänge zwischen Stille-Zuständen in den einzelnen Komponenten und in einer Parallelkomposition dieses Komponenten benötigt.

**Lemma 4.8 (*Stillstands-Zustände unter Parallelkomposition*).**

1. Ein Zustand  $(p_1, p_2)$  aus der Parallelkomposition  $P_{12}$  ist still, wenn es auch die Zustände  $p_1$  und  $p_2$  in  $P_1$  bzw.  $P_2$  sind.
2. Wenn der Zustand  $(p_1, p_2)$  still ist und nicht in  $E_{12}$  enthalten ist, dann sind auch die auf die Teilsysteme projizierten Zustände  $p_1$  und  $p_2$  still.

*Beweis.*

1. Da  $p_1 \in Qui_1$  und  $p_2 \in Qui_2$  gilt, haben diese beiden Zustände jeweils höchstens die Möglichkeit für Input-Transitionen oder Output- und  $\tau$ -may-Transitionen, jedoch keine Möglichkeit für Outputs oder  $\tau$ s als must-Transitionen.  
Angenommen der Zustand, der durch die Parallelkomposition aus den Zuständen  $p_1$  und  $p_2$  entsteht, ist nicht still, d.h. er hat eine ausgehende must-Transition für einen Output oder ein  $\tau$ .
  - Fall 1  $((p_1, p_2) \xrightarrow{\tau}_{12})$ : Ein  $\tau$  ist eine interne Aktion und kann in der Parallelkomposition nicht durch das Verbergen von Aktionen bei der Synchronisation entstehen. Ein  $\tau$  in der Parallelkomposition ist also auch nur möglich, wenn dies bereits als must-Transition in einer Komponente möglich war für einen

der Zustände, aus denen  $(p_1, p_2)$  zusammensetzt ist. Jedoch verbietet die Voraussetzung, dass  $p_1$  oder  $p_2$  eine ausgehende  $\tau$ -must-Transition haben, deshalb kann auch  $(p_1, p_2)$  keine solche Transition besitzen.

- Fall 2  $((p_1, p_2) \xrightarrow{a}_{12} \text{ mit } a \in O_{12} \setminus \text{Synch}(P_1, P_2))$ : Da es sich bei  $a$  um einen Output handelt, der nicht in  $\text{Synch}(P_1, P_2)$  enthalten ist, kann dieser nicht aus der Synchronisation von zwei Aktionen entstanden sein, sondern muss bereits für  $P_1$  oder  $P_2$  als must-Transition ausführbar gewesen sein. Es gilt also oBdA  $p_1 \xrightarrow{a}_1$  mit  $a \in O_1$ . Dies ist jedoch aufgrund der Voraussetzung nicht möglich. Somit kann die Parallelkomposition diese Transition für  $(p_1, p_2)$  ebenfalls nicht als must-Transition enthalten sein.
- Fall 3  $((p_1, p_2) \xrightarrow{a}_{12} \text{ mit } a \in O_{12} \cap \text{Synch}(P_1, P_2))$ : Der Output  $a$  ist in diesem Fall durch Synchronisation von einem Output mit einem Input entstanden. OBdA gilt  $a \in O_1 \cap I_2$ . Für die einzelnen Systeme muss also gelten, dass  $p_1 \xrightarrow{a}_1$  und  $p_2 \xrightarrow{a}_2$ . Die Transition für das System  $P_1$  ist jedoch in der Voraussetzung ausgeschlossen worden. Somit ist es nicht möglich, dass  $P_{12}$  diese in diesem Fall angenommene must-Transition für den Zustand  $(p_1, p_2)$  ausführen kann.

Da alle diese Fälle zu einem Widerspruch mit der Voraussetzung führen folgt, dass bereits die Annahme, dass der Zustand  $(p_1, p_2)$  nicht still ist, falsch war. Es gilt also, dass aus  $p_j \in \text{Qui}_j$  für  $j \in \{1, 2\}$   $(p_1, p_2) \in \text{Qui}_{12}$  folgt.

2. Es gilt  $(p_1, p_2) \in \text{Qui}_{12} \setminus E_{12}$ , somit hat dieser Zustand allenfalls die Möglichkeit für must-Transitionen, die mit Inputs beschriftet sind.  
Angenommen  $p_1 \notin \text{Qui}_1$ , dann ist für  $p_1$  entweder eine  $\tau$ -must-Transition oder eine Output-must-Transition möglich.

- Fall 1  $(p_1 \xrightarrow{\tau}_1)$ : Da die Transition für  $p_1$  möglich ist, hat auch  $(p_1, p_2)$  die Möglichkeit für eine  $\tau$ -must-Transition. Dies ist jedoch durch die Voraussetzung verboten und somit kann dieser Fall nicht eintreten.
- Fall 2  $(p_1 \xrightarrow{a}_1 \text{ mit } a \in O_1 \setminus \text{Synch}(P_1, P_2))$ : Dieser Fall kann wegen einer analogen Begründung wie in Fall 1 nicht auftreten.
- Fall 3  $(p_1 \xrightarrow{a}_1 \text{ mit } a \in O_1 \cap \text{Synch}(P_1, P_2) \text{ und } p_2 \xrightarrow{a}_2)$ : In diesem Fall ist die Synchronisation des Outputs  $a$  von  $P_1$  mit dem Input  $a$  von  $P_2$  möglich, so dass in der Parallelkomposition der Output  $a$  als must-Transition für  $(p_1, p_2)$  entsteht. Diese must-Transition ist jedoch in  $P_{12}$  nach Voraussetzung nicht erlaubt. Es folgt also auch, dass dieser Fall nicht eintreten kann.
- Fall 4  $(p_1 \xrightarrow{a}_1 \text{ mit } a \in O_1 \cap \text{Synch}(P_1, P_2) \text{ und } p_2 \not\xrightarrow{a}_2)$ : Da  $P_2$  die  $a$  Transition nicht als must-Transition enthält, handelt es sich hier um einen neuen Fehler. Das  $a$  kann für  $P_2$  kein Output sein, da sonst  $P_1$  und  $P_2$  nicht komponierbar wäre. Der neue Fehler kann dadurch entstehen, dass die Synchronisation des Outputs  $a$  von  $P_1$  mit dem Input  $a$  von  $P_2$  an dieser Stelle



nicht möglich ist, oder da der Input  $a$  für  $p_2$  nur als may-Transition vorliegt und somit die Gefahr besteht, dass dieser in einer Implementierung nicht vorhanden ist. Im zweiten Fall synchronisieren die beiden Transitionen zu einer  $a$  Output-may-Transition, die in  $P_{12}$  zulässig wäre. Jedoch wird der Zustand  $(p_1, p_2)$  in beiden Fällen in die Menge  $E_{12}$  der Parallelkomposition eingefügt (Definition 2.2). Dies wurde in der Voraussetzung für den Zustand ausgeschlossen und dieser Fall ist somit nicht möglich.

Alle aufgeführten Fälle führen zu einem Widerspruch mit der Voraussetzung, somit folgt, dass die Annahme bereits falsch war und  $p_1 \in Qui_1$  gelten muss. Analog kann für  $p_2$  argumentiert werden, so dass dann auch  $p_2 \in Qui_2$  folgt.

□

In dem folgenden Satz sind die Punkte 1. und 3. nur zur Vollständigkeit aufgeführt. Sie entsprechen Punkt 1. und 2. aus Satz 3.10.

**Satz 4.9 (Kommunikationsfehler- und Stillstands-Semantik für Parallelkompositionen).** Für zwei komponierbare MEIOs  $P_1, P_2$  und ihre Komposition  $P_{12}$  gilt:

1.  $ET_{12} = \text{cont}(\text{prune}((ET_1 \parallel EL_2) \cup (EL_1 \parallel ET_2)))$ ,
2.  $QET_{12} = (QET_1 \parallel QET_2) \cup ET_{12}$ ,
3.  $EL_{12} = (EL_1 \parallel EL_2) \cup ET_{12}$ .

*Beweis.* Es wird nur der 2. Punkt beweisen.

„ $\subseteq$ “:

Hier muss unterschieden werden, ob ein  $w \in StQT_{12} \setminus ET_{12}$  oder ein  $w \in ET_{12}$  betrachtet wird. Im zweiten Fall ist das  $w$  offensichtlich in der rechten Seite enthalten. Somit wird im Folgenden ein  $w \in StQT_{12} \setminus ET_{12}$  betrachtet und es wird dessen Zugehörigkeit zur rechten Menge gezeigt. Aufgrund von Definition 4.3 weiß man, dass  $(p_{01}, p_{02}) \xRightarrow{w}_{12} (p_1, p_2)$  gilt mit  $(p_1, p_2) \in Qui_{12} \setminus E_{12}$ . Durch Projektion erhält man  $p_{01} \xRightarrow{w_1}_1 p_1$  und  $p_{02} \xRightarrow{w_2}_2 p_2$  mit  $w \in w_1 \parallel w_2$ . Aus  $(p_1, p_2) \in Qui_{12} \setminus E_{12}$  kann mit dem zweiten Punkt von Lemma 4.8 gefolgert werden, dass  $q_1 \in Qui_1$  und  $q_2 \in Qui_2$  gilt. Somit gilt  $w_1 \in StQT_1 \subseteq QET_1$  und  $w_2 \in StQT_2 \subseteq QET_2$ . Daraus folgt  $w \in QET_1 \parallel QET_2$  und somit ist  $w$  in der rechten Seite der Gleichung enthalten.

„ $\supseteq$ “:

Es muss wieder danach unterschieden werden aus welcher Menge das betrachtete Element stammt. Falls  $w \in ET_{12}$  gilt, so kann die Zugehörigkeit zur linken Seite direkt gefolgert werden. Somit wird für den weiteren Beweis dieser Inklusionsrichtung ein Element  $w \in QET_1 \parallel QET_2$  betrachtet und gezeigt, dass es in der linken Menge enthalten ist. Da  $QET_i = StQT_i \cup ET_i$  gilt, existieren für  $w_1$  und  $w_2$  mit  $w \in w_1 \parallel w_2$  unterschiedliche Möglichkeiten:

- Fall 1 ( $w_1 \in ET_1 \vee w_2 \in ET_2$ ): OBdA gilt  $w_1 \in ET_1$ . Nun kann  $w_2 \in StQT_2 \subseteq L_2$  oder  $w_2 \in ET_2$  gelten und somit ist auf jeden Fall  $w_2$  in  $EL_2$  enthalten. Daraus kann dann mit dem ersten Punkt von Satz 3.10 gefolgert werden, dass  $w \in ET_{12}$  gilt und damit ist  $w$  in der linken Seite der Gleichung enthalten.
- Fall 2 ( $w_1 \in StQT_1 \setminus ET_1 \wedge w_2 \in StQT_2 \setminus ET_2$ ): Es gilt in diesem Fall  $p_{01} \xRightarrow{w_1}_1 p_1 \in Qui_1$  und  $p_{02} \xRightarrow{w_2}_2 p_2 \in Qui_2$ . Da  $p_1$  und  $p_2$  in der jeweiligen Stillstands-Menge enthalten sind, ist auch der Zustand, der aus ihnen zusammengesetzt ist, in der Parallelkomposition still, wie bereits im ersten Punkt von Lemma 4.8 gezeigt. Es gilt also für die Komposition  $(p_{01}, p_{02}) \xRightarrow{w}_{12} (p_1, p_2) \in Qui_{12}$  und dadurch ist  $w$  in der linken Seite der Gleichung enthalten, da  $w \in StQT_{12} \subseteq QET_{12}$  gilt.

□

Aus diesem Satz kann direkt gefolgert werden, dass  $\sqsubseteq_{Qui}$  eine Präkongruenz ist. Den Beweis dazu liefert das folgende Korollar.

**Korollar 4.10 (Stillstands-Präkongruenz).** *Die Relation  $\sqsubseteq_{Qui}$  ist eine Präkongruenz bezüglich  $\cdot\|\cdot$ .*

*Beweis.* Es muss gezeigt werden: Wenn  $P_1 \sqsubseteq_{Qui} P_2$  für zwei MEIOs  $P_1$  und  $P_2$  gilt, so auch  $P_{31} \sqsubseteq_{Qui} P_{32}$  für jedes alle komponierbare Systeme  $P_3$ . D.h. es ist zu zeigen, dass aus  $P_1 \sqsubseteq_E P_2$  und  $QET_1 \subseteq QET_2$  sowohl  $P_{31} \sqsubseteq_E P_{32}$  als auch  $QET_{31} \subseteq QET_{32}$  folgt, wegen der Definition von  $\sqsubseteq_{Qui}$  in 4.5. Dies ergibt sich, wie im Beweis zu Korollar 3.11, aus der Monotonie von  $\cdot\|\cdot$  auf Sprachen wie folgt:

- $P_{31} \xrightarrow[\substack{\text{Korollar 3.11} \\ \text{und} \\ P_1 \sqsubseteq_E P_2}]{\substack{\sqsubseteq_E \\ \sqsubseteq_E}} P_{32},$
- $QET_{31} \xrightarrow[\substack{ET_{31} \subseteq ET_{32} \\ \text{und} \\ QET_1 \subseteq QET_2}]{\substack{4.9.2 \\ \sqsubseteq}} (QET_3 \|\ QET_1) \cup ET_{31} \xrightarrow[\substack{\sqsubseteq}]{\substack{4.9.2}} QET_{32}.$

□

Im nächsten Lemma soll eine Verfeinerung bezüglich guter Kommunikation mit Partnern betrachtet werden. Die gute Kommunikation stützt sich dabei auf die Definition von Tests und der daraus resultierenden Verfeinerung in 4.2.

**Lemma 4.11 (Testing-Verfeinerung mit Stillstand).** *Gegeben sind zwei MEIOs  $P_1$  und  $P_2$  mit der gleichen Signatur. Wenn für alle Tests  $T$ , die Partner von  $P_1$  bzw.  $P_2$  sind,  $P_2 \text{ sat}_{as}^{Qui} T \Rightarrow P_1 \text{ sat}_{as}^{Qui} T$  gilt, dann folgt daraus die Gültigkeit von  $P_1 \sqsubseteq_{Qui} P_2$ .*

*Beweis.* Da  $P_1$  und  $P_2$  die gleiche Signatur haben, wird  $I := I_1 = I_2$  und  $O := O_1 = O_2$  definiert. Für jeden Test Partner  $T$  gilt  $I_T = O$  und  $O_T = I$ .

Um zu zeigen, dass die Relation  $P_1 \sqsubseteq_{Qui} P_2$  gilt, müssen die folgenden Punkte nachgewiesen werden:

- $P_1 \sqsubseteq_E P_2$ ,
- $QET_1 \subseteq QET_2$ .

In Lemma 3.16 wurde bereits etwas Ähnliches gezeigt, jedoch wurde dort als Voraussetzung  $P_2 \text{sat}_{\text{as}}^E T \Rightarrow P_1 \text{sat}_{\text{as}}^E T$  für alle Test Partner  $T$  verwendet und hier dieselbe Aussage mit der Test Erfüllung für Stillstand. Die hier verwendeten Tests sagen nichts darüber aus, welche Art von fehlerhaftem Zustand enthalten ist. Die Aussage des Lemmas 3.16 kann hier also nicht verwendet werden. Aus der lokalen Erreichbarkeit eines Fehler-Zustandes in der Parallelkomposition einer as-Implementierung von  $P_1$  mit  $T$  lässt sich nur schließen, dass  $P_2$  den Test  $T$  ebenfalls nicht as-erfüllt. Dies kann aber aufgrund einer as-Implementierung von  $P_2$  sein, die in Parallelkomposition mit  $T$  einen Fehler- oder stillen Zustand lokal erreicht. Analoges gilt auch für die lokale Erreichbarkeit eines stillen Zustandes in der Komposition einer as-Implementierung von  $P_1$  mit einem Test  $T$ .

Es muss also für den ersten Punkt noch folgendes nachgewiesen werden:

- $ET_1 \subseteq ET_2$ ,
- $EL_1 \subseteq EL_2$ .

Es wird nun damit begonnen, den ersten Unterpunkt des ersten Beweispunktes zu zeigen, d.h. es wird unter der Voraussetzung  $P_2 \text{sat}_{\text{as}}^{Qui} T \Rightarrow P_1 \text{sat}_{\text{as}}^{Qui} T$  gezeigt, dass  $ET_1 \subseteq ET_2$  gilt. Da beide  $ET$ -Mengen unter  $\text{cont}$  abgeschlossen sind, reicht es ein präfix-minimales Element  $w \in ET_1$  zu betrachten und zu zeigen, dass dieses  $w$  oder eines seiner Präfixe in  $ET_2$  enthalten ist.  $w$  muss, wegen Proposition 3.8, in einer as-Implementierung  $P'_1$  von  $P_1$  ebenfalls ein präfix-minimales Element in  $ET_{P'_1}$  sein.

- Fall 1 ( $w = \varepsilon$ ): Es handelt sich um einen lokal erreichbaren Fehler-Zustand in  $P'_1$ . Für  $T$  wird ein Transitionssystem verwendet, das nur aus dem Startzustand, einer must-Schleife für alle Inputs  $x \in I_T$  und einer must-Schlinge für  $\tau$  besteht. Somit kann  $P'_1$  die im Prinzip gleichen Fehler-Zustände lokal erreichen wie  $P'_1 \parallel T$ . Es gibt also einen lokal erreichbaren Zustand von  $P'_1 \parallel T$ , der in  $E_{P'_1 \parallel T}$  enthalten ist. Somit erfüllt  $P_1$  den Tests  $T$  nicht und es muss somit auch mindestens eine as-Implementierung  $P'_2$  von  $P_2$  geben, die den Test  $T$  ebenfalls nicht erfüllt. Da eine Implementierung den Test  $T$  erfüllt, wenn die Parallelkomposition der Implementierung mit dem Test fehler- und stillstand-frei ist, kann die nicht Erfüllung eines Testes sowohl an einem Fehler- wie auch einem stillen Zustand liegen. Bei dem lokal erreichbaren fehlerhaften Zustand kann es sich nur um einen Fehler handeln, da es wegen der  $\tau$ -Schlinge in der Komposition mit  $T$  keine Stille geben kann. Da  $T$  keinen Fehler-Zustand und auch keine fehlenden Input-Möglichkeiten enthält, kann der Fehler nur von  $P'_2$  geerbt sein. Somit muss in  $P'_2$  ein Fehler-Zustand lokal

erreichbar sein. Es gilt also  $\varepsilon \in PrET_{P'_2} \subseteq ET_{P'_2}$  und mit Proposition 3.8 auch  $\varepsilon \in ET_2$ .

- Fall 2 ( $w = x_1 \dots x_n x_{n+1} \in \Sigma^+$  mit  $n \geq 0$  und  $x_{n+1} \in I$ ): Es wird der folgende Partner  $T$  betrachtet (siehe auch Abbildung 4.2):

- $T = \{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}\}$ ,
- $p_0 T = p_0$ ,
- $\dashrightarrow_T = \rightarrow_T = \{(p_j, x_{j+1}, p_{j+1}) \mid 0 \leq j \leq n\}$   
 $\cup \{(p_j, x, p_{n+1}) \mid x \in I_T \setminus \{x_{j+1}\}, 0 \leq j \leq n\}$   
 $\cup \{(p_{n+1}, x, p_{n+1}) \mid x \in I_T\}$   
 $\cup \{(p_j, \tau, p_j) \mid 0 \leq j \leq n+1\}$ ,
- $E_T = \emptyset$ .

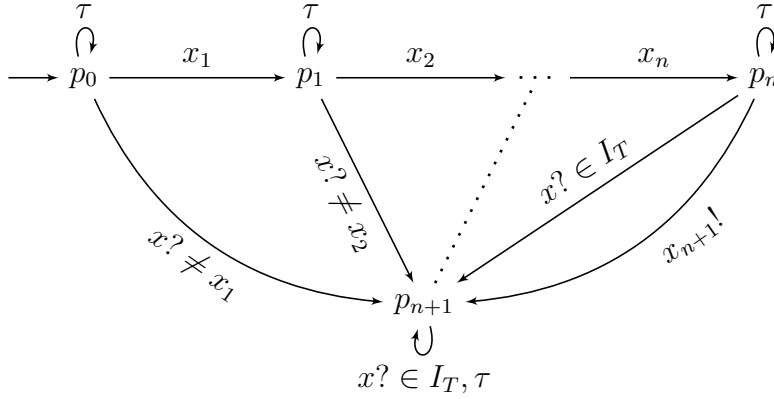


Abbildung 4.2:  $x? \neq x_j$  steht für alle  $x \in I_T \setminus \{x_j\}$

Die Menge der stillen Zustände des hier betrachteten  $T$ s ist leer. Da im Vergleich zum Transitionssystem in Abbildung 3.1 nur die  $\tau$ -Schlingen ergänzt wurden und die Umbenennung der Mengen, ändert sich nichts an den Fällen 2a) und 2b) aus dem Beweis der selben Inklusion von Lemma 3.16. Die Begründungen, wieso in den beiden Fällen  $\varepsilon \in PrET(P'_1 \parallel T)$  gilt, bleibt also analog zum Beweis des ersten Punktes des Lemmas aus dem vorangegangenen Kapitel. Durch die must- $\tau$ -Schlingen wurde, genau wie im letzten Fall nur erreicht, das in einer Parallelkomposition mit  $T$  keine stillen Zustände möglich sind. Es kann also auch hier aus der lokalen Erreichbarkeit eines Fehler in  $P'_1 \parallel T$  auf die lokale Erreichbarkeit eines Fehler-Zustandes in  $P'_2 \parallel T$  für eine as-Implementierung  $P'_2$  von  $P_2$  geschlossen werden. Die weitere Argumentation verläuft analog zu Fall 2, derselben Inklusion im Beweis von Lemma 3.16. Da  $\tau$ s nur interne Aktionen einer einzelnen Komponente sind, verändert sich auch nichts an den Traces über die argumentiert wird. Es können zwar möglicherweise  $\tau$ -Transitionen ausgeführt werden, diese können

jedoch weder zu einem Fehler führen noch beeinflussen, dass ein anderer Trace nicht ausgeführt werden kann.

Nun wird mit dem zweiten Unterpunkt des ersten Beweispunktes begonnen. Genau wie im Beweis zu 3.16 ist hier jedoch aufgrund des bereits geführten Beweisteils nur noch  $L_1 \setminus ET_1 \subseteq EL_2$  zu zeigen. Es wird also für ein beliebig gewähltes  $w \in L_1 \setminus ET_1$  gezeigt, dass dieses auch in  $EL_2$  enthalten ist. Aufgrund der Propositionen 2.8 und 3.8 gibt es auch eine as-Implementierung  $P'_1$  von  $P_1$  für die  $w \in L_{P'_1} \setminus ET_{P'_1}$  gilt.

- Fall 1 ( $w = \varepsilon$ ): Ebenso wie in 3.16 gilt auch hier, dass  $\varepsilon$  immer in  $EL_2$  enthalten ist.
- Fall 2 ( $w = x_1 \dots x_n$  mit  $n \geq 1$ ): Die Konstruktion des Partners  $T$  weicht wie im letzten Beweisteil nur durch die  $\tau$ -must-Schleifen an den Zuständen des Transitionssystems vom Beweis des zweiten Punktes aus Lemma 3.16 ab. Somit ist der Partner  $T$  dann wie folgt definiert (siehe dazu auch Abbildung 4.3):

- $T = \{p_0, p_1, \dots, p_n, p\}$ ,
- $p_{0T} = p_0$ ,
- $\rightarrow_T = \{(p_j, x_{j+1}, p_{j+1}) \mid 0 \leq j < n\}$   
 $\cup \{(p_j, x, p) \mid x \in I_T \setminus \{x_{j+1}\}, 0 \leq j < n\}$   
 $\cup \{(p_j, \tau, p_j) \mid 0 \leq j \leq n\}$   
 $\cup \{(p, \alpha, p) \mid \alpha \in I_T \cup \{\tau\}\},$
- $E_T = \{p_n\}$ .

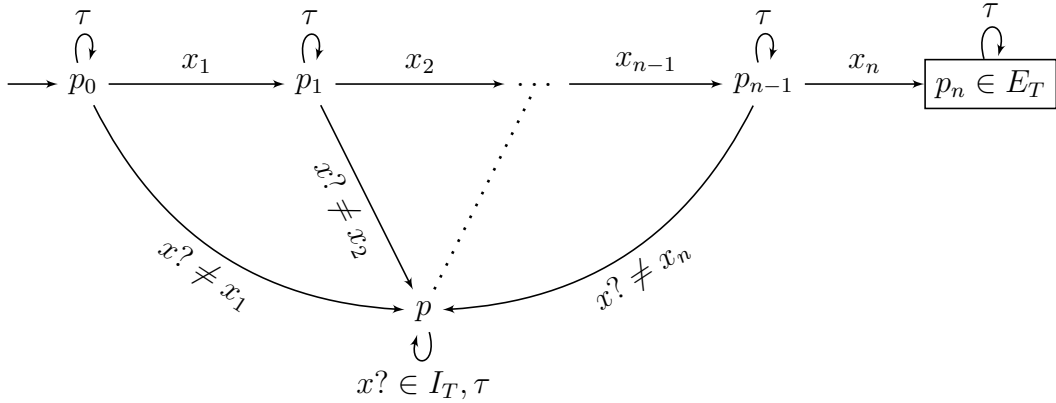


Abbildung 4.3:  $x? \neq x_j$  steht für alle  $x \in I_T \setminus \{x_j\}$ ,  $p_n$  ist der einzige Fehler-Zustand

Da durch die  $\tau$ -must-Schlingen an den Zuständen wie oben vermieden wird, dass es in einer Komposition mit  $T$  und auch in  $T$  selbst stille Zustände gibt, verläuft der Rest des Beweises dieses Punktes analog zum Beweis der selben Inklusion von Lemma 3.16. Und somit gilt für alle Fälle (2a) bis 2d)), dass  $w$  in  $EL_2$  enthalten ist.

So bleibt nur noch der letzte Beweispunkt zu zeigen, d.h. die Inklusion  $QET_1 \subseteq QET_2$ . Diese kann jedoch, analog zum Beweis der Inklusion der Fehler-gefluteten Sprache, noch weiter eingeschränkt werden. Da bereits bekannt ist, dass  $ET_1 \subseteq ET_2$  gilt, muss nur noch  $StQT_1 \setminus ET_1 \subseteq QET_2$  gezeigt werden.

Es wird ein  $w \in StQT_1 \setminus ET_1$  gewählt und gezeigt, dass dieses auch in  $QET_2$  enthalten ist. Mit den Propositionen 3.8 und 4.4 kann gefolgert werden, dass es auch eine as-Implementierung  $P'_1$  von  $P_1$  gibt, für die  $w \in StQT_{P'_1} \setminus ET_{P'_1}$  gilt.

Durch die Wahl des  $w$ s wird vom Startzustand von  $P'_1$  durch das Wort  $w$  ein stiller Zustand erreichbar. Dies hat nur Auswirkungen auf die Parallelkomposition  $P'_1 \parallel T$ , wenn in  $T$  ebenfalls ein stiller Zustand durch  $w$  erreichbar ist.

Das betrachtete  $w$  hat also die Form  $w = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$  mit  $n \geq 0$ . Es wird der folgende Partner  $T$  betrachtet (siehe auch Abbildung 4.4):

- $T = \{p_0, p_1, \dots, p_n, p\}$ ,
- $p_{0T} = p_0$ ,
- $\rightarrow_T = \{(p_j, x_{j+1}, p_{j+1}) \mid 0 \leq j < n\}$   
 $\cup \{(p_j, x, p) \mid x \in I_T \setminus \{x_{j+1}\}, 0 \leq j < n\}$   
 $\cup \{(p_j, \tau, p_j) \mid 0 \leq j < n\}$   
 $\cup \{(p_n, x, p) \mid x \in I_T\}$   
 $\cup \{(p, \alpha, p) \mid \alpha \in I_T \cup \{\tau\}\},$
- $E_T = \emptyset$ .

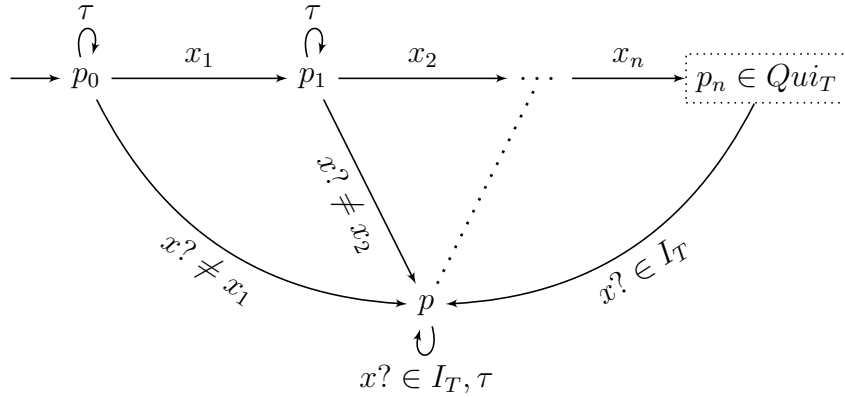


Abbildung 4.4:  $x? \neq x_j$  steht für alle  $x \in I_T \setminus \{x_j\}$ ,  $p_n$  ist der einzige stille Zustand

Falls für das betrachtete  $w = \varepsilon$  gilt, reduziert sich der Partner  $T$  auf den Zustand  $p_n = p_0$  und den Zustand  $p$ . Es ist also in diesem Fall der Startzustand gleich dem stillen Zustand.

Allgemein ist der Zustand  $p_n$  aus  $T$  der einzig stille Zustand in  $T$ . Es gilt wegen des ersten Punktes von Lemma 4.8, dass auch in der Parallelkomposition  $P'_1 \parallel T$  ein stiller Zustand mit  $w$  erreicht wird. Bei allen in  $w$  befindlichen Aktionen handelt es sich um

synchronisierte Aktionen und es gilt  $I_T \cap I = \emptyset$ . Daraus folgt  $w \in O_{P'_1 \parallel T}$  und  $w \in StQT(P'_1 \parallel T)$ . Es kann also in der Parallelkomposition durch  $w$  ein stiller Zustand lokal erreicht werden. Da ein stiller Zustand in  $P'_1 \parallel T$  lokal erreichbar ist, muss auch in  $P'_2 \parallel T$  für eine as-Implementierung  $P'_2$  von  $P_2$  ein fehlerhafter Zustand lokal erreichbar sein. Es kann zunächst keine Aussage getroffen werden, ob das  $w$  in  $P'_2 \parallel T$  ausführbar ist und ob es sich bei dem fehlerhaften Zustand um Stille oder einen Fehler handelt.

- Fall a) ( $\varepsilon \in ET(P'_2 \parallel T)$ ): Es handelt sich bei dem lokal erreichbaren fehlerhaften Zustand um einen Fehler. Es ist somit nicht relevant, ob  $w$  ausführbar ist. Der Fehler-Zustand kann sowohl von  $P'_2$  geerbt sein, wie auch durch fehlende Input-must-Transitionen als neuer Fehler in der Parallelkomposition entstanden sein. Von  $T$  kann kein Fehler geerbt werden und  $T$  kann hat in allen Zuständen die Möglichkeit alle Inputs entgegen zu nehmen. Die einzigen Outputs, die  $T$  ausführen kann, befinden sich auf dem Trace, auf dem  $T$  das Wort  $w$  ausführt. Es gilt, dass ein Präfix von  $w$  in  $ET_{P'_2}$  enthalten ist, wegen des Beweises des ersten Punktes aus Lemma 3.16 und da  $T$  nur neue Fehler auf dem Trace  $w$  zulässt. Die Menge  $ET$  ist unter cont abgeschlossen, somit gilt  $w \in ET_{P'_2} \subseteq QET_{P'_2}$ . Mit Proposition 4.6 folgt daraus  $w \in QET_2$ .
- Fall b) (stiller Zustand lokal erreichbar in  $P'_2 \parallel T$  und  $\varepsilon \notin ET(P'_2 \parallel T)$ ): Da in  $T$  nur durch  $w$  ein stiller Zustand erreicht werden kann, muss es sich bei dem lokal erreichbaren stillen Zustand in  $P'_2 \parallel T$  um einen handeln, der mit  $w$  erreicht werden kann. Mit Lemma 4.8 kann somit gefolgert werden, dass auch in  $P'_2$  ein stiller Zustand mit  $w$  erreichbar sein muss. Es gilt  $w \in StQT_{P'_2} \subseteq QET_{P'_2} \subseteq QET_2$ , wegen Proposition 4.6.

□

**Satz 4.12.** Aus  $P_1 \sqsubseteq_{Qui} P_2$  folgt, dass  $P_1$   $P_2$  Stille-verfeinert.

*Beweis.* In einem MEIO  $P$  ist ein Fehler- oder stiller Zustand nach Definition genau dann lokal erreichbar, wenn  $w \in QET_P$  für ein  $w \in O_P^*$  gilt.

$P_1$  Stille-verfeinert  $P_2$  genau dann, wenn für alle Tests  $T$  von  $P_1$  und  $P_2$  die Implikation  $P_2 sat_{as}^{Qui} T \Rightarrow P_1 sat_{as}^{Qui} T$  gilt. Wenn man die Implikation negiert, ist für alle Tests  $T$  der beiden MEIOs  $\neg P_1 sat_{as}^{Qui} T \Rightarrow \neg P_2 sat_{as}^{Qui} T$  zu zeigen. Es soll  $\neg P_1 sat_{as}^{Qui} T$  für einen beliebig gewählten Test  $T$  gelten. Es existiert also ein  $P'_1$  aus der Menge  $as-impl(P_1)$ , für das  $P'_1 \parallel T$  einen Fehler oder einen stillen Zustand lokal erreicht. Für ein  $w \in O_{P'_1 \parallel T}^*$  gilt also  $w \in QET_{P'_1 \parallel T}$ . Aufgrund von 4.9 kann die Menge  $QET_{P'_1 \parallel T}$  auch als die Vereinigung von  $StQT_{P'_1 \parallel T}$  und  $ET_{P'_1 \parallel T}$  geschrieben werden.

- Fall 1 ( $w \in ET_{P'_1 \parallel T}$ ): Es muss auch  $\varepsilon \in ET_{P'_1 \parallel T}$  gelten, da  $w$  keinen Input aus der Menge  $I_{P'_1 \parallel T}$  enthält und somit  $w$  kein Element der Menge  $cont(MIT_{P'_1 \parallel T})$  sein kann. Es kann also der Beweis von Satz 3.17 angewendet werden, um in diesem Fall zu folgern, dass für eine as-Implementierung  $P'_2$  von  $P_2$  ein Fehler in  $P'_2 \parallel T$  lokal erreichbar ist und somit  $\neg P_2 sat_{as}^{Qui} T$  gilt.

- Fall 2 ( $w \in StQT_{P'_1 \parallel T} \setminus ET_{P'_1 \parallel T}$ ): Damit dieser Fall eintreten kann, muss das Wort  $w$  in  $P'_1 \parallel T$  einen stillen Zustand  $(p_1, p_T)$  erreichen, der nicht in  $E_{P'_1 \parallel T}$  enthalten ist. Mit Lemma 4.8.2 sind auch die Zustände  $p_1$  und  $p_T$  in den Teilsystemen still. Es gibt also eine Projektion des Wortes  $w$  auf die Teilsysteme, so dass  $w \in w_1 \parallel w_T$ ,  $w_1 \in StQT_{P'_1}$  und  $w_T \in StQT_T$  gilt, wobei  $w_1$  den Zustand  $p_1$  in  $P'_1$  und  $w_T$  den Zustand  $p_T$  in  $T$  erreicht.  $w_1$  ist in der Menge  $StQT_{P'_1} \subseteq QET_{P'_1}$  enthalten. Mit Proposition 4.6 gilt also auch  $w_1 \in QET_1$  und mit  $P_1 \sqsubseteq_{Qui} P_2$  folgt draus  $w_1$  auch in der Menge  $QET_2$  enthalten sein muss. Es gibt wegen Proposition 4.6 auch eine as-Implementierung  $P'_2$  von  $P_2$ , für die  $w_1 \in QET_{P'_2}$  gilt. Da die Menge  $QET$  der fehler-gefluteten Stille-Trace ist, können im folgenden zwei Fälle unterschieden werden.
  - Fall 2a) ( $w_1 \in ET_{P'_2}$ ): Da  $w_T$  in  $T$  ausführbar ist, gilt  $w_T \in L_T \subseteq EL_T$  und somit folgt mit Satz 3.10.1  $w \in ET_{P'_2 \parallel T}$ . Es ist also wie im Beweis von Satz 3.17 ein Fehler in  $P'_2 \parallel T$  lokal erreichbar. Somit folgt wie in Fall 1  $\neg P_2 sat_{as}^{Qui} T$ .
  - Fall 2b) ( $w_1 \in StQT_{P'_2}$ ): Das Wort  $w_1$  führt in  $P'_2$  zu einem Zustand  $p_2$ , der still ist. Wenn man also die Wörter  $w_1$  und  $w_T$  in  $P'_2 \parallel T$  parallel zum Zustand  $(p_2, p_T)$  ausführt, ist dieser Zustand durch Lemma 4.8.1 still. Es gilt also  $w \in StQT_{P'_2 \parallel T}$  mit  $w \in O_{P'_2 \parallel T}$ , da  $P_1$  und  $P_2$  die selbe Signatur haben müssen. Ein stiller Zustand ist als in der Parallelkomposition  $P'_2 \parallel T$  lokal erreichbar. Es gilt also auch in diesem Fall  $\neg P_2 sat_{as}^{Qui} T$ .

□

Es wurde, wie im letzten Kapitel, eine Kette an Folgerungen gezeigt, die sich zu einem Ring schließen. Dies ist in Abbildung 4.5 dargestellt.

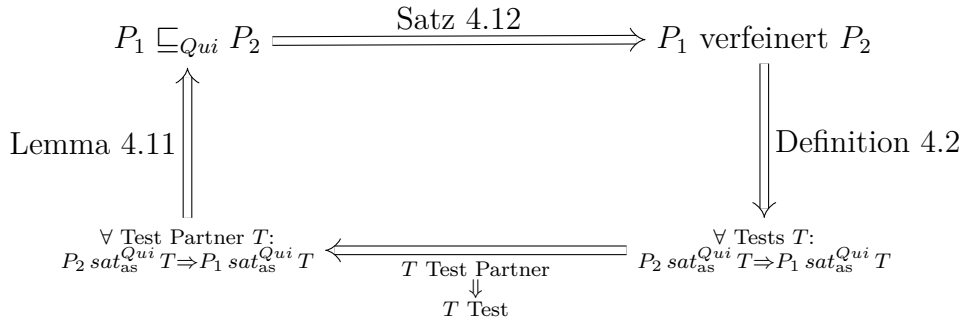


Abbildung 4.5: Folgerungskette der Testing-Verfeinerung und Stillstands-Relation

Aus der Abbildung 4.5 folgt eine Äquivalenz, die im nächsten Korollar noch extra hervorgehoben wird.

**Korollar 4.13.** *Es gilt:  $P_1 \sqsubseteq_{Qui} P_2 \Leftrightarrow P_1$  Stille-verfeinert  $P_2$ .*



## 4.2 Zusammenhänge

**Satz 4.14 (Zusammenhang der Verfeinerungs-Relationen mit der Stillstands-Relation).** Für MEIOs  $P$  und  $Q$  gilt  $P \sqsubseteq_{\text{as}} Q \Rightarrow P \sqsubseteq_{\text{Qui}} Q \Rightarrow P \sqsubseteq_E Q$ . Die Implikationen in die andere Richtung gelten jedoch nicht. Die Relationen  $\sqsubseteq_{\text{w-as}}$  und  $\sqsubseteq_{\text{Qui}}$  sind unvergleichbar.

*Beweis.*

$P \sqsubseteq_{\text{as}} Q \Rightarrow P \sqsubseteq_{\text{Qui}} Q$ :

Im Beweis des Satzes 3.19 wurde bereits bewiesen, dass eine schwache as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$  zwischen  $P$  und  $Q$  die Eigenschaften der Fehler-Relation  $\sqsubseteq_E$  erfüllt. Nach Lemma 2.14 ist jede starke as-Verfeinerungs-Relation auch eine schwache. Es fehlt also für diese Implikation nur noch der Beweis der Inklusion  $QET_P \subseteq QET_Q$ . Da bereits  $ET_P \subseteq ET_Q$  bewiesen wurde, reicht es aus zu beweisen, dass  $StQT_P \setminus ET_P \subseteq QET_Q$  gilt. Die as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$  zwischen  $P$  und  $Q$  ist in diesem Fall als stark anzunehmen. Für ein Wort  $w$  aus  $StQT_P \setminus ET_P$  gibt es einen ausführbaren Trace der Form wie in Lemma 3.7, der mit  $p_n$  einen stillen Zustand erreicht. Es gilt  $w \in \text{cont}(StET_Q) \subseteq ET_Q \subseteq QET_Q$ , falls ein Fehler-Zustand in  $Q$  auf einem Präfix-Trace von  $w$  auftritt, wegen Lemma 3.7. Im folgenden wird davon ausgegangen, dass  $w$  in  $Q$  ohne das Erreichen eines Fehler-Zustandes ausführbar ist. Wegen 3.7 gibt es also einen Trace für  $w$  in  $Q$ , der im Zustand  $q_n$  mit  $p_n \mathcal{R} q_n$  endet.  $p_n$  ist für  $P$  ein stiller Zustand, es gilt also für alle  $\omega \in (O \cup \{\tau\})$   $p_n \xrightarrow{\omega} P$ . Da  $\mathcal{R}$  eine starke as-Verfeinerungs-Relation ist, muss wegen 2.3.2 auch  $q_n \xrightarrow{\omega} Q$  gelten für alle  $\omega \in (O \cup \{\tau\})$ .  $q_n$  ist also auch ein stiller Zustand. Somit ist  $w$  in  $StQT_Q \subseteq QET_Q$  enthalten.

$P \sqsubseteq_{\text{Qui}} Q \Rightarrow P \sqsubseteq_E Q$ :

Diese Implikation folgt direkt aus der Definition von  $\sqsubseteq_{\text{Qui}}$  in 4.5. Da  $P \sqsubseteq_{\text{Qui}} Q$  dort definiert wurde als Relation, die  $P \sqsubseteq_E Q$  und  $QET_P \subseteq QET_Q$  erfüllt. Es gilt also  $P \sqsubseteq_E Q$ .

$P \sqsubseteq_{\text{w-as}} Q \not\Rightarrow P \sqsubseteq_{\text{Qui}} Q$ :

Diese Implikation scheitert dran, dass für stille Zustände keine  $\tau$ -must-Transitionen zulässig sind und  $\sqsubseteq_{\text{Qui}}$  keine Divergenz mit betrachtet. Ein entsprechendes Gegenbeispiel ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Da hier nur das strikte Stille Trace das Problem erzeugen, soll  $I = \emptyset$  gelten, damit die MIT-Mengen für beide Systeme leer sind.  $\mathcal{R} = \{(p_0, q_0)\}$  ist eine schwache as-Verfeinerungs-Relation zwischen  $P$  und  $Q$ . Beides Transitionssysteme enthalten keine Fehler-Zustände,  $P$  besitzt keine Transitionen und  $Q$  nur eine Transition für eine interne Aktion, somit sind die Punkte 1., 2., 4. und 5. der Definition 2.4 für  $\mathcal{R}$  sicher erfüllt. Der dritte Punkt von 2.4 fordert, dass die Transition  $q_0 \xrightarrow{\tau} q_0$  in  $Q$  schwach gematched wird. Da  $\hat{\tau}$  jedoch  $\varepsilon$  entspricht, muss es keine echte interne Transition in  $P$  für  $p_0$  geben. Die Definition 2.4.3 ist also ebenfalls durch das bereits enthaltene Tupel  $(p_0, q_0)$  erfüllt.

Für  $P$  ist  $\varepsilon$  ein striktes Stille-Trace. Die Menge  $StQT(Q) = QET(Q)$  ist jedoch leer. Die Inklusion  $QET(P) \subseteq QET(Q)$ , die für  $P \sqsubseteq_{\text{Qui}} Q$  gelten müsste ist also nicht erfüllt.

$$Q: \rightarrow q_0 \curvearrowright \tau \qquad P: \rightarrow \boxed{p_0 \in Qui_P}$$

 Abbildung 4.6: Gegenbeispiel zu  $\sqsubseteq_{w-as} \Rightarrow \sqsubseteq_{Qui}$  mit  $I_P = I_Q = \emptyset$ 

$P \sqsubseteq_{w-as} Q \not\Leftarrow P \sqsubseteq_{Qui} Q$ :

Wie im Gegenbeispiel für die analoge Implikation aus der Relation  $\sqsubseteq_E$  beruht der Grund für die nicht Gültigkeit hier auch darauf, dass Simulationen strenger sind als Sprach Inklusionen. Jedoch funktioniert hier nicht das gleiche Gegenbeispiel wie im letzten Kapitel, da es zu Problemen mit den Stille-Traces führen würde. Um diese zu vermeiden, wird wieder die Technik angewendet an alle Zustände eine  $\tau$ -Schleife anzufügen. Das daraus entstehende Gegenbeispiel ist in Abbildung 4.7 dargestellt. Die Menge der Inputs  $I$  der beiden MEIOs ist leer. Es gilt also  $ET_P = ET_Q = QET_P = QET_Q = \emptyset$  und  $\{\varepsilon\} = L(P) \subset L(Q) = \{\varepsilon, o\}$ .

Angenommen es gib eine schwache as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$  zwischen  $P$  und  $Q$ . Dann stehen die Startzustände in dieser Relation, es gilt also  $p_0 \mathcal{R} q_0$ . Da es keine Fehler-Zustände in  $P$  gibt, ist 2.4.1 erfüllt. Die Transition  $q_0 \xrightarrow{o} q_1$  fordert durch 2.4.3 ihre Verfeinerung in  $P$ . Da es jedoch keine mit  $o$  beschriftete Transition in  $P$  gibt, kann  $\mathcal{R}$  keine schwache as-Verfeinerungs-Relation zwischen  $P$  und  $Q$  sein.

$$Q: \rightarrow q_0 \xrightarrow{\tau} q_0 \xrightarrow{o!} q_1 \curvearrowright \tau \qquad P: \rightarrow p_0 \curvearrowright \tau$$

 Abbildung 4.7: Gegenbeispiel zu  $\sqsubseteq_{w-as} \Leftarrow \sqsubseteq_{Qui}$ 

$P \sqsubseteq_{as} Q \not\Leftarrow P \sqsubseteq_{Qui} Q$ :

Falls diese Implikation gelten würde, würde jedes Paar von MEIOs, dass in der Relation  $\sqsubseteq_{Qui}$  steht auch in der Relation  $\sqsubseteq_{as}$  stehen. Mit Lemma 2.14 würde draus folgen, dass das MEIO Paar auch in der Relation  $\sqsubseteq_{w-as}$  stehen muss. Dies stellt jedoch ein Widerspruch zum letzten Punkte dieses Beweises dar.

$P \sqsubseteq_{Qui} Q \not\Leftarrow P \sqsubseteq_E Q$ :

Die Relation  $\sqsubseteq_{Qui}$  stützt sich auf die Definition der Relation  $\sqsubseteq_E$ . Jedoch erweitert sich die Definition noch um eine weitere Voraussetzung. Es muss also in einem entsprechenden Gegenbeispiel die Inklusion  $QET_P \subseteq QET_Q$  verletzt sein. Das Gegenbeispiel ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Es wird  $I = \emptyset$  vorausgesetzt, damit keine Input-kritischen Traces auftreten. Es gilt also  $ET_P = ET_Q = \emptyset$  und  $L(P) = L(Q) = \{\varepsilon\}$ . Es gilt also  $P \sqsubseteq_E Q$ .

Jedoch gilt für die strikten Stille-Traces  $StQT_P = \{\varepsilon\}$  und  $StQT_Q = \emptyset$ . Es folgt also  $QET_P \not\subseteq QET_Q$  und somit ist die Relation  $\sqsubseteq_{Qui}$  zwischen  $P$  und  $Q$  auch nicht erfüllt.

□

$$Q: \longrightarrow \boxed{q_0 \in Qui_Q} \qquad P: \longrightarrow p_0 \curvearrowright \tau$$

Abbildung 4.8: Gegenbeispiel zu  $\sqsubseteq_{Qui} \Leftarrow \sqsubseteq_E$  mit  $I_P = I_Q = \emptyset$

# 5 Verfeinerungen für Kommunikationsfehler-, Stillstand- und Divergenz-Freiheit

In diesem Kapitel soll die Menge der betrachteten Zustände noch einmal ergänzt werden. Somit werden dann Fehler-, stille und Divergenz-Zustände betrachtet. Wie im letzten Kapitel wird auch hier nur der Testing-Ansatz betrachtet.

## 5.1 Testing-Ansatz

Für die EIO aus z.B. [Sch16] sind divergente Zustände Zustände, die eine unendliche Folge an  $\tau$ s ausführen können. Da die Definition für Implementierung hier das gleiche liefern soll, müssen alle Zustände, die eine unendliche Folge an  $\tau$  Zuständen sicher Stellen müssen auf jeden Fall divergent sein. Jedoch lassen bereits unendliche Folgen von  $\tau$ -may-Transitionen Divergenz in einer ihrer as-Implementierungen zu. Somit erscheint es sinnvoll Zustände bereits als divergent anzusehen, wenn sie die Möglichkeit für eine unendliche Folge von  $\tau$ s via may-Transitionen besitzen.

**Definition 5.1 (*Divergenz*).** *Ein Divergenz-Zustand ist ein Zustand in einem MEIO  $P$ , der via may-Transitionen eine unendliche Folge an  $\tau$ s ausführen kann. Die Menge  $Div(P)$  besteht aus all diesen divergenten Zuständen des MEIOs  $P$ .*

Die unendliche Folge an  $\tau$ s kann durch einen Kreis von Zuständen, die via  $\tau$ -Transitionen verbunden sind, von einem durch interne Aktionen erreichbaren Zustand ausführbar sein oder durch einen unendlichen Weg, der mit  $\tau$ s ausführbar ist, der unendlich viele Zustände durchläuft. Es ist jedoch zu beachten, dass ein Zustand, von dem aus unendlich viele Zustände durch  $\tau$ s erreichbar sind, nicht divergent sein muss. Es ist auch möglich, dass dieser Zustand eine unendliche Verzweigung hat und somit keine unendlichen Folgen an  $\tau$ s ausführen kann. Aus diesem Grund, schränkt sich diese Kapitel auf MEIOs ein ohne unendlich Verzweigungen, die dann die Definition der lokalen erfüllen, dass sie lokal endlich sind.

Für die Relevant eines Divergenz-Zustandes in einem Transitionssystem wieder wieder der optimistische Ansatz der lokalen Erreichbarkeit. Auf Implementierungen, die den

EIOs in z.B. [Sch16] entsprechen, ist Divergenz nicht mehr verhinderbar, sobald ein divergenter Zustand lokal erreichbar ist. Somit wird sich auch hier herausstellen, dass Divergenz als ähnlich „schlimm“ zu bewerten wie ein Fehler-Zustand.

**Definition 5.2 (Test und Verfeinerung für Divergenz).** Sei  $P$  ein MEIO. Ein Test  $T$  für  $P$  ist eine zu  $P$  komponierbare Implementierung.  $P$  as-erfüllt  $T$  als einen Divergenz-Test, falls  $S \parallel T$  lokal fehler-, stillstand- und divergenz-frei ist für alle  $S \in \text{as-impl}(P)$ . Es wird dann  $P \text{ sat}_{\text{as}}^{\text{Div}} T$  geschrieben. Die Parallelkomposition  $S \parallel T$  ist lokal fehler-, stillstand- und divergenz-frei, wenn kein Fehler-, stiller oder Divergenz-Zustand lokal erreichbar ist.

Ein MEIO  $P$  Divergenz-verfeinert  $P'$ , falls sie die selbe Signatur haben und für alle ihre Tests  $T$ :  $P' \text{ sat}_{\text{as}}^{\text{Div}} T \Rightarrow P \text{ sat}_{\text{as}}^{\text{Div}} T$ .

Da nun die grundlegenden Definitionen für Divergenz festgehalten sind, kann man sich einen Begriff für die Traces zu divergenten Zuständen bilden. Im letzten Absatz wurde bereits festgestellt, dass Divergenz wohl als ähnlich „schlimmes“ Fehlverhalten anzusehen ist wie Fehler. Da das Divergieren eines Systems nicht mehr verhinderbar ist, sobald ein divergenter Zustand lokal erreichbar ist, kommt für die Divergenz-Traces wieder die prune und letztlich auch die cont-Funktion zum Einsatz. Ein System, das unendliche viele  $\tau$ s ausführen kann, ist von außen nicht von so einem System zu unterscheiden, das einen Fehler-Zustand erreicht. Somit wird später semantisch in den Trace-Mengen auch nicht zwischen Fehler-Traces und Divergenz-Traces explizit unterschieden. Dadurch genügt es nicht mehr nur mit den Fehler-Traces die Sprache zu fluten, sondern es muss sowohl mit den Fehler-Traces wie auch den Divergenz-Traces geflutet werden. Ebenso werden die strikten Stille-Traces mit diesen beiden Trace-Mengen geflutet.

**Definition 5.3 (Divergenz-Traces).** Sei  $P$  ein MEIO und definiere:

- strikte Divergenz-Traces:  $\text{StDT}(P) := \{w \in \Sigma^* \mid p_0 \xRightarrow{w}_P p \in \text{Div}(P)\}$ ,
- gekürzte Divergenz-Traces:  $\text{PrDT}(P) := \{\text{prune}(w) \mid w \in \text{StDT}(P)\}$ .

Analog zu den Propositionen 3.4 und 4.4 gibt es hier auch eine Proposition, die die Divergenz-Traces eines MEIOs mit den Divergenz-Traces seiner as-Implementierungen verbindet. Die Begründung verläuft analog zu den Propositionen der vorangegangenen Kapitel.

**Proposition 5.4 (Divergenz-Traces und Implementierungen).** Sei  $P$  ein MEIO.

1. Für die strikten Divergenz-Traces gilt:  $\text{StDT}(P) \subseteq \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} \text{StDT}(P')$ .
2. Für die gekürzten Divergenz-Traces von  $P$  gilt:  $\text{PrDT}(P) \subseteq \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} \text{PrDT}(P')$ .

*Beweis.*

1. Um diese Inklusion beweisen zu können wird wieder eine as-Implementierung  $P'$  von  $P$  und eine passende as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$  angegeben, so dass alle strikten Divergenz-Traces von  $P$  auch in  $P'$  enthalten sind. In diesem Fall funktioniert der Ansatz alle Traces aus  $P$  in  $P'$  zu implementieren und keine Fehler-Zustände zu übernehmen. Die Definition von  $P'$  lautet also:

- $P' = P$ ,
- $p'_0 = p_0$ ,
- $I_{P'} = I_P$  und  $O_{P'} = O_P$ ,
- $\longrightarrow_{P'} = \longrightarrow_P$ ,
- $E_{P'} = \emptyset$ .

Die passende as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$  ist die Identitäts-Relation. Wie bereits im Beweis zu Proposition 2.8 begründet erfüllt  $\mathcal{R}$  alle Punkte der Definition 2.3. Es wird ein  $w$  aus  $StDT(P)$  betrachtet. Es gibt also einen Trace in  $P$  auf dem das Wort  $w$  ausgeführt wird und der einen divergenten Zustand erreicht. Es gilt also  $\exists w' \in \Sigma_\tau^*, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \exists p_1, p_2, \dots, p_n : \hat{w}' = w \wedge w' = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \wedge p_0 \xrightarrow{\alpha_1}_{P'} p_1 \xrightarrow{\alpha_2}_{P'} \dots p_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n}_{P'} p_n \in Div_P$ . Die Identitäts-Relation  $\mathcal{R}$  setzt die Zustände des Traces mit den analogen Zuständen aus  $P'$  in Relation. Zusätzlich mit der Implementierung aller Transitionen aus  $P$  in  $P'$  ergibt sich der selbe Trace in  $P'$ . Es gilt also  $p'_0 \xrightarrow{\alpha_1}_{P'} p'_1 \xrightarrow{\alpha_2}_{P'} \dots p'_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n}_{P'} p'_n$  mit  $(p'_j, p_j) \in \mathcal{R}$  für  $0 \leq j \leq n$ . Da  $p_n$  in  $Div_P$  enthalten ist, gibt es von diesem Zustand in  $P$  aus die Möglichkeit eine unendliche Folge an  $\tau$ s auszuführen. Die Ausführbarkeit muss sich dabei auf mit  $\tau$  beschriftete may-Transitionen in  $P$  stützen. Da diese Transitionen in  $P'$  alle übernommen wurden, ist auch für  $p'_n$  eine unendliche Folge an  $\tau$ s ausführbar. Es gilt also  $p'_n \in Div_{P'}$  und somit  $w \in StDT(P')$ . Insgesamt folgt also für diese  $P'$   $StDT(P) = StDT(P')$ . TODO: versuchen als ein Gesamtablauf zu formulieren

2. Dieser Punkt entspricht 1. bis auf die Anwendung der prune-Funktion auf beiden Seiten des Inklusions-Symbols. Da prune monoton ist, folgt dieser Punkt direkt auf dem letzten.

□

Da die Stille-Traces mit den Fehler- und Divergenz-Traces geflutet werden sollen, kann die Stillstands-Semantik nicht aus dem letzten Kapitel übernommen werden. Auch die geflutete Sprache aus dem Fehler-Kapitel kann nicht beibehalten werden. Nur die Fehler-Traces  $ET$  können ohne Veränderung auch in diesem Kapitel verwendet werden. Jedoch werden diese Traces im weiteren Verlauf nur innerhalb der größeren Trace-Menge  $EDT$  relevant sein.

**Definition 5.5 (Kommunikationsfehler-, Stillstands- und Divergenz-Semantik).** Sei  $P$  ein MEIO.

- Die Menge der Divergenz-Traces von  $P$  ist  $DT(P) := \text{cont}(\text{PrDT}(P))$ .
- Die Menge der Fehler-Divergenz-Traces von  $P$  ist  $EDT(P) := ET(P) \cup DT(P)$ .
- Die Menge der Fehler-Divergenz-gefluteten Stille-Traces von  $P$  ist  $QDT(P) := \text{StQT}(P) \cup EDT(P)$ .
- Die Menge der Fehler-Divergenz-gefluteten Sprache von  $P$  ist  $EDL(P) := L(P) \cup EDT(P)$ .

Für zwei MEIOs  $P_1, P_2$  mit der gleichen Signatur schreibt man  $P_1 \sqsubseteq_{Div} P_2$ , wenn  $EDT_1 \subseteq EDT_2, QDT_1 \subseteq QDT_2$  und  $EDL_1 \subseteq EDL_2$  gilt.

**Proposition 5.6 (Kommunikationsfehler-, Stillstands-, Divergenz-Semantik und Implementierungen).** *Sie  $P$  ein MEIO.*

1. Für die Menge der Divergenz-Traces von  $P$  gilt  $DT(P) \subseteq \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} DT(P')$ .
2. Für die Menge der Fehler-Divergenz-Traces von  $P$  gilt die folgende Gleichheit  $EDT(P) = \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} EDT(P')$ .
3. Für die Menge der Fehler-Divergenz-gefluteten Stille-Traces von  $P$  gilt  $QDT(P) = \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} QDT(P')$ .
4. Für die Menge der Fehler-Divergenz-gefluteten Sprache von  $P$  gilt  $EDL(P) = \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} EDL(P')$ .

*Beweis.*

1.:

Es gilt bereits  $\text{PrDT}(P) \subseteq \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} \text{PrDT}(P')$ , wegen 2. der Proposition 5.4. Aus der Monotonie von  $\text{cont}$  folgt also auch die hier geforderte Inklusion.

2. „ $\subseteq$ “:

$$\begin{aligned}
 EDT(P) &\stackrel{5.5}{=} ET(P) \cup DT(P) \\
 &\stackrel{3.8.1}{=} \left( \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} ET(P') \right) \cup DT(P) \\
 &\stackrel{1.}{\subseteq} \left( \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} ET(P') \right) \cup \left( \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} DT(P') \right) \\
 &= \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} ET(P') \cup DT(P') \\
 &\stackrel{5.5}{=} \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} EDT(P').
 \end{aligned}$$

2. „ $\supseteq$ “:

Für ein präfix-minimales  $w$  aus der Menge  $EDT(P')$  einer as-Implementierung  $P'$  von  $P$  wird für diese Inklusion gezeigt, dass auch  $w \in EDT(P)$  gilt. Es genügt ein präfix-minimales Element, da die  $EDT$ -Mengen unter cont abgeschlossen sind. Falls das  $w$  in  $ET(P')$  enthalten ist, folgt  $w \in ET(P) \subseteq EDT(P)$  aufgrund des ersten Punktes der Proposition 3.8. Es ist also nur noch der Fall zu betrachten, in dem  $w \in DT(P') \setminus ET(P')$  gilt. Es gibt also einen unendlichen Ablauf analog zu dem in Lemma 3.7 thematisierten für  $wv \in StDT'_P$  mit  $v \in O^*$ , wobei nur endlich viele Transitionen benötigt werden bis die letzte sichtbare Aktion aus  $wv$  ausgeführt wird und danach unendlich viele  $\tau$ -Transitionen folgen. Zwischen  $P'$  und  $P$  soll  $\mathcal{R}$  als as-Verfeinerungs-Relationen gelten. Falls in dem matchenden Ablauf in  $P$  ein Fehler-Zustand erreicht wird, muss nach Lemma 3.7 ein Präfix von  $wv$  in  $StET_P$  enthalten sein. Mit  $w = \text{prune}(wv)$  folgt somit  $w \in ET_P \subseteq EDT_P$ . Falls in  $P$  jedoch ein mit  $wv$  beschrifteter Trace ausführbar ist und kein mit  $wv$  beschrifteter Trace oder ein Präfix davon einen Fehler-Zustand erreicht, muss es ein  $p_j$  in  $P$  geben, dass durch einen  $wv$ -Trace in  $P$  erreicht wird und das mit einem  $p'_j$  in der Relation  $\mathcal{R}$  steht, dass in dem unendlichen Ablauf von  $P'$  nach der letzten sichtbaren Aktion auftritt.  $p'_j$  ist also ein divergenter Zustand für  $P'$  für den es einen unendlichen Ablauf gibt, der nur  $\tau$ -Transitionen enthält und es gilt  $p'_j \mathcal{R} p_j$ . Mit den Anmerkungen zu unendlichen Abläufen in Lemma 3.7 muss  $P$  diesen unendlichen Ablauf von  $\tau$ s von  $p_j$  aus matchen können. Es gilt also  $p_j \in Div_P$  und somit  $wv \in StDT(P)$ . Mit  $w = \text{prune}(wv)$  folgt  $w \in PrDT(P) \subseteq EDT(P)$ .

3. „ $\subseteq$ “:

$$\begin{aligned}
 QDT(P) &\stackrel{5.5}{=} StQT(P) \cup EDT(P) \\
 &\stackrel{4.4}{\subseteq} \left( \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} StQT(P') \right) \cup EDT(P) \\
 &\stackrel{2.}{=} \left( \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} StQT(P') \right) \cup \left( \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} EDT(P') \right) \\
 &= \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} StQT(P') \cup EDT(P') \\
 &\stackrel{5.5}{=} \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} QDT(P').
 \end{aligned}$$

3. „ $\supseteq$ “:

Dieser Beweis verläuft analog zu dem Beweis von „ $\supseteq$ “ der Proposition 4.6, man muss nur die  $ET$ -Mengen durch  $EDT$ -Mengen ersetzen und für den Fall  $w \in EDT(P')$  folgt  $w \in EDT(P)$  wegen des zweiten Punktes dieser Proposition und nicht wegen Proposition 3.8.



4. „ $\subseteq$ “:

$$\begin{aligned}
 EDL(P) &\stackrel{5.5}{=} L(P) \cup EDT(P) \\
 &\stackrel{2.8}{\subseteq} \left( \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} L(P') \right) \cup EDT(P) \\
 &\stackrel{2.}{=} \left( \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} L(P') \right) \cup \left( \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} EDT(P') \right) \\
 &= \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} L(P') \cup EDT(P') \\
 &\stackrel{5.5}{=} \bigcup_{P' \in \text{as-impl}(P)} EDL(P').
 \end{aligned}$$

4. „ $\supseteq$ “:

Für den Beweis dieser Inklusion kann man auf den Beweis von 3.8.2 „ $\supseteq$ “ zurück greifen. Es müssen wie bei 3. nur die  $ET$ -Mengen durch  $EDT$ -Mengen ersetzt werden und die Einschränkung auf die geflutete Sprache ohne die Menge  $EDT$  ist möglich wegen des zweiten Punktes der aktuellen Proposition.  $\square$

TODO: Beispiel einfügen, wieso für 1. kein  $=$  gilt

Aus der so eben bewiesenen Proposition über die Gleichheit der betrachteten Traces, lässt sich wie in den letzten beiden Kapiteln eine Aussage über die lokale Erreichbarkeit der fehlerhaften Zustände in einer Spezifikation und den zugehörigen as-Implementierungen treffen.

**Korollar 5.7 (lokale Divergenz Erreichbarkeit).**

- (i) Falls in einem MEIO  $P$  ein Fehler lokal erreichbar ist, dann existiert auch eine as-Implementierung, in der ein Fehler lokal erreichbar ist.
- (ii) Falls in einem MEIO  $P$  Divergenz lokal erreichbar ist, dann existiert auch eine as-Implementierung, in der Divergenz lokal erreichbar ist.
- (iii) Falls ein MEIO  $P$  einen lokal erreichbaren stillen Zustand besitzt, dann existiert auch eine as-Implementierung, in der ein stiller Zustand lokal erreichbar ist.
- (iv) Falls es eine as-Implementierung von  $P$  gibt, die Fehler, Stille oder Divergenz lokal erreicht, dann ist auch Fehler, Stille oder Divergenz in  $P$  lokal erreichbar.

*Beweis.*

- (i) Dieser Punkt folgt wie in 4.7 direkt aus Korollar 3.9 (i).

- (ii) Ein divergenter Zustand ist in  $P$  lokal erreichbar, wenn  $\varepsilon \in DT_P$  gilt. Mit 5.6.1 folgt daraus, dass es auch mindestens eine as-Implementierung  $P'$  aus  $\text{as-impl}(P)$  geben muss, für die  $\varepsilon$  in  $DT(P')$  enthalten ist. Da  $DT$  die Menge der fortgesetzten um lokale Aktionen gekürzten strikten Divergenz-Traces ist, muss es lokale Aktionen in  $P'$  geben, die zu einem divergenten Zustand führen. Es ist also auch in  $P'$  Divergenz lokal erreichbar.
- (iii) Dieser Punkt folgt direkt aus Korollar 4.7 (ii).
- (iv) In  $P' \in \text{as-impl}(P)$  sei ein Fehler-, stillen oder Divergenz-Zustand lokal erreichbar. Es gilt dann  $w \in QDT_{P'}$  für  $w \in O^*$ . Mit Proposition 5.6.3 gilt auch  $w \in QDT_P$ . Die Menge  $QDT$  setzt sich aus den Mengen  $ET$ ,  $StQT$  und  $DT$  zusammen. Es muss also in  $P$  ein Fehler-, stiller oder Divergenz-Zustand lokal erreichbar sein, da ein  $w$ , bestehend nur aus lokalen Aktionen, in  $QDT_P$  enthalten ist.

□

Die Relation  $\sqsubseteq_{Div}$  ist somit keine Einschränkung von  $\sqsubseteq_E$  so wie  $\sqsubseteq_{Qui}$ . Diese Tatsache wird später im Satz 5.18 durch die Beispiele, wieso diese Relationen unvergleichbar sind noch einmal verdeutlicht. Es können Systeme mit einem Fehler nicht von Systemen mit Divergenz unterschieden werden. Da die Divergenz-Test zwischen diesen „Fehler-Arten“ auch keine Unterscheidung machen, muss eine sinnvolle Relation diese Eigenschaft auch übernehmen, so wie  $\sqsubseteq_{Div}$  dies tut.

**Satz 5.8 (Kommunikationsfehler-, Stillstands- und Divergenz-Semantik für Parallelkompositionen).** Für zwei komponierbare MEIOs  $P_1, P_2$  und ihre Komposition  $P_{12}$  gilt:

1.  $EDT_{12} = \text{cont}(\text{prune}((EDT_1 \parallel EDL_2) \cup (EDL_1 \parallel EDT_2)))$ ,
2.  $QDT_{12} = (QDT_1 \parallel QDT_2) \cup EDT_{12}$ ,
3.  $EDL_{12} = (EDL_1 \parallel EDL_2) \cup EDT_{12}$ .

Man könnte diesen Satz analog zu den Sätzen 3.10 und 4.9 mit durch die Mengen-Inklusionen in beide Richtungen beweisen. Alternativ kann man jedoch alle beteiligten MEIOs Normieren, so dass sie divergenz-frei sind, in dem Sinne, dass die MEIOs keinen divergenten Zustand mehr enthalten, der nicht auf in der Menge der Fehler-Zustände enthalten ist. In für einen MEIO, für den alle Zustände aus der Menge  $Div$  in die Menge  $E$  eingefügt wurden, gilt  $EDT = ET$ ,  $QDT = QET$  und  $EDL = EL$ . Es wäre als der Satz 4.9 anwendbar für die Traces der Parallelkomposition. Es wäre dann nur noch zu zeigen, dass die Parallelkomposition von zwei normierten MEIOs die Normierung der Parallelkomposition ihrer unnormierten MEIO-Versionen ist.

**Definition 5.9 (Normierung zur Divergenz-Freiheit).** Ein MEIO  $P$  divergenz-frei, wenn  $Div_P \subseteq E_P$  gilt.

Die divergenz-frei Form von  $P$  ist ein MEIO  $DF(P)$ , das man aus  $P$  erhält, in dem man die Menge der Fehler-Zustände  $E_{DF(P)}$  als die Menge  $E_P \cup Div_P$  definiert.

Die Menge  $MIT_P$ ,  $StQT_P$  und  $L_P$  eines MEIO  $P$  bleiben durch die Konstruktion in 5.9 zur divergenz-freien Form  $DF(P)$  unverändert. Nur die Menge  $\text{cont}(PrET)_P$  wird zur Menge  $\text{cont}(PrET_{DF(P)})$  erweitert, in dem eine Vereinigung mit  $DT_P$  vorgenommen wird. Semantisch ist jedoch nur die Trace-Menge  $EDT$  relevant, die bereits die Vereinigung der Menge  $ET$  und  $DT$  ist. Die Mengen  $QDT$  und  $EDL$  werden für beide MEIOS mit der Trace Menge  $EDT$  geflutet, somit gilt für alle in der Semantik der Relation  $\sqsubseteq_{Div}$  relevanten Traces die Gleichheit zwischen den Traces des MEIOS  $P$  und seiner divergenz-freien Form  $DF(P)$ .

**Proposition 5.10 (Divergenz-Freiheit).** *Jedes MEIO  $P$  ist äquivalent zu seiner divergenz-freien Form  $DF(P)$  bezüglich der Relation  $\sqsubseteq_{Div}$ .*

**Lemma 5.11 (Relationen unter Divergenz-Freiheit).** *Für zwei MEIOS  $P$  und  $Q$  in divergenz-freier Form gilt:  $P \sqsubseteq_{Div} Q \Leftrightarrow P \sqsubseteq_{Qui} Q$ .*

*Beweis.* Da für einen MEIO  $P$  in divergenz-freier Form  $Div_P \subseteq E_P$  gilt, ist jeder strikte Divergenz-Trace von  $P$  auch ein strikter Fehler-Trace von  $P$ . Auf beide Trace-Mengen wird die Kürzungs-Funktion  $\text{prune}$  und danach die Verlängerungs-Funktion  $\text{cont}$  angewendet. In  $EDT_P$  führt die Erweiterung der Menge  $ET_P$  um die Menge  $DT_P$  somit zu keiner Vergrößerung. Es gilt also  $EDT_P = ET_P$ . Die Menge  $StQT_P$  und  $L_P$  werden im Fall  $\sqsubseteq_{Div}$  mit der Menge  $EDT_P$  und im Fall  $\sqsubseteq_{Qui}$  mit der Menge  $ET_P$  geflutet. Da die Mengen mit denen geflutet wird gleich sind, gilt auch  $QDT_P = QET_P$  und  $EDL_P = EL_P$ . Die Mengen Gleichheiten gelten analog auch für  $Q$ . Da die Mengen für die Inklusionen, die die Relationen  $\sqsubseteq_{Div}$  und  $\sqsubseteq_{Qui}$  fordern, gleich sind, sind auch die Relationen äquivalent für MEIOS in divergenz-freier Form.  $\square$

**Lemma 5.12 (Divergenz-Freiheit und Parallelkomposition).** *Die Parallelkomposition  $P_{12} = P_1 \parallel P_2$  zweier MEIOS  $P_1$  und  $P_2$  in divergenz-freier Form ist ebenfalls in divergenz-freier Form.*

*Beweis.* Es gilt  $Div_j \subseteq E_j$  für beide  $j$ -Werte. In einer Parallelkomposition entsteht ein Divergenz-Zustand nur, wenn mindestens eine der beiden Komponenten bereits divergent war für den Zustand, der an der Komposition des Divergenz-Zustandes beteiligt ist.  $Div_{12}$  entspricht also der Menge  $(Div_1 \times P_2) \cup (P_1 \times Div_2)$ . Da geerbte Fehler-Zustände in einer Parallelkomposition auch nur von einem der zu komponierenden Zustände geerbt werden müssen, gilt analoge für die Menge der Fehler-Zustände. Es folgt also  $Div_{12} \subseteq E_{12}$ .  $P_{12}$  ist also auch in divergenz-freier Form.  $\square$

*Beweis zu Satz 5.8.*

Durch Proposition 5.10 kann man jeden MEIO  $P$  so normieren, dass es divergenz-frei ist, das Ergebnis der Normierung jedoch noch äquivalent zu  $P$  ist bezüglich der Relation  $\sqsubseteq_{Div}$ . Für einen MEIO  $P$  in divergenz-freier Form gilt jedoch  $EDT_P = ET_P$ ,  $QDT_P = QET_P$  und  $EDL_P = EL_P$ . Der hier zu beweisende Satz, würde als für MEIOS in divergenz-freier Form dem Satz 4.9 aus dem letzten Kapitel entsprechen. Jedoch

soll der Satz in diesem Kapitel nicht auf MEIOs in divergenz-freier Form eingeschränkt werden, sondern für alle MEIOs gelten. Es ist also noch zu beweisen, dass  $DF(P_{12})$  äquivalent zu  $DF(P_1) \parallel DF(P_2)$  ist bezüglich der Relation  $\sqsubseteq_{Div}$  bzw. bezüglich der Relation  $\sqsubseteq_{Qui}$ , da die Parallelkomposition von zwei MEIOs in divergenz-freier Form auch eine divergenz-freie Form hat (Lemma 5.12). Die folgenden Punkte müssen dafür nachgewiesen werden:

- (i)  $ET(DF(P_{12})) = ET(DF(P_1) \parallel DF(P_2))$ ,
- (ii)  $QET(DF(P_{12})) = QET(DF(P_1) \parallel DF(P_2))$ ,
- (iii)  $EL(DF(P_{12})) = EL(DF(P_1) \parallel DF(P_2))$ .

(i) „ $\subseteq$ “:

Da die  $ET$ -Mengen beide unter  $\text{cont}$  abgeschlossen sind, kann man ein beliebiges präfix-minimales Element  $w \in ET(DF(P_{12}))$  betrachten. Das  $w$  kann ein Input-kritischer Trace sein oder ein gekürzter Fehler-Trace. Im Fall  $w \in PrET(DF(P_{12}))$  kann  $w \in PrET_{12}$  gelten oder  $w \in PrDT_{12}$ . Input-kritische Traces bleiben von der Normierung unberührt. Die Menge  $MIT(DF(P_{12}))$  und  $MIT_{11}$  entsprechen sich also.

- Fall 1 ( $w \in ET_{12}$ ): Es gilt mit Satz 3.10.1  $w \in \text{cont}(\text{prune}((ET_1 \parallel EL_2) \cup (EL_1 \parallel ET_2)))$ . Durch die Normierung können sich die Mengen  $ET$  und  $EL$  nicht verkleinern, sie können werden nur um die Divergenz-Traces, die zu keinen Fehlern führen erweitert. Mit  $ET_j \subseteq ET_{DF(P_j)}$  und  $EL_j \subseteq EL_{DF(P_j)}$  für  $j \in \{1, 2\}$  folgt  $w \in \text{cont}(\text{prune}((ET_{DF(P_1)} \parallel EL_{DF(P_2)}) \cup (EL_{DF(P_1)} \parallel ET_{DF(P_2)})))$ . Wegen Satz 3.10.1 ist  $w$  auch in  $ET(DF(P_1) \parallel DF(P_2))$  enthalten.
- Fall 2 ( $w \in PrDT_{12}$ ): Es gibt eine Verlängerung  $v \in O_{12}$ , des Wortes  $w$ , so dass  $wv$  in  $P_{12}$  zu einem divergenten Zustand führt. Damit der erreichte Zustand in der Parallelkomposition divergent ist, muss mindestens eines der Teilsysteme Divergenz an dem in der Komposition beteiligten Zustand aufweisen. Das andere System muss nur den auf sein Teilsystem projizierten Trace von  $wv$  ausführen können. Die Ausführbarkeit von Traces kann durch die Normierung auf ein divergenz-freies System nicht verändert werden. Der divergenten Zustand in dem Teilsystem wird jedoch in die Menge seiner Fehler-Zustände eingeführt durch die Normierung. In  $DF(P_1) \parallel DF(P_2)$  werden also ein Trace aus der Menge  $ET$  des einen und aus der Menge  $L$  des anderen Systems komponiert. Das Wort  $wv$ , dass dabei entsteht, ist also in  $ET(DF(P_1) \parallel DF(P_2))$  enthalten. Da  $v$  nur aus lokalen Aktionen besteht, gilt auch  $w \in ET(DF(P_1) \parallel DF(P_2))$ .

(i) „ $\supseteq$ “:

Es genügt auch für diese Inklusion ein präfix-minimales Element zu betrachten, da beide  $ET$ -Mengen unter  $\text{cont}$  abgeschlossen sind. Für ein präfix-minimales  $w$  aus der Menge  $ET(DF(P_1) \parallel DF(P_2))$  gilt mit Satz 3.10.1  $w \in \text{cont}(\text{prune}((ET_{DF(P_1)} \parallel EL_{DF(P_2)}) \cup (EL_{DF(P_1)} \parallel ET_{DF(P_2)})))$ . Es gibt also eine Projektion des Wortes  $w$  auf die einzelnen Systeme, so dass  $w \in w_1 \parallel w_2$  gilt mit  $w_1 \in ET_{DF(P_1)}$  bzw.  $w_1 \in EL_{DT(P_1)}$  und  $w_2 \in EL_{DF(P_2)}$  bzw.  $w_2 \in ET_{DT(P_2)}$ . Da das  $w$  präfix-minimal ist in  $DF(P_1) \parallel DF(P_2)$  sind

die  $w_j \in EL_{DF(P_j)}$  entweder ausführbar ( $w_j \in L_{DF(P_j)}$ ) oder in der Menge  $MIT_{DF(P_j)}$  enthalten. Die Normierung auf ein divergenz-freies System kann nichts an der Ausführbarkeit von Traces verändern. Falls das  $w_j$  für  $j \in \{1, 2\}$  in der Menge  $\text{cont}(MIT_{DF(P_j)})$  enthalten ist, gilt auch  $w_j \in \text{cont}(MIT_j)$ , da die Normierung auf divergenz-freie Systeme die Input-kritischen Trace unverändert lässt. Für  $w_j \in \text{cont}(PrET_{DF(P_j)})$  können jedoch zwei Fälle unterschieden werden.  $w_j$  kann bereits von der Normierung ein Trace aus der Menge  $\text{cont}(PrET_j)$  gewesen sein oder  $w_j$  ist erst durch die Normierung zu einem forgesetzten gekürzten Fehler-Trace geworden und es galt davor  $\text{cont}(PrDT_j) = DT_j$ . Für die hier betrachten  $w_j$  gilt  $w_j \in EL_j$ , wenn nach der Normierung  $w_j \in EL_{DF(P_j)}$ . Es kommt also nur auf die Wörter  $w_j$  in den  $ET$ -Mengen an.

- Fall 1 ( $w_j \in ET_j$ ): In diesem Fall kann man Satz 3.10.1 anwenden und es folgt  $w \in ET_{12}$  und nach der Anwendung der Konstruktion aus Definition 5.9 gilt immer noch  $w \in ET_{DF(P_{12})}$ .
- Fall 2 ( $w_j \in DT_j$ ): OBdA  $j = 1$ .  $w_2$  ist in der Menge  $EL_2$  enthalten. Wegen der präfix-Minimalität von  $w$  ist die hier relevante Unterscheidung  $w_2 \in MIT_2$  oder  $w_2 \in L_2$ .
  - Fall 2a) ( $w_2 \in MIT_2$ ): Es gibt ein Präfix von  $w_1$ , dass zu einem divergenten Zustand führt. Falls es durch dieses Präfix von  $w_1$  noch nicht zu einem Problem mit dem fehlenden Input aus  $w_2$  in der Komposition kommt, wird der divergente Zustand von  $P_1$  an die Parallelkomposition  $P_1 \parallel P_2$  vererbt und durch die Abgeschlossenheit gegenüber  $\text{cont}$  folgt dann  $w \in DT_{12} \subseteq ET_{DF(P_{12})}$ . Falls es jedoch zu Synchronisations-Problemen wegen des nicht sichergestellten Input in  $P_2$  im Wort  $w_2$  kommt, entsteht in der Parallelkomposition ein Trace aus der Menge  $ET_{12} \subseteq ET_{DF(P_{12})}$  durch Satz 3.10.1, da dann das Präfix von  $w_1$ , dass zu den Synchronisations-Problemen führt ausführbar ist und somit in der Sprache und auch der Fehler-gefluteten Sprache enthalten ist.
  - Fall 2b) ( $w_2 \in L_2$ ): In diesem Fall ist  $w_2$  komplett ausführbar in  $P_2$ . Das Präfix von  $w_1$ , dass zu einem Divergenz-Zustand führt, kann also mit einem Präfix von  $w_2$  komponiert werden und ergibt ein Präfix von  $w$  in der Parallelkomposition  $P_1 \parallel P_2$ , dass zu einem divergenten Zustand führt. Wegen der Abgeschlossenheit bezüglich  $\text{cont}$  gilt  $w \in DT_{12} \subseteq ET_{DF(P_{12})}$ .

(ii): Man kann diese Gleichheit wieder in zwei Inklusionen aufteilen, die jedoch durch die das bereits in (i) gezeigte eingeschränkt werden können, dabei entstehen dann die beiden folgenden Inklusionen:  $StQT(DF(P_{12})) \setminus ET(DF(P_{12})) \subseteq QET(DF(P_1) \parallel DF(P_2))$  und  $StQT(DF(P_1) \parallel DF(P_2)) \setminus ET(DF(P_1) \parallel DF(P_2)) \subseteq QET(DF(P_{12}))$ . Da die Konstruktion der Normierung auf divergenz-freie Systeme in Definition 5.9 jedoch keine Transitionen verändert, sondern nur die Zustands-Mengen  $E$  erweitert, gilt sogar die Gleichheit  $StQT(DF(P_{12})) \setminus ET(DF(P_{12})) = StQT(DF(P_1) \parallel DF(P_2)) \setminus ET(DF(P_1) \parallel DF(P_2))$ . Ein Wort aus der Menge einer der  $StQT$ -Mengen muss ausführbar sein zu einem stillen Zustand führen, da auf beiden Seiten ausgeschlossen wurde, dass das jeweilige Wort auch in der  $ET$ -Menge enthalten ist, ist der erreichte Zustand ein Fehler-Zustand. Es

kann also Lemma 4.8 angewendet werden und es folgt auf beiden Seiten der Gleichung, dass die in den Projektionen erreichten Zustände in  $P_1$  und  $P_2$  still sein müssen. Aus zwei stillen Zuständen in der Komposition entsteht auch immer wieder ein stiller Zustand mit Lemma 4.8.

(iii): Dieser Punkt könnte analog zum letzten Punkt durch die bereits bewiesenen Punkte eingeschränkte Inklusionen gezeigt werden, jedoch gilt hier ebenfalls bereits die Gleichheit für die Einschränkung. Es wird also direkt  $L(DF(P_{12})) = L(DF(P_1) \parallel DF(P_2))$  gezeigt. Die Normierung auf divergenz-freie Systeme verändert die ausführbaren Traces nicht. Somit bleibt die Sprache gleich. Egal ob vor der Parallelkomposition normiert wurde oder erst danach, die Traces, die in der Parallelkomposition ausführbar sind, stimmen überein.  $\square$

Analog wie in den beiden vorangegangenen Kapiteln, ergibt sich aus diesem Satz als direkte Folgerung, dass es sich bei der Relation  $\sqsubseteq_{Div}$  um eine Präkongruenz handelt. Der Beweis dafür ist analog zu den Beweisen der Korollare 3.11 und 4.10 und soll deshalb hier nicht wiederholt werden.

**Korollar 5.13 (*Divergenz-Präkongruenz*).** *Die Relation  $\sqsubseteq_{Div}$  ist eine Präkongruenz bezüglich  $\cdot \parallel \cdot$ .*

Im nächsten Lemma soll eine Verfeinerung bezüglich guter Kommunikation betrachtet werden. Die Vorgaben für gute Kommunikation gibt hierbei die Definition der Tests und die daraus resultierende Verfeinerung in 5.2 vor. Es muss in diesem Lemma eine Veränderung zu den analogen Lemmata aus den vorangegangenen Kapiteln vorgenommen werden. Die Einschränkung der Tests  $T$  auf Partner, kann nicht mehr beibehalten werden, da die Strategie zur Vermeidung von Stille im Beweis aus dem letzten Kapitel hier zu Divergenz führen würde. Somit werden für die Stillstands-Vermeidung in diesem Kapitel Aktionen außerhalb der Menge  $Synch$  benötigt, die nicht die interne Aktionen  $\tau$  sind. Jedoch müssen trotzdem nicht alle Tests  $T$  betrachtet werden. Es kann eine Einschränkung gemacht werden, sodass  $T$  fast ein Partner ist. Zur Vereinfachung von umständlichen Formulierungen im Folgenden wird hierfür nun ein neuer Begriff definiert. Der jedoch auch bereits so in z.B. [Sch16] analog für EIOs verwendet und definiert wurde.

**Definition 5.14 ( $\chi$ -Partner).** *Ein MEIO  $P_1$  ist ein  $\chi$ -Partner von einem MEIO  $P_2$ , wenn  $I_1 = O_2$  und  $O_1 = I_2 \cup \{\chi\}$  mit  $\chi \notin I_2 \cup O_2$  gilt.*

Ein  $\chi$ -Partner  $P_1$  von  $P_2$  unterscheidet sich von einem Partner von  $P_2$  nur um den Output  $\chi$ , der nicht in der Menge  $Synch(P_1, P_2)$  enthalten ist.

**Lemma 5.15 (*Testing-Verfeinerung mit Divergenz*).** *Gegeben sind zwei MEIOs  $P_1$  und  $P_2$  mit der gleichen Signatur. Wenn für alle Tests  $T$ , die  $\chi$ -Partner von  $P_1$  bzw.  $P_2$  sind,  $P_2 \text{ sat}_{as}^{Div} T \Rightarrow P_1 \text{ sat}_{as}^{Div} T$  gilt, dann folgt daraus die Gültigkeit von  $P_1 \sqsubseteq_{Div} P_2$ .*

*Beweis.* Da  $P_1$  und  $P_2$  die gleiche Signatur haben, definiert man  $I := I_1 = I_2$  und  $O := O_1 = O_2$ . Für jeden  $\chi$ -Partner Test  $T$  gilt  $I_T = O$  und  $O_T = I \cup \{\chi\}$  mit  $\chi \notin I \cup O$ . Um zu zeigen, dass die Relation  $P_1 \sqsubseteq_{Div} P_2$  gilt, müssen die folgenden Punkte nachgewiesen werden:

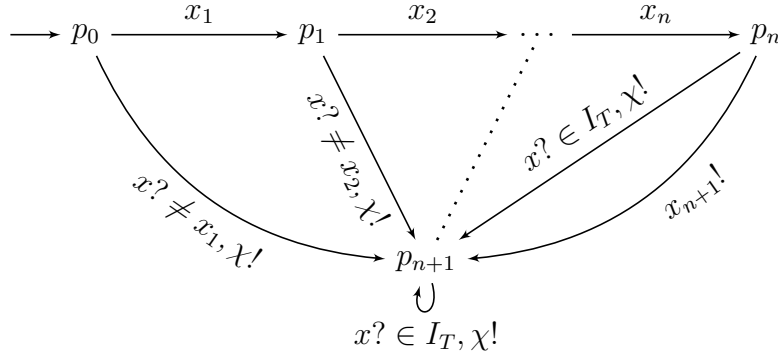
- $EDT_1 \subseteq EDT_2$ ,
- $QDT_1 \subseteq QDT_2$ ,
- $EDL_1 \subseteq EDL_2$ .

In den Lemmata 3.16 und 4.11 wurde bereits etwas Ähnliches gezeigt. Jedoch kann daraus aufgrund der unterschiedlichen Implikationen, die vorausgesetzt werden, nichts über dieses Lemma und dessen Gültigkeit ausgesagt werden. Es kann in diesem Lemma, ebenso wie im Lemma 4.11, aus der lokalen Erreichbarkeit eines Fehlers in einer Parallelkomposition einer as-Implementierung von  $P_1$  mit einem Test  $T$  und der Implikation  $P_2 \text{ sat}_{as}^{Div} T \Rightarrow P_1 \text{ sat}_{as}^{Div} T$  nur geschlossen werden, dass es in einer Parallelkomposition einer as-Implementierung von  $P_2$  mit  $T$  auch einen lokal erreichbaren fehlerhaften Zustand geben muss, jedoch kann die Fehlerhaftigkeit hier ein Fehler, Stille oder Divergenz sein. Analog verhält es sich, wenn in der Parallelkomposition einer as-Implementierung von  $P_1$  mit einem Test  $T$  ein Divergenz-Zustand oder stiller Zustand lokal erreichbar ist. Es kann nur geschlossen werden, dass  $P_2$  den Test  $T$  nicht erfüllen darf. Die nicht Erfüllung kann jedoch auf einem beliebigen Fehlverhalten des MEIOs basieren.

Als Erstes wird der erste Beweispunkt gezeigt, also die Inklusion  $EDT_1 \subseteq EDT_2$ . Es wird für ein präfix-minimales  $w$  aus  $EDT_1$  gezeigt, dass dieses  $w$  oder eines seiner Präfixe in  $EDT_2$  enthalten ist. Diese Möglichkeit bietet sich, da beide Mengen unter cont abgeschlossen sind. Wegen Proposition 5.6.2 ist  $w$  auch ein präfix-minimales Element der Menge  $EDT_{P'_1}$  einer as-Implementierung  $P'_1$  von  $P_1$ .

- Fall 1 ( $w = \varepsilon$ ): Es handelt sich um einen lokal erreichbaren Fehler oder um lokale erreichbare Divergenz in  $P'_1$ . Für  $T$  wird ein Transitionssystem verwendet, das nur aus dem Startzustand und einer must-Schleife für alle Inputs  $x \in I_T$  und einer must-Schleife für  $\chi$  besteht. Somit kann  $P'_1$  im Prinzip die gleichen Fehler- und Divergenz-Zustände wie  $P'_1 \| T$  lokal erreichen.  $P_1$  erfüllt den Test  $T$  nicht.  $P_2$  darf  $T$  somit auch nicht erfüllen. Es muss eine as-Implementierung  $P'_2$  von  $P_2$  existieren, für die  $P'_2 \| T$  einen fehlerhaften Zustand lokal erreicht. Durch die Struktur von  $T$  ist in einer Parallelkomposition mit  $T$  kein stiller Zustand möglich. Der fehlerhafte Zustand, der in  $P'_2 \| T$  lokal erreichbar ist, muss also ein Fehler- oder Divergenz-Zustand sein. Da von  $T$  kein Fehler und keine Divergenz geerbt werden kann und durch die Input-Schleife auch kein neuer Fehler entstehen kann, muss der fehlerhafte Zustand von  $P'_2$  geerbt sein. Somit muss in  $P'_2$  ein Fehler- oder Divergenz-Zustand lokal erreichbar sein. Da  $EDT(P) = ET(P) \cup DT(P)$  gilt, folgt  $w \in EDT_{P'_2}$  und mit 5.6.2  $w \in EDT_2$ .
- Fall 2 ( $w = x_1 \dots x_n x_{n+1} \in \Sigma^+$  mit  $n \geq 0$  und  $x_{n+1} \in I$ ): Es wird der folgende  $\chi$ -Partner  $T$  betrachtet (siehe auch Abbildung 5.1):

- $T = \{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}\}$ ,
- $p_{0T} = p_0$ ,
- $\dashrightarrow_T = \rightarrow_T = \{(p_j, x_{j+1}, p_{j+1}) \mid 0 \leq j \leq n\}$   
 $\cup \{(p_j, x, p_{n+1}) \mid x \in I_T \setminus \{x_{j+1}\}, 0 \leq j \leq n\}$   
 $\cup \{(p_{n+1}, x, p_{n+1}) \mid x \in I_T\}$   
 $\cup \{(p_j, \chi, p_{n+1}) \mid 0 \leq j \leq n+1\}$ ,
- $E_T = \emptyset$ .


 Abbildung 5.1:  $x? \neq x_j$  steht für alle  $x \in I_T \setminus \{x_j\}$ 

Die Mengen der Divergenz- und stillen Zustände des hier betrachteten  $T$ s sind leer. Da im Vergleich zum Transitionssystem in Abbildung 3.1 nur die  $\chi$ -Transitionen zu  $p_{n+1}$  ergänzt und die Mengen unbenannt wurden, ändert sich nichts an dem Fall 2a) im ersten Punkt des Beweises von Lemma 3.16. Im Fall 2b) muss die Menge  $O^*$  durch  $(O \cup \{\chi\})^*$  ersetzt werden. Die Begründungen, wieso in den beiden Fällen  $\varepsilon \in PrET(P'_1 \| T)$  für ein  $P'_1 \in as\text{-impl}(P_1)$  gilt, bleibt also analog zum Beweis von Lemma 3.16. Da nun aber auch Divergenz betrachtet wird, muss ein weiterer Fall ergänzt werden:

- Fall 2c) ( $w \in PrDT_{P'_1}$ ): In  $P'_1 \| T$  erhält man  $(p_{01}, p_0) \xRightarrow{w} (p'', p_{n+1}) \xRightarrow{u} (p', p_{n+1})$  für  $u \in (O \cup \{\chi\})^*$  und  $p' \in Div_1$ . Daraus folgt  $(p', p_{n+1}) \in Div_{P'_1 \| T}$  und somit  $wu \in StDT(P'_1 \| F)$ . Da alle Aktionen aus  $w$  synchronisiert werden und  $I_T \cap I = \emptyset$  gilt  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in O_{P'_1 \| T}$ . Da zusätzlich  $u$  in  $(O \cup \{\chi\})^*$  enthalten ist, folgt  $u \in O_{P'_1 \| T}^*$ . Somit ergibt sich  $\varepsilon \in PrDT(P'_1 \| T)$ .

Da  $\varepsilon$  in  $PrET(P'_1 \| T) \cup PrDT(P'_1 \| T)$  enthalten ist, ist ein Fehler oder Divergenz lokal erreichbar in  $P'_1 \| T$ . Mit der Implikation  $P_2 sat_{as}^{Div} T \Rightarrow P_1 sat_{as}^{Div} T$  kann geschlossen werden, dass in der Parallelkomposition einer as-Implementierung  $P'_2$  von  $P_2$  mit dem Test  $T$  ein fehlerhafter Zustand lokal erreichbar sein muss. Durch die  $\chi$ -Transitionen an den Zuständen von  $T$  kann es in Komposition mit  $T$  keine stillen Zustände geben. Die Fehlerhaftigkeit muss also ein Fehler oder Divergenz sein.



- Fall 2i) ( $\varepsilon \in ET(P'_1||T)$  wegen neuem Fehler): Da jeder Zustand von  $T$  alle Inputs  $x \in I_T = O$  zulässt, muss ein lokal erreichbarer Fehler-Zustand in diesem Fall der Form sein, dass ein Output  $a \in O_T \setminus \{\chi\}$  von  $T$  möglich ist, der nicht mit einem passenden Input aus  $P'_2$  synchronisiert werden kann. Durch die Konstruktion von  $T$  ist in  $p_{n+1}$  kein Output außer  $\chi$  möglich. Ein neuer Fehler muss also die Form  $(p', p_j)$  haben mit  $j \leq n$ ,  $p' \xrightarrow{x_{i+1}}_{P'_2}$  und  $x_{i+1} \in O_T \setminus \{\chi\}$ . Durch Projektion erhält man dann  $p_{02} \xrightarrow{x_1 \dots x_i}_{P'_2} p' \xrightarrow{x_{i+1}}_{P'_2}$  und damit gilt  $x_1 \dots x_{i+1} \in MIT_{P'_2} \subseteq ET_{P'_2}$ . Somit ist ein Präfix von  $w$  in  $EDT_{P'_2}$  enthalten. Wegen des Abschlusses unter cont und wegen Proposition 5.6.2 gilt  $w \in EDT_2$ .
- Fall 2ii) ( $\varepsilon \in ET(P'_2||T)$  wegen geerbtem Fehler):  $T$  hat  $x_1 \dots x_i u$  ausgeführt mit  $u \in (O \cup \{\chi\})^*$  und ebenso hat  $P'_2$  den Weg  $x_1 \dots x_i u|_{\Sigma_2}$  ausgeführt. Durch dies hat  $P'_2$  einen Zustand aus  $E_{P'_2}$  erreicht, da von  $T$  kein Fehler geerbt werden kann. Es gilt dann  $\text{prune}(x_1 \dots x_i u|_{\Sigma_2}) = \text{prune}(x_1 \dots x_i) \in PrET_{P'_2} \subseteq ET_{P'_2}$ . Da  $x_1 \dots x_i$  ein Präfix von  $w$  ist, führt in diesem Fall eine Verlängerung um lokale Aktionen von einem Präfix von  $w$  zu einem Fehler-Zustand. Da  $ET$  der Menge aller Verlängerungen von gekürzten Fehler-Traces entspricht, ist  $x_1 \dots x_i$  in  $EDT_{P'_2}$  enthalten und mit 5.6.2 ist ein Präfix von  $w$  in  $EDT_2$  enthalten.
- Fall 2iii) ( $\varepsilon \in DT(P'_2||T) \setminus ET(P'_2||T)$ ): Da  $T$  nicht unendlich viele Zustände hat und auch keine  $\tau$ -Schleifen besitzt, kann das Divergenz-Verhalten nur von  $P'_2$  geerbt sein.  $T$  hat  $x_1 \dots x_i u$  ausgeführt mit  $u \in (O \cup \{\chi\})^*$  und ebenso hat  $P'_2$  den Weg  $x_1 \dots x_i u|_{\Sigma_2}$  ausgeführt. Durch dies hat  $P'_2$  einen Zustand aus  $Div_{P'_2}$  erreicht. Es gilt dann  $\text{prune}(x_1 \dots x_i u|_{\Sigma_2}) = \text{prune}(x_1 \dots x_i) \in PrDT_{P'_2} \subseteq DT_{P'_2}$ , da  $u|_{\Sigma_2}$  in  $O^*$  enthalten ist. Da  $x_1 \dots x_i$  ein Präfix von  $w$  ist, führt in diesem Fall eine Verlängerung um lokale Aktionen von einem Präfix von  $w$  zu einem divergenten Zustand. Da  $DT$  die Menge aller Verlängerungen von gekürzten Divergenz-Traces ist und  $DT_{P'_2} \subseteq EDT_{P'_2}$  gilt, ist in diesem Fall das Präfix  $x_1 \dots x_i$  von  $w$  in  $EDT_{P'_2}$  enthalten. Mit 5.6.2 folgt daraus, dass ein Präfix von  $w$  in  $EDT_2$  enthalten ist.

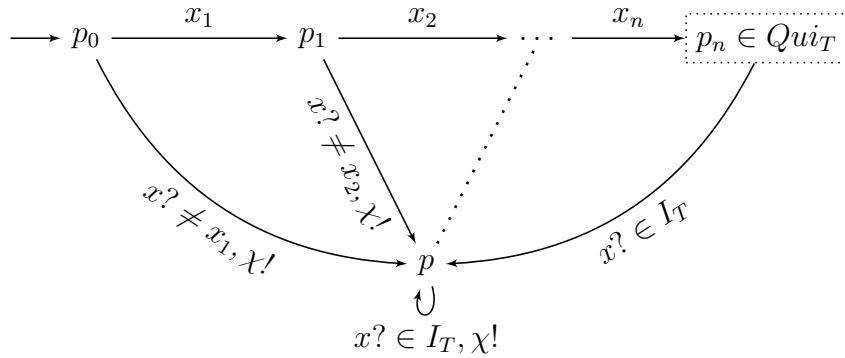
Als nächstes wird nun der zweite Beweispunkt gezeigt, d.h. die Inklusion  $QDT_1 \subseteq QDT_2$ . Diese Inklusion kann jedoch noch, analog zum Beweis der Inklusion der Fehler-gefluteten Sprache aus dem Fehler-Kapitel, weiter eingeschränkt werden. Da bereits bekannt ist, dass  $EDT_1 \subseteq EDT_2$  gilt, muss nur noch  $StQT_1 \setminus EDT_1 \subseteq QDT_2$  gezeigt werden.

Es wird ein  $w \in StQT_1 \setminus EDT_1$  gewählt und gezeigt, dass dieses auch in  $QDT_2$  enthalten ist. Das  $w$  ist aufgrund der Propositionen 4.4 und 5.6.2 auch für eine as-Implementierung  $P'_1$  von  $P_1$  in  $StQT_{P'_1} \setminus EDT_{P'_1}$  enthalten.

Durch die Wahl des  $w$ s wird in  $P'_1$  durch das Wort  $w$  ein stiller Zustand erreicht. Dies hat nur Auswirkungen auf die Parallelkomposition  $P'_1||T$ , wenn in  $T$  ebenfalls ein stiller Zustand durch  $w$  erreicht wird.

Das betrachtete  $w$  hat die Form  $w = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$  mit  $n \geq 0$ . Es wird der folgende  $\chi$ -Partner Test  $T$  betrachtet (siehe auch Abbildung 5.2):

- $T = \{p_0, p_1, \dots, p_n, p\}$ ,
- $p_{0T} = p_0$ ,
- $\dashrightarrow_T \longrightarrow_T = \{(p_j, x_{j+1}, p_{j+1}) \mid 0 \leq j < n\}$   
 $\cup \{(p_j, x, p) \mid x \in (I_T \cup \{\chi\}) \setminus \{x_{j+1}\}, 0 \leq j < n\}$   
 $\cup \{(p_n, x, p) \mid x \in I_T\}$   
 $\cup \{(p, x, p) \mid x \in I_T \cup \{\chi\}\},$
- $E_T = \emptyset$ .


 Abbildung 5.2:  $x? \neq x_j$  steht für alle  $x \in I_T \setminus \{x_j\}$ ,  $p_n$  ist der einzige stille Zustand

Falls das betrachtete  $w$  dem leeren Wort  $\varepsilon$  entspricht, reduziert sich der  $\chi$ -Partner Test  $T$  auf den Zustand  $p_n = p_0$  und den Zustand  $p$ . Es ist also in diesem Fall der Startzustand gleich dem stillen Zustand.

Allgemein ist der Zustand  $p_n$  aus  $T$  der einzige stille Zustand in  $T$ . Es gilt wegen des ersten Punkte von Lemma 4.8, dass auch in der Parallelkomposition  $P'_1 \parallel T$  ein stiller Zustand mit  $w$  erreicht wird. Da es sich bei allen in  $w$  befindlichen Aktionen um synchronisieren Aktionen handelt und  $I_T \cap I = \emptyset$  gilt, folgt  $w \in O_{P'_1 \parallel T}$  und  $w \in StQT(P'_1 \parallel T)$ . Es kann also in der Parallelkomposition durch  $w$  ein stiller Zustand lokal erreicht werden. Da  $w \notin EDT_{P'_1}$ , kann auf dem Weg, der mit  $w$  im Transitionssystem  $P'_1$  zurück gelegt wird, kein Fehler- oder Divergenz-Zustand lokal erreicht werden. Es kann weder von  $P'_1$  noch von  $T$  ein Fehler oder Divergenz auf diesem Weg geerbt werden oder neu entstehen. Da ein stiller Zustand in  $P'_1 \parallel T$  lokal erreichbar ist, erfüllt  $P_1$  den Test  $T$  nicht. Es muss also auch eine as-Implementierung  $P'_2$  von  $P_2$  geben, für die  $P'_2 \parallel T$  einen lokal erreichbaren fehlerhaften Zustand besitzt. Hier kann jedoch zunächst keine Aussage darüber getroffen werden, ob das  $w$  in der Parallelkomposition  $P'_2 \parallel T$  ausführbar ist und ob es sich bei der Fehlerhaftigkeit um Fehler, Stille oder Divergenz handelt.

- Fall a) ( $\varepsilon \in ET(P'_2 \parallel T)$ ): Der lokal erreichbare fehlerhafte Zustand ist ein Fehler. Das  $w$  muss somit nicht ausführbar sein. Der Fehler kann sowohl von  $P'_2$  geerbt sein, wie durch fehlende Synchronisations-Sicherstellung als neuer Fehler in der

Parallelkomposition entstanden sein. Da nur auf dem Trace  $w$  in  $T$  Synchronisations-Probleme auftreten können und wegen den Fällen 2i) und 2ii) des ersten Punktes dieses Beweises ist ein Präfix von  $w$  in  $EDT_{P'_2}$  enthalten. Da die Menge  $EDT$  unter  $\text{cont}$  abgeschlossen ist und 5.6.2 gilt, folgt  $w \in EDT_2 \subseteq QDT_2$ .

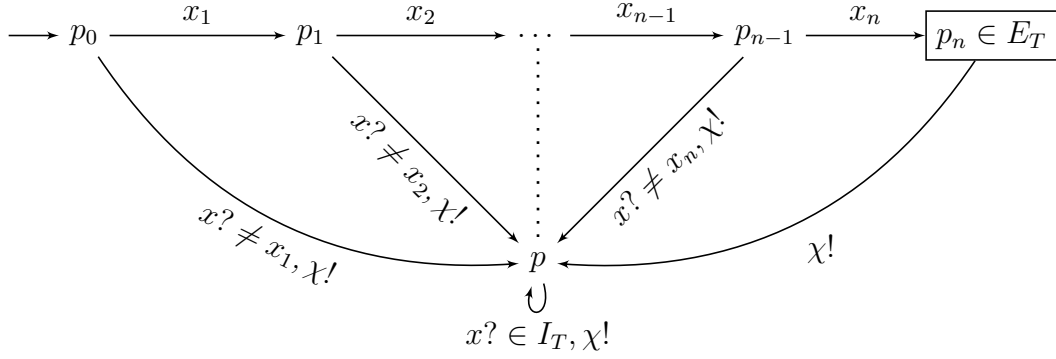
- Fall b) ( $\varepsilon \in DT(P'_2 \parallel T) \setminus ET(P'_2 \parallel T)$ ): Es handelt sich bei dem lokal erreichbaren fehlerhaften Zustand um Divergenz. Die Divergenz muss von  $P'_2$  geerbt sein, da  $T$  keine Möglichkeit für eine unendliche  $\tau$ -Folge hat. Es gilt also, dass bereits in  $P'_2$  ein Präfix von  $w$  in  $EDT_{P'_2}$  enthalten ist, wegen Fall 2iii) des Beweises des ersten Punktes dieses Lemmas. Mit dem Abschluss unter  $\text{cont}$  und 5.6.2 folgt, dass auch  $w \in EDT_2 \subseteq QDT_2$  gilt.
- Fall c) (stiller Zustand lokal erreichbar in  $P'_2 \parallel T$  und  $\varepsilon \notin EDT(P'_2 \parallel T)$ ): Da in  $T$  nur durch  $w$  ein stiller Zustand erreicht werden kann, muss es sich bei dem lokal erreichbaren stillen Zustand in  $P'_2 \parallel T$  um einen handeln, der mit  $w$  erreicht werden kann. Mit dem zweiten Punkt von Lemma 4.8 kann gefolgert werden, dass auch in  $P'_2$  ein stiller Zustand mit  $w$  erreichbar sein muss, da  $ET(P'_2 \parallel T)$  eine Teilmenge von  $EDT(P'_2 \parallel T)$  ist. Es gilt also  $w \in StQT_{P'_2} \subseteq QDT_{P'_2}$ . Mit dem dritten Punkt von Proposition 5.6 folgt daraus  $w \in QDT_2$ .

Nun wird mit dem letzten Punkt des Beweises begonnen. Analog wie in den Beweisen zu den Lemmata 3.16 und 4.11 ist hier aufgrund der bereits geführten Beweisteile nur noch  $L_1 \setminus EDT_1 \subseteq EDL_2$  zu zeigen. Es wird also für ein beliebig gewähltes  $w \in L_1 \setminus EDT_1$  gezeigt, dass es auch in  $EDL_2$  enthalten ist. Es gilt auch  $w \in L_{P'_1} \setminus EDL_{P'_1}$  für eine as-Implementierung  $P'_1$  von  $P_1$ , wegen 2.8 und 5.6.

- Fall 1 ( $w = \varepsilon$ ): Analog zu den Lemmata 3.16 und 4.11 gilt auch hier, dass  $\varepsilon$  immer in  $EDL_2$  enthalten ist.
- Fall 2 ( $w = x_1 \dots x_n$  mit  $n \geq 1$ ): Die Konstruktion des  $\chi$ -Partner Tests  $T$  weicht nur durch die  $\chi$ -Transitionen vom Transitionssystem aus dem Beweis der Inklusion der Fehler-gefluteten Sprache  $EL$  aus Lemma 3.16 ab. Der Test  $T$  ist dann wie folgt definiert (siehe dazu auch Abbildung 5.3):

- $T = \{p_0, p_1, \dots, p_n, p\}$ ,
- $p_0 T = p_0$ ,
- $\dashrightarrow_T = \longrightarrow_T = \{(p_j, x_{j+1}, p_{j+1}) \mid 0 \leq j < n\}$   
 $\cup \{(p_j, x, p) \mid x \in I_T \setminus \{x_{j+1}\}, 0 \leq j < n\}$   
 $\cup \{(p_j, \chi, p) \mid 0 \leq j \leq n\}$   
 $\cup \{(p, x, p) \mid x \in I_T \cup \{\chi\}\},$
- $E_T = \{p_n\}$ .

Durch die  $\chi$ -Transition an den Zuständen wird wie oben vermieden, dass es in einer Komposition mit  $T$  und auch in  $T$  selbst stille Zustände geben kann. Da  $p_{01} \xRightarrow{w}_{P'_1} p'_1$  gilt, kann man schließen, dass  $P'_1 \parallel T$  einen lokal erreichbaren geerbten


 Abbildung 5.3:  $x? \neq x_j$  steht für alle  $x \in I_T \setminus \{x_j\}$ ,  $p_n$  ist der einzige Fehler-Zustand

Fehler hat. Es muss also auch eine as-Implementierung  $P'_2$  von  $P_2$  geben, sodass  $P'_2 \parallel T$  einen lokal erreichbaren fehlerhaften Zustand hat. Wie oben bereits erwähnt, kommt Stille als Fehlerhaftigkeit nicht in Frage.

- Fall 2a) (neuer Fehler aufgrund von  $x_i \in O_T \setminus \{\chi\}$  und  $p_{02} \xRightarrow{x_1 \dots x_{j-1}} p'_2 \not\xrightarrow{x_j}$ ): Es gilt  $x_1 \dots x_j \in MIT_{P'_2}$  und somit  $w \in EDL_{P'_2}$ . Anzumerken ist, dass nur auf diesem Weg Outputs von  $T$  aus der Menge  $\text{Synch}(P'_2, T)$  möglich sind, deshalb gibt es keine anderen Outputs von  $T$ , die zu einem neuen Fehler führen könnten. Wegen 5.6 gilt  $w \in EDL_2$ .

Die restlichen Fälle sind analog zu Lemma 3.16 möglich. Somit gilt für alle Fälle (2a) bis 2d)), dass  $w$  in  $EDL_2$  enthalten ist, da  $EL_2 \subseteq EDL_2$  gilt.

- Fall 2e) (Divergenz und kein neuer Fehler): Da  $T$  keine Möglichkeit hat zu divergieren, muss diese Möglichkeit von  $P'_2$  geerbt sein. Es gilt dann  $p_{02} \xRightarrow{x_1 \dots x_j u} p'_2$  für  $j \geq 0$  und  $u \in O^*$ . Somit ist  $x_1 \dots x_j u \in StDT_{P'_2}$  und damit  $\text{prune}(x_1 \dots x_j u) = \text{prune}(x_1 \dots x_j) \in PrDT_{P'_2} \subseteq EDT_{P'_2}$ . Also folgt mit 5.6.2, dass  $w$  in  $EDT_2 \subseteq EDL_2$  enthalten ist, da  $DT$  unter  $\text{cont}$  abgeschlossen ist.

□

**Satz 5.16.** Aus  $P_1 \sqsubseteq_{Div} P_2$  folgt, dass  $P_1$   $P_2$  Divergenz-verfeinert.

*Beweis.* Ein Fehler-, stille oder Divergez-Zustand ist nach Definition genau dann in einem MEIO  $P$  lokal erreichbar, wenn  $w \in QDT_P$  für ein  $w \in O_P^*$  gilt.

Um nachzuweisen, dass  $P_1$   $P_2$  Divergenz-verfeinert, muss bewiesen werden, dass für alle Tests  $T$  von  $P_1$  bzw.  $P_2$   $P_2 \text{ sat}_{as}^{Div} T \Rightarrow P_1 \text{ sat}_{as}^{Div} T$  gilt. Anstatt diese Aussage direkt zu beweisen, wird hier die äquivalente Aussage  $\neg P_1 \text{ sat}_{as}^{Div} T \Rightarrow \neg P_2 \text{ sat}_{as}^{Div} T$  für alle Test  $T$  von  $P_1$  und  $P_2$  nachgewiesen. Sei  $T$  ein beliebiger Test  $T$  von  $P_1$ , für den  $\neg P_1 \text{ sat}_{as}^{Div} T$  gilt. Für eine as-Implementierung  $P'_1$  von  $P_1$  wird also ein Fehler-, stille oder Divergez-Zustand in  $P'_1 \parallel T$  lokal erreicht. Es muss ein  $w \in O_{P'_1 \parallel T}^*$  geben, das in der Menge  $QDT_{P'_1 \parallel T}$

enthalten ist. Ein Element der Menge  $QDT_{P'_1\|T}$  kann in dieser enthalten sein, wenn es nach Definition 5.5 Element einer der zwei folgenden Mengen ist:  $EDT_{P'_1\|T}$  oder  $StQT_{P'_1\|T}$ .

- Fall 1 ( $w \in EDT_{P'_1\|T}$ ): Da  $w$  nur aus Outputs besteht, muss auch  $\varepsilon \in EDT_{P'_1\|T}$  gelten. Mit Satz 5.8 folgt  $\varepsilon \in \text{cont}(\text{prune}((EDT_{P'_1}\|EDL_T) \cup (EDL_{P'_1}\|EDT_T)))$ . Durch Proposition 5.6 und die präfix-Minimalität von  $\varepsilon$  folgt  $\varepsilon \in \text{prune}((EDT_1\|EDL_T) \cup (EDL_1\|EDT_T))$ . Eine Verlängerung  $w' \in O_{P_1\|T}$  von  $\varepsilon$  um lokale Aktionen muss in der Menge  $EDT_1\|EDL_T$  oder in der Menge  $EDL_1\|EDT_T$  enthalten sein. Es muss also eine Projektion des Wortes  $w$  auf die einzelnen Komponenten geben, so dass  $w \in w_1\|w_T$  mit  $w_1 \in EDT_1$  bzw.  $w_1 \in EDL_1$  und  $w_T \in EDL_T$  bzw.  $w_T \in EDT_T$  gilt. Mit der Voraussetzung  $P_1 \sqsubseteq_{Div} P_2$  folgt  $w_1 \in EDT_2$  bzw.  $w_1 \in EDL_2$ . Wegen Proposition 5.6 muss es ein  $P'_2$  aus  $\text{as-impl}(P_2)$  geben, für das  $w_1 \in EDT_{P'_2}$  bzw.  $w_1 \in EDL_{P'_2}$  gilt. In der Parallelkomposition mit  $T$  gilt also  $w' \in (EDT_{P'_2}\|EDL_T) \cup (EDL_{P'_2}\|EDT_T)$ . Da  $P_1$  und  $P_2$  die gleiche Signatur haben gilt  $w' \in O_{P'_2\|T}$  und somit  $\varepsilon \in \text{prune}((EDT_{P'_2}\|EDL_T) \cup (EDL_{P'_2}\|EDT_T)) \subseteq EDT_{P'_2\|T}$ , wegen Satz 5.8. In der Parallelkomposition  $P'_2\|T$  ist ein Fehler- oder Divergenz-Zustand lokal erreichbar. Für die Spezifikation  $P_2$  von  $P'_2$  folgt somit also  $\neg P_2 \text{ sat}_{as}^{Div} T$ .
- Fall 2 ( $w \in StQT_{P'_1\|T} \setminus EDT_{P'_1\|T}$ ): Das Wort  $w$  muss in  $P'_1\|T$  zu einem Zustand  $(p_1, p_T)$  führen, der still und keine Fehler ist. Die Zustände  $p_1$  und  $p_T$ , die in Komposition den Zustand in  $P_1\|P_T$  ergeben müssen nach Lemma 4.8.2 ebenfalls still sein. Es gibt also Wörter  $w_1$  und  $w_T$ , so dass  $w_1$  in  $P'_1$  den Zustand  $p_1$  und  $P_T$  den Zustand  $p_T$  erreicht mit  $w \in w_1\|w_T$ .  $w_1$  und  $w_T$  sind also in der Menge  $StQT$  ihres Transitionssystems enthalten. Für  $w_1$  gilt  $w_1 \in StQT_{P'_1} \subseteq QDT_{P'_1} \subseteq QDT_1$ , wegen Proposition 5.6.  $w_1 \in QDT_2$  folgt durch die Voraussetzung  $P_1 \sqsubseteq_{Div} P_2$ . Mit Proposition 5.6 muss es eine as-Implementierung  $P'_2$  von  $P_2$  geben, für die  $w_1$  in der Menge  $QDT_{P'_2} = EDT_{P'_2} \cup StQT_{P'_2}$  enthalten ist.
  - Fall 2a) ( $w \in EDT_{P'_2}$ ): Für das Wort  $w_T$  gilt  $w_T \in L_T \subseteq EDL_T$ , da es in  $T$  ausführbar ist. Mit Satz 5.8.1 folgt  $w \in EDL_{P'_2\|T}$ . Da  $w$  nur aus Outputs besteht, ist ein Fehler- oder Divergenz-Zustand in  $P'_2\|T$  lokal erreichbar wie in Fall 1 dieses Beweises. Es folgt  $\neg P_2 \text{ sat}_{as}^{Div} T$ .
  - Fall 2b) ( $w_1 \in StQT_{P'_2}$ ): Durch  $w_1$  wird in  $P'_2$  ein stiller Zustand  $p_2$  erreicht. In der Parallelkomposition ist der Zustand  $(p_2, p_T)$ , wegen Lemma 4.8.1, ebenfalls still. Der Zustand wird durch  $w_1\|w_T$  erreicht. Es gilt also  $w \in StQT_{P'_2\|T}$ . Das  $w$  besteht auch für die Parallelkomposition  $P'_2\|T$  nur aus Outputs, da  $P_1$  und  $P_2$  nach Voraussetzung die selbe Signatur besitzen müssen. Es ist also ein stiller Zustand lokal erreichbar in  $P'_2\|T$ .  $\neg P_2 \text{ sat}_{as}^{Div} T$  gilt also auch in diesem Fall.

□

Es wurde, wie in den letzten beiden Kapiteln, eine Kette an Folgerungen gezeigt, die sich zu einem Ring schließt. Jedoch ändert sich an der Begründung für einen der Folgepfeile etwas, da in Lemma 5.15  $T$  kein Partner ist, sondern ein  $\chi$ -Partner. Die Folgerungskette ist in Abbildung 5.4 dargestellt.

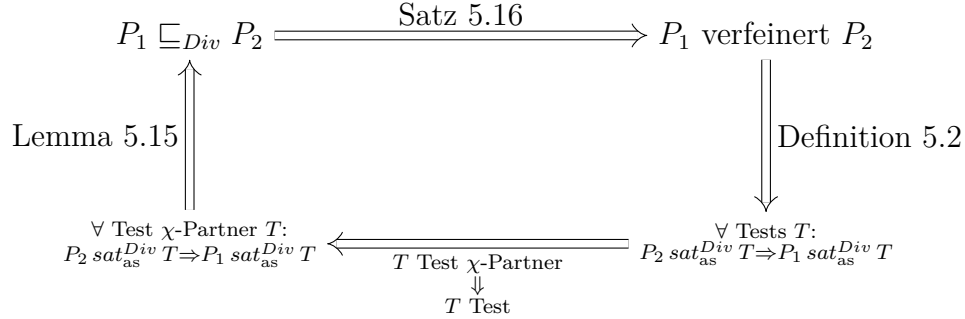


Abbildung 5.4: Folgerungskette der Testing-Verfeinerung und Divergenz-Relation

Das nächste Korollar macht die Äquivalenz, die durch die Abbildung 5.4 deutlich wird, explizit.

**Korollar 5.17.** *Es gilt:  $P_1 \sqsubseteq_{Div} P_2 \Leftrightarrow P_1$  Divergenz-verfeinert  $P_2$ .*

## 5.2 Zusammenhänge

**Satz 5.18 (Zusammenhang der Verfeinerungs-Relationen mit der Divergenz-Relation).** *Für zwei MEIOs  $P$  und  $Q$  gilt  $P \sqsubseteq_{as} Q \Rightarrow P \sqsubseteq_{Div} Q$ . Aus keiner der anderen bisher erwähnten Relationen folgt  $\sqsubseteq_{Div}$  und auch aus der Relation  $\sqsubseteq_{Div}$  kann keine der anderen Relationen gefolgert werden.*

*Für eine Spezifikation  $Q$ , die keinen Divergenten-Zustand erreichen kann (durch beliebige Aktionen) gilt  $P \sqsubseteq_{w-as} Q \Rightarrow P \sqsubseteq_{Qui} Q$ . Die umgekehrte Richtung gilt jedoch auch unter dieser Einschränkung nicht.*

*Beweis.*

$P \sqsubseteq_{as} Q \Rightarrow P \sqsubseteq_{Div} Q$ :

Um diese Implikation zu zeigen, muss nachgewiesen werden, dass eine beliebige as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$  zwischen  $P$  und  $Q$  auch die Eigenschaften der Relation  $\sqsubseteq_{Div}$  erfüllt. Da  $\mathcal{R}$  eine as-Verfeinerungs-Relation zwischen  $P$  und  $Q$  ist, muss  $p_0 \mathcal{R} q_0$  gelten. Es sind die folgenden Punkte nachzuweisen:

- $EDT_P \subseteq EDT_Q$ ,
- $QDT_P \subseteq QDT_Q$ ,
- $EDL_P \subseteq EDL_Q$ .

Die Menge  $EDT$  ist unter  $\text{cont}$  abgeschlossen. Es reicht also für den ersten Punkt zu zeigen, dass ein beliebiges präfix-minimales  $w$  aus  $EDT_P$  auch in  $EDT_Q$  enthalten ist. Das Wort  $w$  kann ein Element aus  $ET_P$  oder  $DT_P$  sein. Für  $w$  aus  $ET_P$  folgt mit Satz 3.19 und da jede starke as-Verfeinerung auch eine schwache ist (Lemma 2.14) bereits  $w \in ET_Q$ . Es kann also im folgenden davon ausgegangen werden dass  $w$  ein präfix-minimales Element aus  $DT_P$  ist. Es gibt in  $P$  einen Trace der Form wie in Lemma 3.7 für den der erreichte Zustand  $p_n$  in  $Div_P$  enthalten ist. Mit Lemma 3.7 ein Präfix von  $w$  muss zu einem Zustand in  $E_Q$  führen oder es gibt einen passenden Trace in  $Q$  für  $w$ . Falls es einen Zustand  $q_j \in E_Q$  gibt, gibt mit Lemma 3.7  $w \in ET_Q \subseteq EDT_Q$ . Es kann für den restlichen Beweis davon ausgegangen werden, dass der Trace des Wortes  $w$  in  $Q$  ausführbar ist. Es gibt also ein  $q_n$ , dass durch  $w$  in  $Q$  erreicht wird mit  $(p_n, q_n) \in \mathcal{R}$ , wegen Lemma 3.7. Von  $p_n$  ist eine unendliche Folge an  $\tau$ s ausführbar. Diese Folge kann wie in Lemma 3.7 als Trace aufgefasst werden, nur in diesem Fall als unendlicher Trace. Wie bereits im Beweis von 3.7 erwähnt, gilt die Erweiterung für unendliche Trace nur für lokal endliche Transitionssysteme durch das Königs Lemma der Graphentheorie. Es ist also entweder ein Zustand von  $q_n$  aus mit  $\tau$ s erreichbar, der in  $E_Q$  enthalten ist oder von  $q_n$  aus ist ebenfalls eine unendliche Folge an  $\tau$ s ausführbar ist, da die Transitionen von  $P$  Transitionen in  $Q$  entsprechen müssen. Es gilt also entweder  $w \in ET_Q \subseteq EDT_Q$  oder  $q_n \in Div_Q$  und somit  $w \in DT_Q \subseteq EDT_Q$ .

Da im ersten Punkt bereits die  $EDT$ -Inklusion bewiesen wurde, reicht es für den zweiten Punkt aus zu zeigen, dass  $StQT_P \setminus EDT_P \subseteq QDT_Q$  gilt. In Satz 4.14 wurde bereits die Inklusion  $StQT_P \setminus ET_P \subseteq QET_Q$  gezeigt unter der Voraussetzung, dass es eine starke as-Verfeinerungs-Relation zwischen  $P$  und  $Q$  gibt. Es gilt  $ET_P \subseteq EDT_P$  und  $QET_Q \subseteq QDT_Q$ . Es folgt also die zu zeigende Inklusion aus der bereits bewiesenen.

Für den letzten Punkt kann ebenfalls eine Einschränkung der zu zeigenden Inklusion vorgenommen werden. Es muss also  $EDL_P \setminus EDT_P \subseteq EDL_Q$  bewiesen werden. Es gilt  $L_P \subseteq EDL_P \setminus EDT_P$ . In Satz 3.19 wurde die Inklusion  $L_P \subseteq EL_Q$  unter der Voraussetzung einer schwachen as-Verfeinerungs-Relation bewiesen. Es gilt also wegen der Implikation  $\sqsubseteq_{\text{as}} \Rightarrow \sqsubseteq_{\text{w-as}}$  (Lemma 2.14) und wegen der Inklusion  $EL_Q \subseteq EDL_Q$  auch die hier nach zuweisende Inklusion.

$P \sqsubseteq_{Div} Q \not\Rightarrow P \sqsubseteq_E Q$ :

Diese Implikation gilt nicht, da  $\sqsubseteq_{Div}$  nicht zwischen Fehler und Divergenz unterscheiden kann,  $\sqsubseteq_E$  hingegen nur Fehler berücksichtigt und Divergenz nicht als Fehlverhalten auffasst. Ein entsprechende Gegenbeispiel ist in Abbildung 5.5 dargestellt. Die Sprachen beider Transitionssysteme sind gleich und bestehen nur aus dem leeren Wort. Für beide Systeme besteht die Menge  $EDT$  aus allen Wörtern, die über dem Alphabet  $\Sigma$  möglich sind. Es gibt keine Stille-Trace. Somit gilt also  $P \sqsubseteq_{Div} Q$ .

Für  $P \sqsubseteq_E Q$  müsste  $ET_P \subseteq ET_Q$  gelten. Jedoch ist die Menge  $ET_Q$  leer, da  $Q$  keine Fehler-Zustände enthält und vorausgesetzt werden kann, dass  $I$  leer ist und es keine Input-kritischen Traces geben kann. Für  $P$  ist jedoch der Startzustand ein Fehler-Zustand und somit entspricht  $ET_P$  der Menge  $\Sigma^*$ . Die geforderte Inklusion gilt nicht und somit kann auch die Relation  $\sqsubseteq_E$  zwischen  $P$  und  $Q$  nicht gelten.


 Abbildung 5.5: Gegenbeispiel zu  $\sqsubseteq_{Div} \Rightarrow \sqsubseteq_E$  mit  $I_P = I_Q = \emptyset$ 

$P \sqsubseteq_{Div} Q \not\Rightarrow P \sqsubseteq_{Qui} Q$ ,  $P \sqsubseteq_{Div} Q \not\Rightarrow P \sqsubseteq_{w-as} Q$  und  $P \sqsubseteq_{Div} Q \not\Rightarrow P \sqsubseteq_{as} Q$ :

Falls eine dieser Implikationen gelten würde, würde mit den bereits in Lemma 2.14 und den Sätzen 3.19 und 4.14 bewiesenen Implikationen und der Transitivität von Implikationen folgen, dass auch  $P \sqsubseteq_E Q$  gilt. Dies stellt ein Widerspruch zum letzten Punkt dieses Beweises dar. Es kann also keine der Implikationen gelten.

$P \sqsubseteq_{w-as} Q \not\Rightarrow P \sqsubseteq_{Div} Q$ :

Das Problem dieser Implikation beruht darauf, dass eine schwache as-Verfeinerungs-Relation zulässt, dass  $\tau$ -Transitionen schwach gematched werden. Es ist also möglich, eine unendliche  $\tau$ -Folge ohne eine einzige Transition zu matchen. Das Gegenbeispiel in Abbildung 5.6 verdeutlicht dies.  $P$  und  $Q$  stehen in der schwachen as-Verfeinerungs-Relation  $\mathcal{R}$ , die nur aus dem Tupel  $(p_0, q_0)$  besteht. Die Transitionssysteme bestehen nur aus dem Startzustände, die beide keine Fehler-Zustände sind.  $Q$  besitzt keine Transitionen und  $P$  nur eine Transition für eine interne Aktion. Es sind also die Punkt 1. bis 4. der Definition 2.4 für  $\mathcal{R}$  bereits erfüllt. Der 5. Punkt fordert, die schwache Transition  $q_0 \xRightarrow{\hat{\tau}}_Q q$  mit  $(p_0, q) \in \mathcal{R}$  für ein  $q$  aus  $Q$ .  $\hat{\tau}$  entspricht  $\varepsilon$  somit ist  $q_0$  eine zulässige Wahl für  $q$ .  $\mathcal{R}$  erfüllt also auch den letzten Punkt der Definition 2.4 und ist deshalb eine schwache as-Verfeinerungs-Relation.

$Q$  enthält keine Fehler- oder Divergenz-Zustände. Es gilt also  $EDT_Q = \emptyset$ . Für  $P$  ist jedoch der Startzustand ein divergenter Zustand. Es gilt also  $\varepsilon \in StDT_P \subseteq EDT_P$ . Die Inklusion  $EDT_P \subseteq EDT_Q$ , die für die Relation  $\sqsubseteq_{Div}$  zwischen  $P$  und  $Q$  notwendig wäre, ist also nicht erfüllt.


 Abbildung 5.6: Gegenbeispiel zu  $\sqsubseteq_{w-as} \Rightarrow \sqsubseteq_{Div}$ 

$P \sqsubseteq_E Q \not\Rightarrow P \sqsubseteq_{Div} Q$ :

Mit der Implikation  $\sqsubseteq_{w-as} \Rightarrow \sqsubseteq_E$ , die bereits in Satz 3.19 bewiesen wurde, kann gefolgert werden, dass das im letzten Punkt angegebenen Beispiel aus für diese Implikation anwendbar ist. Es galt  $P \sqsubseteq_{w-as} Q$  somit gilt auch  $P \sqsubseteq_E Q$ . Die Relation  $\sqsubseteq_{Div}$  hingegen ist zwischen  $P$  und  $Q$  nicht erfüllt. Es folgt also, dass die hier angegebenen Implikation ebenfalls nicht gilt.



$P \sqsubseteq_{Qui} Q \not\Rightarrow P \sqsubseteq_{Div} Q$ :

Das Gegenbeispiel aus Abbildung 5.6 funktioniert auch für diese Implikation jedoch mit einer anderen Begründung. Unter der Voraussetzung, dass  $I = \emptyset$  ist, gibt es keine Input-kritischen Traces in  $Q$  und in  $P$ . Weder  $Q$  noch  $P$  enthalten Fehler-Zustände somit gilt  $ET_P = ET_Q = \emptyset$ . Da die Zustände  $q_0$  und  $p_0$  beide keine ausgehenden must-Transitionen besitzen, sind beide still. Es gilt also  $StQT_P = StQT_Q = \{\varepsilon\}$ . Die Sprachen beider MEIOs bestehen nur aus dem leeren Wort. Es gelten also die notwendigen Inklusionen, damit  $P \sqsubseteq_{Qui} Q$  erfüllt ist. Wie bereits begründet wurde, erfüllen  $P$  und  $Q$  jedoch nicht die Voraussetzungen für  $P \sqsubseteq_{Div} Q$ .

$P \sqsubseteq_{w-as} Q \Rightarrow P \sqsubseteq_{Qui} Q$  für  $Q$  erreicht keinen divergenten Zustand:

Der Beweis verläuft analog zum Beweis der Implikation  $P \sqsubseteq_{as} Q \Rightarrow P \sqsubseteq_{Qui} Q$  aus Satz 4.14 bis zu dem Punkt, an dem man ein  $q_n$  in  $Q$  mit  $p_n \mathcal{R} q_n$  erreicht, in dem man statt Lemma 3.7 das Lemma 3.6 anwendet und  $\mathcal{R}$  eine schwache und keine starke as-Verfeinerungs-Relation ist. Für  $p_n$  als stillen Zustand gilt ebenfalls  $p_n \not\rightarrow_P^\omega$  für alle  $\omega \in (O \cup \{\tau\})$ . Daraus folgt mit der Definition der Relation  $\Rightarrow$  auch  $p_n \not\rightarrow_P^{\hat{\omega}}$  für alle  $\omega \in O$ .  $\hat{\tau}$  ist für  $p_n$  auf jeden Fall via „must-Transitionen“ schwach ausführbar. Darin bestand das Problem, das das Gegenbeispiel im Satz 4.14 für diese Implikation ohne die Einschränkung für  $Q$  ausgenutzt hat. Es kann jedoch via must-Transitionen mit dem leeren Wort von  $p_n$  aus kein von  $p_n$  verschiedener Zustand erreicht werden, da  $p_n \not\rightarrow_P^{\tau}$  gilt. Es gilt also für alle Zustände  $p \in P \setminus \{p_n\}$   $p_n \not\rightarrow_P^{\hat{\tau}} p$ . Für  $Q$  gilt  $q_n \rightarrow_Q^{\tau} q_n$ , da  $q_n$  in  $Q$  erreichbar ist durch  $w$  und somit nicht divergent sein darf nach Voraussetzung. Zusammen mit 2.4.3 gilt somit für alle  $\omega \in (O \cup \{\tau\})$   $q_n \not\rightarrow_Q^{\omega}$ .  $q_n$  ist also in  $Qui_Q$  enthalten und damit folgt auch  $w \in StQT_Q \subseteq QET_Q$ .

$P \sqsubseteq_{w-as} Q \not\Rightarrow P \sqsubseteq_{Qui} Q$  für  $Q$  erreicht keinen divergenten Zustand:

Wenn  $Q$  eine Spezifikation ohne erreichbare Divergenz sein muss, kann das Gegenbeispiel aus Abbildung 4.7 mit einer kleinen Veränderung trotzdem verwendet werden. Die  $\tau$ -Schleifen müssen durch Output-Schleifen für ein  $o' \neq o$  ersetzt werden. Die Sprachen verändern sich dadurch, jedoch gilt  $L(P) \subset L(Q)$  auch unter der Veränderung.  $\square$

# Literaturverzeichnis

- [BFLV16] Ferenc Bujtor, Sascha Fendrich, Gerald Lüttgen, und Walter Vogler, *Non-deterministic Modal Interfaces*, Theor. Comput. Sci. **642** (2016), 24–53.
- [BV15a] Ferenc Bujtor und Walter Vogler, *Error-pruning in interface automata*, Theor. Comput. Sci. **597** (2015), 18–39.
- [BV15b] ———, *Failure Semantics for Modal Transition Systems*, ACM Trans. Embedded Comput. Syst. **14** (2015), no. 4, 67:1–67:30.
- [Sch16] Ayleen Schinko, *Kommunikationsfehler, Verklemmung und Divergenz bei Interface-Automaten*, Bachelorarbeit, Universität Augsburg, 2016.