

1 Definitionen

Stand: 18. Juli 2017

Kombination aus [BV15] und [Sch16] mit Einflüssen von [BFLV16]:

Definition 1.1 (*Modal Error-I/O-Transitionssystem*). Ein Modal Error-I/O-Transitionssystem (MEIO) ist ein Tupel $(P, I, O, \longrightarrow, \dashrightarrow, p_0, E)$ mit:

- P : Menge der Zustände,
- $p_0 \in P$: Startzustand,
- I, O : disjunkte Mengen der (sichtbaren) Input- und Output-Aktionen,
- $\longrightarrow \subseteq P \times \Sigma_\tau \times P$: must-Transitions-Relation,
- $\dashrightarrow \subseteq P \times \Sigma_\tau \times P$: may-Transitions-Relation,
- $E \subseteq P$: Menge der Fehler-Zustände.

Es wird vorausgesetzt, dass $\longrightarrow \subseteq \dashrightarrow$ (syntaktische Konsistenz) gilt.

Das Alphabet bzw. die Aktionsmenge eines MEIO ist $\Sigma = I \cup O$. Die interne Aktion τ ist nicht in Σ enthalten. Jedoch wird $\Sigma_\tau := \Sigma \cup \{\tau\}$ definiert. Die Signatur eines MEIOs entspricht $\text{Sig}(P) = (I, O)$.

Falls $\longrightarrow = \dashrightarrow$ gilt, wird P auch Implementierung genannt.

Implementierungen entsprechen den in [Sch16] behandelten EIOs.

Must-Transitions sind Transitions, die von einer Verfeinerung implementiert werden müssen. Die may-Transitions sind hingegen die zulässigen Transitions für eine Verfeinerung.

MEIOs werden in dieser Arbeit durch ihre Zustandsmenge (z.B. P) identifiziert und falls notwendig werden damit auch die Komponenten indiziert (z.B. I_P anstatt I). Falls das MEIO selbst bereits einen Index hat (z.B. P_1) kann an der Komponente die Zustandsmenge als Index wegfallen und nur noch der Index des gesamten Transitionssystems verwendet werden (z.B. I_1 anstatt I_{P_1}). Zusätzlich stehen i, o, a, ω und α für Buchstaben aus den Alphabeten $I, O, \Sigma, O \cup \{\tau\}$ und Σ_τ .

Es wird die Notation $p \xrightarrow{\alpha} p'$ für $(p, \alpha, p') \in \dashrightarrow$ und $p \xrightarrow{\alpha}$ für $\exists p' : (p, \alpha, p') \in \dashrightarrow$ verwendet. Dies kann entsprechend auf Buchstaben-Sequenzen $w \in \Sigma_\tau^*$ erweitert werden zu $p \xrightarrow{w} p'$ ($p \xrightarrow{w}$) steht für die Existenz eines Laufes $p \xrightarrow{\alpha_1} p_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots p_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} p'$ ($p \xrightarrow{\alpha_1} p_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots p_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n}$) mit $w = \alpha_1 \dots \alpha_n$.

1 Definitionen

Desweiteren soll $w|_B$ die Aktions-Sequenz bezeichnen, die man erhält, wenn man aus w alle Aktionen löscht, die nicht in $B \subseteq \Sigma$ enthalten sind. \hat{w} steht für $w|_\Sigma$. Es wir $p \stackrel{w}{\Rightarrow} p'$ für ein $w \in \Sigma^*$ geschrieben, falls $\exists w' \in \Sigma_\tau^* : \hat{w}' = w \wedge p \xrightarrow{w'} p'$, und $p \stackrel{w}{\Rightarrow} p'$ für ein beliebiges p' gilt. Falls $p_0 \stackrel{w}{\Rightarrow} p$ gilt, dann wird w *Trace* genannt und p ist ein *erreichbarer Zustand*.

Analog zu $\xrightarrow{\cdot}$ und \Rightarrow werden \longrightarrow und \Longrightarrow für die entsprechenden Relationen der must-Transition verwendet.

Outputs und die interne Aktion werden *lokale Aktionen* genannt, da sie lokal vom ausführenden MEIO kontrolliert sind. Um eine Erleichterung der Notation zu erhalten, soll gelten, dass $p \xrightarrow{a} p'$ und $p \xrightarrow{a} p'$ für $\nexists p' : p \xrightarrow{a} p'$ und $\nexists p' : p \xrightarrow{a} p'$ stehen soll. $p \xrightarrow{a} p' \stackrel{\varepsilon}{\Rightarrow} p''$ wird geschrieben, wenn sowohl ein p' wie auch ein p'' existiert, so dass $p \xrightarrow{a} p' \stackrel{\varepsilon}{\Rightarrow} p''$ gilt. Diese Transition wird auch als *schwache-nachlaufende must-Transition* bezeichnet. Entsprechen steht $\xrightarrow{a} \stackrel{\varepsilon}{\Rightarrow}$ für die *schwache-nachlaufende may-Transition*.

In Graphiken wird eine Aktion a als $a?$ notiert, falls $a \in I$ und $a!$, falls $a \in O$. Must-Transitionen (may-Transitionen) werden als durchgezogener Pfeil gezeichnet (gestrichelter Pfeil). Entsprechend der syntaktischen Konsistenz repräsentiert jede gezeichnete must-Transition auch gleichzeitig die zugrundeliegende may-Transitionen.

Definition 1.2 (Parallelkomposition). Zwei MEIOs $P_1 = (P_1, I_1, O_1, \longrightarrow_1, \xrightarrow{\cdot}_1, p_{01}, E_1)$ und $P_2 = (P_2, I_2, O_2, \longrightarrow_2, \xrightarrow{\cdot}_2, p_{02}, E_2)$ sind komponierbar, falls $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Für solche MEIOs ist die Parallelkomposition $P_{12} := P_1 \parallel P_2 = ((P_1 \times P_2), I, O, \longrightarrow_{12}, \xrightarrow{\cdot}_{12}, (p_{01}, p_{02}), E)$ definiert mit: TODO: erzwungenen Zeilenumbrüche kontrollieren

- $I = (I_1 \cup I_2) \setminus (O_1 \cup O_2),$
- $O = (O_1 \cup O_2),$
- $\longrightarrow_{12} = \left\{ ((p_1, p_2), \alpha, (p'_1, p'_2)) \mid p_1 \xrightarrow{\alpha}_1 p'_1, \alpha \in \Sigma_\tau \setminus \text{Synch}(P_1, P_2) \right\} \\ \cup \left\{ ((p_1, p_2), \alpha, (p_1, p'_2)) \mid p_2 \xrightarrow{\alpha}_2 p'_2, \alpha \in \Sigma_\tau \setminus \text{Synch}(P_1, P_2) \right\} \\ \cup \left\{ ((p_1, p_2), \alpha, (p'_1, p'_2)) \mid p_1 \xrightarrow{\alpha}_1 p'_1, p_2 \xrightarrow{\alpha}_2 p'_2, \alpha \in \text{Synch}(P_1, P_2) \right\},$
- $\xrightarrow{\cdot}_{12} = \left\{ ((p_1, p_2), \alpha, (p'_1, p'_2)) \mid p_1 \xrightarrow{\alpha}_1 p'_1, \alpha \in \Sigma_\tau \setminus \text{Synch}(P_1, P_2) \right\} \\ \cup \left\{ ((p_1, p_2), \alpha, (p_1, p'_2)) \mid p_2 \xrightarrow{\alpha}_2 p'_2, \alpha \in \Sigma_\tau \setminus \text{Synch}(P_1, P_2) \right\} \\ \cup \left\{ ((p_1, p_2), \alpha, (p'_1, p'_2)) \mid p_1 \xrightarrow{\alpha}_1 p'_1, p_2 \xrightarrow{\alpha}_2 p'_2, \alpha \in \text{Synch}(P_1, P_2) \right\},$
- $E = (P_1 \times E_2) \cup (E_1 \times P_2) \quad \text{geerbte Fehler}$
 $\left. \begin{array}{l} \cup \left\{ (p_1, p_2) \mid \exists a \in O_1 \cap I_2 : p_1 \xrightarrow{a} \wedge p_2 \not\xrightarrow{a} \right\} \\ \cup \left\{ (p_1, p_2) \mid \exists a \in I_1 \cap O_2 : p_1 \not\xrightarrow{a} \wedge p_2 \xrightarrow{a} \right\} \end{array} \right\} \quad \text{neue Kommunikationsfehler.}$

Dabei bezeichnet $\text{Synch}(P_1, P_2) = (I_1 \cap O_2) \cup (O_1 \cap I_2) \cup (I_1 \cap I_2)$ die Menge der zu synchronisierenden Aktionen. Die synchronisierten Aktionen werden als Output bzw. Input der Komposition beibehalten.

P_1 wird Partner von P_2 genannt, wenn die Parallelkomposition von P_1 und P_2 geschlossen ist, d.h. sie duale Signaturen $\text{Sig}(P_1) = (I, O)$ und $\text{Sig}(P_2) = (O, I)$ haben.

Ein neuer Kommunikationsfehler entsteht, wenn eines der MEIOs die Möglichkeit für einen Output hat (may-Transition) und das andere MEIO den passenden Input nicht erzwingt (keine must-Transition vorhanden). Es muss also in möglichen Implementierungen nicht wirklich zu diesem Kommunikationsfehler kommen, da die Output-Transition nicht zwingendermaßen implementiert werden muss und die Input-Transition durch eine may-Transition trotzdem erlaubt sein kann.

Wie bereits in [Sch16] kann es durch die Synchronisation von Inputs zu keinen neuen Kommunikationsfehler kommen, da dies in beiden Transitionssystemen keine lokal kontrollierte Aktion ist. Falls jedoch nur eines der Transitionssysteme die Möglichkeit für einen Input hat, der synchronisiert wird, besteht diese Möglichkeit in der Parallelkomposition nicht mehr. Es kann also in der Kommunikation mit einem weiteren MEIO dort zu einen neuen Kommunikationsfehler kommen.

Definition 1.3 ((starke) Simulation). Eine (starke) alternierende Simulation ist eine Relation $R \subseteq P \times Q$ auf zwei MEIOs P und Q , falls für alle $(p, q) \in R$ gilt:

1. $q \xrightarrow{\alpha} q'$ impliziert $p \xrightarrow{\alpha} p'$ für ein p' mit $p'Rq'$,
2. $p \xrightarrow{-\alpha} p'$ impliziert $q \xrightarrow{-\alpha} q'$ für ein q' mit $p'Rq'$,
3. $p \in E_P \Rightarrow q \in E_Q$.

Die Vereinigung \sqsubseteq_{as} aller dieser Relationen wird als (starke) as-Verfeinerung(-s Relation) (auch modal Verfeinerung) bezeichnet. Es wird $P \sqsubseteq_{\text{as}} Q$ geschrieben, falls $p_0 \sqsubseteq_{\text{as}} q_0$ gilt, und P as-verfeinert Q (stark) oder P ist eine (starke) as-Verfeinerung von Q .

Für ein MEIO Q und eine Implementierung P mit $P \sqsubseteq_{\text{as}} Q$, ist P eine as-Implementierung von Q und es wird $\text{as-impl}(Q)$ für die Menge aller as-Implementierungen von Q verwendet.

Definition 1.4 (schwache Simulation). Eine schwache alternierende Simulation ist eine Relation $R \subseteq P \times Q$ auf zwei MEIOs P und Q , falls für alle $(p, q) \in R$ gilt:

1. $q \xrightarrow{i} q'$ impliziert $p \xrightarrow{i} \xRightarrow{\varepsilon} p'$ für ein p' mit $p'Rq'$,
2. $q \xrightarrow{\omega} q'$ impliziert $p \xRightarrow{\hat{\omega}} p'$ für ein p' mit $p'Rq'$,
3. $p \xrightarrow{-i} p'$ impliziert $q \xrightarrow{-i} \xRightarrow{\varepsilon} q'$ für ein q' mit $p'Rq'$,
4. $p \xrightarrow{-\omega} p'$ impliziert $q \xRightarrow{\hat{\omega}} q'$ für ein q' mit $p'Rq'$,
5. $p \in E_P \Rightarrow q \in E_Q$.

Wobei $i \in I$ und $\omega \in O \cup \{\tau\}$.

Analog zur starken alternierenden Simulation, wird hier $\sqsubseteq_{\text{w-as}}$ als Relationssymbol verwendet und man kann auch entsprechend schwache as-Verfeinerung betrachten.

Ebenso kann $\sqsubseteq_{\text{w-as}}$ für ein MEIO Q und eine Implementierung P definiert werden mit

1 Definitionen

$P \sqsubseteq_{w\text{-as}} Q$, ist P eine w -as-Implementierung von Q und es wird $w\text{-as-impl}(Q)$ für die Menge aller w -as-Implementierungen von Q verwendet.

Die schwache Simulation erlaubt interne Aktionen beim MEIO, das die entsprechende Aktion matchen muss. Jedoch ist es zwingen notwendig, dass ein Input sofort aufgeführt wird und erst dann interne Aktinen möglich sind. Da ein Input die Reaktion auf eine Aktion ist, die die Umwelt auslöst und die nicht auf das Transitionssystem warten kann. Output hingeben können auch verzögert werden, da die Umgebung dies dann als Input aufnimmt und für diese somit nicht lokal kontrolliert ist.

Die Parallelkomposition von Wörtern und Mengen kann aus [Sch16] übernommen werden.

Definition 1.5 (*Parallelkomposition auf Traces*).

- Für zwei Wörter $w_1 \in \Sigma_1$ und $w_2 \in \Sigma_2$ ist deren Parallelkomposition definiert als: $w_1 \parallel w_2 := \{w \in (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^* \mid w|_{\Sigma_1} = w_1 \wedge w|_{\Sigma_2} = w_2\}$.
- Für zwei Mengen von Wörtern bzw. Sprachen $W_1 \subseteq \Sigma_1^*$ und $W_2 \subseteq \Sigma_2^*$ ist deren Parallelkomposition definiert als: $W_1 \parallel W_2 := \bigcup \{w_1 \parallel w_2 \mid w_1 \in W_1 \wedge w_2 \in W_2\}$.

Ebenso können die Definitionen der Funktionen `prune` und `cont` zum Abschneiden und Verlängern von Traces aus [Sch16] übernommen werden. Hierbei ist zu beachten, dass in dieser Arbeit ε das leere Wort und $\mathfrak{P}(M)$ die Potenzmenge der Menge M bezeichnet.

Definition 1.6 (*Pruning- und Fortsetzungs-Funktion*).

- $\text{prune} : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*, w \mapsto u$, mit $w = uv, u = \varepsilon \vee u \in \Sigma^* \cdot I$ und $v \in O^*$,
- $\text{cont} : \Sigma^* \rightarrow \mathfrak{P}(\Sigma^*), w \mapsto \{wu \mid u \in \Sigma^*\}$,
- $\text{cont} : \mathfrak{P}(\Sigma^*) \rightarrow \mathfrak{P}(\Sigma^*), L \mapsto \bigcup \{\text{cont}(w) \mid w \in L\}$.

Definition 1.7 (*Sprache*). Die Sprache eines MEIOs P ist $L(P) := \{w \in \Sigma^* \mid p_0 \xRightarrow{w}\}$.

2 allgemeine Folgerungen

Proposition 2.1 (*Sprache und Implementierung*). Die (maximale) Sprache eines MEIOs P ist $L(P) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists P' \in \text{as-impl}(P) : p'_0 \xRightarrow{w}\}$.

Beweis. Für ein $w \in L(P)$ gilt nach Definition 1.7 und den Definitionen der Transitions-Notation $\exists p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p' \exists w' \in \Sigma_\tau^* : \hat{w}' = w \wedge w' = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \wedge p_0 \xrightarrow{\alpha_1} p_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots p_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} p'$. Für ein w aus $\{w \in \Sigma^* \mid \exists P' \in \text{as-impl}(P) : p'_0 \xRightarrow{w}\}$ gilt, für ein $P' \in \text{as-impl}(P)$ das analoge nur mit must- anstatt may-Transitionen.

Aufgrund von Definition 1.3 2. kann jedes Element aus $\text{as-impl}(P)$ nur die bereits in P vorhandenen may-Transitionen implementieren. Somit gibt es für jedes w , dass in der Sprache einer as-Implementierung von P enthalten ist auch ein entsprechendes $w \in L(P)$ mit einem Trace wie oben.

Da in $\{w \in \Sigma^* \mid \exists P' \in \text{as-impl}(P) : p'_0 \xRightarrow{w}\}$ alle Wörter enthalten sind, für dies es eine as-Implementierung gibt, die dieses Wort ausführen kann, werden somit auch alle möglichen as-Implementierungen betrachtet. Jede may-Transition aus P wird von mindestens einem $P' \in \text{as-impl}(P)$ als must-Transition implementiert. Deshalb sind auch alle Wörter, die in $L(P)$ enthalten sind in der Menge der Wörter alle as-Implementierungen von P enthalten.

Da für Implementierungen die must-Transitions-Relations-Menge die gleiche ist, wie die Menge der may-Transitions-Relationen könnte man auch für die as-Implementierungen die Definition 1.7 anwenden um die jeweilige Sprache zu bestimmen. Die Sprache eines MEIO entspricht dann der Vereinigung der Sprachen seiner as-Implementierungen. \square

Proposition 2.2 (*Sprache der Parallelkomposition*). Für zwei komponierbare MEIOs P_1 und P_2 gilt: $L_{12} := L(P_{12}) = L_1 \parallel L_2$.

Beweis. Jedes Wort, dass in L_{12} enthalten ist, kann auf P_1 und P_2 projiziert werden und die Projektionen sind dann in L_1 und L_2 enthalten. In einer Parallelkomposition werden die Wörter der beiden MEIOs gemeinsam ausgeführt, falls es sich um synchronisierte Aktionen handelt, und verschränkt sequenziell, wenn es sich um unsynchronisierte Aktionen handelt. Somit sind alle Wörter aus $L_1 \parallel L_2$ auch Wörter der Parallelkomposition $L(P_{12})$. \square

Lemma 2.3 (*as-Implementierungen und Parallelkomposition*).

$P'_1 \in \text{as-impl}(P_1) \wedge P'_2 \in \text{as-impl}(P_2) \Rightarrow (P'_1 \parallel P'_2) \in \text{as-impl}(P_1 \parallel P_2)$.

2 allgemeine Folgerungen

Beweis. Es gelte $j \in \{1, 2\}$. Da $P'_j \in \text{as-impl}(P_j)$ gilt, gibt es nach Definition 1.3 eine as-Verfeinerungs-Relation \mathcal{R}_j , die beschreibt, wie P'_j P_j verfeinert. Die Parallelkomposition werden auf Basis von Definition 1.2 gebildet. Die Zustände sind also Tupel der Zustände der Komponenten. In dem man aus den Zuständen, die die \mathcal{R}_j in Relation setzt auch solche Tupel zusammensetzt, kann man auch eine neue as-Verfeinerungs-Relation für die Verfeinerung von $P_1 \parallel P_2$ durch $P'_1 \parallel P'_2$ erstellen. Die neue as-Verfeinerungs-Relation soll \mathcal{R}_{12} heißen und wie folgt definiert sein: $\forall p'_1, p'_2, p_1, p_2 : ((p'_1, p'_2), (p_1, p_2)) \in \mathcal{R}_{12} \Leftrightarrow (p'_1, p_1) \in \mathcal{R}_1 \wedge (p'_2, p_2) \in \mathcal{R}_2$. Es bleibt nun zu zeigen, dass \mathcal{R}_{12} eine zulässige Verfeinerungs-Relation nach Definition 1.3 ist, da die Parallelkomposition von zwei Implementierungen auch immer eine Implementierung ist (1.2).

1. Für diesen Punkt der Simulations-Definition 1.3 ist folgendes zu zeigen: $(p_1, p_2) \xrightarrow{\alpha}_{12} (q_1, q_2)$ impliziert $(p'_1, p'_2) \xrightarrow{\alpha}_{P'_1 \parallel P'_2} (q'_1, q'_2)$ für ein (q'_1, q'_2) mit $((q_1, q_2), (q'_1, q'_2)) \in \mathcal{R}_{12}$.

$(p_1, p_2) \xrightarrow{\alpha}_{12} (q_1, q_2)$ kann in $P_1 \parallel P_2$ für ein α aus $\text{Synch}(P_1, P_2)$ nur gelten, wenn in P_1 die α -Transition zwischen p_1 und q_1 auch bereits eine must-Transition war und analog für p_2 und q_2 in P_2 . Somit erzwingen die \mathcal{R}_j für die Komponenten bereits die Implementierung der must-Transitionen, so dass es dann entsprechende $(q_j, q'_j) \in \mathcal{R}_j$ gibt. Die Parallelkomposition der implementierten must-Transitionen aus P'_1 und P'_2 führt in $P'_1 \parallel P'_2$ zu der geforderten Transition. Falls α keine synchronisierte Aktion ist, enthält die Parallelkomposition die Transition nur, da eine Komponente diese Transition alleine ausführen kann (ersten beiden Zeilen der $\xrightarrow{\alpha}_{12}$ Definition in 1.2). ObdA $p_1 \xrightarrow{\alpha}_1 q_1$ und somit gilt $p_2 = q_2$. Da \mathcal{R}_1 eine as-Verfeinerungs-Relation ist, gibt es in P'_1 zwischen p'_1 und q'_1 eine must-Transition und es gilt $(q_1, q'_1) \in \mathcal{R}_1$. α ist auch in der Parallelkomposition der as-Implementierungen eine unsynchronisierte Aktion und somit entsteht die Transition dort auch nur aus der Transition von P'_1 und es gilt $p'_2 = q'_2$.

Da in beiden Fällen $(q_j, q'_j) \in \mathcal{R}_j$ für beide Werte von i gilt, gilt nach der Definition von \mathcal{R}_{12} auch $((q_1, q_2), (q'_1, q'_2)) \in \mathcal{R}_{12}$. $p_2 \mathcal{R}_2 p'_2$ muss nach Voraussetzung gelten und somit gilt wegen der Gleichheiten der Zustände auch $q_2 \mathcal{R}_2 q'_2$.

2. Es ist $(p'_1, p'_2) \xrightarrow{\alpha}_{P'_1 \parallel P'_2} (q'_1, q'_2)$ impliziert $(p_1, p_2) \xrightarrow{\alpha}_{12} (q_1, q_2)$ für ein (q_1, q_2) mit $((q_1, q_2), (q'_1, q'_2)) \in \mathcal{R}_{12}$ für diesen Punkt zu zeigen.

Die Argumentation könnte wie in Punkt 1. erneut in unsynchronisierte und synchronisierte Aktionen gesplittet werden. Jedoch würde man dadurch nur auf das Ergebnis kommen, dass die eine Komponente oder beide die entsprechende may-Transition ausführen können müssen, damit die Parallelkomposition dies auch kann. Es gilt also mindestens für eine der Komponenten $p'_j \xrightarrow{\alpha}_{P'_j} q'_j$ und durch die Definition 1.3, die für die entsprechende Relation \mathcal{R}_j gilt, muss es in P_j die Transition $p_j \xrightarrow{\alpha}_j q_j$ geben, so dass dann $(q_j, q'_j) \in \mathcal{R}_j$ gilt. Durch die Definition von $\xrightarrow{\alpha}_{12}$ in 1.2 werden die may-Transitionen der Komponenten entsprechend in die Parallelkomposition $P_1 \parallel P_2$ aufgenommen und die Relation \mathcal{R}_{12} gilt, mit den analogen Begründungen wie in 1., auch für die entsprechenden Zustands-Tupel.

2 allgemeine Folgerungen

3. Hierfür muss gezeigt werden, wenn $(p'_1, p'_2) \in E_{P'_1 \parallel P'_2}$ gilt, dann ist auch (p_1, p_2) in $P_1 \parallel P_2$ ein Zustand, der in der Menge der Fehler-Zustände E_{12} enthalten ist. Falls (p'_1, p'_2) ein geerbter Fehler ist, dann ist oBdA $p'_1 \in E_{P'_1}$ und $p'_2 \in P'_2$. Aufgrund von \mathcal{R}_1 und Definition 1.3 3. muss dann auch $p_1 \in E_1$ gelten. Für p_2 gilt durch die Signatur von \mathcal{R}_2 $p_2 \in P_2$. Zusammen in $P_1 \parallel P_2$ ergibt das wieder einen geerbten Fehler, also $(p_1, p_2) \in E_{12}$. (p'_1, p'_2) kann jedoch auch ein neuer Kommunikationsfehler sein, dann gilt oBdA $p'_1 \not\rightarrow_{P'_1}^a$ und $p'_2 \not\rightarrow_{P'_2}^a$ für ein a aus $I_1 \cap O_2$. Aufgrund von Definition 1.3 2. muss dann auch $p_2 \not\rightarrow_2^a$ gelten. Für p_1 kann nicht $p_1 \rightarrow_1^a$ gelten, da sonst die Simulations Relation \mathcal{R}_1 die Implementierung dieser Transition in P'_1 fordern würde (1.3 1.). Es gilt also $p_1 \not\rightarrow_1^a$ und in der Parallelkomposition $P_1 \parallel P_2$ ergibt sich daraus ebenfalls ein neuer Kommunikationsfehler mit $(p_1, p_2) \in E_{12}$.

$\Rightarrow (P'_1 \parallel P'_2) \in \text{as-impl}(P_1 \parallel P_2)$. □

Die entgegengesetzte Richtung von Lemma 2.3 gilt im allgemeinen nicht, d.h. es muss zu einer as-Implementierung einer Parallelkomposition $P' \in \text{as-impl}(P_1 \parallel P_2)$ keine as-Implementierungen P'_1 bzw. P'_2 der einzelnen Komponenten P_1 bzw. P_2 geben, deren Parallelkomposition $P'_1 \parallel P'_2$ der as-Implementierung der Parallelkomposition P entsprechen. Die Problematik wird in Abbildung 2.1 an einem Beispiel dargestellt. In der Parallelkomposition wird die may-Transition von P_2 zu zwei may-Transitionen, für die in einer as-Implementierung unabhängig entschieden werden kann, ob sie implementiert werden oder nicht. Somit kommt es in P' zu dem Problem, dass keine as-Implementierung von P_2 (entweder keine Transition implementiert oder die o' Transition ist implementiert) in Parallelkomposition mit der Implementierung P_1 P' ergeben würde.



Abbildung 2.1: Gegenbeispiel für Umkehrung von Lemma 2.3

Lemma 2.4 (*w-as-Implementierungen und Parallelkomposition*).

$P'_1 \in \text{w-as-impl}(P_1) \wedge P'_2 \in \text{w-as-impl}(P_2) \Rightarrow (P'_1 \parallel P'_2) \in \text{w-as-impl}(P_1 \parallel P_2)$.

2 allgemeine Folgerungen

Beweis. Es gelte $j \in \{1, 2\}$. Da $P'_j \in \text{w-as-impl}(P_j)$ gilt, gibt es nach Definition 1.4 eine schwache as-Verfeinerungs-Relation \mathcal{R}_j , die beschreibt, wie P'_j P_j verfeinert. Analog zum Beweis von Lemma 2.3 kann auch hier die neue schwache as-Verfeinerungs-Relation der Parallelkompositionen \mathcal{R}_{12} auf Basis der \mathcal{R}_j definiert werden: $\forall p'_1, p'_2, p_1, p_2 : ((p'_1, p'_2), (p_1, p_2)) \in \mathcal{R}_{12} \Leftrightarrow (p'_1, p_1) \in \mathcal{R}_1 \wedge (p'_2, p_2) \in \mathcal{R}_2$. Es bleibt nun zu zeigen, dass \mathcal{R}_{12} eine zulässige schwache Verfeinerungs-Relation nach Definition 1.4 ist, da die Parallelkomposition von zwei Implementierungen auch immer eine Implementierung ist (1.2).

1. Aus der schwachen Simulations-Definition 1.4 folgt, dass für den ersten Punkt folgendes zu zeigen ist: $(p_1, p_2) \xrightarrow{i}_{12} (q_1, q_2)$ impliziert $(p'_1, p'_2) \xrightarrow{i}_{P'_1 \parallel P'_2} \xRightarrow{\varepsilon}_{P'_1 \parallel P'_2} (q'_1, q'_2)$ für ein (q'_1, q'_2) mit $((q_1, q_2), (q'_1, q'_2)) \in \mathcal{R}_{12}$.

Falls die Transition $(p_1, p_2) \xrightarrow{i}_{12} (q_1, q_2)$ in der Parallelkomposition $P_1 \parallel P_2$ für ein $i \in \text{Synch}(P_1, P_2)$ möglich ist, dann gab es diese Transition auch bereits in P_1 und P_2 als must-Transition. Somit verlangen bereits die schwachen as-Verfeinerungs-Relation \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 , dass $p'_j \xrightarrow{i}_{P'_j} \xRightarrow{\varepsilon}_{P'_j} q'_j$ für $j = 1$ und $j = 2$ gilt. Wenn auf die MEIOs mit diesen Transitionen die Parallelkomposition angewendet wird, entstehen der Ablauf $(p'_1, p'_2) \xrightarrow{i}_{P'_1 \parallel P'_2} \xRightarrow{\varepsilon}_{12} (q'_1, q'_2)$. Die q'_j müssen in der Relation \mathcal{R}_j mit dem jeweiligen q_j ein Tupel bilden. Somit gilt auch $((q_1, q_2), (q'_1, q'_2)) \in \mathcal{R}_{12}$. Falls $i \notin \text{Synch}(P_1, P_2)$, ist die i Transition in $P_1 \parallel P_2$ nur aufgrund einer entsprechenden Transition in einer Komponente möglich. OBdA gilt $p_1 \xrightarrow{i}_1 q_1$ und mit Definition 1.4 1. gilt dann $p'_1 \xrightarrow{i}_{P'_1} q'_1$ und $(q_1, q'_1) \in \mathcal{R}_1$. Da es sich um eine unsynchronisierte Aktion von P_1 bzw. P'_1 handelt, muss für die zweite Komponente $(p_2, q_2) = (p'_2, q'_2) \in \mathcal{R}_2$ gelten. Die interne Aktion ist immer unsynchronisiert und i in diesem Fall auch, deshalb ist $(p'_1, p'_2) \xrightarrow{i}_{P'_1 \parallel P'_2} \xRightarrow{\varepsilon}_{P'_1 \parallel P'_2} (q'_1, q'_2)$ die in der Parallelkomposition entstehende Transitionsfolge. $(q_1, q_2) \mathcal{R}_{12} (q'_1, q'_2)$ gilt für den Fall des unsynchronisierten i 's ebenfalls.

2. Analog zu 1. kann für diesen Punkt $(p_1, p_2) \xrightarrow{\omega}_{12} (q_1, q_2)$ impliziert $(p'_1, p'_2) \xRightarrow{\hat{\omega}}_{P'_1 \parallel P'_2} (q'_1, q'_2)$ für ein (q'_1, q'_2) mit $((q_1, q_2), (q'_1, q'_2)) \in \mathcal{R}_{12}$ gezeigt werden.

Die ω Transition in $P_1 \parallel P_2$ ist entweder aus einem synchronisierten oder aus einem unsynchronisierten ω entstanden. Entsprechend ist dann in einem oder beiden P_j die Transitionen möglich und durch die Relationen \mathcal{R}_j folgen die Transitionen $p'_j \xRightarrow{\omega}_{P'_j} q'_j$ mit $(q_j, q'_j) \in \mathcal{R}_j$. Durch die Parallelkomposition von P'_1 mit P'_2 folgt dann das zu zeigende.

3. $(p'_1, p'_2) \xrightarrow{i}_{P'_1 \parallel P'_2} (q'_1, q'_2)$ impliziert $(p_1, p_2) \xrightarrow{i}_{12} \xRightarrow{\varepsilon}_{12} (q_1, q_2)$ für ein (q_1, q_2) mit $((q_1, q_2), (q'_1, q'_2)) \in \mathcal{R}_{12}$ ist die Voraussetzung des 3. Punktes, um zu beweisen, dass \mathcal{R}_{12} eine schwache as-Verfeinerungs-Relation ist. Die Transition i kann wiederum durch Synchronisation von zwei Transitionen entstanden sein oder durch eine Transition aus einer Komponenten und $i \notin \text{Synch}(P'_1 \parallel P'_2)$. In beiden Fällen gilt für ein j oder beide $p'_j \xrightarrow{i}_{P'_j} q'_j$. Daraus folgt mit \mathcal{R}_j $p_j \xrightarrow{i}_j \xRightarrow{\varepsilon}_j q_j$ mit $(q_j, q'_j) \in \mathcal{R}_j$. Durch Syn-

2 allgemeine Folgerungen

chronisation oder durch übernehmen der Transition folgt dann $(p_1, p_2) \xrightarrow{i} \rightarrow_{12} \xRightarrow{\varepsilon}_{12} (q_1, q_2)$ und mit Hilfe der Definition von \mathcal{R}_{12} auch $((q_1, q_2), (q'_1, q'_2)) \in \mathcal{R}_{12}$.

4. Analog zu 3. kann für diesen Punkt $(p'_1, p'_2) \xrightarrow{\omega} \rightarrow_{P'_1 \parallel P'_2} (q'_1, q'_2)$ impliziert $(p_1, p_2) \xRightarrow{\omega}_{12} (q_1, q_2)$ für ein (q_1, q_2) mit $((q_1, q_2), (q'_1, q'_2)) \in \mathcal{R}_{12}$ gezeigt werden.

Die ω Transition in $P'_1 \parallel P'_2$ ist entweder aus einem synchronisierten oder aus einem unsynchronisierten ω entstanden. Entsprechend ist dann in einem oder beiden P'_j die Transitionen möglich und durch die Relationen \mathcal{R}_j folgen die Transitionen $p_j \xRightarrow{\omega}_j q_j$ mit $(q_j, q'_j) \in \mathcal{R}_j$. Durch die Parallelkomposition von P_1 mit P_2 folgt dann das zu zeigende.

5. Für diesen Punkt ist zu zeigen, dass aus $(p'_1, p'_2) \in E_{P'_1 \parallel P'_2}$ $(p_1, p_2) \in E_{12}$ folgt. Falls $(p'_1, p'_2) \in E_{P'_1 \parallel P'_2}$ ein geerbter Fehler ist, gilt oBdA $p'_1 \in E_{P'_1}$ und $p'_2 \in P'_2$. Mit Definition 1.4 5., die für \mathcal{R}_1 gilt, folgt $p_1 \in E_1$. p_2 steht mit p'_2 in der Relation \mathcal{R}_2 . Durch die Signatur folgt $p_2 \in P_2$. Es gilt also in der Parallelkomposition $P_1 \parallel P_2$ $(p_1, p_2) \in E_{12}$ ist ein von P_1 geerbter Fehler. (p'_1, p'_2) kann jedoch in $P'_1 \parallel P'_2$ auch ein neuer Kommunikationsfehler sein. Dann gilt oBdA $p'_1 \not\rightarrow a$ und $p'_2 \xrightarrow{a}$ für ein $a \in I_1 \cap O_2$. Mit \mathcal{R}_2 und 1.4 4. folgt die Gültigkeit von $p_2 \Rightarrow a$ in P_2 . Da es für p'_1 keine ausgehende a must-Transition geben darf, darf es auch in P_1 keine a must-Transition von p_1 aus geben, ansonsten wäre 1.4 1. für \mathcal{R}_1 verletzt. (q_1, q_2) ist also auch ein neuer Kommunikationsfehler und somit in E_{12} enthalten.

$\Rightarrow (P'_1 \parallel P'_2) \in \text{w-as-impl}(P_1 \parallel P_2)$. □

Ein neuer Kommunikationsfehler in einer Parallelkomposition muss in einer Implementierung (as oder w-as) nicht auftauchen, auch nicht in der Parallelkomposition von Implementierungen der einzelnen Komponenten. Dies liegt daran, dass für den Input nur gesagt wird, dass keine must-Transition für die Synchronisation der Aktion vorhanden ist. Es kann trotzdem eine may-Transition für den Input geben, die auch implementiert werden kann. Falls es aber in der Parallelkomposition zweier MEIO zu einem neuen Kommunikationsfehler kommt, dann gibt es auch immer mindestens eine Implementierung, die diesen Kommunikationsfehler enthält und es gibt auch immer mindestens ein Implementierungs-Paar der Komponenten, in deren Parallelkomposition sich dieser Kommunikationsfehler ebenfalls zeigt.

3 Verfeinerungen für Kommunikationsfehler-Freiheit

Dieses Kapitel versucht die Präkongruenz für Error bei EIOs aus [Sch16] auf die hier betrachten MEIOs zu erweitern.

Definition 3.1 (fehler-freie Kommunikation). Ein Fehler-Zustand ist lokal erreichbar in einer as-Implementierung P' eines MEIO P , wenn ein $w \in O^*$ existiert mit $p'_0 \xRightarrow{w} p' \in E'$.

Zwei MEIOs P_1 und P_2 kommunizieren fehler-frei, wenn keine as-Implementierungen ihrer Parallelkomposition P_{12} einen Fehler-Zustände lokal erreichen kann.

Definition 3.2 (Kommunikationsfehler-Verfeinerungs-Basirelation). Für zwei MEIOs P_1 und P_2 mit der gleichen Signatur wird $P_1 \sqsubseteq_E^B P_2$ geschrieben, wenn ein Fehler-Zustand in einer as-Implementierung von P_1 nur dann lokal erreichbar ist, wenn es auch eine as-Implementierung von P_2 gibt, in der dieser Fehler-Zustand auch lokal erreichbar ist. Die Basisrelation stellt eine Verfeinerung bezüglich Kommunikationsfehlern dar. \sqsubseteq_E^C bezeichnet die vollständig abstrakte Präkongruenz von \sqsubseteq_E^B bezüglich $\cdot\|\cdot$, d.h. die größte Präkongruenz bezüglich $\cdot\|\cdot$, die in \sqsubseteq_E^B enthalten ist.

Für as-Implementierungen P_1 und P_2 entspricht \sqsubseteq_E^B der Relation \sqsubseteq_E^B aus [Sch16].

Wie in [Sch16] werden die Fehler hier Trace-basiert betrachtet. Da jedoch die Basisrelation über as-Implementierungen spricht, sind die Trace-Mengen auch nicht für die MEIOs mit may-Transitionen definiert sondern nur für die Menge der möglichen as-Implementierungen eines solchen MEIOs.

Definition 3.3 (Kommunikationsfehler-Traces). Für ein MEIO P wird definiert:

- strikte Kommunikationsfehler-Traces: $StET(P) := \{w \in \Sigma^* \mid p_0 \xRightarrow{w} p \in E\}$,
- gekürzte Kommunikationsfehler-Traces: $PrET(P) := \{\text{prune}(w) \mid w \in StET(P)\}$,
- Input-kritische-Traces: $MIT(P) := \{wa \in \Sigma^* \mid p_0 \xRightarrow{w} p \wedge a \in I \wedge p \not\xrightarrow{a}\}$.

Proposition 3.4 (Kommunikationsfehler-Traces und Implementierung). Für ein MEIO P gilt:

1. strikte Kommunikationsfehler-Traces: $StET(P) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists P' \in \text{as-impl}(P) : p'_0 \xRightarrow{w} p' \in E\}$ TODO: erzwungen Zeilenumbruch kontrollieren

2. Input-kritische-Traces: $MIT(P) = \left\{ wa \in \Sigma^* \mid \exists P' \in \text{as-impl}(P) : p'_0 \xRightarrow{w} p' \wedge a \in I \wedge p' \not\xrightarrow{a} \right\}$ TODO: erzwungen Zeilenumbruch kontrollieren

Beweis.

1. Wie schon in Beweis zu 2.1 festgestellt, sind alle Abläufe, die in P via may-Transitionen möglich ist in mindestens einer as-Implementierung von P via must-Transitionen möglich. Umgekehrt ist auch jeder Ablauf, der in einer as-Implementierung von P möglich ist auch in P durch may-Transitionen möglich.

Aufgrund des 3. Punktes der Definition 1.3 kann jede as-Implementierung von P nur Fehler-Zustände enthalten, die auch P enthält. Da alle möglichen Implementierungen von P in $\left\{ w \in \Sigma^* \mid \exists P' \in \text{as-impl}(P) : p'_0 \xRightarrow{w} p' \in E \right\}$ betrachtet werden, ist auch jeder in P durch may-Transitionen erreichbare Fehler-Zustand auch in mindestens einer as-Implementierung ebenfalls erreichbar, jedoch durch must-Transitionen.

2. Für jedes w in $L(P)$ gibt es mindestens eine as-Implementierung von P , die dieses w auch ausführen kann und umgekehrt (Beweis von 2.1). Falls in $MIT(P)$ mindestens ein Element gibt, gibt es in P einen Trace von w , nach dem ein Input a nicht zwingendermaßen folgen muss. Die a Transition also entweder eine may-Transition ist oder gar nicht existiert in P . Es muss also auch einen w Trace in einer as-Implementierung geben, die in einem Zustand endet, der mit dem Zustand aus P in Relation steht, in dem das a nicht erzwungen wird. Falls die Transition in P nicht vorhanden ist, muss jede as-Implementierung, die so einen w Trace enthält auch wa als Input-kritischen-Trace haben. Andernfalls handelt es sich bei a in P um eine may-Transition, die von mindestens einer as-Implementierung, die den w Trace enthält, nicht implementiert wird und somit wa auch als Input-kritischen-Trace enthält.

Für ein $wa \in \left\{ wa \in \Sigma^* \mid \exists P' \in \text{as-impl}(P) : p'_0 \xRightarrow{w} p' \wedge a \in I \wedge p' \not\xrightarrow{a} \right\}$ muss es eine as-Implementierung von P geben, die diesen Input-kritischen-Trace implementiert. P muss also auch das w ausführen können zu einem Zustand, in dem P a nicht als must-Transition enthalten. Falls P a nach w nur als must-Transition enthalten würde, würde 1.3 1. die Implementierung von a erzwingen würde und somit könnte für keine as-Implementierung von P wa ein Input-kritischer-Trace sein. Es gilt also auch $wa \in MIT(P)$.

□

Definition 3.5 (Kommunikationsfehler-Semantik). Sei P ein MEIO.

- Die Menge der Kommunikationsfehler-Traces von P ist $ET(P) := \text{cont}(\text{PrET}(P)) \cup \text{cont}(MIT(P))$.
- Die Kommunikationsfehler-geflutete Sprache von P ist $EL(P) := L(P) \cup ET(P)$.

Für zwei MEIOs P_1, P_2 mit der gleichen Signatur wird $P_1 \sqsubseteq_E P_2$ geschrieben, wenn $ET_1 \subseteq ET_2$ und $EL_1 \subseteq EL_2$ gilt.

Hierbei ist zu beachten, dass die Mengen $StET$, $PrET$, MIT , ET und EL nur denen aus [Sch16] entsprechen, wenn P bereits eine as-Implementierung ist.

Satz 3.6 (Kommunikationsfehler-Semantik für Parallelkompositionen). Für zwei komponierbare MEIOs P_1, P_2 und ihre Komposition P_{12} gilt:

1. $ET_{12} = \text{cont}(\text{prune}((ET_1 \| EL_2) \cup (EL_1 \| ET_2)))$,
2. $EL_{12} = (EL_1 \| EL_2) \cup ET_{12}$.

Beweis.

1. „ \subseteq “:

Da beide Seiten der Gleichung unter der Fortsetzung cont abgeschlossen sind, genügt es ein präfix-minimales Element w von ET_{12} zu betrachten. Diese Element ist aufgrund der Definition der Menge der Errortraces in MIT_{12} oder in $PrET_{12}$ enthalten.

- Fall 1 ($w \in MIT_{12}$): Aus der Definition von MIT folgt, dass es eine Aufteilung $w = xa$ gibt mit $(p_{01}, p_{02}) \xRightarrow{x} (p_1, p_2) \wedge a \in I_{12} \wedge (p_1, p_2) \not\xrightarrow{a}$. Da $I_{12} = (I_1 \cup I_2) \setminus (O_1 \cup O_2)$ ist, folgt $a \in (I_1 \cup I_2)$ und $a \notin (O_1 \cup O_2)$. Es wird unterschieden, ob $a \in (I_1 \cap I_2)$ oder $a \in (I_1 \cup I_2) \setminus (I_1 \cap I_2)$ ist.
 - Fall 1a) ($a \in (I_1 \cap I_2)$): Durch Projektion des Ablaufes auf die einzelnen Transitionssysteme erhält man oBdA $p_{01} \xRightarrow{x_1} p_1 \not\xrightarrow{a}$ und $p_{02} \xRightarrow{x_2} p_2 \not\xrightarrow{a}$ oder $p_{02} \xRightarrow{x_2} p_2 \xrightarrow{a}$ mit $x \in x_1 \| x_2$. Daraus kann $x_1 a \in \text{cont}(MIT_1) \subseteq ET_1$ und $x_2 a \in EL_2$ ($x_2 a \in MIT_2$ oder $x_2 a \in L_2$) gefolgert werden. Damit folgt $w \in (x_1 \| x_2) \cdot \{a\} \subseteq (x_1 a) \| (x_2 a) \subseteq ET_1 \| EL_2$, und somit ist w in der rechten Seite der Gleichung enthalten.
 - Fall 1b) ($a \in (I_1 \cup I_2) \setminus (I_1 \cap I_2)$): OBdA gilt $a \in I_1$. Durch die Projektion auf die einzelnen Komponenten erhält man: $p_{01} \xRightarrow{x_1} p_1 \not\xrightarrow{a}$ und $p_{02} \xRightarrow{x_2} p_2$ mit $x \in x_1 \| x_2$. Daraus folgt $x_1 a \in \text{cont}(MIT_1) \subseteq ET_1$ und $x_2 \in L_2 \subseteq EL_2$. Somit gilt $w \in (x_1 \| x_2) \cdot \{a\} \subseteq (x_1 a) \| x_2 \subseteq ET_1 \| EL_2$. Dies ist eine Teilmenge der rechten Seite der Gleichung.
- Fall 2 ($w \in PrET_{12}$): Aus der Definition von $PrET$ und prune folgt, dass ein $v \in O_{12}^*$ gilt, so dass $(p_{01}, p_{02}) \xRightarrow{w} (p_1, p_2) \xRightarrow{v} (p'_1, p'_2)$ gilt mit $(p'_1, p'_2) \in E_{12}$ und $w = \text{prune}(wv)$. Durch Projektion auf die Komponenten erhält man $p_{01} \xRightarrow{w_1} p_1 \xRightarrow{v_1} p'_1$ und $p_{02} \xRightarrow{w_2} p_2 \xRightarrow{v_2} p'_2$ mit $w \in w_1 \| w_2$ und $v \in v_1 \| v_2$. Aus $(p'_1, p'_2) \in E_{12}$ folgt, dass es sich entweder um einen geerbten oder einen neuen Fehler handelt. Bei einem geerbten wäre bereits einer der beiden Zustände p'_1 bzw. p'_2 ein Fehler-Zustand gewesen. Ein neuer Kommunikationsfehler hingegen wäre durch das fehlen der Synchronisations-Erzwingung (fehlende must-Transition) in einer der Komponenten entstanden.
 - Fall 2a) (geerbter Fehler): OBdA gilt $p'_1 \in E_1$. Daraus folgt, $w_1 v_1 \in StET_1 \subseteq \text{cont}(PrET_1) \subseteq ET_1$. Da $p_{02} \xRightarrow{w_2 v_2}$ gilt, erhält man $w_2 v_2 \in L_2 \subseteq EL_2$. Dadurch ergibt sich $wv \in ET_1 \| EL_2$ mit $w = \text{prune}(wv)$ und somit ist w in der rechten Seite der Gleichung enthalten.

- Fall 2b) (neuer Kommunikationsfehler): OBdA gilt $a \in I_1 \cap O_2$ mit $p'_1 \xrightarrow{a} \wedge p'_2 \xrightarrow{a}$. Daraus folgt $w_1 v_1 a \in MIT_1 \subseteq ET_1$ und $w_2 v_2 a \in L_2 \subseteq EL_2$. Damit ergibt sich $wva \in ET_1 \parallel EL_2$, da $a \in O_1 \subseteq O_{12}$ gilt $w = \text{prune}(wva)$ und somit ist w in der rechten Seite der Gleichung enthalten.

1. „ \supseteq “:

Wegen der Abgeschlossenheit beider Seiten der Gleichung gegenüber cont wird auch in diesem Fall nur ein präfix-minimales Element $x \in \text{prune}((ET_1 \parallel EL_2) \cup (EL_1 \parallel ET_2))$ betrachtet. Da x durch die Anwendung der prune -Funktion entstanden ist, existiert ein $y \in O_{12}^*$ mit $xy \in (ET_1 \parallel EL_2) \cup (EL_1 \parallel ET_2)$. OBdA wird davon ausgegangen, dass $xy \in ET_1 \parallel EL_2$ gilt, d.h. es gibt $w_1 \in ET_1$ und $w_2 \in EL_2$ mit $xy \in w_1 \parallel w_2$.

Im Folgenden wird für alle Fälle von xy gezeigt, dass es ein $v \in \text{PrET}_{12} \cup \text{MIT}_{12}$ gibt, das ein Präfix von xy ist und v entweder auf einen Input I_{12} endet oder $v = \varepsilon$. Damit muss v ein Präfix von x sein. ε ist Präfix von jedem Wort und sobald v mindestens einen Buchstaben enthält, muss das Ende von v vor dem Anfang von $y \in O_{12}^*$ liegen. Dadurch ist ein Präfix von x in $\text{PrET}_{12} \cup \text{MIT}_{12}$ enthalten und somit gilt $x \in ET_{12}$, da ET die Fortsetzung der Mengenvereinigung aus PrET und MIT ist.

Sei v_1 das kürzeste Präfix von w_1 in $\text{PrET}_1 \cup \text{MIT}_1$. Falls $w_2 \in L_2$, so sei $v_2 = w_2$, sonst soll v_2 das kürzeste Präfix von w_2 in $\text{PrET}_2 \cup \text{MIT}_2$ sein. Jede Aktion in v_1 und v_2 hängt mit einer aus xy zusammen. Es kann nun davon ausgegangen werden, dass entweder $v_2 = w_2 \in L_2$ gilt oder die letzte Aktion von v_1 vor oder gleichzeitig mit der letzten Aktion von v_2 statt findet. Ansonsten endet $v_2 \in \text{PrET}_2 \cup \text{MIT}_2$ vor v_1 und somit ist dieser Fall analog zu v_1 endet vor v_2 .

- Fall 1 ($v_1 = \varepsilon$): Da $\varepsilon \in \text{PrET}_1 \cup \text{MIT}_1$, ist bereits in P_1 ein Fehler-Zustand lokal erreichbar. $\varepsilon \in \text{MIT}_1$ ist nicht möglich, da jedes Element aus MIT nach Definition mindestens die Länge 1 haben muss. Mit der Wahl $v'_2 = v' = \varepsilon$ ist v'_2 ein Präfix von v_2 .
- Fall 2 ($v_1 \neq \varepsilon$): Aufgrund der Definitionen von PrET und MIT endet v_1 auf ein $a \in I_1$, d.h. $v_1 = v'_1 a$. v' sei das Präfix von xy , das mit der letzten Aktion von v_1 endet, d.h. mit a und $v'_2 = v' \upharpoonright_{\Sigma_2}$. Falls $v_2 = w_2 \in L_2$, dann ist v'_2 ein Präfix von v_2 . Falls $v_2 \in \text{PrET}_2 \cup \text{MIT}_2$ gilt, dann ist durch die Annahme, dass v_2 nicht vor v_1 endet, v'_2 ein Präfix von v_2 . Im Fall $v_2 \in \text{MIT}_2$ weiß man zusätzlich, dass v_2 auf $b \in I_2$ endet. Es kann jedoch $a = b$ gelten.

In allen Fällen erhält man $v'_2 = v' \upharpoonright_{\Sigma_2}$ ist ein Präfix von v_2 und $v' \in v_1 \parallel v'_2$ ist ein Präfix von xy . Es kann nur für die Fälle $a \notin I_2$ gefolgert werden, dass $p_{02} \xRightarrow{v'_2}$ gilt.

- Fall I ($v_1 \in \text{MIT}_1$ und $v_1 \neq \varepsilon$): Es gibt einen Ablauf der Form $p_{01} \xRightarrow{v'_1} p_1 \xrightarrow{a}$ und es gilt $v' = v'' a$.
 - Fall Ia) ($a \notin \Sigma_2$): Es gilt $p_{02} \xRightarrow{v'_2} p_2$ mit $v'' \in v'_1 \parallel v'_2$. Dadurch erhält man $(p_{01}, p_{02}) \Rightarrow v''(p_1, p_2) \xrightarrow{a}$ mit $a \in I_{12}$. Somit wird $v := v'' a = v' \in \text{MIT}_{12}$ gewählt.

- Fall Ib) ($a \in I_2$ und $v'_2 \in MIT_2$): Es gilt $v'_2 = v''_2 a$ mit $p_{02} \xRightarrow{v''_2} \not\xrightarrow{a}$ und $v'' \in v'_1 \| v''_2$. a ist für P_2 , ebenso wie für P_1 , ein nicht erzwungener Input. Daraus folgt, dass $(p_1, p_2) \not\xrightarrow{a}$ gilt. Es wird ebenfalls $v := v'' a = v' \in MIT_{12}$ gewählt.
- Fall Ic) ($a \in I_2$ und $v'_2 \in L_2 \setminus MIT_2$): Es gilt $p_{02} \xRightarrow{v''_2} p_2 \xrightarrow{a}$ mit $v'_2 = v''_2 a$. Da die gemeinsamen Inputs synchronisiert werden, folgt $(p_1, p_2) \not\xrightarrow{a}$ bereits aus $q_1 \not\xrightarrow{a}$. Somit kann hier nochmals $v := v'' a = v' \in MIT_{12}$ gewählt werden.
- Fall Id) ($a \in O_2$): Es gilt $v'_2 = v''_2 a$ und $p_{02} \xRightarrow{v'_2}$. Man erhält also $p_{02} \xRightarrow{v''_2} \xrightarrow{a}$ mit $v'' \in v'_1 \| v'_2$. Daraus ergibt sich $(p_{01}, p_{02}) \xRightarrow{v''} (p_1, p_2)$ mit $p_1 \not\xrightarrow{a}, a \in I_{1,q_2} \xrightarrow{a}$ und $a \in O_2$, somit gilt $(p_1, p_2) \in E_{12}$. Es wird $v := \text{prune}(v'') \in PrET_{12}$ gewählt.
- Fall II ($v_1 \in PrET_1$): $\exists u_1 \in O_1^* : p_{01} \xRightarrow{v_1} p_1 \xRightarrow{u_1} p'_1$ mit $p'_1 \in E_1$. Im Fall $v'_1 \neq \varepsilon$ kann das a , auf das v_1 endet, ebenfalls der letzte Buchstabe von v_2 sein. Im Fall von $v_2 \in MIT_2$ kann somit $a = b$ gelten, wodurch $v_2 = v'_2$ gilt. Dieser Fall verläuft jedoch analog zu Fall Ic) und wird hier nicht weiter betrachtet. Es gilt für alle anderen Fälle $p_{02} \xRightarrow{v'_2} p_2$ mit $(p_{01}, p_{02}) \xRightarrow{v'} (q_1, q_2)$.
 - Fall IIa) ($u_2 \in (O_1 \cap I_2)^*, c \in (O_1 \cap I_2)$, sodass $u_2 c$ Präfix von $u_1|_{I_2}$ mit $p_2 \xRightarrow{u_2} p'_2 \not\xrightarrow{c}$): Für das Präfix $u'_1 c$ von u_1 mit $u'_1 c|_{I_2} = u_2 c$ weiß man, dass $q_1 \xRightarrow{u'_1} q''_1 \not\xrightarrow{c}$. Somit gilt $u'_1 \in u'_1 \| u_2$ und $(p_1, p_2) \xRightarrow{u'_1} (q''_1, q'_2) \in E_{12}$, da für P_2 der entsprechende Input nicht erzwungen wird, der mit dem c Output von P_1 zu koppeln wäre. Es handelt sich also um einen neuen Kommunikationsfehler. Es wird $v := \text{prune}(v' u'_1) \in PrET_{12}$ gewählt, dies ist ein Präfix von v' , da $u_1 \in O_1^*$.
 - Fall IIb) ($p_1 \xRightarrow{u_2} p'_2$ mit $u_1 = u_1|_{I_2}$): Es gilt $u_1 \in u_1 \| u_2$ und $(p_1, p_2) \xRightarrow{u_1} (p'_1, p'_2) \in E_{12}$, da $p'_1 \in E_1$ und somit handelt es sich in P_{12} um einen geerbten Fehler. Nun wird $v := \text{prune}(v' u_1) \in PrET_{12}$ gewählt, das wiederum ein Präfix von v' ist.

2.:

Durch die Definitionen ist klar, dass $L_i \subseteq EL_i$ und $ET_i \subseteq EL_i$ gilt. Die Argumentation startet auf den rechten Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned}
 (EL_1 \| EL_2) \cup ET_{12} &\stackrel{3.5}{=} ((L_1 \cup ET_1) \| (L_2 \cup ET_2)) \cup ET_{12} \\
 &= (L_1 \| L_2) \cup \underbrace{(L_1 \| ET_2)}_{\substack{\subseteq (EL_1 \| ET_2) \\ \stackrel{1.}{\subseteq} ET_{12}}} \cup \underbrace{(ET_1 \| L_2)}_{\substack{\subseteq (ET_1 \| EL_2) \\ \stackrel{1.}{\subseteq} ET_{12}}} \cup \underbrace{(ET_1 \| ET_2)}_{\substack{\subseteq (EL_1 \| ET_2) \\ \stackrel{1.}{\subseteq} ET_{12}}} \cup ET_{12} \\
 &= (L_1 \| L_2) \cup ET_{12} \\
 &\stackrel{2.2}{=} L_{12} \cup ET_{12} \\
 &\stackrel{3.5}{=} EL_{12}.
 \end{aligned}$$

□

Korollar 3.7 (Kommunikationsfehler-Präkongruenz). Die Relation \sqsubseteq_E ist eine Präkongruenz bezüglich $\cdot \| \cdot$.

Beweis. Es muss gezeigt werden: Wenn $P_1 \sqsubseteq_E P_2$ gilt, dann für jedes komponierbare P_3 auch $P_{31} \sqsubseteq_E P_{32}$. D.h. es ist zu zeigen, dass aus $ET_1 \subseteq ET_2$ und $EL_1 \subseteq EL_2$, $ET_{31} \subseteq ET_{32}$ und $EL_{31} \subseteq EL_{32}$ folgt. Dies ergibt sich aus der Monotonie von cont , prune und $\cdot \| \cdot$ auf Sprachen wie folgt:

- $ET_{31} \stackrel{3.6}{=}^1 \text{cont}(\text{prune}((ET_3 \| EL_1) \cup (EL_3 \| ET_1)))$
 $\begin{array}{l} ET_1 \subseteq ET_2 \\ \text{und} \\ EL_1 \subseteq EL_2 \end{array} \subseteq \text{cont}(\text{prune}((ET_3 \| EL_2) \cup (EL_3 \| ET_2)))$
 $\stackrel{3.6}{=}^1 ET_{32},$
- $EL_{31} \stackrel{3.6}{=}^2 (EL_3 \| EL_1) \cup E_{31}$
 $\begin{array}{l} EL_1 \subseteq EL_2 \\ \text{und} \\ ET_{31} \subseteq ET_{32} \end{array} \subseteq (EL_3 \| EL_2) \cup ET_{32}$
 $\stackrel{3.6}{=}^2 EL_{32}.$

□

Lemma 3.8 (Verfeinerung mit Kommunikationsfehlern). Gegeben sind zwei MEIOs P_1 und P_2 mit der gleichen Signatur. Wenn $U \| P_1 \sqsubseteq_E^B U \| P_2$ für alle Partner U gilt, dann folgt daraus die Gültigkeit von $P_1 \sqsubseteq_E P_2$.

Beweis. Da P_1 und P_2 die gleiche Signaturen haben wird $I := I_1 = I_2$ und $O := O_1 = O_2$ definiert. Für jeden Partner U gilt $I_U = O$ und $O_U = I$.

Um $P_1 \sqsubseteq_E P_2$ zu zeigen, wird nachgeprüft, ob folgendes gilt:

- $ET_1 \subseteq ET_2$,
- $EL_1 \subseteq EL_2$.

Für ein gewähltes präfix-minimales Element $w \in ET_1$ wir gezeigt, dass dieses w oder eines seiner Präfixe in ET_2 enthalten ist. Dies ist möglich, da die beiden Mengen ET_1 und ET_2 durch cont abgeschlossen sind.

- Fall 1 ($w = \varepsilon$): Es handelt sich um einen lokal erreichbaren Fehler-Zustand in P_1 . Für U wird ein Transitionssystem verwendet, das nur aus dem Startzustand und einer must-Schleife für alle Inputs $x \in I_U$ besteht. Somit kann P_1 die im Prinzip gleichen Fehler-Zustände lokal erreichen wie $U \parallel P_1$. Daraus folgt, dass auch $U \parallel P_2$ einen lokal erreichbaren Fehler-Zustand haben muss. Durch die Definition von U kann dieser Fehler nur von P_2 geerbt sein. Es muss also in P_2 ein Fehler-Zustand durch interne Aktionen und Outputs erreichbar sein, d.h. es gilt $\varepsilon \in PrET_2$.
- Fall 2 ($w = x_1 \dots x_n x_{n+1} \in \Sigma^+$ mit $n \geq 0$ und $x_{n+1} \in I = O_U$): Es wird der folgende Partner U betrachtet (siehe auch Abbildung 3.1):

- $U = \{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}\}$,
- $p_{0U} = p_0$,
- $\rightarrow_U = \{(p_i, x_{i+1}, p_{i+1}) \mid 0 \leq i \leq n\}$
 $\cup \{(p_i, x, p_{n+1}) \mid x \in I_U \setminus \{x_{i+1}\}, 0 \leq i \leq n\}$
 $\cup \{(p_{n+1}, x, p_{n+1}) \mid x \in I_U\}$.
- $E_U = \emptyset$,

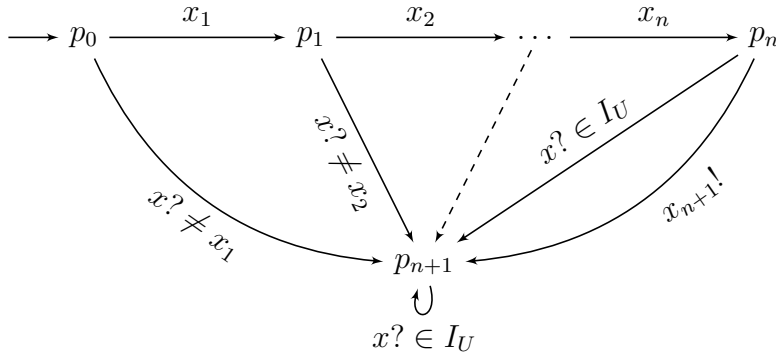


Abbildung 3.1: $x? \neq x_i$ steht für alle $x \in I_U \setminus \{x_i\}$

Für w können nun zwei Fälle unterschieden werden. Aus beiden wird folgen, dass $\varepsilon \in PrET(U \parallel P_1)$.

- Fall 2a) ($w \in MIT_1$): In $U \parallel P_1$ erhält man $(p_1, p_{01}) \xrightarrow{x_1 \dots x_n} (p_n, p')$ mit $p' \not\xrightarrow{x_{n+1}}$ und $p_n \xrightarrow{x_{n+1}}$. Deshalb gilt $(p_1, p') \in E_{U \parallel P_1}$. Da alle Aktionen aus w bis auf

x_{n+1} synchronisiert werden und $I \cap I_U = \emptyset$, gilt $x_1, \dots, x_n \in O_{U \parallel P_1}$. Daraus ergibt sich dann $\varepsilon \in PrET(U \parallel P_1)$.

- Fall 2b) ($w \in PrET_1$): In $U \parallel P_1$ erhält man $(p_0, p_{01}) \xRightarrow{w} (p_{n+1}, p'') \xRightarrow{u} (p_{n+1}, p')$ für $u \in O^*$ und $p' \in E_1$. Daraus folgt $(p_{n+1}, p') \in E_{U \parallel P_1}$ und somit $wu \in StET(U \parallel P_1)$. Da alle Aktionen in w synchronisiert werden und $I \cap I_U = \emptyset$, gilt $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in O_{U \parallel P_1}$ und, da $u \in O^*$, folgt $u \in O_{U \parallel P_1}^*$. Somit ergibt sich $\varepsilon \in PrET(U \parallel P_1)$.

Da $\varepsilon \in PrET(U \parallel P_1)$ gilt, kann durch $U \parallel P_1 \sqsubseteq_E^B U \parallel P_2$ geschlossen werden, dass auch in $U \parallel P_2$ ein Fehler-Zustand lokal erreichbar sein muss.

Dieser Fehler kann geerbt oder neu sein.

- Fall 2i) (neuer Fehler): Da jeder Zustand von U alle Inputs $x \in O = I_U$ durch must-Transitionen erzwingt, muss ein lokal erreichbarer Fehler-Zustand der Form sein, dass ein Output $a \in O_U$ von U möglich ist, der nicht mit einem passenden Input aus P_2 synchronisiert werden muss (P_2 enthält die entsprechende a Transitionen nicht als must-Transition). Durch die Konstruktion von U sind in p_{n+1} keine Outputs möglich. Ein neuer Kommunikationsfehler muss also die Form (p_i, p') haben mit $i \leq n, p' \not\xrightarrow{x_{i+1}}$ und $x[i+1] \in O_U = I$. Durch Projektion erhält man dann $p_{02} \xRightarrow{x_1 \dots x_i} p' \not\xrightarrow{x_{i+1}}$ und damit gilt $x_1 \dots x_{i+1} \in MIT_2 \subseteq ET_2$. Somit ist ein Präfix von w in ET_2 enthalten.
- Fall 2ii) (geerbter Fehler): U hat $x_1 \dots x_i u$ mit $u \in I_U^* = O^*$ ausgeführt und ebenso hat P_2 dieses Wort abgearbeitet. Durch dies hat P_2 einen Zustand E_2 erreicht, da von U kleine Fehler geerbt werden können. Es gilt dann $\text{prune}(x_1 \dots x_i u) = \text{prune}(x_1 \dots x_i) \in PrET_2 \subseteq ET_2$. Da $x_1 \dots x_i$ ein Präfix von w ist, führt in diesem Fall eine Verlängerung um lokale Aktionen von einem Präfix von w zu einem Fehler-Zustand. Da ET der Menge aller Verlängerungen von gekürzten Kommunikationsfehler-Traces entspricht, ist $x_1 \dots x_i$ in ET_2 enthalten und somit ist ein Präfix von w in ET_2 enthalten.

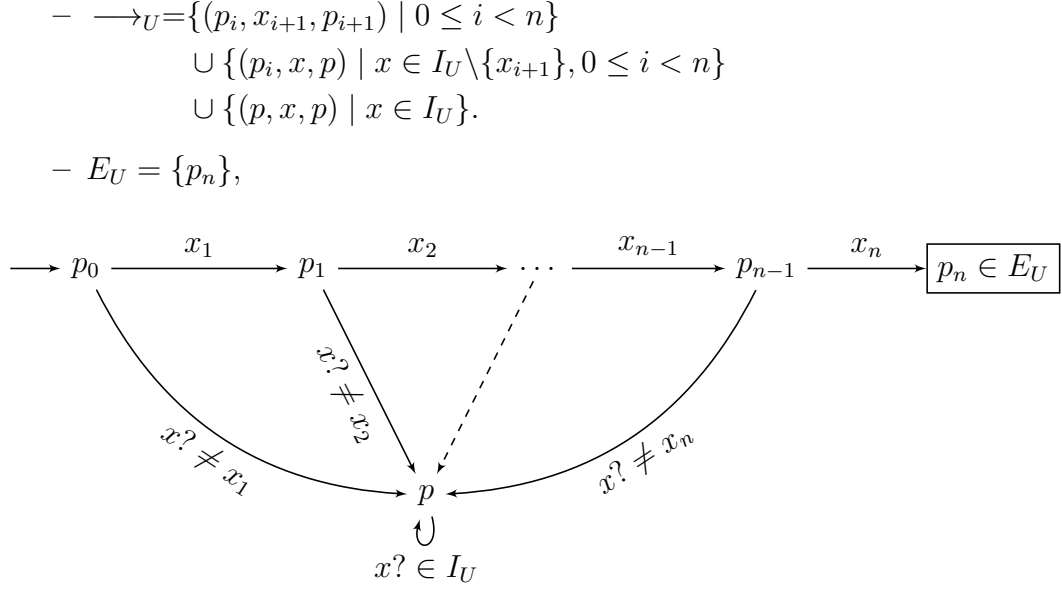
Um die andere Inklusion zu beweisen, reicht es aufgrund der ersten Inklusion und der Definition von EL aus zu zeigen, dass $L_1 \setminus ET_1 \subseteq EL_2$ gilt.

Es wird dafür ein beliebiges $w \in L_1 \setminus ET_1$ gewählt und gezeigt, dass es in EL_2 enthalten ist.

- Fall 1 ($w = \varepsilon$): Da ε immer in EL_2 enthalten ist, muss hier nicht gezeigt werden.
- Fall 2 ($w = x_1 \dots x_n$ mit $n \geq 1$): Es wird ein Partner U wie folgt konstruiert (siehe dazu auch Abbildung 3.2)

$$- U = \{p_0, p_1, \dots, p_n, p\},$$

$$- p_{0U} = p_0,$$


 Abbildung 3.2: $x? \neq x_i$ steht für alle $x \in I_U \setminus \{x_i\}$, p_n ist der einzige Fehler-Zustand

Da $p_{01} \stackrel{w}{\Rightarrow} p'$ gilt, kann man schließen, dass $U \parallel P_1$ einen lokal erreichbaren geerbten Fehler hat. Somit muss $U \parallel P_2$ ebenfalls einen lokal erreichbaren Fehler-Zustand haben.

- Fall 2a) (neuer Fehler aufgrund von $x_i \in O_U$ und $p_{02} \stackrel{x_1 \dots x_{i-1}}{\Rightarrow} q'' \not\stackrel{x_i}{\rightarrow}$): Es gilt $x_1 \dots x_i \in MIT_2$ und somit $w \in EL_2$. Anzumerken ist, dass es nur auf diesem Weg Outputs von U möglich sind, deshalb gibt es keine anderen Outputs von U , die zu einem neuen Fehler führen können.
- Fall 2b) (neuer Fehler aufgrund von $a \in O = I_U$): Der einzige Zustand, in dem U nicht alle Input erlaubt sind, ist p_n , der bereits ein Fehler-Zustand ist. Da in diesem Fall dieser Zustand in $U \parallel P_2$ erreichbar ist, besitzt das komponierte MEIO einen geerbten Fehler und es gilt $w \in L_2 \subseteq EL_2$, wegen dem folgenden Fall 2c).
- Fall 2c) (geerbter Fehler von U): Da p_n der einzige Fehler-Zustand in U ist und alle Aktionen synchronisiert sind, ist dies nur möglich, wenn $p_{02} \stackrel{x_1 \dots x_n}{\Rightarrow}$ gilt. In diesem Fall gilt $w \in L_2 \subseteq EL_2$.
- Fall 2d) (geerbter Fehler von P_2): Es gilt dann $p_{02} \Rightarrow x_1 \dots x_i u p' \in E_2$ für $i \geq 0$ und $u \in O^*$. Somit ist $x_1 \dots x_i u \in StET_2$ und damit $\text{prune}(x_1 \dots x_i u) = \text{prune}(x_1 \dots x_i) \in PrET_2 \subseteq EL_2$. Somit gilt $w \in EL_2$.

□

Der folgende Satz sagt aus, dass \sqsubseteq_E die größte Präkongruenz ist, die charakterisiert werden soll, also gleich der vollständig abstrakten Präkongruenz \sqsubseteq_E^C .

Satz 3.9 (Vollständige Abstraktheit für Kommunikationsfehler-Semantik).

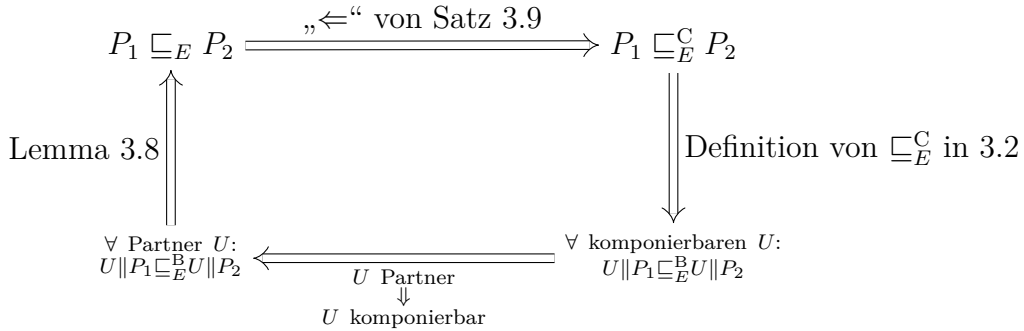
Für zwei MEIOs P_1 und P_2 mit derselben Signatur gilt $P_1 \sqsubseteq_E^C P_2 \Leftrightarrow P_1 \sqsubseteq_E P_2$.

Beweis.

„ \Rightarrow “: Nach Definition gilt, genau dann wenn $\varepsilon \in ET(P)$, ist ein Fehler-Zustand lokal erreichbar in P . $P_1 \sqsubseteq_E P_2$ implementiert, dass $\varepsilon \in ET_2$ gilt, wenn $\varepsilon \in ET_1$. Somit ist ein Fehler-Zustand in P_1 nur dann lokal erreichbar, wenn dieser auch in P_2 lokal erreichbar ist. Dadurch folgt, dass $P_1 \sqsubseteq_E^B P_2$ gilt, da \sqsubseteq_E^B in Definition 3.2 über die lokale Erregbarkeit der Fehler-Zustände in den as-Implementierungen definiert wurde und die ET -Mengen von P_1 und P_2 auch durch die Vereinigung der Traces ihrer as-Implementierungen, wie in Proposition 3.4, ausgedrückt werden können. Es ist also \sqsubseteq_E in \sqsubseteq_E^B enthalten. Wie in Korollar 3.7 gezeigt, ist \sqsubseteq_E eine Präkongruenz bezüglich $\cdot\parallel\cdot$. Da \sqsubseteq_E^C die größte Präkongruenz bezüglich $\cdot\parallel\cdot$ ist, die in \sqsubseteq_E^B enthalten ist, muss \sqsubseteq_E in \sqsubseteq_E^C enthalten sein. Es folgt also aus $P_1 \sqsubseteq_E P_2$, dass auch $P_1 \sqsubseteq_E^C P_2$ gilt.

„ \Leftarrow “: Durch die Definition von \sqsubseteq_E^C als Präkongruenz in 3.2 folgt aus $P_1 \sqsubseteq_E^C P_2$, dass $U\parallel P_1 \sqsubseteq_E^C U\parallel P_2$ für alle MEIOs U gilt, die mit P_1 komponierbar sind. Da \sqsubseteq_E^C nach Definition auch in \sqsubseteq_E^B enthalten sein soll, folgt aus $U\parallel P_1 \sqsubseteq_E^C U\parallel P_2$ auch die Gültigkeit von $U\parallel P_1 \sqsubseteq_E^B U\parallel P_2$ für alle diese MEIOs U . Mit Lemma 3.8 folgt dann $P_1 \sqsubseteq_E P_2$. \square

Es wurde somit jetzt eine Kette an Folgerungen gezeigt, die sich zu einem Ring schließt. Dies ist in Abbildung 3.3 dargestellt.



Abbildungung 3.3: Folgerungskette der Kommunikationsfehler-Relationen

Angenommen man definiert, dass $P_1 P_2$ verfeinern soll, genau dann wenn für alle Partner MEIOs U , für die P_2 fehler-frei mit U kommuniziert, folgt, dass P_1 ebenfalls fehler-frei mit U kommuniziert. Dann wird auch diese Verfeinerung durch \sqsubseteq_E charakterisiert.

Korollar 3.10. Es gilt: $P_1 \sqsubseteq_E P_2 \Leftrightarrow U\parallel P_1 \sqsubseteq_E^B U\parallel P_2$ für alle Partner U .

Literaturverzeichnis

- [BFLV16] Ferenc Bujtor, Sascha Fendrich, Gerald Lüttgen, und Walter Vogler, *Non-deterministic Modal Interfaces*, Theor. Comput. Sci. **642** (2016), 24–53.
- [BV15] Ferenc Bujtor und Walter Vogler, *Failure Semantics for Modal Transition Systems*, ACM Trans. Embedded Comput. Syst. **14** (2015), no. 4, 67:1–67:30.
- [Sch16] Ayleen Schinko, *Kommunikationsfehler, Verklemmung und Divergenz bei Interface-Automaten*, Bachelorarbeit, Universität Augsburg, 2016.