Les dimensions en géométrie

Par Mickaël Launay (GéoMl17)

OPENCLASSROOMS

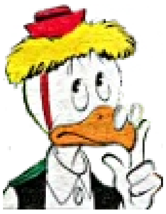
www.openclassrooms.com

Dernière mise à jour le 23/10/2012

Sommaire

Sommaire 2
Partager 1
Les dimensions en géométrie 3
Partie 1 : La géométrie dans toutes ses dimensions 3
Les trois dimensions 4
Le point 4
Un point c'est tout 4
Les figures géométriques 5
Les trois dimensions 6
La dimension zéro 6
La première dimension 6
La deuxième dimension 7
La troisième dimension 8
À ne pas confondre 9
Quel degré de liberté ? 10
Votre mission, si vous l'acceptez... 10
En résumé 16
La mesure des figures 17
Longueur, surface, volume 18
Les longueurs 18
Les surfaces 20
Les volumes 22
Changeons d'échelle 22
Les longueurs 22
Les surfaces 23
Les volumes 25
Conclusion 26
Changeons d'unité 26
Unités physiques 26
Convertir d'une unité à l'autre 27
Les fractales 30
Figures autosimilaires 30
Le flocon de von Koch 30
Quelques autres figures autosimilaires 33
La dimension de Minkowski 35
La mesure des frontières 35
Tout n'est pas si simple... 39
La quatrième dimension 41
Ana et Kata 41
Voyage dans la quatrième dimension 41
La 4D expliquée à des créatures tridimensionnelles 43
Bienvenue à Flatland ! 43
Avec de la couleur ! 47
En perspective 49
Jongler avec les points de vue 51
Vers les dimensions supérieures... 52
Le coin des énigmes 53
On commence en douceur... 54
Horizontal contre vertical 54
Le découpage 54
Le bonhomme de neige 55
On corse un peu 56
Les bulles 56
Les rectangles 57
Les triangles emboîtés 59
Ça se complique 60

Les dimensions en géométrie

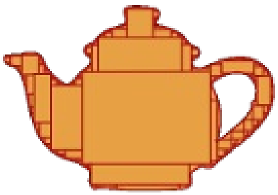
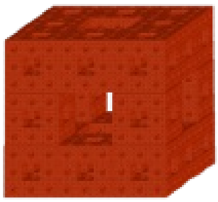
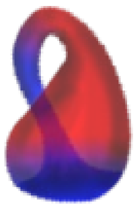
Par  Mickaël Launay (GéoMl17)

Mise à jour : 23/10/2012
Difficulté : Intermédiaire Durée d'étude : 2 jours

Vous avez sûrement déjà entendu parler de cinema en 2D ou en 3D.

Mais savez-vous ce cela signifie ?

Ce cours est une introduction à la notion de **dimension** en mathématiques. Pas besoin de prérequis ou de connaissances avancées pour pouvoir le lire : on part de zéro ! En géométrie on étudie les plus souvent les figures de dimension 1, 2 ou 3 et nous verrons ce que cela veut dire. Mais nous découvrirons également au cours de notre exploration qu'il existe des figures étranges nommées fractales dont la dimension est un nombre à virgule ! Et puis pour finir nous partirons dans la quatrième dimension. Oui, oui la quatrième dimension ! En maths tout est possible...

Ce cours s'achève par un chapitre intitulé *Le coin des énigmes* dans lequel vous aurez l'occasion de mettre en pratique tout ce que vous aurez appris !

Partie 1 : La géométrie dans toutes ses dimensions

Dans cette partie nous allons découvrir un concept fondamental en géométrie, celui de **dimension**. Peut-être avez-vous déjà une idée de ce que sont les dimensions 1, 2 et 3, puisqu'on les étudie à l'école et qu'on les rencontre dans la vie de tous les jours. Dans tous les cas nous allons reprendre ça depuis zéro, avant de découvrir que les dimensions renferment bien d'autres subtilités aussi étonnantes que jolies. Je ne vous en dis pas plus pour l'instant, je ne veux pas gâcher le suspens...

Mais inutile de s'éterniser en bavardages, je vous propose d'entrer tout de suite dans le vif du sujet avec le premier chapitre et les trois dimensions.

Les trois dimensions

On entend souvent dire que le monde est en trois dimensions (3D pour les intimes), mais qu'est-ce que cela veut dire exactement ?

Voilà la question à laquelle nous allons répondre dans ce premier chapitre de géométrie. Nous allons voir ce qu'est une dimension et pourquoi notre espace en a trois.

Le point

Un point c'est tout

En géométrie, la notion de base est celle de point. **Un point** c'est un emplacement dans l'espace. Attention, ce n'est pas une zone, mais bien un endroit précis. Un point c'est le plus petit objet géométrique, un point ne peut pas être coupé en plusieurs morceaux. Toutes les figures géométriques que nous pouvons construire ne sont que des assemblages de plusieurs points.

Je suis sûr que vous brûlez d'impatience de voir un point. Bien, bien en voici un :

Comment ça, vous ne voyez rien ? Mais si regardez bien il est juste ici :

Non ? Vous ne voyez toujours rien, bon alors je l'agrandis :

Comme ça, ça va mieux !

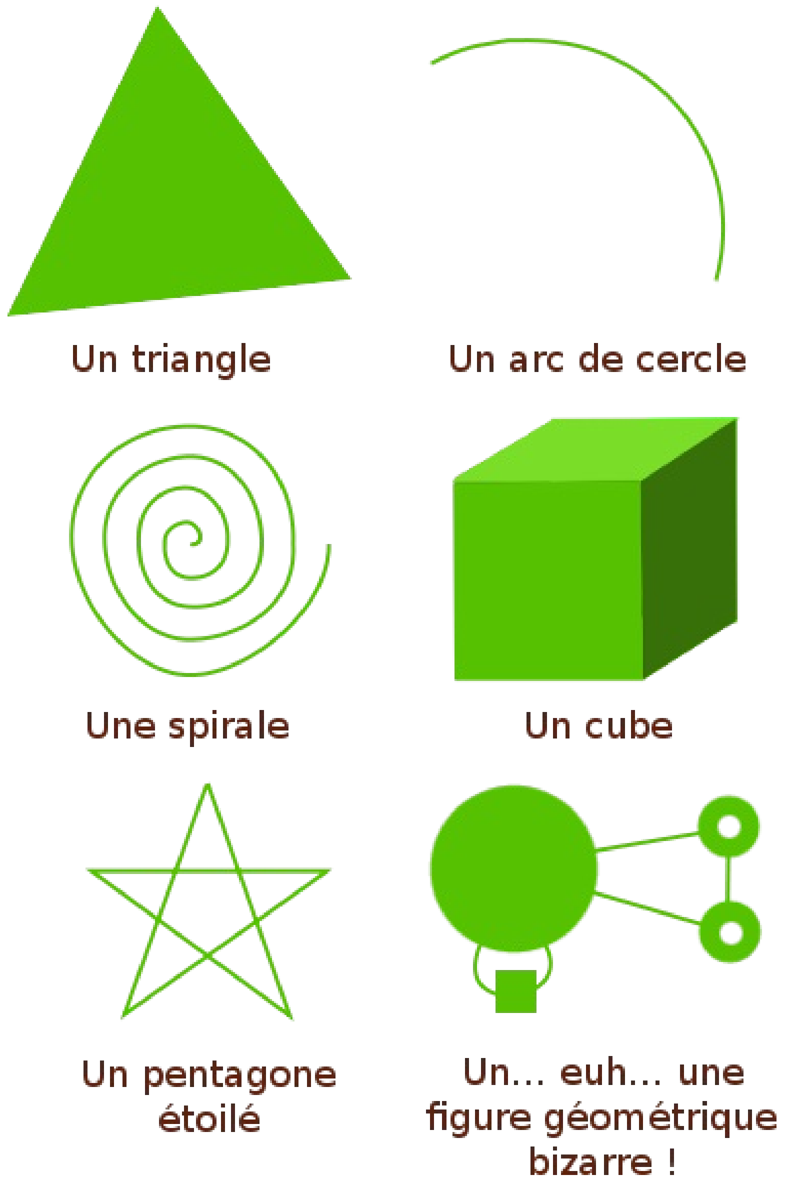
C'est le problème avec les points : on est obligé de les agrandir pour les voir, car la taille d'un point est 0. Du coup on représente souvent les points avec des ronds (comme ci-dessus) ou avec des croix :

Le point est à l'intersection des deux traits de la croix.

Les figures géométriques

Ceci dit, les points tout seuls ne sont pas passionnants. Pour que ça commence à devenir intéressant il faut prendre des ensembles de points, c'est-à-dire des groupes de plusieurs points. Ces ensembles de points s'appellent **des figures géométriques**.

Voici quelques exemples de figures géométriques (les points sont coloriés en vert) :



Vous remarquerez que toutes ces figures géométriques sont composées d'une infinité de points agglutinés les uns aux autres.

Les trois dimensions

Il existe toutes sortes de figures géométriques. Nous voulons donc faire un peu de tri parmi elles, c'est pourquoi nous les classons en trois niveaux différents : les trois dimensions. Il y a les figures en une dimension (1D), les figures en deux dimensions (2D) et les figures en trois dimensions (3D).

Ne nous perdons pas dans des discussions interminables, venons en tout de suite au fait. Quelles sont les trois dimensions ?

La dimension zéro

Une figure géométrique de dimension 0, c'est juste un point.

La première dimension

La première dimension, c'est la dimension des lignes.

Voici quelques exemples de figures de dimension 1 :

Ah oui ! Excusez-moi, j'ai encore oublié d'agrandir les points :

En théorie les lignes ont une épaisseur égale à 0, mais en pratique on les dessine quand même avec une petite épaisseur pour pouvoir les voir.

La deuxième dimension

La deuxième dimension, c'est la dimension des surfaces.

Voici quelques figures de dimension 2 :

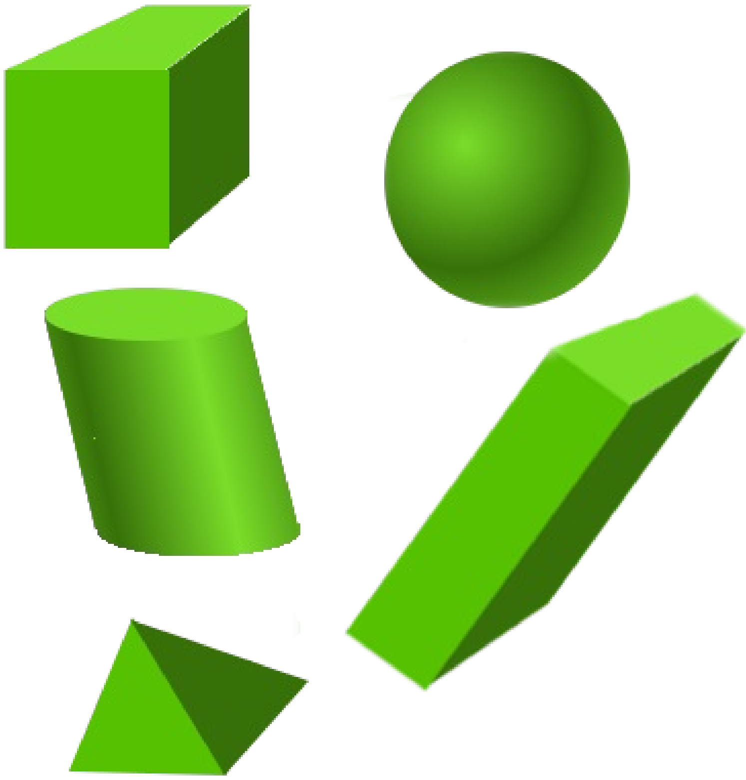
Vous remarquez qu'il y a deux figures en perspective dans les exemples en 2D. En effet, une surface n'est pas obligatoirement plate, elle peut se déformer, se tordre dans l'espace tout en restant une surface, donc une figure en deux dimensions. Sur le dessin, la perspective est rendue par différentes nuances de vert qui donnent une impression de relief (parce que bien entendu, votre écran d'ordinateur est plat donc il n'est pas possible de les dessiner vraiment en relief).

Vous remarquerez que cette fois, il n'y a pas eu besoin d'agrandir les points ! Les surfaces sont visibles à l'œil nu.

La troisième dimension

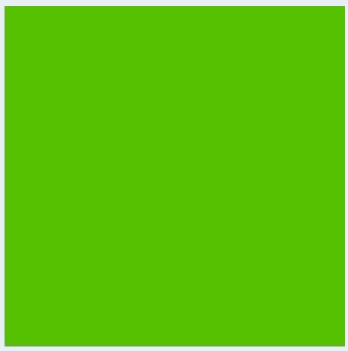
La troisième dimension, c'est la dimension des volumes.

Voici quelques figures de dimension 3 :



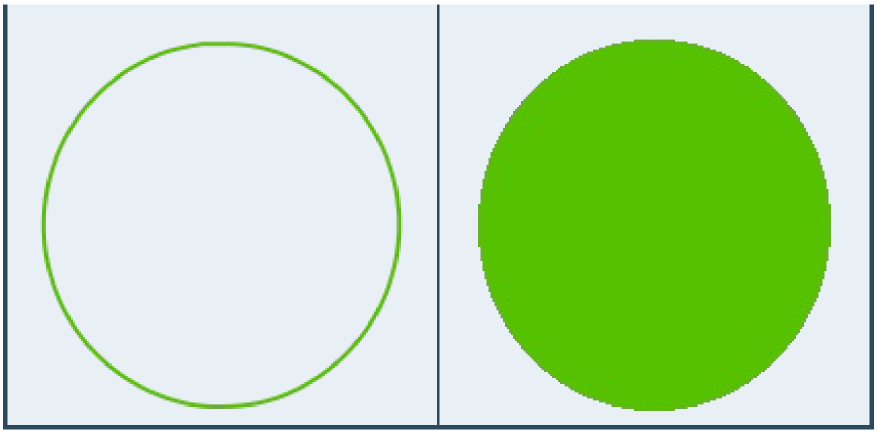
Encore une fois, comme votre écran d'ordinateur est plat, il est impossible d'y représenter réellement une figure en 3D. On utilise donc un effet de perspective avec des zones d'ombre et de lumière (différentes nuances de vert). Le dessin est en 2D, mais par cet effet vous le voyez comme un objet en 3D. Si vous voulez voir des vrais objets en 3D, relevez quelques secondes le nez de cet écran et regardez autour de vous : vous en êtes entouré !

À ne pas confondre

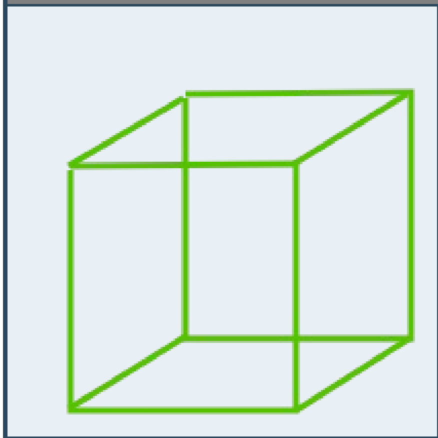
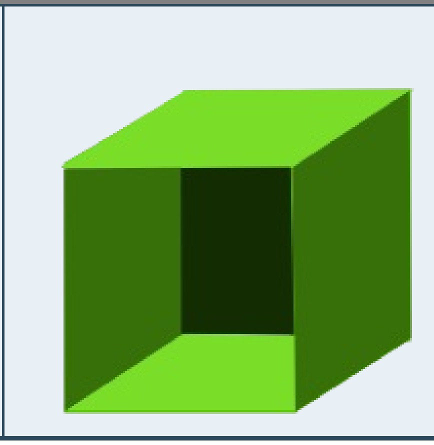
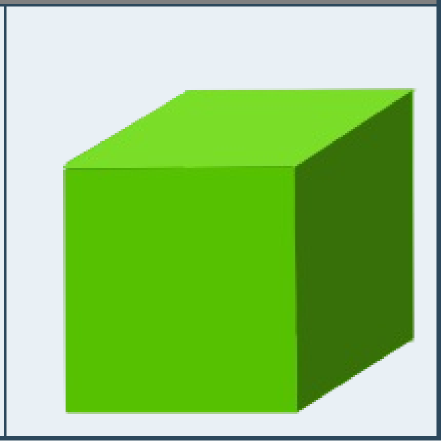
Le tour du carré (Dimension 1)	Le carré (Dimension 2)
	

En fait, le mot *"carré"* est assez général et peut aussi bien désigner la surface (2D) que le tour (1D).

Le cercle (Dimension 1)	Le disque (Dimension 2)



Pour le cube on peut même avoir les trois dimensions :

Les arêtes du cube (Dimension 1)	Les faces du cube (Dimension 2)	Le cube (Dimension 3)
		

Dans la figure du milieu, j'ai enlevé la face de devant pour que vous puissiez voir que le cube est creux à l'intérieur. Si j'avais mis cette face, le dessin aurait été identique au troisième qui lui représente un cube plein.

Nous verrons plus loin que toutes les figures géométriques ne peuvent pas être classées dans ces trois catégories. Il y en a qui ne sont ni en 1D, ni en 2D, ni en 3D. Cependant, toutes les figures classiques que l'on étudie quand on débute en géométrie sont soit des lignes, soit des surfaces, soit des volumes. Donc pas de problème pour l'instant.

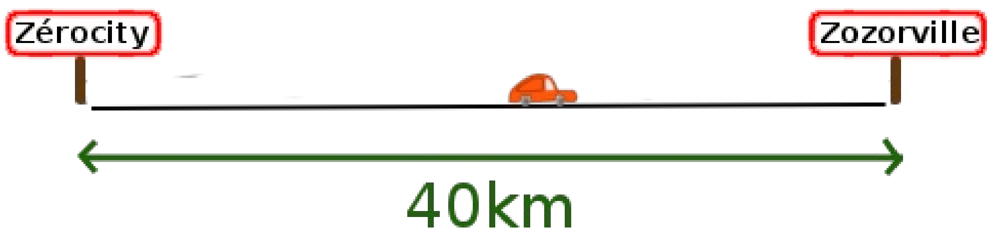
Quel degré de liberté ?

Votre mission, si vous l'acceptez...

Vous aimez voyager ? Ça tombe bien, vous allez beaucoup vous déplacer dans cette partie. Vous êtes l'agent secret Z001 en mission spéciale pour sauver le monde. (Si, si, puisque je vous le dis.)

Première mission : Sur la route

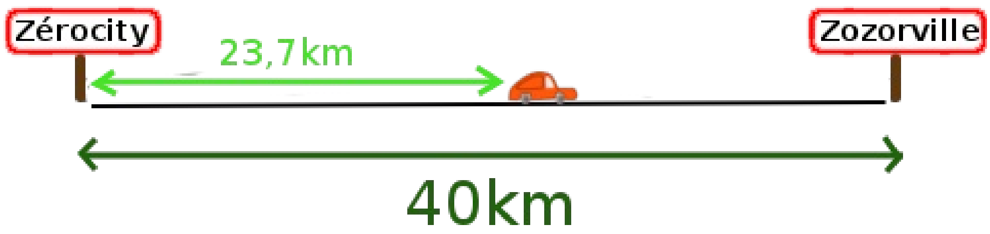
Pour votre première mission, vous êtes sur la route qui relie Zérocity à Zozorville qui se trouve à 40 kilomètres de distance :



Quand soudain, la base vous appelle et vous demande de lui communiquer votre position précise.

La question est : comment faire pour communiquer cette position ?

La réponse est assez simple (normal, c'est votre première mission, mais ça va se compliquer ensuite). Il suffit de dire à quelle distance de Zérocity vous vous trouvez. Par exemple, si vous êtes à 23,7 kilomètres de Zérocity, il suffit de donner cette information à la base pour qu'elle sache immédiatement où vous êtes :



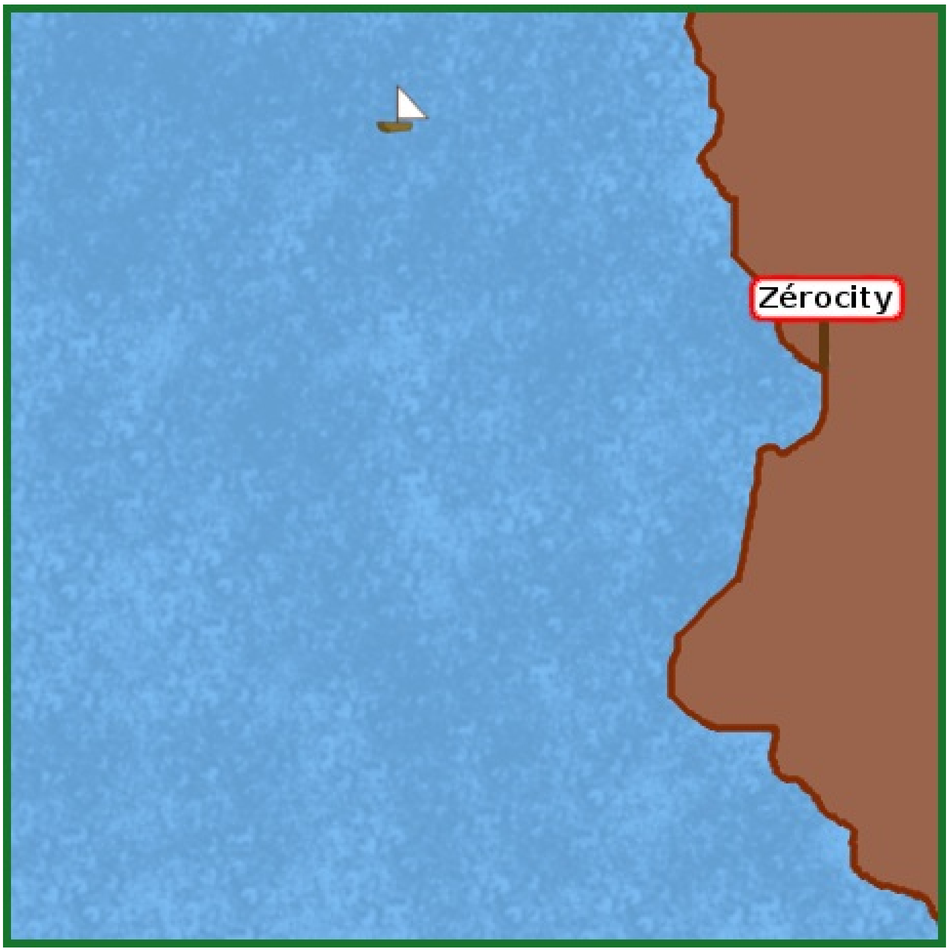
Il n'y a pas d'ambigüité : Sur la route de Zérocity à Zozorville, il n'y a qu'un seul point qui se trouve à 23,7 kilomètres de Zérocity.

La route de Zérocity à Zozorville est une ligne, on peut donc la représenter par une figure géométrique de dimension 1. Nous venons donc de voir que pour indiquer la position d'un point sur une figure géométrique de dimension 1, il suffit de donner un nombre.

Première mission réussie ! Bravo agent Z001.

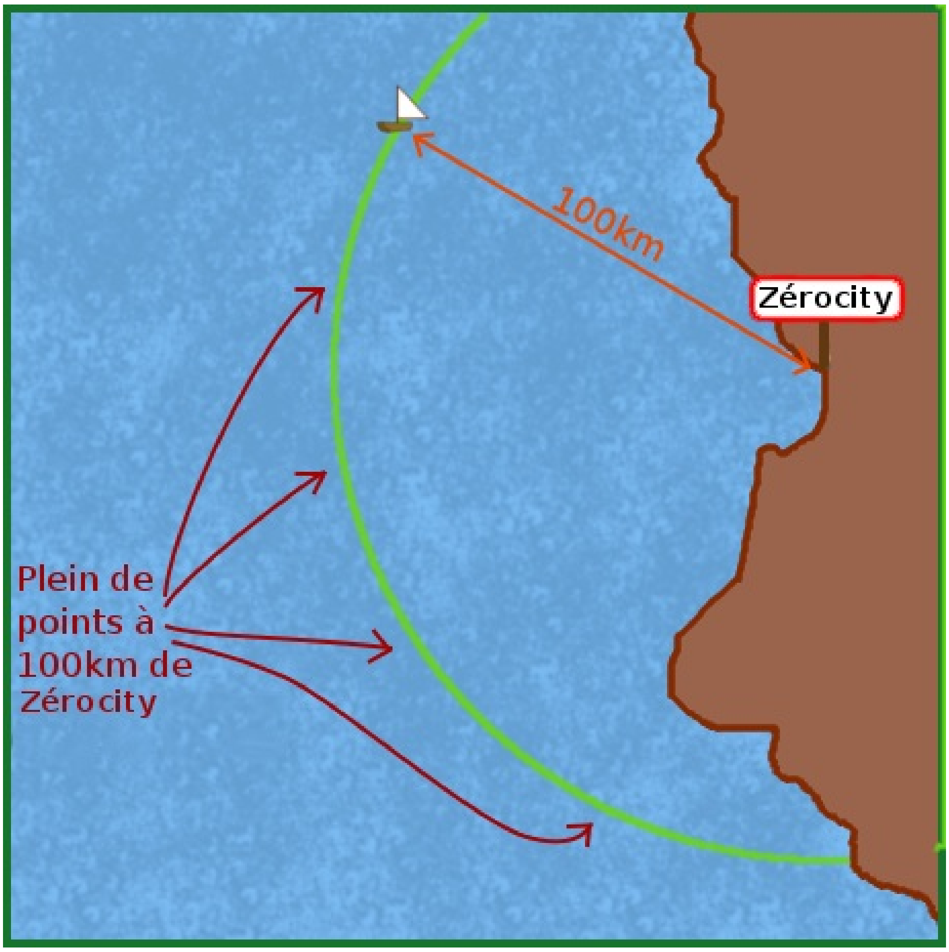
Deuxième mission : En mer

Suite à votre premier succès, vous êtes promu au rang d'agent Z002 et vous êtes maintenant en mission en pleine mer sur un bateau. Vous êtes parti du port de Zérocity :



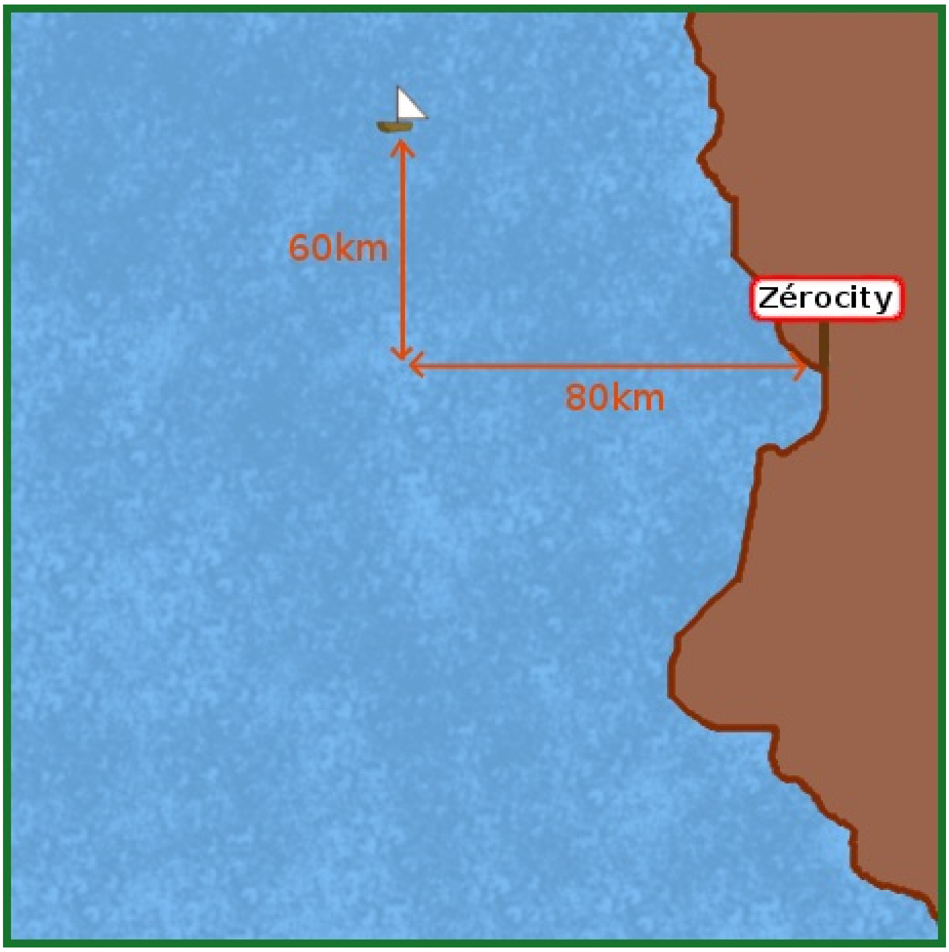
Et voilà que la base vous appelle de nouveau pour vous faire la même demande : "Communiquez-nous votre position précise."

Seulement voilà : cette fois-ci, vous ne pouvez pas procéder de la même façon que lors de votre première mission. En effet, si vous donnez à votre base la distance qui vous sépare du port de Zérocity, elle ne pourra pas savoir où vous êtes exactement, car il y a plusieurs points à la même distance du port.
Si vous êtes à 100 kilomètres du port, tous ces points sont possibles :



La base ne sait pas sur quel point du cercle vous vous trouvez. Il faut donc trouver une autre façon de faire.

Une solution est la suivante, vous pouvez dire : "Je suis à 60 kilomètres au nord et 80 kilomètres à l'ouest de Zérocity." Cette fois, il n'y a plus de doutes possibles :



Ce qu'il est important de noter ici, c'est qu'il vous a fallu 2 nombres pour indiquer votre position : la distance vers le nord et la distance vers l'ouest.

La mer est une surface, on peut donc la représenter par une figure géométrique de dimension 2. Ainsi, pour indiquer la position d'un point sur une figure géométrique de dimension 2, il faut donner deux nombres.

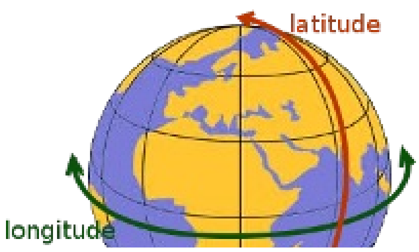
Eh, mais non, ce n'est pas la peine de donner 2 nombres ! Il suffit de donner un nombre complexe ! Comme les nombres complexes se représentent par un plan, chaque point du plan correspond à un nombre, non ?

Ça c'est astucieux ! En effet, pour désigner votre bateau vous pourriez simplement donner le nombre complexe $-80 + 60i$ et le tour est joué (la partie réelle donne le déplacement horizontal et la partie imaginaire donne le déplacement vertical). En mathématiques on fait la différence entre la géométrie réelle et la géométrie complexe. Dans la première, les dimensions sont données par des nombres réels et dans la seconde par des nombres complexes. Autrement dit, un plan réel de dimension 2 peut-être vu comme une droite complexe de dimension 1.

Bien que la géométrie complexe soit une très jolie théorie, elle est assez abstraite et dans ce cours nous nous contenterons de la géométrie classique réelle qui est celle que nous utilisons dans la vie de tous les jours. Cette géométrie est déjà bien assez riche et va nous donner suffisamment de fil à retordre pour l'instant.

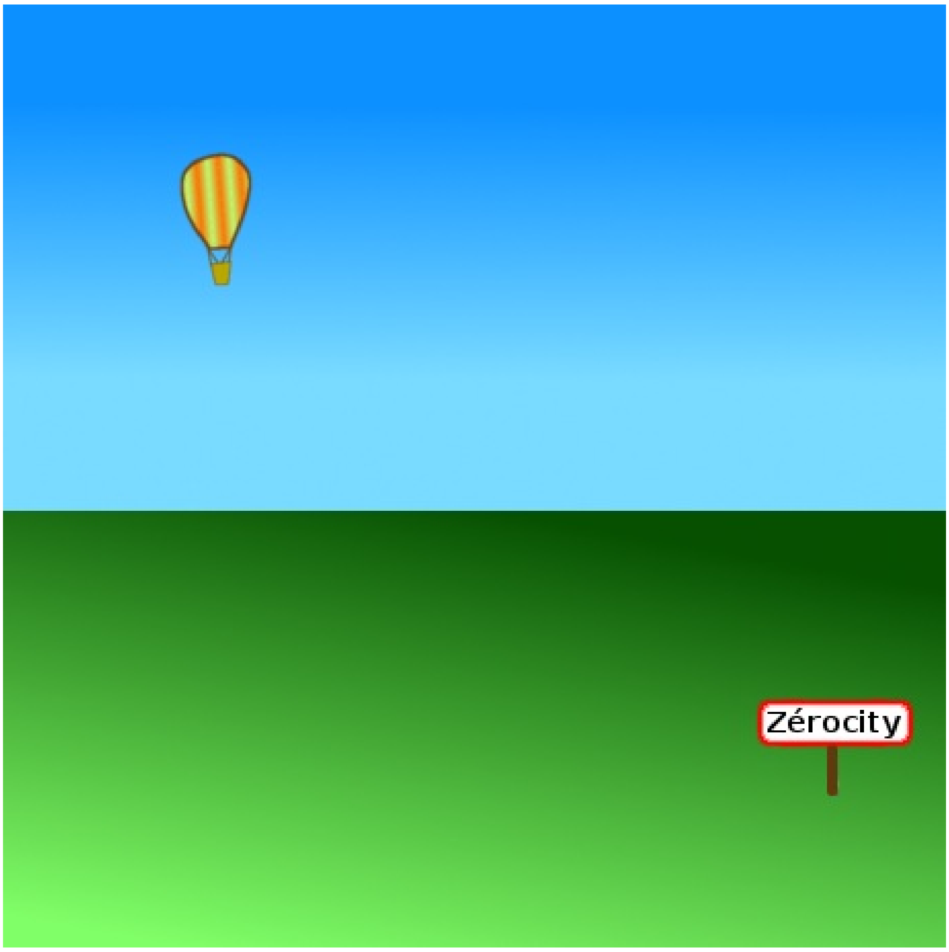
Par conséquent à partir de maintenant, nous ne parlons plus que de géométrie réelle et la surface de la mer est donc bien en dimension 2.

La surface du globe est de dimension 2. En général, pour indiquer la position d'un point sur la planète on utilise la latitude et la longitude. La latitude est un nombre qui indique la position nord-sud, qui part de -90 au pôle Sud et arrive à 90 au pôle Nord en passant par 0 à l'équateur. La longitude elle indique la position est-ouest elle va de -180 à 180 en tournant d'ouest en est et passe par 0 au méridien de Greenwich.



Troisième mission : Dans les airs

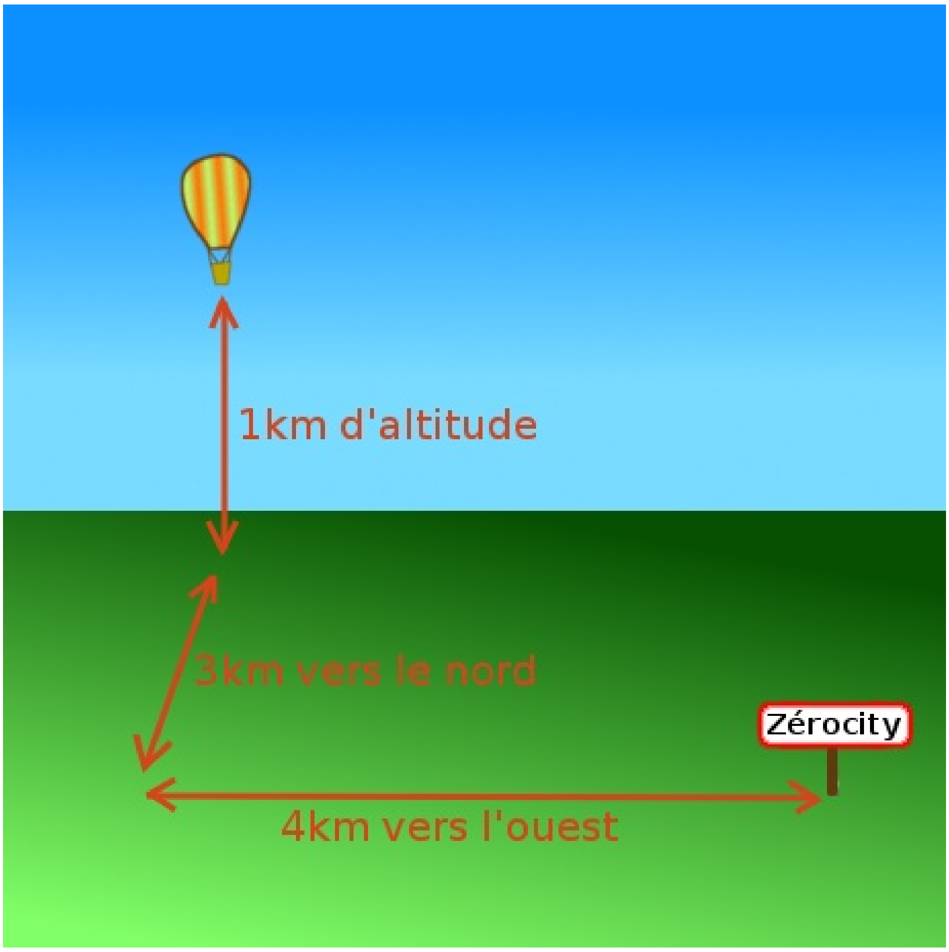
Vous êtes désormais l'agent Z003 et cette fois, vous voyagerez en montgolfière.
(Désolé, mais avec les restrictions budgétaires on n'a pas pu avoir le jet privé...)



Vous commencez à avoir l'habitude, la base vous appelle et vous demande votre position.

Cette fois, il est clair que cela ne suffit pas de donner la distance vers le nord et vers l'est comme précédemment. Il faut en plus donner votre altitude.

Vous indiquez donc : "4 kilomètres vers l'ouest, 3 kilomètres vers le nord et 1 kilomètre de hauteur."



L'atmosphère est un volume, autrement dit, elle se représente par une figure de dimension 3. Pour indiquer la position d'un point dans une figure géométrique de dimension 3, il faut donner trois nombres.

En résumé

La dimension, c'est le nombre d'informations qu'il faut donner pour retrouver un point dans une figure géométrique.

On appelle aussi cela le nombre de degrés de liberté. Plus la dimension est grande, plus on est libre de se déplacer. On est moins coincé en quelque sorte.

- Sur une ligne, il y a un seul degré de liberté. On ne peut se déplacer que sur la direction de la ligne.
- Sur une surface, il y a deux degrés de liberté. Par exemple, pour un piéton qui se déplace sur le sol, ces deux degrés sont : 1) La direction avant/arrière 2) la direction gauche/droite.
- Dans un volume, il y a trois degrés de liberté : 1) avant/arrière 2) gauche/droite 3) haut/bas.

Et en diagonale alors ? Si on peut aller d'avant en arrière et de gauche à droite, pourquoi ne peut-on pas aller aussi en diagonale ?

Ce qu'il faut comprendre c'est que si on peut aller en avant, en arrière, à gauche et à droite, on peut aller à n'importe quel endroit sur une surface (et le sol est une surface). Le fait de pouvoir aller en diagonale ne vous rajoute aucune liberté supplémentaire : il ne vous permet pas d'aller ailleurs que là ou vous pouviez déjà aller en ne vous déplaçant que selon les directions avant/arrière et gauche/droite. Un pas en diagonal est équivalent à un pas vers la droite et un pas en avant.

En revanche, si vous voulez vous élever dans les airs, vous ne pourrez pas le faire avec uniquement les deux directions avant/arrière et gauche/droite. Cette fois, il s'agit d'une vraie nouvelle dimension. Vous avez alors besoin de pouvoir vous déplacer selon la nouvelle direction haut/bas.

Euh... juste une dernière question. Pourquoi considère-t-on droite/gauche comme une seule dimension et pas comme deux, la dimension à droite et la dimension à gauche ? (et pareil pour avant/arrière et haut/bas).

En géométrie, on fait la distinction entre la direction et le sens. Une direction possède deux sens. Pour la direction gauche/droite, il y a le sens vers la gauche et le sens vers la droite.

La dimension compte le nombre de directions et non pas le nombre de sens. Nous avons vu que la dimension c'est le nombre d'informations qu'il faut donner pour indiquer la position d'un point. Mais ces informations peuvent être des nombres positifs ou négatifs. Par exemple, si vous êtes en dimension 1 : vous ne pouvez vous déplacer que selon la direction droite/gauche. Vous pouvez indiquer les positions vers la droite par des nombres positifs et celles vers la gauche par des nombres négatifs. Si vous êtes à 3 kilomètres à gauche de votre point de départ vous indiquerez la position -3. Et si vous êtes à 3 kilomètres à droite, vous indiquerez la position +3.


Henri Poincaré

Finalement avec les nombres négatifs, on voit bien que la droite et la gauche c'est la même chose et comme disais le mathématicien Henri Poincaré :

Citation : Henri Poincaré

> Faire des mathématiques, c'est donner le même nom à des choses différentes.

Oui, je sais je radote, j'ai déjà utilisé cette citation dans le cours Nombres et opérations. Mais que voulez-vous, j'aime vraiment beaucoup cette phrase.

De même pour l'avant et l'arrière ou le haut et le bas :

- 3 kilomètres vers la gauche = -3 kilomètres vers la droite.
- 15 mètres vers le haut = -15 mètres vers le bas.
- *Et cætera*. Si vous ne comprenez pas bien ça, je vous encourage à aller lire ou relire le chapitre sur les nombres entiers du cours *Nombres et opérations* (et en particulier le passage sur les entiers relatifs.)

Maintenant que nous avons classé nos figures en trois catégories, nous allons pouvoir chercher à mesurer leur taille. C'est ce que nous allons faire dans le prochain chapitre.

La mesure des figures

Il y a des figures géométriques qui sont plus grandes que d'autres. Dans ce chapitre nous allons apprendre à les mesurer. Puis nous verrons également comment est modifiée la mesure d'une figure si on change sa taille ou si on change l'unité de mesure.

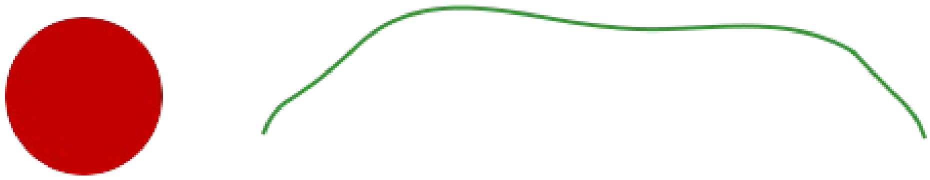
Longueur, surface, volume

La première chose qu'il faut comprendre c'est que l'on ne peut pas mesurer de la même façon des figures qui n'ont pas la même dimension.

Pour caricaturer un peu, on peut considérer que les figures de dimensions 3 sont plus grandes que les figures de dimension 2 qui elles-mêmes sont plus grandes que les figures de dimension 1.

$$1D < 2D < 3D$$

Et quand je dis plus grande, c'est *infiniment* plus grande ! Prenons par exemple, un disque de dimension 2 (même tout petit), et une ligne de dimension 1 (même très grande) :



Alors on peut couper la ligne en petits morceaux de façon à la faire tenir dans le disque :

Et remarquez qu'il y a encore de la place dans le disque ! En fait, on pourrait même faire tenir autant de fois que l'on veut la même ligne dans le disque. N'oubliez pas qu'une ligne n'a pas d'épaisseur, donc même si ça ne se voit pas sur le dessin, la ligne prend une place totalement négligeable dans le disque. C'est ce qui permet de dire que le disque est plus grand que la ligne. Infiniment plus grand !

De la même façon vous pouvez vous apercevoir en réfléchissant un peu que les figures de dimension 3 sont infiniment plus grandes que les figures de dimension 2. (Essayez de découper un carré pour le faire tenir dans une boule par exemple : c'est toujours possible !)

Cette façon de voir les choses est un peu approximative. En réalité, les figures de dimension 1, 2 ou 3 contiennent toutes une infinité de points et on ne peut pas affirmer de cette façon que l'une comprend plus de points que l'autre. L'infini est parfois traitre en mathématiques et il existe même une certaine théorie de l'infini dans laquelle on peut démontrer que la ligne et le disque ont autant de point l'un que l'autre. Mais ce n'est pas le sujet ici donc pour le moment vous pouvez continuer de vous dire que, en gros, le disque a plus de points que la ligne.

Ce qu'il faut retenir de tout cela, c'est que les figures de différentes dimensions ne jouent pas dans la même cour. Car si on mesurait les dimensions 1 et 2 de la même façon, alors soit toutes les figures de dimensions 2 seraient de taille infinie, soit toutes les figures de dimension 1 seraient de taille 0. Il faut donc les mesurer différemment.

Commençons tout de suite par la dimension 1.

Les longueurs

La mesure d'une figure de dimension 1 s'appelle la longueur.

La première chose qu'il faut faire quand on veut mesurer des figures, c'est choisir une unité. C'est-à-dire une figure de base, qui va servir d'étalon et dont la mesure sera déclarée comme étant égale à 1.

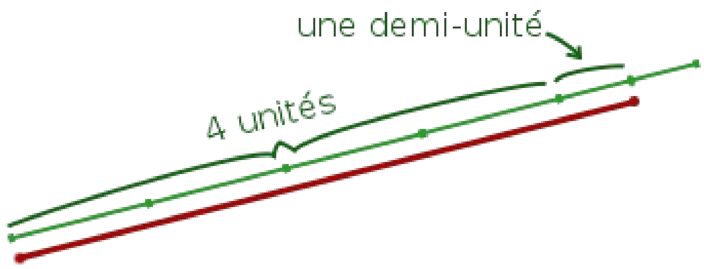
Dans la vie de tous les jours, on est habitué à mesurer les objets en différentes unités. On peut utiliser le centimètre, le mètre, le kilomètre. Les marins mesurent en miles, les astronomes en années-lumière... Il existe une multitude d'unités et bien sûr il est toujours possible de convertir les longueurs d'une unité à l'autre. Par exemple, "1 kilomètre = 1000 mètres". Nous reviendrons sur la manipulation de plusieurs unités à la fin de ce chapitre.

Et bien puisqu'il le faut, prenons une unité. Allez, pourquoi pas ce segment :

Ce segment a donc le privilège d'avoir sa longueur égale à 1. Une fois qu'on a choisi cette unité, il est possible de déterminer la longueur des autres figures unidimensionnelles. (Unidimensionnelle ça veut juste dire de dimension 1 en fait, mais ça fait plus classe et ça évite les répétitions.)

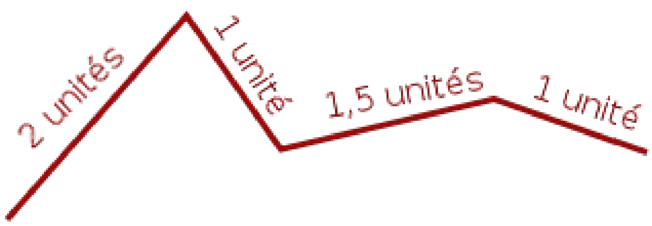
Prenons ce segment :

Comparons-le maintenant à notre unité :

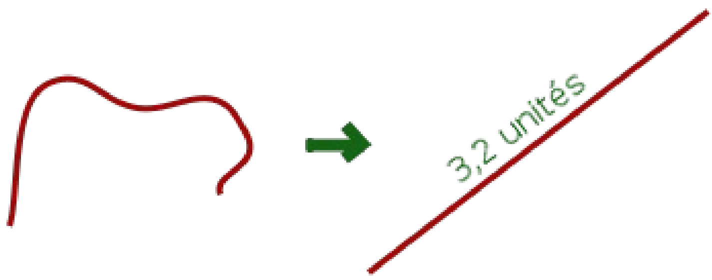


Ce segment a une longueur égale à 4,5 fois celle de l'unité. Sa longueur est donc égale à 4,5. C'est simple non ?

Ceci marche aussi si la figure est une ligne brisée :



Sa longueur est 5,5 : c'est simplement la somme des longueurs des différents morceaux droits qui la compose. Et si la ligne est carrément courbe, alors il faut imaginer qu'il s'agit une ficelle que l'on tend pour la rendre droite et mesurer sa longueur :



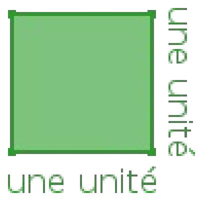
Bien sûr, concrètement mesurer une telle ligne peut parfois aboutir à des calculs compliqués, mais ce n'est pas ici l'objet de cette leçon. L'important est juste de comprendre la notion de longueur. C'est bon ? Oui ? Alors on passe tout de suite à la dimension 2.

Les surfaces

La mesure d'une figure de dimension 2 s'appelle la surface ou l'aire. Dans la suite j'utiliserai l'un ou l'autre des deux mots : c'est la même chose.

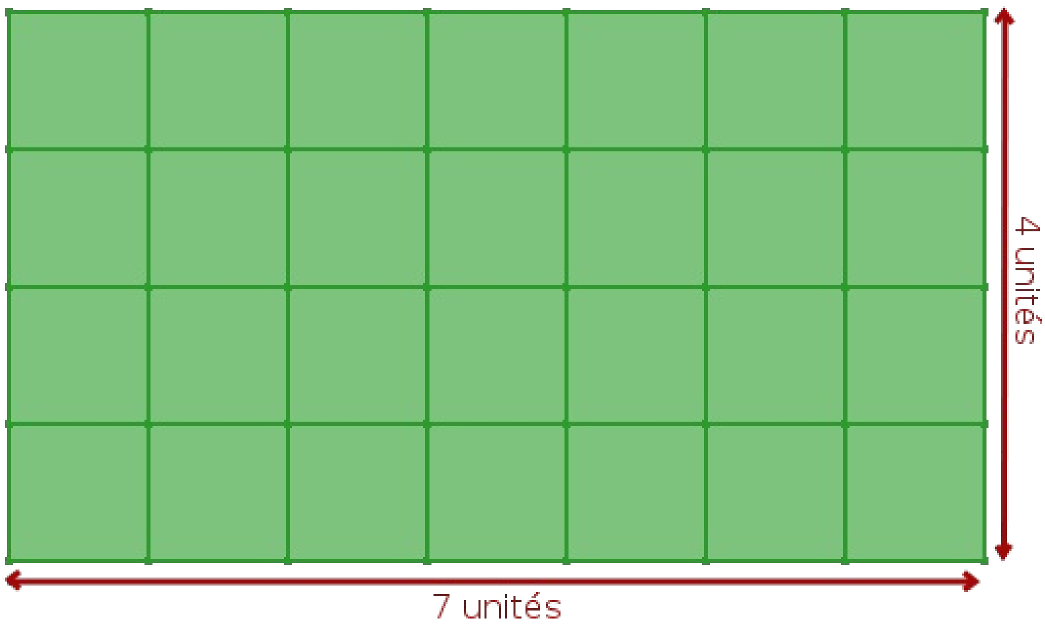
Encore une fois il faut choisir une unité. Seulement nous n'allons pas faire ce choix au hasard. Quelle figure de dimension 2 choisir comme unité pour que ce soit le plus pratique possible ? À votre avis ? Un disque ? Un carré ? Un triangle ?

Le choix le plus courant est celui du carré. Mais pas n'importe quel carré : le carré dont le côté a une longueur égale à 1, c'est-à-dire à l'unité de longueur que nous avons choisie précédemment :



Mais pourquoi ce choix ? Qu'est-ce que ça nous apporte ?

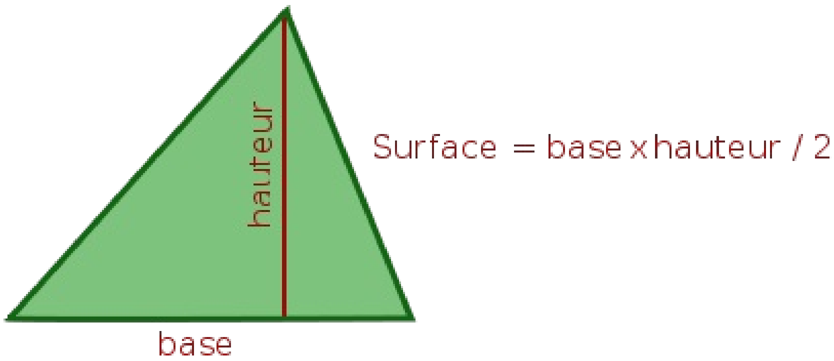
C'est très pratique. Par exemple, ce choix rend le calcul de la surface d'un rectangle simplissime. Il suffit de faire la multiplication de la longueur par la largeur :



Le nombre de petits carrés unité dans le rectangle est égal à la multiplication de la longueur 7 par la largeur 4 : 28.

Notez que le fait de prendre le carré dont le côté est l'unité de longueur permet de relier les mesures de dimensions 1 à celles de dimension 2. Les longueurs permettent de calculer les surfaces ! Cool, non ?

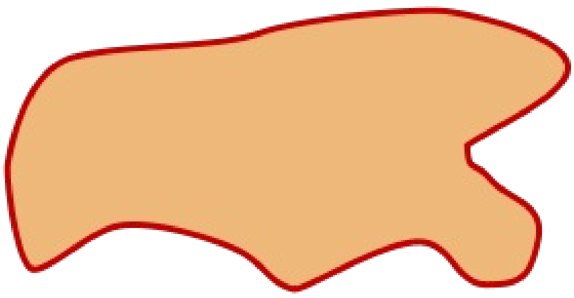
Le rectangle est le cas le plus simple. Pour d'autres figures il peut arriver que ça soit plus compliqué, mais très souvent, il existe des formules pour calculer la surface en fonction de certaines longueurs de la figure. Par exemple, l'aire d'un triangle est égale à sa base multipliée par sa hauteur et divisée par deux. Cette formule ne serait pas vraie avec un autre choix d'unité.



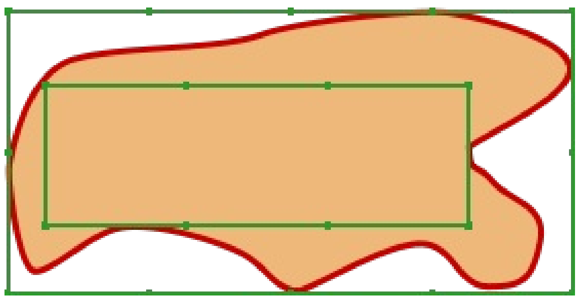
Si vous ne comprenez pas cette formule, ne vous affolez pas, nous l'expliquerons en détail et nous en verrons plusieurs autres dans la partie 2 de cette leçon, consacrée à la géométrie plane.

Notez tout de même qu'il n'est absolument pas obligatoire de faire le choix du carré comme unité. Il y a certaines conditions dans lesquelles les mathématiciens préfèrent choisir le disque de diamètre égal à 1. Oui, ça peut paraître étrange, mais des fois c'est plus pratique !

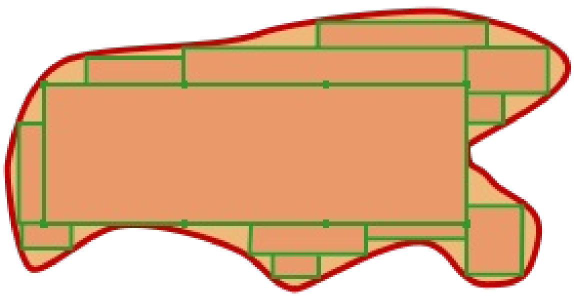
Mais comment fait-on si la surface à mesurer n'est pas celle d'une figure simple comme un rectangle ou un triangle ? Par exemple, la figure suivante :



À partir d'un dessin, on ne peut que donner une valeur approximative de la surface. Pour cela on peut faire des approximations par des rectangles :



De ce dessin on déduit que notre surface est comprise entre 3×1=3 et 4×2=8. Bon d'accord, ce n'est pas très précis comme mesure ! Pour une meilleure mesure on découpe en rectangles plus fins :



En faisant la somme des aires des rectangles, on trouve une approximation de la surface de la figure. Ici on trouve environ 5,6. Et plus on rajoute de petits rectangles dans les morceaux qui restent à boucher sur les bords, plus on connaît avec précision la surface.

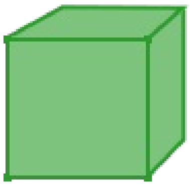
Si on a juste un dessin comme ci-dessus, il n'est pas possible de dire avec précision sa surface. Un dessin c'est toujours approximatif, ça ne suffit pas pour connaître la figure. Pour pouvoir faire un calcul précis, il faut une description mathématique de la figure comme on peut en donner pour des triangles, des disques ou des tas d'autres figures.

Dans le cas où on a une description précise de la figure dont on veut calculer la surface, il existe différentes méthodes pour arriver à nos fins. Nous aurons l'occasion d'en découvrir un certain nombre au fil de ce cours.

Les volumes

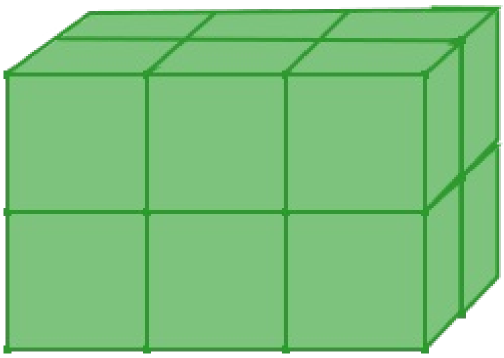
À votre avis, qu'allons-nous choisir comme unité pour la dimension 3 ?

Un cube bien sûr ! Et plus particulièrement le cube de côté égal à 1 :



Comme pour les surfaces, ce choix est très souvent le plus pratique. La mesure d'une figure de dimension 3 s'appelle le volume.

Comme pour les rectangles dans le cas de dimension 2, ce choix de dimension 3 rend très facile le calcul du volume des parallélépipèdes rectangles :



Le parallélépipède est composé de $3\times2\times2=12$ cubes unité, son volume est donc 12. Il suffit de faire la multiplication de la longueur, la largeur et la hauteur.

Comme pour la dimension 2, il existe des méthodes et des formules pour calculer les volumes de figures tridimensionnelles autres que les parallélépipèdes. Nous y reviendrons dans la troisième partie de ce cours.

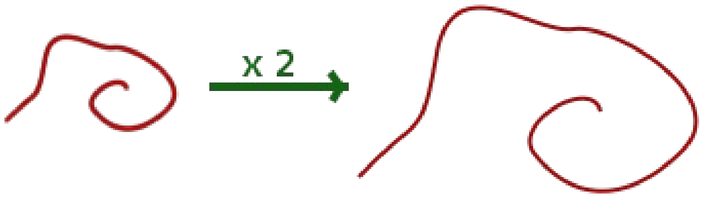
Changeons d'échelle

Que se passe-t-il si on agrandit ou rétrécit des figures ? Voilà la question à laquelle nous allons répondre dans cette partie. Il est amusant de voir que les figures de différentes dimensions se comportent différemment.

Les longueurs

Commençons par une ligne de dimension 1 :

Maintenant regardons ce qui se passe si on multiplie la taille de la figure par 2 :



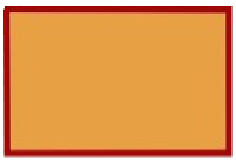
Le constat est simple : quand on multiplie la taille par 2, la longueur est multipliée par 2. Et de la même façon, si on multiplie la taille de la figure par n'importe quel nombre x, la longueur de la ligne est multipliée par x.

Heu... Mais c'est complètement évident ce que tu nous dis là ? Tu n'as rien de plus intéressant que ces banalités ?

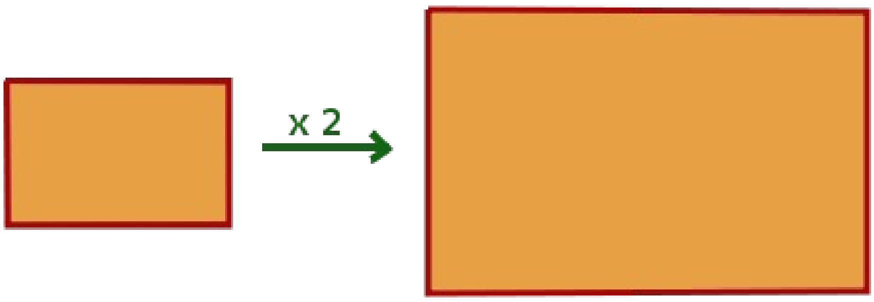
Oui excusez-moi pour ces trivialités, mais vous allez voir que ça devient plus intéressant quand on passe à la dimension 2.

Les surfaces

Prenons une surface, par exemple un rectangle :

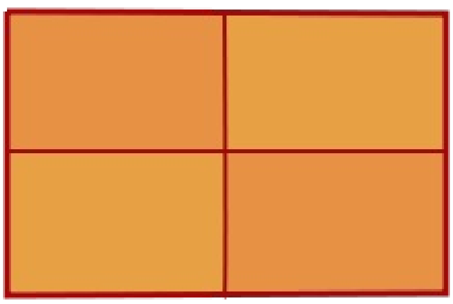


Et maintenant, multiplions la taille du rectangle par 2, autrement dit, multiplions sa largeur et sa longueur par 2 :



La question est : par combien la surface est-elle multipliée ?

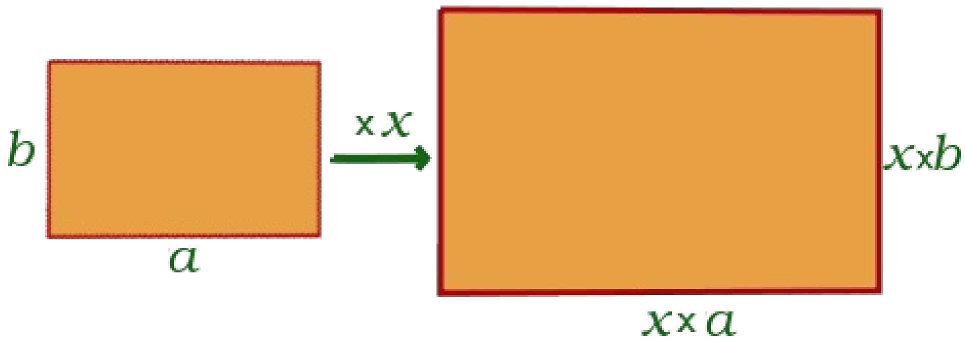
Surprise : la réponse n'est pas 2 ! En réalité, la surface du rectangle est multipliée par 4. La preuve en image, regardez ce découpage :



Le grand rectangle est composé de 4 fois le petit. Sa surface est donc 4 fois plus grande !

Que se passe-t-il si on multiplie le rectangle par un nombre quelconque x à la place de 2 ?

Bonne question ! Et ça va être l'occasion de faire un petit calcul. Allons, ne faites pas cette tête, ça va être court. Prenons un rectangle de longueur a et de largeur b et multiplions le par x :



La surface du rectangle de départ est ab et celle du rectangle agrandi est :

$$(xa) \times (xb) = x^2ab$$

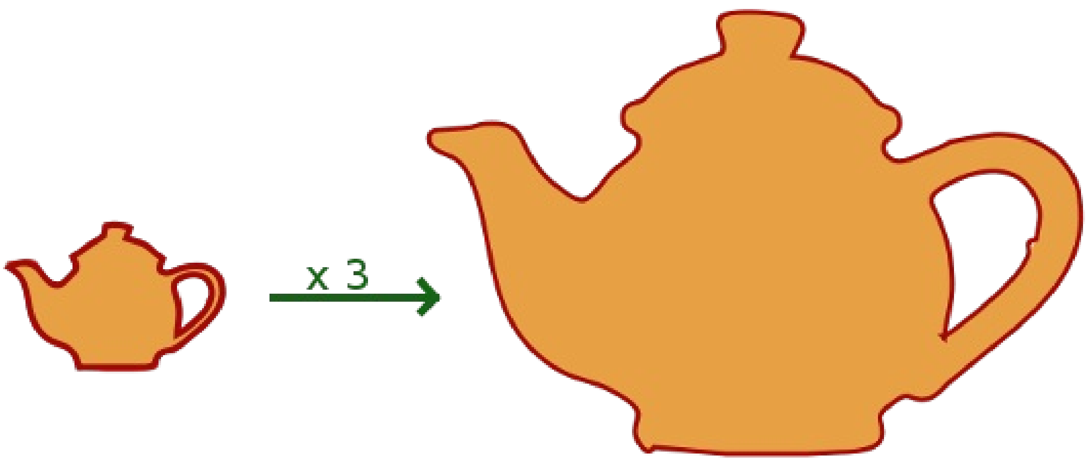
La surface est donc multipliée par x^2. (Pour ceux qui ont lu le cours Nombres et opérations, notez que nous avons utilisé la commutativité de la multiplication.)

En résumé :

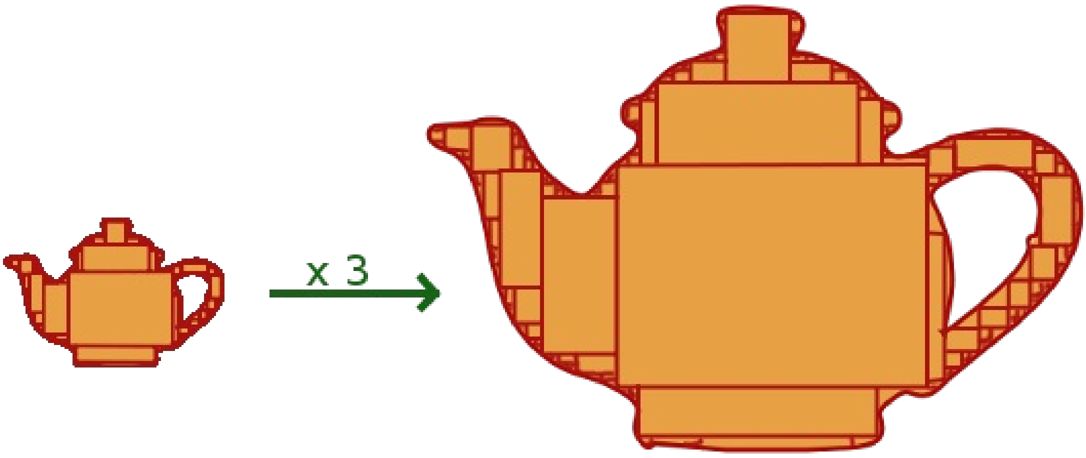
- si vous multipliez un rectangle par 3, sa surface est multipliée par 9 ;
- si vous multipliez un rectangle par 4, sa surface est multipliée par 16 ;
- si vous multipliez un rectangle par 6,4, sa surface est multipliée par 6,4×6,4=40,96 ;
- si vous multipliez un rectangle par 100, sa surface est multipliée par 10 000 ;
- et ainsi de suite...

D'accord pour le rectangle. Mais est-ce que ça marche pareil pour toutes les figures en dimension 2 ?

La réponse est oui. Pour s'en convaincre, il suffit de décomposer la figure que l'on étudie en petits rectangles. Prenons une figure quelconque et multiplions sa taille par 3 :



Décomposons-la en rectangle :



Chaque rectangle de la figure multipliée par 3 a une surface 3×3=9 fois plus grande. Comme la théière est la somme de tous ces rectangles, sa surface est également 9 fois plus grande. Bien entendu, nous venons de le faire pour un agrandissement par 3, mais ça marche de la même façon si on multiplie la taille de la figure par n'importe quel nombre x.

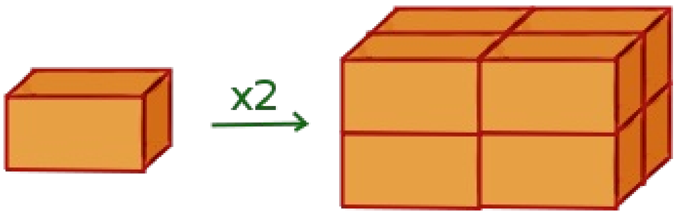
Le principe est le même si on rétrécit la figure au lieu de l'agrandir. Si on divise la taille de la figure par x, sa surface est divisée par x^2.

Ceci n'étonnera pas ceux qui ont lu le cours *Nombre et opérations* et qui savent qu'une division par x est tout simplement une multiplication par $1/x$. Une division ce n'est qu'un cas particulier de multiplication.

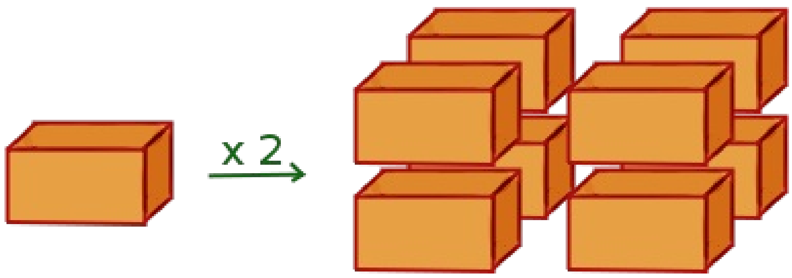
Les volumes

Et pour les volumes ? À votre avis, par combien sont multipliés les volumes quand on double la taille de la figure ?

Doublons ce parallélépipède :



Combien de fois le petit tient-il dans le grand ? La réponse est 8. La preuve en découpage :



Ensuite, l'histoire est la même que pour la dimension 2. Si on multiplie la taille d'une figure tridimensionnelle par x, alors son volume est multiplié par x^3. Essayez donc de le démontrer. Ça se fait de la même façon que pour la dimension 2, mais comme on multiplie la largeur, la longueur et la hauteur du parallélépipède par x, il y a trois x qui apparaissent dans le volume, d'où le x^3.

Et bien entendu, ceci est valable pour n'importe quelle figure en dimension 3, car celle-ci peut s'approximer par une multitude de petits parallélépipèdes ! Bref, c'est la même chose. Je ne m'attarde pas. Réfléchissez-y, vous allez comprendre !

Conclusion

Tout ce que nous avons dit et démontré dans cette partie peut se résumer en une seule phrase :

Quand on multiplie la taille d'une figure de dimension d par x, alors sa mesure est multipliée par x^d.

Oui, je l'encadre car c'est quand même un joli résultat. Si vous avez un doute vous pouvez vérifier que cette phrase est bien une formulation générale des trois cas que nous avons étudiés séparément :

- si $d = 1$: la longueur d'une ligne multipliée par x est multipliée par $x = x^1$;
- si $d = 2$: la surface d'une figure multipliée par x est multipliée par x^2 ;
- si $d = 3$: le volume d'une figure multipliée par x est multiplié par x^3.

Et vous pouvez même remarquer que ça marche pour $d = 0$. Un point est une figure de dimension 0 et si on agrandit un point, ça ne change rien, ça reste un point. Par conséquent, sa taille reste la même elle est donc multipliée par 1 et on a bien $x^0 = 1$.

Changeons d'unité

Je vous en ai déjà parlé au début du chapitre, nous allons maintenant voir ce qui se passe si on doit manipuler plusieurs unités en même temps. Et en particulier comment convertir des mesures d'une unité à l'autre.

Unités physiques

Avant de passer aux mathématiques à proprement parler, commençons par une petite sous-partie sur les unités courantes que l'on utilise dans la vie de tous les jours (c'est-à-dire dans le vrai monde, pas celui abstrait de la géométrie). Voici quelques exemples :

- **Longueurs :** micromètre, centimètre, mètre, kilomètre, unité astronomique, année-lumière,...
- **Surfaces :** centimètres carrés, mètres carrés, kilomètres carrés, ares, hectares,...
- **Volumes :**centimètre cube, mètre cube, centilitre, litre, stère, baril,...

En général, l'unité standard de longueur notamment en sciences physiques est **le mètre** (m). Puis, comme nous l'avons vu ci-dessus, on choisit logiquement **le mètre carré** (m^2) comme unité standard de surface, c'est-à-dire la surface d'un carré d'un mètre de côté. Et enfin, nous choisissons **le mètre cube** (m^3) comme unité standard de volume, c'est-à-dire le volume d'un cube d'un mètre de côté.

Évidemment, rien ne vous oblige à utiliser ces unités si vous en préférez d'autres. Il s'agit juste d'une convention pour rendre la communication des mesures plus facile entre les humains. Il n'y a rien de mathématique dans ce choix !

Quand on dispose d'une unité standard, il existe toute une ribambelle de préfixes permettant de multiplier celle-ci par des puissances de 10. En voici la liste :

Nom	Symbole	Coefficient	Exemple
yotta	Y	$\times 10^{24}$	Un yottamètre (Ym) est égal à 1 000 000 000 000 000 000 000 000 mètres.
zetta	Z	$\times 10^{21}$	Un zettamètre (Zm) est égal à 1 000 000 000 000 000 000 000 mètres.
exa	E	$\times 10^{18}$	Un examètre (Em) est égal à 1 000 000 000 000 000 000 mètres.
péta	P	$\times 10^{15}$	Un pétamètre (Pm) est égal à 1 000 000 000 000 000 mètres.

téra	T	$\times 10^{12}$	Un téramètre (Tm) est égal à 1 000 000 000 000 mètres.
giga	G	$\times 10^{9}$	Un gigamètre (Gm) est égal à 1 000 000 000 mètres.
méga	M	$\times 10^{6}$	Un mégamètre (Mm) est égal à 1 000 000 mètres.
kilo	k	$\times 10^{3}$	Un kilomètre (km) est égal à 1 000 mètres.
hecto	h	$\times 10^{2}$	Un hectomètre (hm) est égal à 100 mètres.
déca	da	$\times 10$	Un décamètre (dam) est égal à 10 mètres.
		$\times 1$	Un mètre (m) est égal à 1 mètre.
déci	d	$\times 10^{-1}$	Un décimètre (dm) est égal à 0,1 mètre.
centi	c	$\times 10^{-2}$	Un centimètre (cm) est égal à 0,01 mètre.
milli	c	$\times 10^{-3}$	Un millimètre (mm) est égal à 0,001 mètre.
micro	µ	$\times 10^{-6}$	Un micromètre (µm) est égal à 0,000 001 mètre.
nano	n	$\times 10^{-9}$	Un nanomètre (nm) est égal à 0,000 000 001 mètre.
pico	p	$\times 10^{-12}$	Un picomètre (pm) est égal à 0,000 000 000 001 mètre.
femto	f	$\times 10^{-15}$	Un femtomètre (fm) est égal à 0,000 000 000 000 001 mètre.
atto	a	$\times 10^{-18}$	Un attomètre (am) est égal à 0,000 000 000 000 000 001 mètre.
zepto	z	$\times 10^{-21}$	Un zeptomètre (zm) est égal à 0,000 000 000 000 000 000 001 mètre.
yocto	y	$\times 10^{-24}$	Un yoctomètre (ym) est égal à 0,000 000 000 000 000 000 000 001 mètre.

Ensuite, à chaque unité de longueur, correspondent une unité de surface et une unité de volume comme nous l'avons vu au début de ce chapitre. Par exemple, le cm^3 est le volume d'un cube de 1cm de côté. Le km^2 est l'aire d'un carré de 1km de côté. Et cætera...

Attention, quand on écrit km^2, on sous-entend que les parenthèses sont placées de cette façon : $(km)^2$. Autrement dit il s'agit de la surface d'un carré de 1km de côté et qui correspond à $1000\times1000=1000000m^2$. Pour éviter les confusions, on n'utilise jamais comme unité le $k(m^2)$ qui d'après ce que nous venons de dire signifie $1000m^2$.

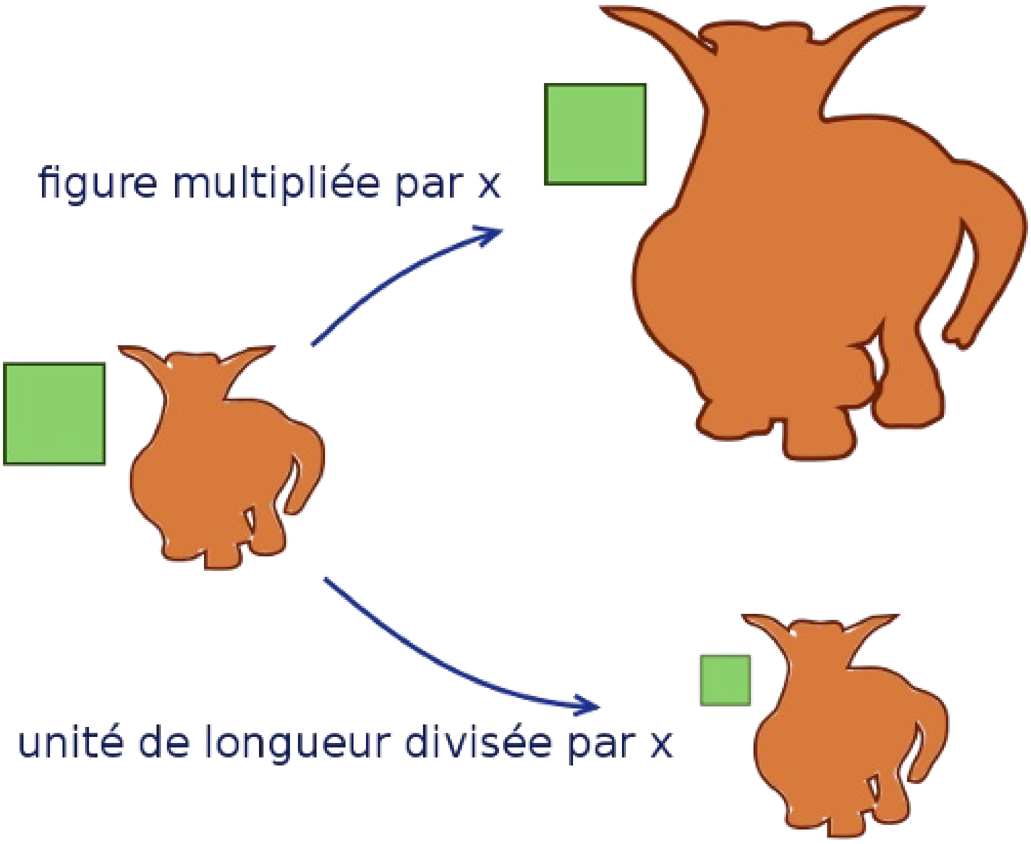
Comme d'habitude, en mathématiques rien n'est vraiment interdit. Donc si ça vous amuse vraiment, rien ne vous empêche d'utiliser comme unité le $k(m^2)$, mais dans ce cas, gare aux confusions !

Convertir d'une unité à l'autre

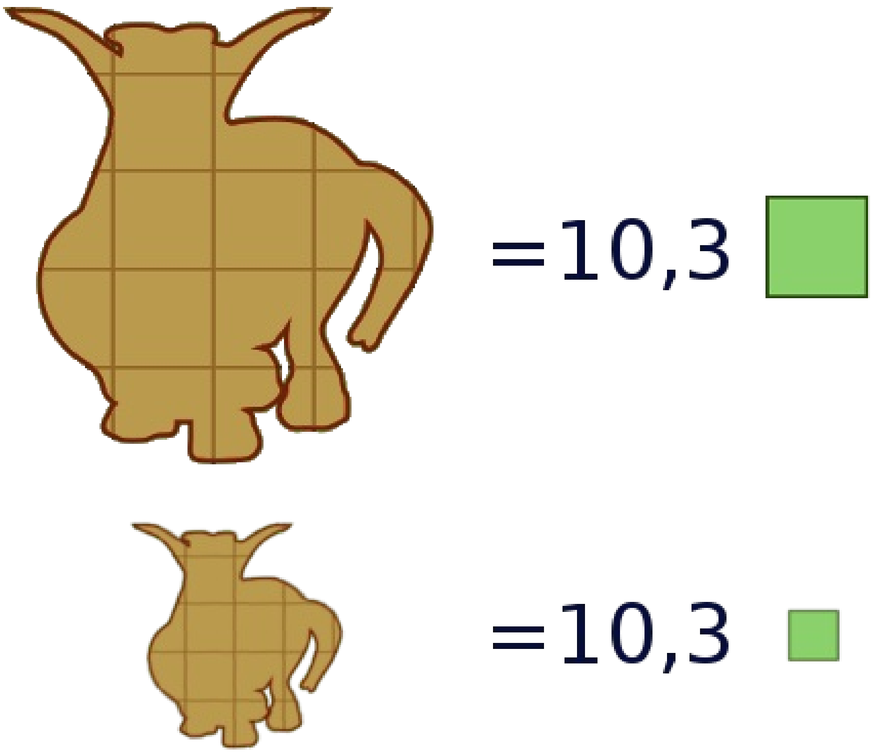
La question du changement d'unité est très similaire à la question du changement d'échelle. À vrai dire, c'est exactement la même chose, mais d'un point de vue différent.

En fait, tout tient dans une phrase : si vous divisez votre unité de longueur par un nombre x, alors pour la mesure de la figure cela revient exactement au même que de multiplier la taille de la figure par x sans changer l'unité !

Dans un cas la figure grandit, dans l'autre l'unité rétrécit, mais dans les deux cas **le rapport est le même**.



Dans la figure ci-dessus, on voit que l'unité réduite (petit carré vert) tient autant de fois dans la figure de base que l'unité de base tient dans la figure agrandie. Dans cet exemple, on voit qu'on trouve dans les deux cas une mesure égale à 10,3 :



Cela peut demander un peu de réflexion de bien comprendre ça, mais prenez le temps de retourner ça dans votre tête, vous allez voir ce n'est pas vraiment compliqué.

Une fois que vous avez saisi ce principe, tout devient très simple ! Il suffit d'adapter le résultat général que nous avons montré pour l'agrandissement des figures. On obtient :

> Si on *divise* l'unité de longueur par x, alors la mesure d'une figure de dimension d est *multipliée* par x^d.

Ou dans l'autre sens :

> Si on *multiplie* l'unité de longueur par x, alors la mesure d'une figure de dimension d est *divisée* par x^d.

Et si on se rappelle que diviser, c'est multiplier par l'inverse, on peut se contenter de retenir cette troisième formulation générale :

> Si on multiplie l'unité de longueur par x, alors la mesure d'une figure de dimension d est multipliée par $1/x^d$.

Plus l'unité est petite plus la mesure des figures est grande. Et inversement plus on prend une grande unité, plus la mesure des figures devient petite. Si vous avez bien compris ce qui précède cela doit maintenant vous paraître tout à fait normal. Pourtant, c'est une source d'erreur fréquente pour des personnes qui n'ont pas pris le temps de réfléchir à ce que nous venons de voir et qui raisonnent en disant "si l'unité est plus grande, alors la mesure est plus grande."

Il est temps de conclure ce chapitre. Nous allons pas mal nous servir des résultats que nous venons d'obtenir dans les prochains chapitres. Par conséquent, n'hésitez à revenir faire un petit tour par ici si vous avez des doutes sur la façon dont évoluent les mesures de figures quand on les agrandit ou quand on change l'unité.

Les fractales

Vous maîtrisez maintenant parfaitement les longueurs, les surfaces et les volumes, mais pensez-vous que toutes les figures géométriques puissent se ranger dans l'une de ces trois catégories ? N'y a-t-il que des figures de dimension 1, 2 et 3 ? Ou bien en avons-nous oublié ?

Au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, des mathématiciens on fait une découverte assez stupéfiante : il existe des figures géométriques intermédiaires dont la dimension n'est pas un nombre entier, mais un nombre à virgule.

Ces objets fascinants que nous allons découvrir dans ce chapitre se nomment **les fractales**.

Figures autosimilaires

Avant de découvrir comment une figure peut avoir une dimension à virgule, nous allons commencer par découvrir quelques figures dites autosimilaires. Une figure géométrique **autosimilaire** est une figure telle que tout morceau d'elle-même n'est rien d'autre qu'une réduction de la figure tout entière.

Mais comment est-ce possible ?

Avec des exemples, la définition sera plus claire...

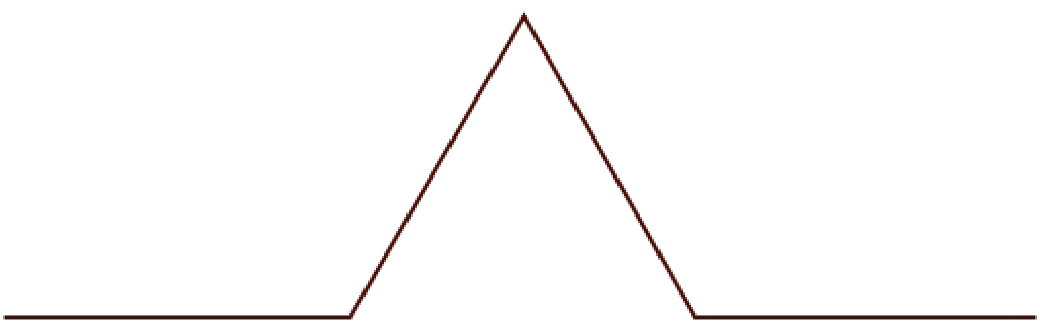
Le flocon de von Koch


Helge von Koch

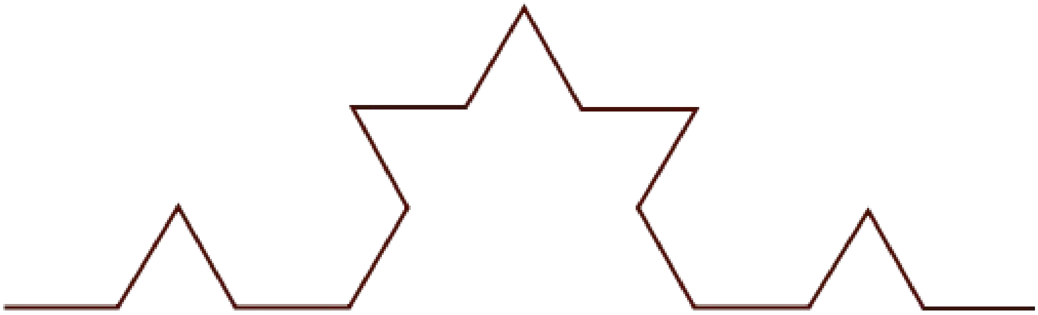
La plus célèbre des figures autosimilaires est la courbe de von Koch, introduite en 1906 par le mathématicien suédois Helge von Koch (1870-1924). Elle se construit de la façon suivante :

Étape 1. On commence avec un segment.

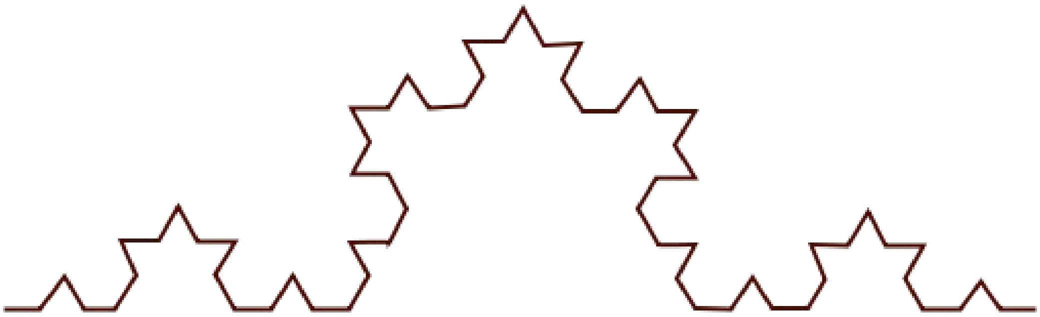
Étape 2. On divise ce segment en trois parts égales et on remplace celle du milieu par deux segments de même taille formant une pointe vers le haut :



Étape 3. On divise chacun des quatre segments qui forment la nouvelle figure en trois et on remplace à chaque fois le segment du milieu par une pointe formée de deux segments de même taille :

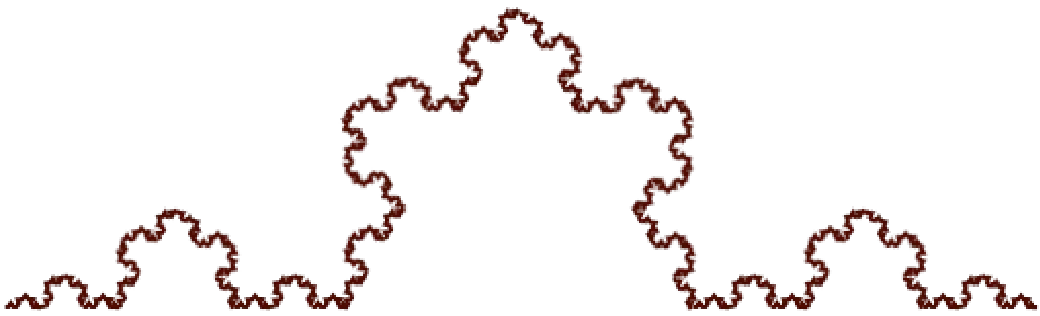


Étape 4. On continue ! Vous commencez à comprendre le principe : on divise tous les segments de l'étape précédente en 3 et à chaque fois on remplace le segment du milieu par deux nouveaux segments en pointe.



Eh, mais ça va continuer longtemps comme ça ?

Oui. Jusqu'à l'infini ! La courbe de von Koch est la figure que l'on obtient en répétant ce procédé une infinité de fois. On obtient alors une figure qui ressemble à ceci :



Rassurez vous je n'ai pas *vraiment* été jusqu'à l'infini pour tracer cette figure. Je me suis contenté d'aller à l'étape 6 et ensuite les détails deviennent si petit qu'ils ne sont quasiment plus visibles et il ne sert à rien de les dessiner. Mais pour bien comprendre la figure, il faut tout de même imaginer que ces détails sont bien là et que la courbe possède des détails minuscules quelle que soit l'échelle à laquelle on regarde.

Maintenant que nous avons notre figure, la question que je vous pose est la suivante :

Quelle est la dimension de la courbe de von Koch ?

Normalement, la première réponse du débutant à cette question est 1 ! Au premier abord, la courbe de von Koch semble être une simple ligne. Très tordue certes, mais ligne quand même.

Cependant, si on y regarde de plus près, quelques détails sont tout à fait troublants. Tout d'abord, la longueur de la courbe est infinie !

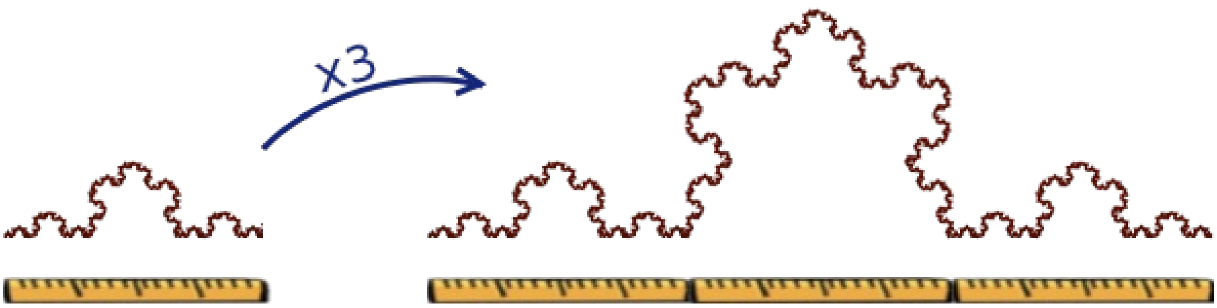
Et comme chaque morceau de la figure n'est rien d'autre qu'une réplique de la figure tout entière en plus petit, on en déduit également que tout morceau de la courbe est de longueur infinie !

Pour comprendre que la longueur de la figure est de longueur infinie, on peut raisonner de la façon suivante. À chaque étape, on remplace chaque segment par 4 petits segments qui ont une longueur égale à 1/3 de la longueur du segment de base. Autrement dit, à chaque fois, la longueur de la figure est multipliée par $4 \times (1/3) = 4/3 \approx 1,333...$. Ainsi, si on part d'un segment de longueur 1 à l'étape 0, alors à l'étape n, la figure a une longueur égale à $(4/3)^n$. Plus n est grand, plus cette longueur est grande, de telle sorte qu'à l'infini, la longueur de la courbe est infinie !

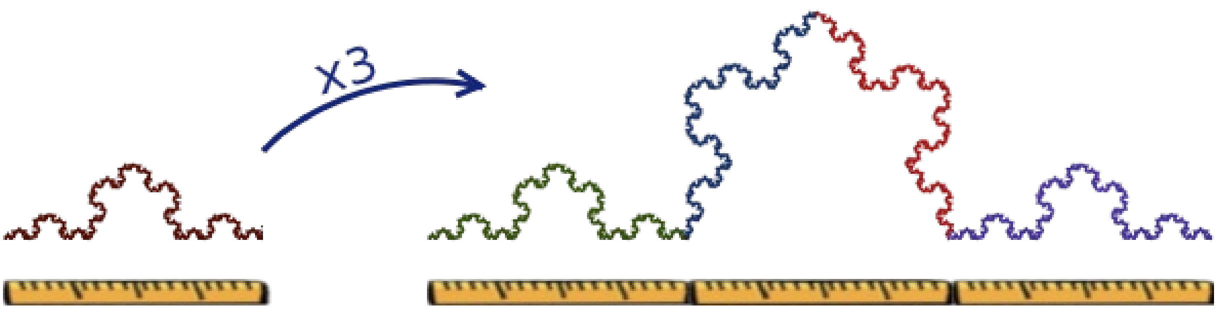
C'est dire que la courbe s'entortille sur elle-même à un point qui est difficilement imaginable.

Bien, bien d'accord la courbe de von Koch est une figure très étonnante. Mais tout ça ne nous dit toujours pas si sa dimension est égale à 1 ou à autre chose. Comment peut-on s'y prendre ?

Pour connaitre la dimension de la courbe de von Koch, nous allons utiliser ce que nous avons appris dans le chapitre précédent. Nous savons que si nous multiplions les dimensions d'une figure de dimension d par un nombre α alors sa mesure est multipliée par α^d. Bien alors prenons par exemple $\alpha = 3$ et multiplions les dimensions d'une courbe de von Koch par 3 :



Si la courbe de von Koch était de dimension 1, alors sa mesure serait multipliée par 3. Si la courbe de von Koch était de dimension 2, alors sa mesure serait multipliée par 9. Mais là, stupeur ! la mesure de von Koch est en réalité multipliée par 4. En effet, la courbe de von Koch dont les dimensions ont été multipliées par 3 contient 4 fois la petite courbe de von Koch de départ :



Conclusion : la dimension de la courbe est plus grande que 1, mais plus petite que 2. C'est un nombre à virgule compris entre 1 et 2 !

Ce qu'il faut comprendre, c'est que la courbe de von Koch s'entortille tellement sur elle-même qu'elle finit presque à se rapprocher d'une surface sans en être vraiment une.

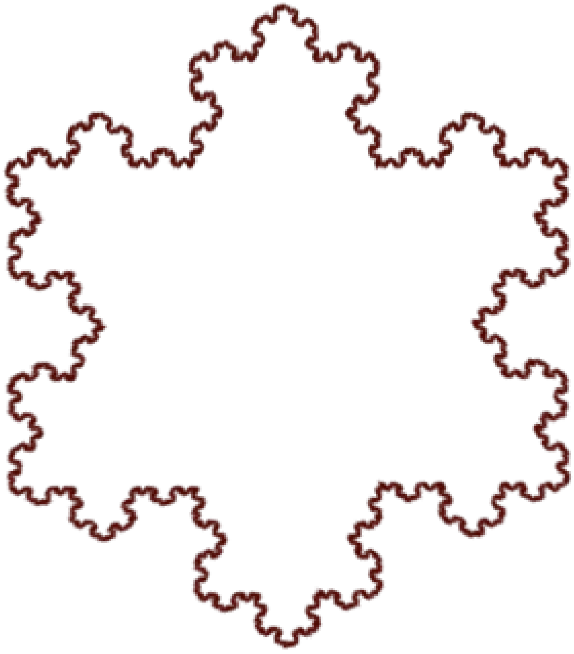
D'accord, la dimension de la courbe est comprise entre 1 et 2. Mais combien vaut-elle exactement ?

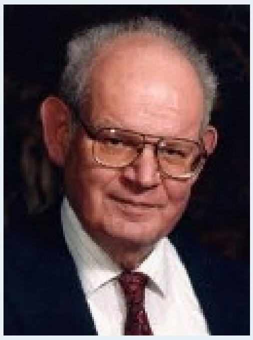
Pour la calculer, notons la d. En multipliant les dimensions de la courbe par 3, sa mesure est multipliée par 3^d. Donc on a $3^d = 4$. La question est donc : quel est le nombre d tel qu'en élevant 3 à sa puissance on trouve 4 ?

Si vous avez lu le cours *Nombres et opérations* cette question ne vous fait certainement peur et vous devez pouvoir calculer d en un tournemain. Quelle est l'opération contraire de la puissance qui permet de récupérer l'exposant ? Le logarithme bien sûr ! On a donc $d = \log_3(4)$.

Et si vous voulez une valeur approchée, vous n'avez qu'à saisir votre calculatrice qui se fera un plaisir de vous afficher que $\log_3(4) \approx 1,2618595\ldots$. La courbe de von Koch est donc une figure de dimension environ 1,26 ! Et voilà le travail !

Dans les années 1970, le mathématicien Benoît Mandelbrot (1924,2010) eut l'idée de regrouper trois courbes de von Koch pour former une figure ressemblant à une sorte de flocon de neige :





Benoît Mandelbrot

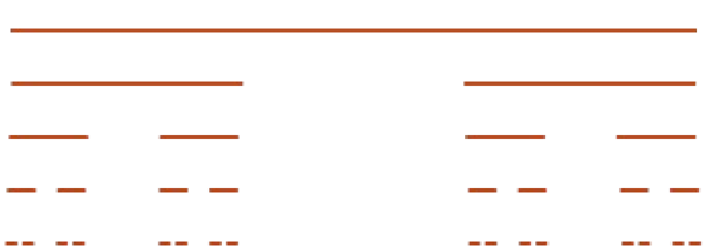
Il baptisa cette figure le flocon de von Koch, nom qui fit la célébrité de cette figure dans de nombreux ouvrages de vulgarisation mathématique. (La preuve, c'est qu'elle se trouve même dans ce cours. ) Nous aurons l'occasion de rencontrer à nouveau Mandelbrot d'ici la fin de ce chapitre.

Quelques autres figures autosimilaires

La courbe de von Koch n'est pas la seule figure autosimilaire. En voici quelques exemples supplémentaires, mais nul doute qu'avec un peu d'imagination vous pourrez vous-même en inventer pas mal d'autres. 

L'ensemble triadique de Cantor

L'ensemble triadique de Cantor, du nom du mathématicien Georg Cantor, se construit en partant d'un segment puis en enlevant à chaque étape le tiers central de chaque segment. C'est plus clair avec un schéma :

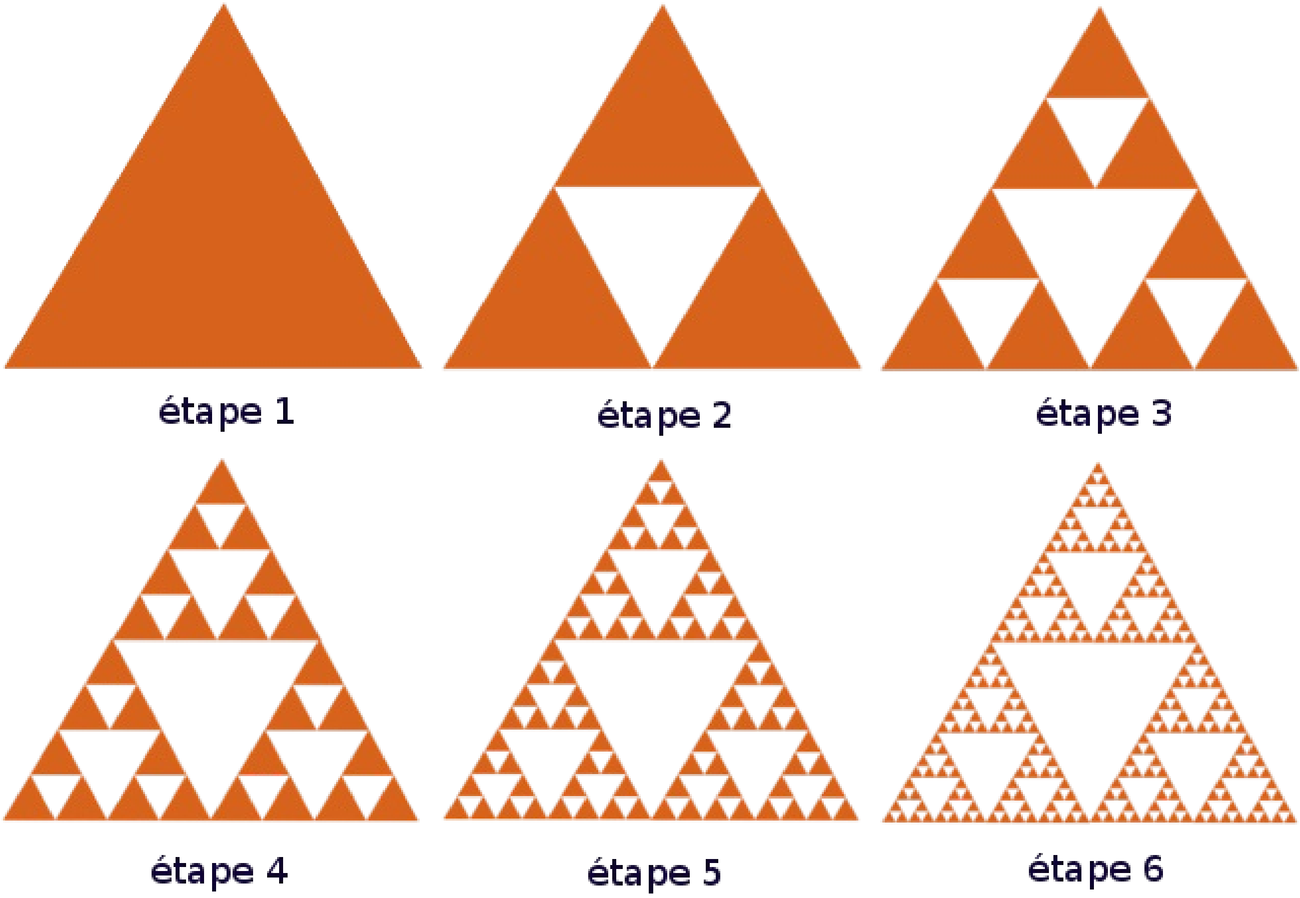


Sauriez-vous calculer la dimension de cet ensemble ? Déjà, la première chose que vous devez vous dire, c'est que sa dimension est comprise entre 0 et 1. Pourquoi ça ? Tout simplement parce que cet ensemble est plus petit qu'un segment, mais plus grand qu'un simple point.

Pour vraiment calculer sa dimension, il faut utiliser la même méthode que pour la courbe de von Koch : multiplier la taille de la figure. Ici, on voit que si on multiplie la taille de la figure par 3, alors la mesure de l'ensemble de Cantor est multipliée par 2. Sa dimension est donc égale à $\log_3(2) \approx 0,6309...$

Triangle de Sierpiński

Le triangle de Sierpiński, qui porte le nom du mathématicien Wacław Sierpiński, se construit sur un principe similaire, mais en partant d'un triangle, que l'on découpe en quatre et dont on enlève le morceau central. Voici les premières étapes de sa construction :

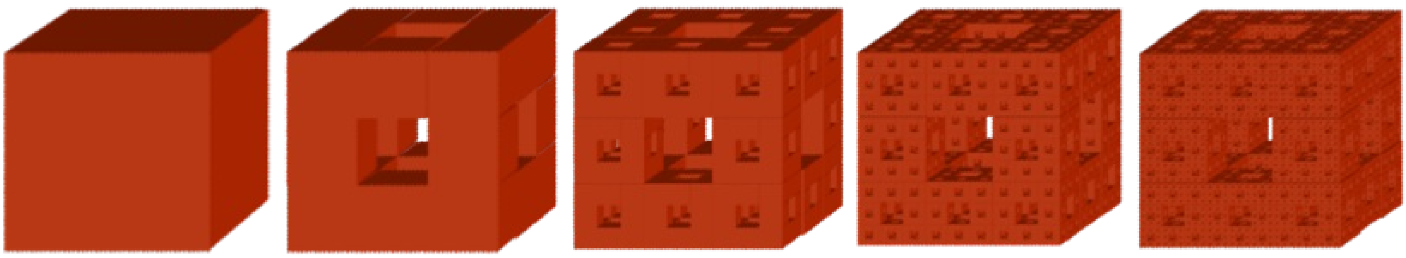


Vous vous doutez probablement que la dimension de cette figure va se trouver quelque part entre 1 et 2. Mais combien exactement ? Pour le savoir, il faut cette fois multiplier la taille du triangle par 2. Dans ce cas, sa mesure est multipliée par 3 puisque le triangle multiplié par 2 est composé de 3 copies du triangle de départ.

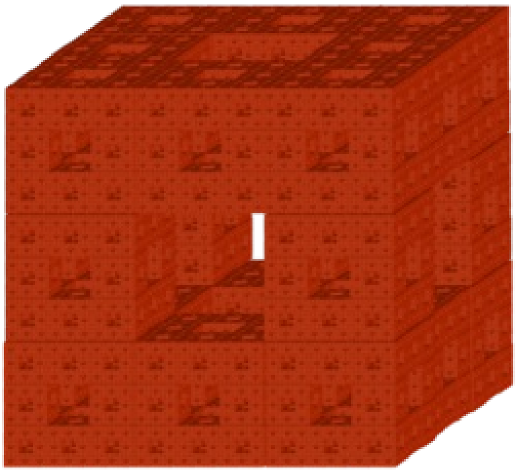
Sa dimension est donc $\log_2(3) \approx 1,58496...$

Éponge de Menger

Voici les cinq premières étapes de la construction de l'éponge de Menger, imaginée par le mathématicien Karl Menger. Normalement, vous devriez être maintenant assez habitués pour comprendre comment ça marche sans plus d'explications.



Voici l'éponge de Menger finale après une infinité d'étapes :



Alors ? Quelle est la dimension de cette figure ?

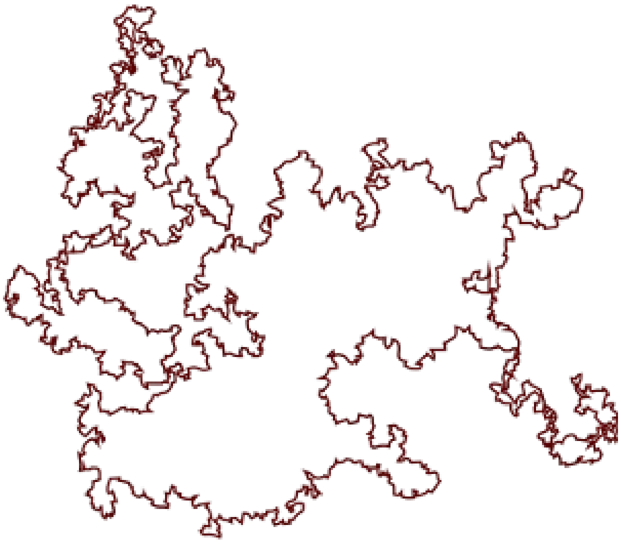
Cette fois, si on multiplie sa taille par 3, sa mesure est multipliée par 20. (Comptez bien, vous verrez c'est le nombre de petits cubes qui restent après avoir évidé le cube de ses cubes centraux.) Ainsi sa dimension est égale à $\log_3(20) \approx 2,48207...$ Cette figure a donc une dimension entre 2 et 3.

En 1975, Benoît Mandelbrot a inventé un mot pour désigner toutes ces figures qui sont autosimilaires ou qui le sont presque : il les a appelées les **fractales**. À vrai dire ce mot ne possède pas de vraie définition mathématique bien rigoureuse. C'est juste un terme assez vague pour désigner ce genre de figures géométriques sans qu'on sache exactement où il s'arrête. On parle aussi parfois de **dimension fractale** pour toutes les figures dont la dimension est un nombre à virgule, même si ces figures ne sont pas du tout autosimilaires. Nous allons voir des exemples de telles figures dans la deuxième partie de ce chapitre.

La dimension de Minkowski

Les figures autosimilaires sont vraiment agréables, car il est facile de calculer leur dimension comme nous venons de le voir. Mais hélas, toutes les figures ne sont pas aussi sympathiques.

Prenons par exemple la figure ~~bizarre~~ suivante :



Comme le flocon de von Koch elle se plie et se replie sur elle-même et possède des détails à n'importe quelle échelle. On peut donc pressentir que sa dimension ne sera pas entière. Oui, mais voilà le problème : cette figure n'a pas la bonne idée d'être autosimilaire ! Vous pouvez l'agrandir autant que vous voulez vous ne pourrez jamais la redécouper en plusieurs morceaux identiques à elle-même.

La mesure des frontières

Vous pensez peut-être que ce genre de figures très tordues n'ont pas beaucoup d'intérêt, car on n'en rencontre jamais dans la vie de tous les jours. Si c'est le cas, vous avez tort ! L'exemple le plus courant est la mesure des frontières des pays.

Au début du XX[e] siècle, le mathématicien et physicien anglais Lewis Fry Richardson (1881, 1953) en tentant d'établir une analyse mathématique des conflits internationaux a été amené à s'intéresser à la mesure des frontières entre pays. En consultant les données existantes à ce sujet, il constata que de grandes différences pouvaient exister entre les mesures effectuées par différentes personnes.


Lewis Fry Richardson

Par exemple, selon les sources, la frontière entre l'Espagne et le Portugal variait entre 987 et 1214 kilomètres.

Pas très précis effectivement. Ils ne savaient pas mesurer à l'époque ?

Le vrai problème, c'est « comment mesurer une telle frontière ? ». Et plus précisément jusqu'à quel point mesure-t-on les petits détails de la frontière et à partir de quand les considère-t-on comme négligeables ? Benoît Mandelbrot a repris et popularisé cette question en 1967 en prenant l'exemple de la longueur de la côte de la Grande-Bretagne.

Vous voyez que plus on prend de détails en compte, plus la côte est longue ! Mais doit-on prendre en compte chaque rocher, chaque grain de sable ? Ça semble irréalisable ! Dans la théorie, si on veut vraiment tenir compte de tous les détails, la côte est infinie, comme le flocon de von Koch.

Ce phénomène s'appelle l'**effet Richardson**.

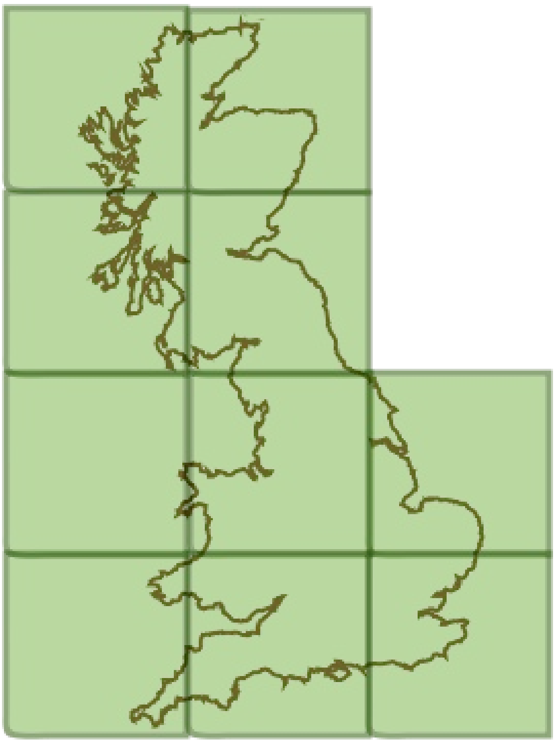
Les côtes et les frontières ont une longueur théorique infinie, car elles ont des détails à toute échelle. Leur dimension n'est donc probablement pas entière, mais plus vraisemblablement un nombre à virgule compris entre 1 et 2.

Bref, nous revoilà au point de départ, la question est toujours : comment calculer la dimension d'une figure dans le cas général ?

Et là, il y a une astuce ! Puisque cela ne nous mène à rien d'agrandir la figure, nous allons prendre le problème dans le sens inverse en rétrécissant l'unité. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, cela revient au même en ce qui concerne la mesure de la figure. Quand l'unité est divisée par un nombre x, alors la mesure de la figure est multipliée par x^d où d est sa dimension.

Reprenons l'exemple des côtes de Grande-Bretagne. Et pour commencer prenons une très grande unité de façon à ce que l'île tienne en entier dans le carré unité.

Maintenant, divisons notre unité par 4. Nous voyons maintenant qu'une seule unité ne suffit plus pour recouvrir la carte. Il en faut 10 :

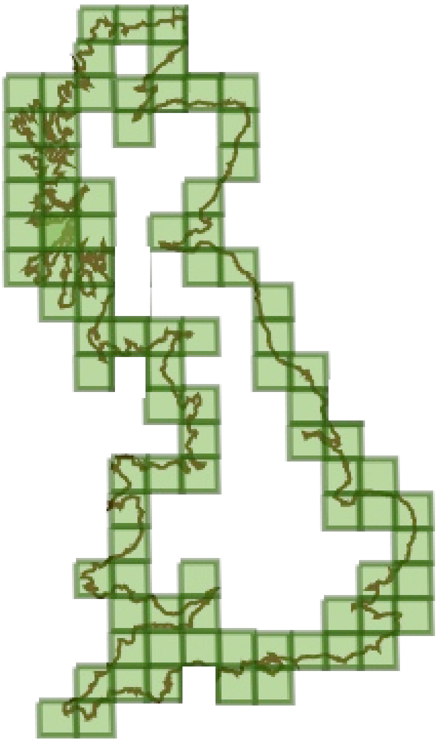


Ainsi, on peut dire que quand l'unité de longueur est divisée par 4, alors la mesure de la figure est **environ** multipliée par 10.

Le mot **"environ"** est très important dans la phrase, car on voit bien que les dix carrés unité recouvrent des portions de courbe différentes puisque la figure n'est pas autosimilaire.

Cependant, en faisant cette approximation, on peut tout de même estimer que la dimension de la figure est environ égale à $\log_4(10) \approx 1,66$.

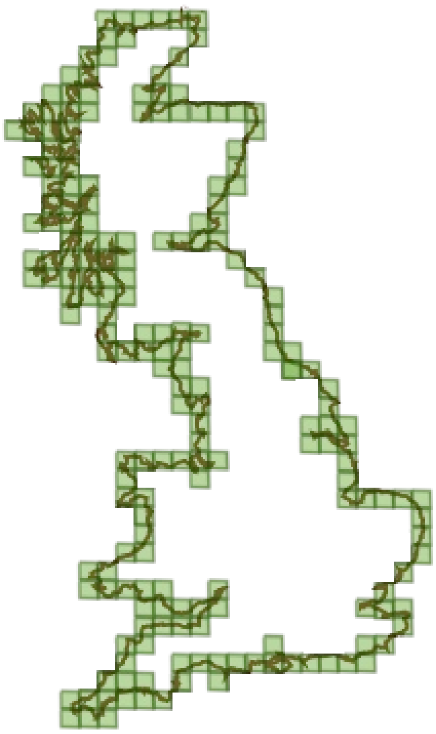
Évidemment, à ce niveau-là ce n'est qu'une très mauvaise approximation. Pour avoir une meilleure valeur, il faut faire un découpage plus fin, autrement dit, il faut davantage diviser l'unité. Si on divise l'unité de longueur non pas en 4, mais en 20, alors on obtient la figure suivante :



Cette fois, il faut 88 petits carrés unité pour recouvrir la carte. Ainsi la dimension des côtes de Grande-Bretagne est environ égale à $\log_{20}(88) \approx 1,49$.

Cette valeur est toujours une approximation, mais elle est toutefois plus proche de la réalité puisque nous avons fait un découpage plus fin.

Vous voulez une encore meilleure approximation ? Alors divisons l'unité en 40 au lieu de 20 :



Il faut maintenant 198 petits carrés. Soit une approximation égale à $\log_{40}(198) \approx 1,43$.

D'une manière générale, supposons que si on divise la taille de l'unité par x, il faut N_x petits carrés pour recouvrir la carte, alors on peut dire que $\log_x(N_x)$ est une approximation de la dimension de la côte de Grande-Bretagne. Et plus x est grand, plus l'approximation est bonne !

Pour obtenir la vraie dimension de la côte, il faut trouver le nombre dont se rapproche de plus en plus la quantité $\log_x(N_x)$ quand x se rapproche de plus en plus de l'infini ! En mathématiques, on appelle cela une limite et on note ça de la façon suivante :

$$\lim_{x \to \infty} \log_x(N_x)$$

qui se lit « limite quand x tend vers l'infini de $\log_x(N_x)$ ». En ce qui concerne la côte de la Grande-Bretagne, cette limite a été estimée à 1,24, mais pour obtenir cette valeur précise, il faut diviser l'unité encore bien plus que nous ne l'avons fait ci-dessus.

La notion de **limite** est absolument fondamentale en mathématiques. Cependant, comme ce n'est pas l'objet de ce cours, je me contenterai de la définition un peu approximative que j'ai donnée ci-dessus : la limite, c'est le nombre dont se rapproche de plus en plus la quantité que l'on étudie.

Eh bien cher zéro, nous venons de définir ce que l'on appelle la dimension de Minkowski ! Du nom du mathématicien allemand Hermann Minkowski. Si on note $\dim_M(\mathcal{A})$ la dimension de Minkowski d'une figure $\mathcal{A}$, alors nous avons donc la formule :

$$\dim_M(\mathcal{A}) = \lim_{x \to \infty} \log_x(N_x),$$

où N_x est le nombre de carrés de taille $1/x$ (c'est-à-dire de carrés unité divisés par x) qu'il faut pour recouvrir la figure $\mathcal{A}$.

Évidemment, pour calculer concrètement la dimension à partir de cette formule c'est une autre affaire ! Cela demande souvent des connaissances plus poussées dans le calcul des limites. Sachez tout de même que si on fait ce calcul pour des figures autosimilaires, on retrouve bien les mêmes résultats que ceux que nous avons vus dans la première partie de ce chapitre. Ouf ! La logique retombe sur ses pattes, c'est rassurant.

Si vous avez déjà l'habitude du calcul des limites et que ça vous amuse, vous pouvez essayer de recalculer la dimension du flocon de von Koch à partir de cette formule. Vous devez bien sûr retrouver $\log_3(4)$!

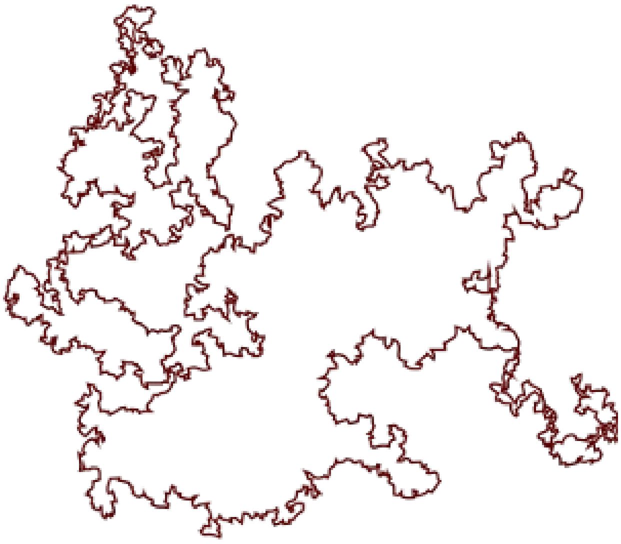
Tout n'est pas si simple...

Évidemment, vous seriez déçus si c'était si simple... Il y a quelques problèmes avec la dimension de Minkowski.

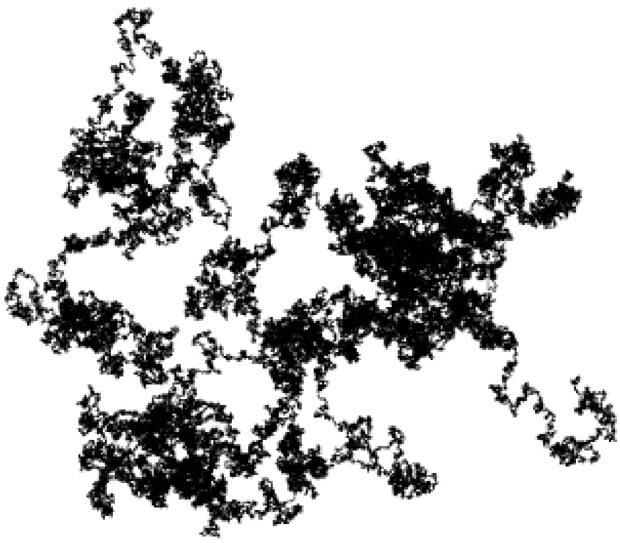
L'un de ces problèmes, c'est que cette dimension n'est pas bien définie pour toutes les figures. L'ennui vient de la limite : parfois elle n'existe pas. Il peut arriver que la quantité $\log_x(N_x)$ ne se rapproche pas d'une unique valeur, mais oscille entre une multitude de valeurs différentes !

Pour résoudre ce problème (et quelques autres) les mathématiciens ont inventé une autre façon de mesurer la dimension qui s'appelle la dimension de Hausdorff.

Je ne vous expliquerai pas cette dimension ici, car c'est un peu technique et cela déborderait trop de l'objectif de ce cours. Sachez seulement que cette définition de la dimension est bien plus puissante que celle de Minkowski. Malgré ça, calculer la dimension d'une figure est loin d'être une chose facile. Pour conclure ce chapitre regardez cette figure que je vous ai déjà montrée au début de cette partie sans vous dire d'où elle sortait :



Il s'agit de la frontière du territoire visité par un mouvement brownien. Un mouvement brownien, c'est *grosso modo* la trajectoire d'une particule qui se balade totalement au hasard dans un plan. Voici l'exemple de trajectoire qui a donné la frontière ci-dessus :



Benoît Mandelbrot avait conjecturé dans les années 1970 que cette figure avait une dimension égale à 4/3. Ce résultat ne fut démontré qu'en 1999 par les mathématiciens Greg Lawler, Oded Schramm et Wendelin Werner. Et cela fait partie des travaux pour lesquels ce dernier a reçu en 2006 la médaille Fields, qui n'est rien de moins que la plus haute distinction mathématique ! (Équivalente au prix Nobel dans les autres disciplines.)

Bref, tout ça pour dire : le calcul des dimensions n'est pas toujours si simple... (Mais c'est toujours passionnant !)

La quatrième dimension

Le monde physique a trois dimensions, certes. Oui mais voilà : les mathématiques ne sont pas les sciences physiques. Les mathématiques développent des théories abstraites et ce n'est pas parce que le monde dans lequel nous vivons n'a que trois dimensions que nous devons nous interdire en maths d'imaginer une géométrie en 4 dimensions !

C'est donc ce que nous allons faire allègrement dans ce chapitre.

Le seul petit problème c'est que dans notre monde en 3D, il ne nous est pas possible de représenter des figures en 4D. Autrement dit, il va falloir que nous nous passions de faire des dessins, ou tout du moins il va falloir avoir recours à des stratagèmes pour pouvoir se donner des représentations partielles des figures en 4D.

En clair : on bascule vers un niveau d'abstraction supérieur. Dans ce chapitre votre imagination va être mise à rude épreuve !

Ana et Kata

Jusqu'à présent, en dimension 3, nous avions trois directions :

- avant/arrière ;
- gauche/droite ;
- haut/bas.


Charles Hinton

Pour passer en dimension 4, il nous faut rajouter une nouvelle direction à ces trois-là. Ne cherchez pas des yeux autour de vous, cette dimension n'existe pas dans notre monde quotidien. Je vous l'ai dit en introduction : c'est le moment d'utiliser votre imagination !

Mais rassurez-vous, je ne vous abandonne pas tout seul dans la quatrième dimension. Ce chapitre est là pour vous y guider.

Tout d'abord, cette nouvelle direction possède un nom : ana/kata. Ces deux mots viennent du grec ancien : □*νω* qui signifie « vers le haut » a donné le terme « **ana** » tandis que *κάτω* qui signifie « vers le bas » a donné « **kata** ». Ces deux mots ont été choisis à la fin du XIX^{e} siècle par le mathématicien et écrivain Charles Howard Hinton (1853, 1907). En bref, en dimension 4, nous avons quatre directions indépendantes :

- avant/arrière ;
- gauche/droite ;
- haut/bas ;
- ana/kata.

Ana et kata sont deux sens opposés comme le sont la gauche et la droite ou le haut et le bas, ils offrent un nouveau degré de liberté de déplacement.

Ouh la la ! C'est bien joli de lui donner un nom à la quatrième dimension, mais ça n'aide pas à comprendre. Comment ça marche, ana et kata ?

Eh bien puisque vous êtes pressé d'apprendre, je vous propose sans attendre une petite excursion dans la dimension 4. Allez, n'ayez pas peur. Suivez-moi, c'est par ici...

Voyage dans la quatrième dimension

Pour ce petit voyage, vous allez reprendre votre rôle d'agent secret. Agent Z004, aujourd'hui vous partez en mission dans la quatrième dimension. Vous êtes prêt ? Non ? Ce n'est pas grave. Embarquement immédiat !

Montez dans votre véhicule de la dimension 4, puis quittez la base en effectuant les déplacements suivants :

- tout d'abord 3 kilomètres vers le nord ;
- puis 5 kilomètres vers l'ouest ;
- suivi de 4 kilomètres vers le haut ;
- et enfin, 2 kilomètres vers l'ana !

À cet instant, la base vous appelle et vous demande de lui communiquer votre position.

La réponse est tout simple. Vous n'avez qu'à répondre que vous êtes à 3 kilomètres vers le nord, 5 kilomètres vers l'ouest, 4 kilomètres de hauteur et 2 kilomètres vers l'ana. Vous remarquez que pour communiquer votre position, vous avez dû donner quatre nombres : eh oui, vous êtes bien en dimension 4.

Bon continuons un peu notre voyage. Suite à ça vous effectuez les déplacements suivants :

- 10 kilomètres vers le sud ;
- 2 kilomètres vers l'ouest ;
- 5 kilomètres vers le kata.

Arrivé là, la base vous appelle de nouveau pour connaitre votre nouvelle position. Que lui répondez-vous ?

Prenons les quatre directions les unes après les autres :

- **Nord/sud.** Dans votre premier déplacement, vous avez effectué 3 kilomètres vers le nord et vous venez d'en refaire 10 vers le sud. Par rapport à la base, vous êtes donc maintenant à 7 kilomètres vers le sud.
- **Est/ouest.** Pour ce qui est de la direction est/ouest, vous avez commencé par 5 kilomètres vers l'ouest, puis 2 kilomètres dans le même sens, vous êtes donc maintenant à 7 kilomètres à l'ouest.
- **Haut/bas.** Vous avez d'abord effectué 4 kilomètres vers le haut lors de votre premier déplacement, mais vous ne vous êtes pas déplacé selon cette direction lors de votre second déplacement. Vous êtes donc toujours à 4 kilomètre vers le haut.
- **Ana/kata.** Et pour finir, vous avez parcouru 2 kilomètres vers l'ana dans un premier temps, puis 5 kilomètres vers le kata. Vous êtes donc maintenant à 3 kilomètres vers le kata.

En conclusion, vous devez répondre à votre base que vous êtes à 7 kilomètres sud, 7 kilomètres ouest, 4 kilomètres de hauteur et 3 kilomètres kata.

C'est tout simple n'est-ce pas ? Vous voyez qu'il n'est pas nécessaire de pouvoir le représenter par un dessin pour pouvoir décrire un trajet en dimension 4. Bien sûr, tout cela doit encore vous paraître très flou. C'est normal : la notion de quatrième dimension est abstraite et demande un bon temps de réflexion et d'adaptation quand on la rencontre la première fois. Prenez le temps d'y réfléchir et continuez tranquillement la lecture. Vous allez vous y faire.

Avec des coordonnées

Une petite remarque avant de passer à la partie suivante. Pour être plus rapide (et aussi un peu parce qu'on est fainéant), on écrit souvent la position d'un point d'une manière plus concise.

Reprenons l'exemple précédent, à la fin votre position était : « 7 kilomètres sud, 7 kilomètres ouest, 4 kilomètres de hauteur et 3 kilomètres kata ».

Eh bien à la place d'écrire tout ça, on écrit en général simplement : (-7,-7,4,3). Les quatre nombres écrits de cette façon ce nomment les **coordonnées** du point. Ainsi vous pouvez simplement répondre à la base : « Mes coordonnées sont (-7,-7,4,3) ».

D'ailleurs, puisqu'on en est au vocabulaire, en maths, le point qui est choisi comme référence s'appelle l'**origine**. Dans l'exemple précédent, il s'agit de l'emplacement de la base de contrôle : ses coordonnées sont (0,0,0,0), quand on est à la base, on ne s'est déplacé dans aucune direction.

Attend juste une question : pourquoi les deux premières coordonnées sont des nombres négatifs ?

Cela dépend du côté où vous vous trouvez :

- Pour la direction Nord/sud, la coordonnée sera positive si vous êtes du côté nord et négative si vous êtes du côté sud.
- Pour la direction Est/ouest, la coordonnée sera positive si vous êtes du côté est et négative si vous êtes du côté ouest.
- Pour la direction Haut/bas, la coordonnée sera positive si vous êtes en haut et négative si vous êtes en bas.
- Pour la direction Ana/kata, la coordonnée sera positive si vous êtes du côté ana et négative si vous êtes du côté kata.

Vous n'êtes pas obligé de retenir ça, ce n'est qu'une convention et il serait tout à fait possible d'inverser les positifs et les négatifs sur certaines directions. Le tout c'est d'être cohérent une fois que l'on a fait un choix.

En passant, vous pouvez remarquer que l'utilisation des coordonnées est aussi valable dans les autres dimensions. En dimension 2, on notera souvent la position d'un point sous la forme (x, y) et en dimension 3 sous la forme (x, y, z).

Vous savez maintenant ce qu'est la quatrième dimension et en théorie, ce chapitre pourrait s'arrêter là. Cependant, vous avez sans doute remarqué que pour l'instant, je n'ai tracé aucune figure dans ce chapitre. C'est un comble pour un cours de géométrie !
Dans la prochaine partie, nous allons remédier à ce problème et faire plein de dessins. Hélas, comme vous le savez, il n'est pas possible de représenter entièrement une figure en 4D dans notre espace en 3D, ainsi, nous n'aurons que des représentations partielles de la quatrième dimension. Ces représentations sont tout de même très utiles pour comprendre un peu plus concrètement comment fonctionne la quatrième dimension.

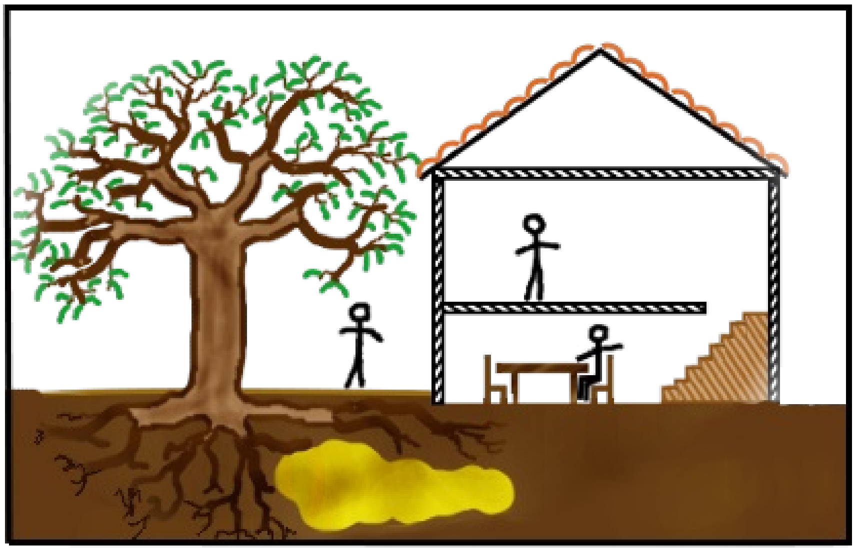
La 4D expliquée à des créatures tridimensionnelles

Si l'on ne peut pas réellement se représenter la quatrième dimension, on peut cependant avoir recours à des stratagèmes, des comparaisons, des images pour tenter de se familiariser avec elle. Cette partie est là pour ça : vous donner différentes astuces permettant de représenter la quatrième dimension par des dessins dans nos trois dimensions.

Bienvenue à Flatland !

À la fin du XIX^{e} siècle, le professeur anglais Edwin A. Abbott, a eu l'idée suivante : pour essayer de comprendre ce qu'est la quatrième dimension, demandons-nous comment nous expliquerions notre troisième dimension à des êtres qui vivraient dans un monde en deux dimensions. Ce monde en deux dimensions, il l'a nommé **Flatland** (qui pourrait se traduire par « le pays plat » en français) et l'a décrit dans un petit livre paru en 1884.

Pour mieux comprendre les particularités de Flatland, regardons la scène suivante :



Une scène de Flatland - trois habitants, une maison et un arbre.

Pour plus de clarté, je me permets de prendre quelques libertés par rapport à la description originelle de Flatland par Abbott qui était plus simplifiée. Dans cette première version, les personnages étaient des figures géométriques, il n'y avait pas d'arbres, d'escaliers ni même de sol (les personnages évoluaient librement, comme en apesanteur dans un plan vide).

Une chose amusante, c'est que vu de notre troisième dimension, nous voyons **absolument tout** du monde en 2D, y compris ce que ses propres habitants ne voient pas !

Par exemple, nous voyons les trois personnages de la scène, alors qu'eux ne se voient pas entre eux. De la même façon, nous voyons les racines de l'arbre et même son intérieur ! Nous sommes aussi capables de repérer qu'il y a une mine d'or juste sous la maison alors que ses habitants n'en soupçonnent même pas l'existence. Pour pouvoir y accéder, il leur faudrait couper l'arbre et creuser.

Notez également une chose étrange : le personnage qui se trouve dehors est coincé entre l'arbre et la maison. S'il veut sortir de là où il se trouve il doit soit grimper à l'arbre soit escalader la maison pour passer par-dessus. De la même façon, quand deux personnages se croisent à Flatland, ils doivent se passer l'un par-dessus l'autre.

Remarquez aussi que la maison n'a pas de porte. Et que si elle en avait une, il ne serait pas possible de l'ouvrir sans faire tomber la maison !

Bref ! La vie à Flatland n'est pas très simple. Je ne vais pas détailler davantage, car ce que j'ai dit de Flatland est déjà largement suffisant pour commencer à réfléchir sur la dimension 4 qui nous intéresse. Cependant, si vous êtes intrigués, sachez qu'il existe de nombreux livres assez amusants consacrés aux mondes en deux dimensions et comment résoudre les différents problèmes qui se posent dans ce monde imaginaire.

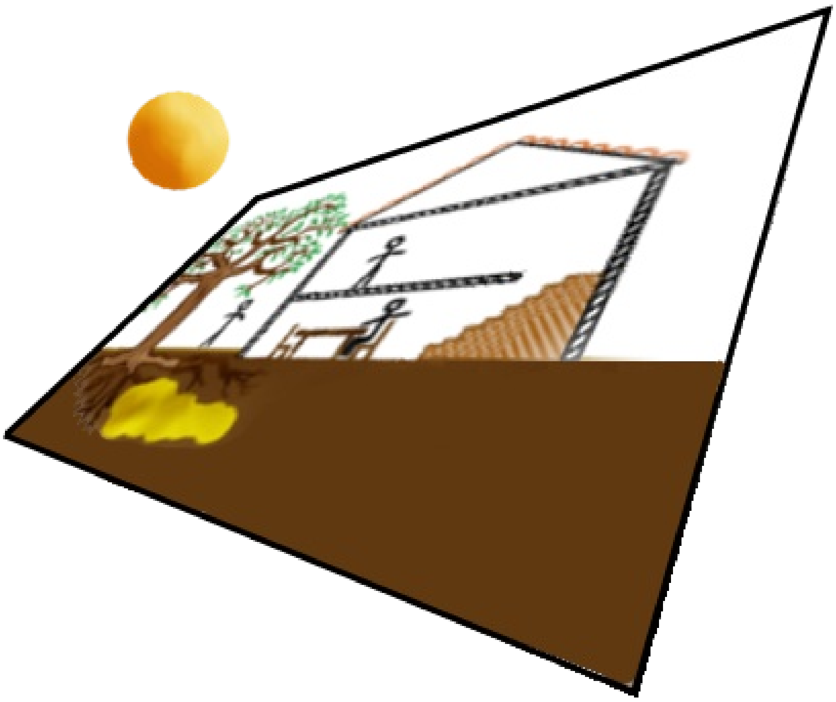
Revenons en donc maintenant à notre question de départ :

Comment vous y prendriez-vous pour expliquer aux habitants de Flatland ce qu'est la troisième dimension qu'ils ne connaissent pas ?

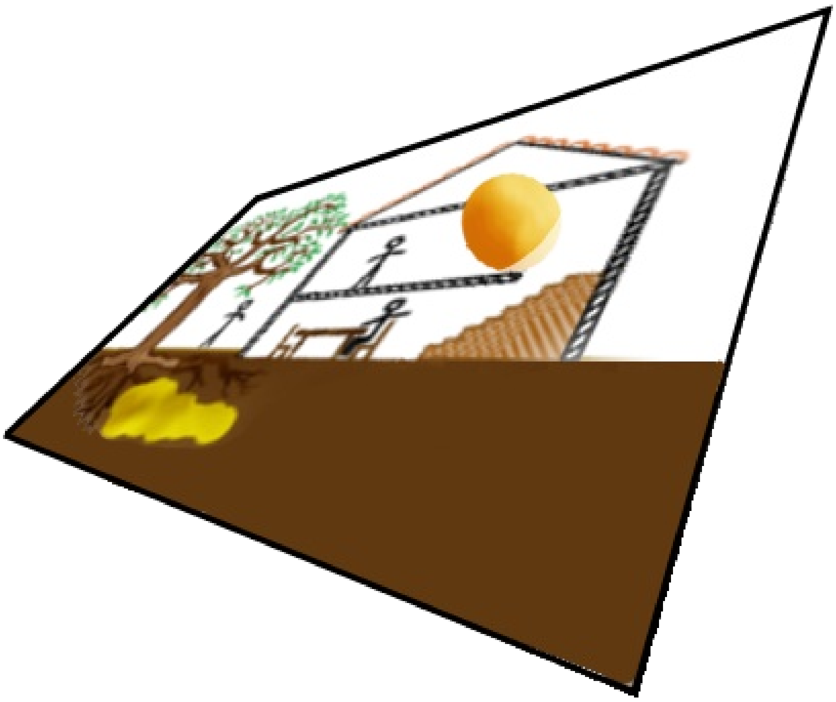
Réfléchissez-y un instant, vous vous rendrez compte que ce n'est pas si facile que ça !

Eh bien pour leur expliquer la troisième dimension, montrons leur une figure géométrique de dimension 3, pardi !

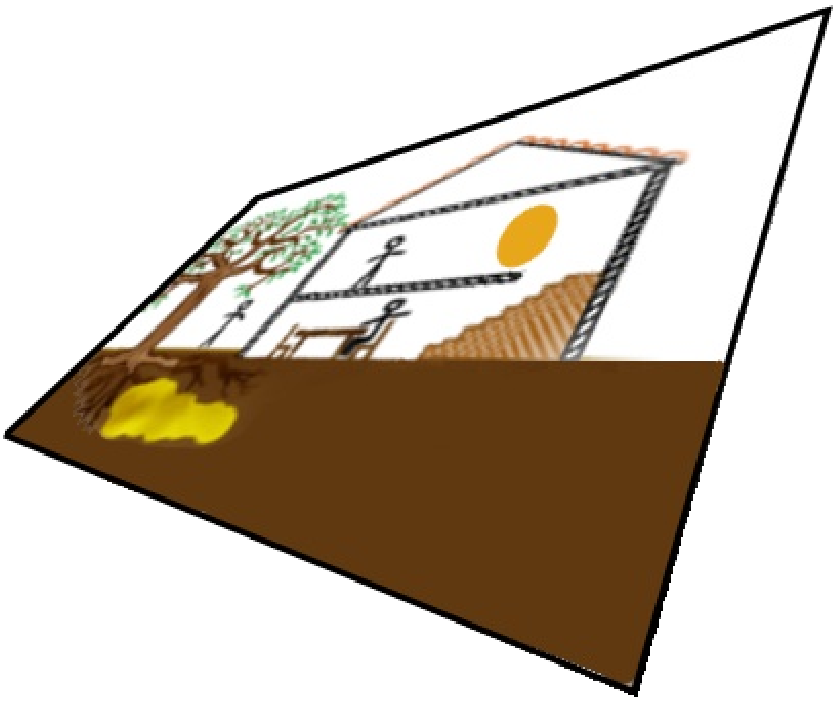
Très bien, essayons. Prenons une sphère par exemple :



Le problème, c'est que cette sphère ne peut pas tenir en entier dans le plan. Autrement dit, si on prend la sphère et qu'on la place à travers le plan, les habitants de Flatland vont n'en avoir qu'une vision partielle :



La sphère intersecte Flatland mais l'habitant qui se trouve à l'étage de la maison n'en voit qu'une partie. Plus précisément, de son point de vue, il ne voit qu'un disque :



Mais que se passe-t-il si l'on fait bouger la sphère à travers le plan. Imaginons que l'on prenne notre sphère et qu'on lui fasse entièrement traverser le plan. Que vont voir les habitants de Flatland ?

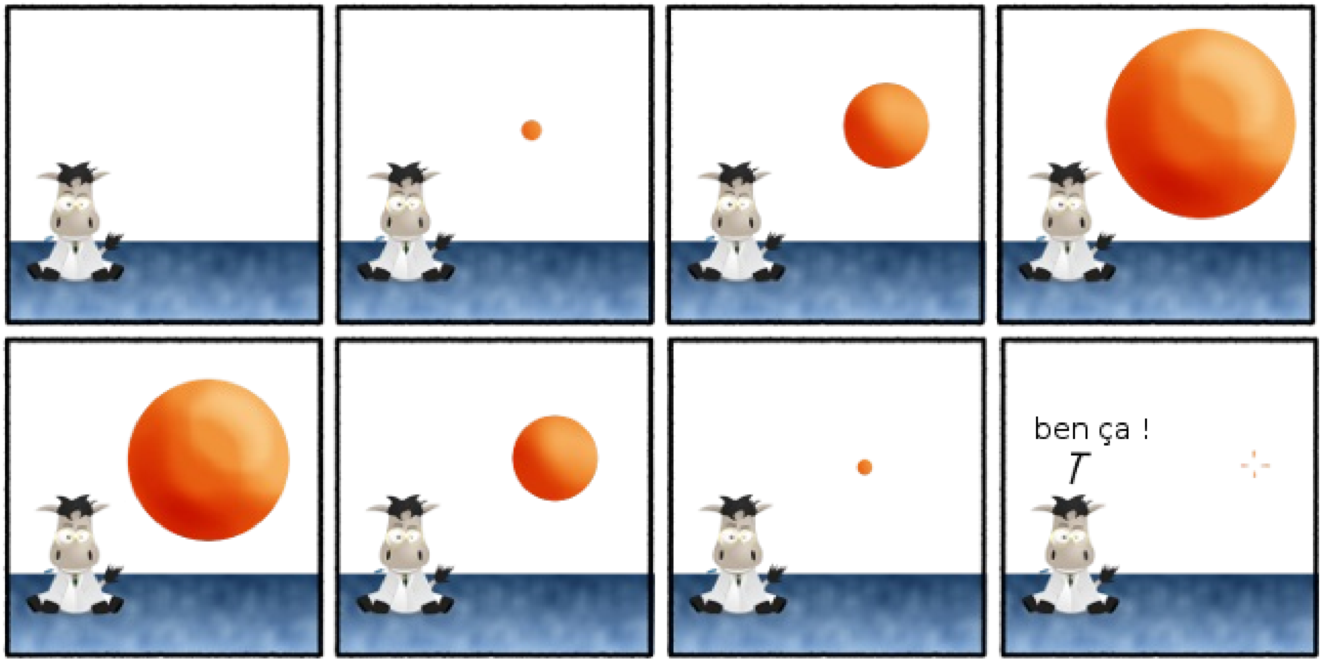
La réponse est simple : ils vont voir un disque qui change de taille. Ou plus précisément :

- au moment où la sphère commence à passer à travers le plan, ils voient un petit disque qui apparaît comme par magie ;
- puis ce disque grandit jusqu'à atteindre une taille maximal au moment où la sphère est précisément coupée en deux par le plan ;
- et puis il se met à rétrécir jusqu'à disparaître à nouveau dès que la sphère se trouve entièrement de l'autre côté.

Il est probable que les habitants de Flatland feraient une drôle de tête en voyant ça ! Et maintenant, voici la question que je vous pose :

Que verrions-nous, nous, dans notre espace à trois dimensions si une sphère de dimension 4 venait à le traverser ?

La réponse se trouve de façon analogue : nous verrions une boule surgir de nulle part, grandir jusqu'à atteindre un maximum, puis diminuer et disparaître !



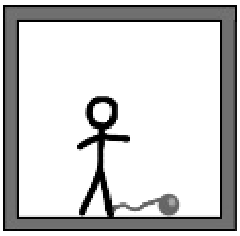
Une hypersphère traverse l'espace tridimensionnel.

Les sphères de différentes tailles que nous voyons ainsi successivement sont les différentes tranches qui composent l'hypersphère (c'est-à-dire la sphère de dimension 4).

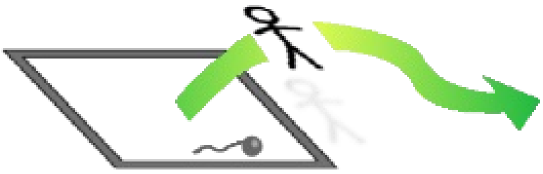
Pour décrire les objets de la dimension 4, on utilise en général le préfixe *hyper-*. Ainsi l'équivalent d'une sphère en dimension 4 s'appelle une **hypersphère**. L'équivalent d'un cube un **hypercube**, l'espace de dimension 4 tout entier s'appelle l'**hyperespace**, et ainsi de suite...

La grande évasion

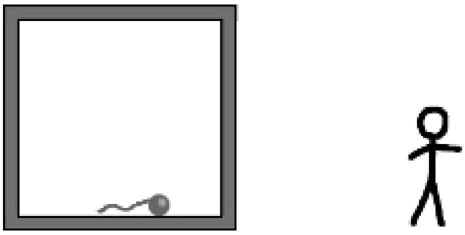
Prenons un autre exemple. Imaginez, à Flatland un prisonnier dans sa cellule et qui cherche le moyen de s'évader.



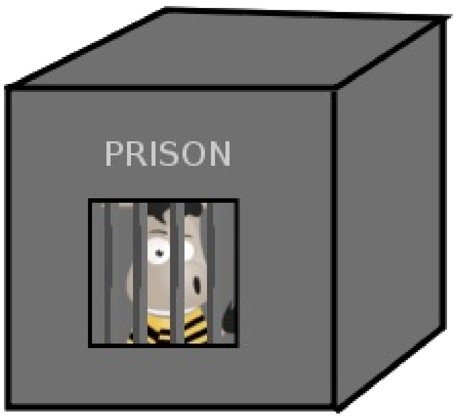
De son point de vue, il y a des murs de tous les côtés et il semble qu'il n'ait aucun moyen de s'évader. Pourtant, s'il connaissait la troisième dimension, il saurait qu'il existe une façon simple de sortir : il suffit de sortir de son plan et de passer « par-dessus » les murs :



Et voilà le travail. Le prisonnier n'a pas traversé les murs, il les a juste évités en passant dans la troisième dimension !



Maintenant, passons à la dimension supérieure et voyez Zozor enfermé injustement :

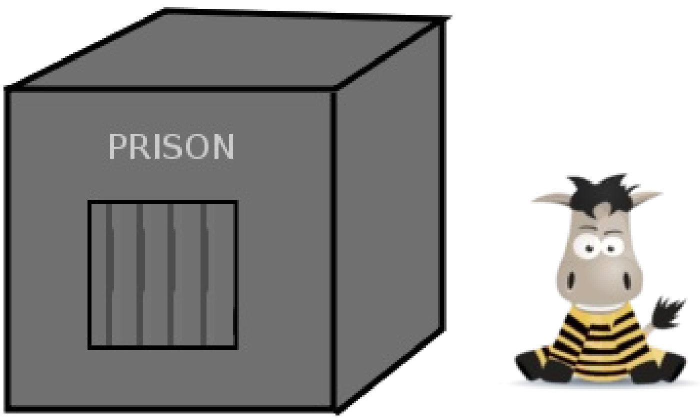


Comment le faire évader ? Eh bien en le faisant passer par la quatrième dimension, bien sûr !

Pour sortir, Zozor n'a qu'à suivre le chemin suivant :

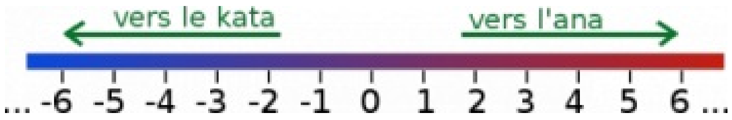
- Monter de 1 mètre vers l'ana ;
- se déplacer de quelques mètres de façon à n'être plus « au-dessus » de sa cage ;
- Redescendre de 1 mètre vers le kata.

Et le tour est joué !

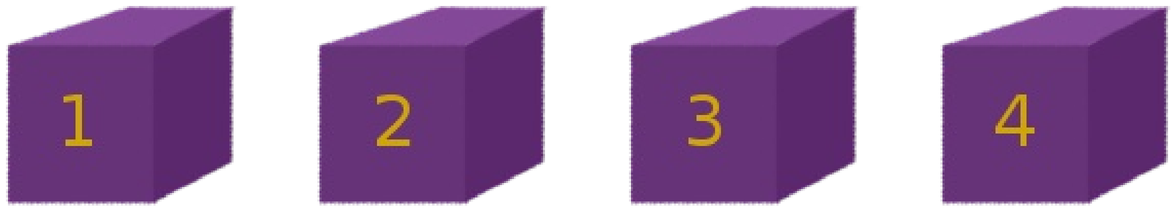


Avec de la couleur !

Il est également possible de représenter la quatrième dimension en utilisant une échelle de couleur pour représenter la coordonnée ana/kata. Prenons par exemple l'échelle suivante :



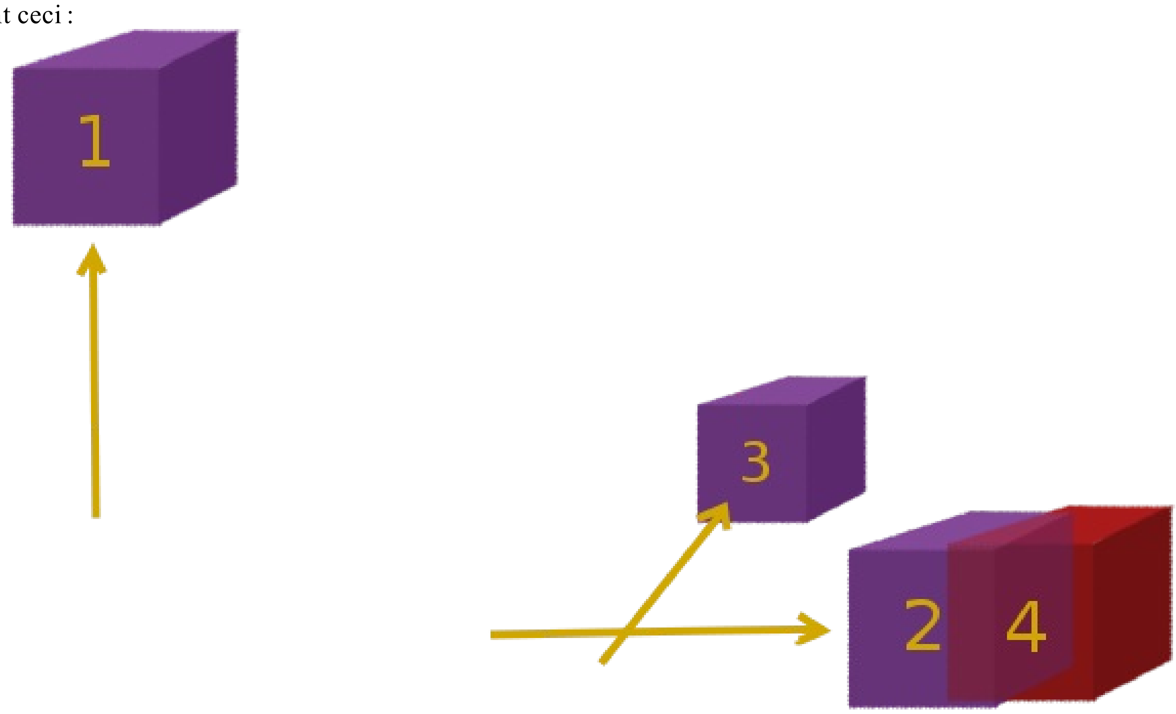
Maintenant regardons les quatre cubes suivants :



Et déplaçons les chacun dans une direction différente :

- Le cube 1 de 5 mètres vers le haut ;
- le cube 2 de 5 mètres vers l'arrière ;
- le cube 3 de 5 mètres vers la gauche ;
- le cube 4 de 5 mètres vers l'ana.

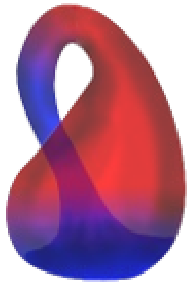
On obtient ceci :



Attention. Sur la figure on a l'impression que les cubes numéros 2 et 4 sont pris l'un dans l'autre. Mais ce n'est qu'une illusion due à notre représentation de la quatrième dimension. En réalité, comme ils n'ont pas la même couleur, ils sont éloignés l'un de l'autre. Le cube 4 en rouge se trouve en réalité à 5 mètres dans la direction ana de l'endroit où il est représenté.

Bref, avec cette représentation, pour que deux figures soient au même endroit, il faut non seulement qu'elles soient au même endroit dans les trois premières dimensions mais en plus qu'elles soient de la même couleur.

D'une manière générale, avec cette méthode, une figure de dimension 4 se représente comme une figure de dimension 3 coloriée. Voici un exemple de figure en 4D :



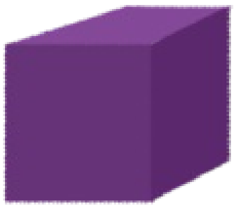
Cette figure en dimension 4 s'appelle la bouteille de Klein. Il s'agit en gros d'une forme de bouteille dont le goulot rentre à l'intérieur de la bouteille et ressort par son fond. En 3D, on a l'impression que cette figure s'intersecte à l'endroit où le goulot pénètre dans la bouteille, mais ce n'est pas le cas puisqu'à cet endroit, une partie de la bouteille est bleue et l'autre rouge. En 4D, cette figure n'a donc pas d'intersection avec elle-même.

En fait, le goulot rentre dans la bouteille en utilisant le même chemin que celui qu'a emprunté Zozor dans la partie précédente pour sortir de prison. Comme le goulot correspond à la partie dessinée en bleu, cela signifie qu'on le fait passer par le kata, par rapport au corps de la bouteille qui est plus dans l'ana.

Cette figure est célèbre, car il s'agit d'une figure fermée qui n'a pas d'intérieur ni d'extérieur, chose qui n'est pas possible avec une figure de dimension 3 (un cube en 3D par exemple possède un intérieur et un extérieur). Je ne vous explique pas plus en détails ce que cela signifie, car nous reviendrons plus précisément sur cet exemple et quelques autres dans la quatrième partie de ce cours consacrée à la quatrième dimension.

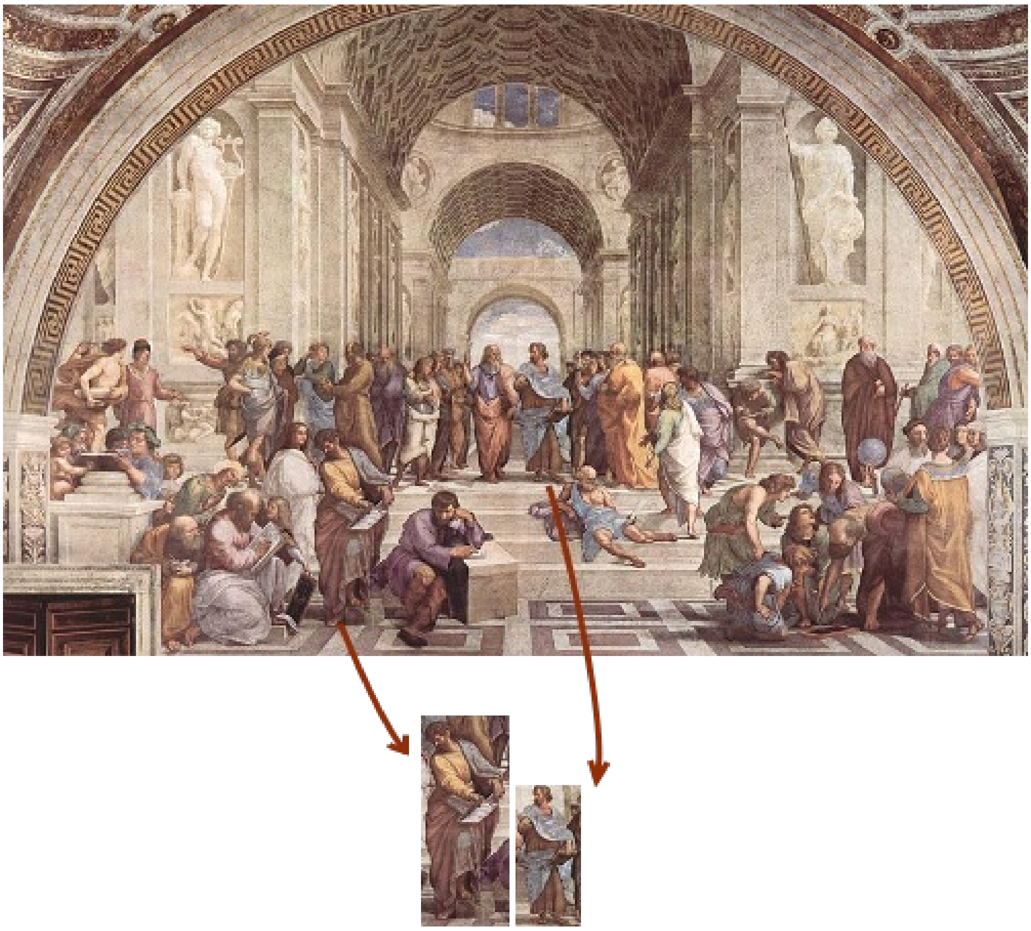
En perspective

Voici un cube.



Enfin, non. Pas tout à fait un cube. Comment cela pourrait-il être un cube alors que votre écran d'ordinateur est plat et qu'un cube est une figure en trois dimensions ?

Lorsque l'on veut dessiner la 3D en 2D, on utilise des effets de perspective. Par exemple, l'une des règles principales du dessin en perspective, consiste à dessiner en plus petit ce qui se trouve plus loin. Voici par exemple le tableau L'École d'Athènes du peintre Raphaël, utilisant un effet de perspective :



Nous sommes tellement habitués à voir des représentations en perspectives à longueur de journée que nous n'avons même plus besoin de réfléchir pour les interpréter comme étant en 3D. Je suis certain que quand vous regardez le tableau ci-dessus sans y penser, vous ne vous rendez même pas compte que certains personnages sont peints plus grands que les autres.

Vous commencez certainement à voir où je veux en venir. Si on peut représenter des figures 3D en 2D, il doit être également possible de représenter des figures 4D en 3D.

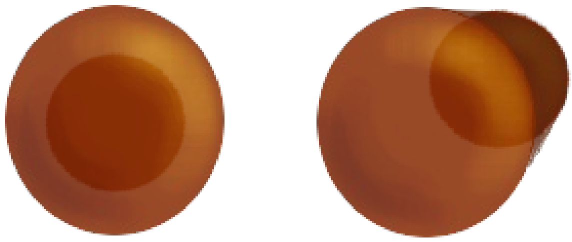
Reprenons un exemple 3D en perspective :

Deux vues du même cylindre

Il s'agit du même cylindre vu sous un angle différent. Les deux extrémités du cylindres sont des cercles :

- dans la première vue, on les voit l'un dans l'autre, celui qui est le plus loin est à l'intérieur et est représenté plus petit ;
- dans la deuxième vue, ces deux cercles semblent se croiser, mais ce n'est qu'une illusion due à la perspective ; en réalité le plus petit des deux cercles se trouve derrière.

Maintenant regardez ces deux vues d'un même hypercylindre dont les deux extrémités sont des sphères :



Deux vues du même hypercylindre

Alors là, c'est vraiment tordu. Vu que votre écran est plat, vous voyez une figure en 2D. Cette figure, il vous faut vous la représenter comme une figure 3D. Ceci ne devrait pas vous poser trop de problème car vous y êtes habitués. En revanche, il faut ensuite vous dire que cette figure en 3D n'est en réalité qu'une perspective d'une figure qui elle est en 4D. Vous suivez toujours ?

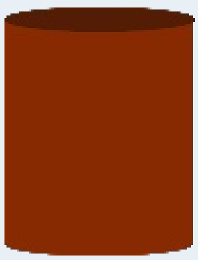
Sur les dessins ci-dessus, on voit que l'une des deux sphères extrêmes est représentée plus petite que l'autre, car elle est plus loin (dans la direction kata par exemple). Selon l'angle de vue de l'hypercylindre, ces deux sphères sont soit l'une dans l'autre, soit se croisent. Mais comme pour le simple cylindre 3D, ce n'est qu'une illusion due à la perspective.

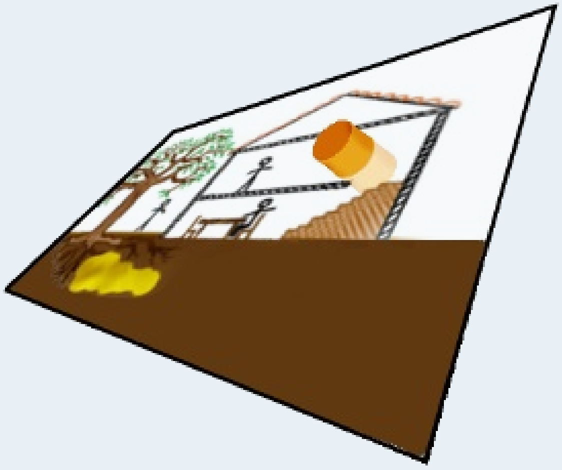
Jongler avec les points de vue

Vous connaissez maintenant les méthodes principales qui existent pour se donner des représentations de figures en 4D. À vous ensuite d'apprendre à jongler avec ces différentes représentations pour développer votre compréhension de la quatrième dimension.

Allez avant de passer à la suite un petit exercice d'entraînement. Revenons sur l'exemple du cylindre et de l'hypercylindre ci-dessus. Sauriez-vous dire ce que l'on verrait si un hypercylindre traversait notre espace ? Et sauriez-vous représenter un hypercylindre avec la méthode des couleurs ?

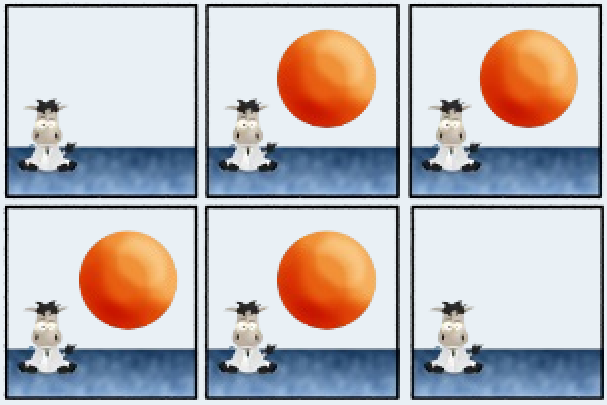
Essayez réellement d'y réfléchir par vous-même avant de regarder la réponse qui suit.

Cylindre	Hypercylindre
 *De haut en bas, chaque niveau du cylindre est un cercle.* Sur les dimensions avant/arrière et gauche/droite, tous ces cercles sont au même endroit.	 *D'ana à kata, chaque niveau de l'hypercylindre est une sphère.* Sur les trois premières dimensions toutes ces sphères sont au même endroit. Les sphères de toutes les couleurs se superposent. (Il faut imaginer que l'image ci-dessus représentent toutes les sphères de différentes couleurs au même endroit.)



Un cylindre traverse Flatland

Contrairement à la sphère, le cylindre a le même diamètre à tous les niveaux. Ainsi quand on passe un cylindre à travers Flatland, ses habitants voient subitement apparaître un disque qui ne change pas de diamètre le temps de la traversée, puis disparaît d'un coup quand le cylindre est passé de l'autre côté.



Un hypercylindre traverse l'espace

Contrairement à une sphère, un hypercylindre a un diamètre constant. On voit donc une sphère apparaître subitement, puis disparaître après un certain temps. Entre temps, la taille de la sphère ne varie pas.

Nous allons nous arrêter là pour les différentes représentations de la quatrième dimension. Pour une première prise de contact, nous avons déjà vu beaucoup de choses !

Si tout cela vous semble encore très flou, ne vous inquiétez pas : c'est normal ! Il ne s'agissait que d'un bref tour d'horizon et nous aurons l'occasion de revenir sur tout cela de façon plus précise et détaillée dans la quatrième partie de ce cours. Comme pour tout concept mathématique un peu abstrait, il faut du temps pour l'apprivoiser et apprendre à le manipuler naturellement. Laissez tout ça mûrir dans votre cerveau et soyez tranquille, ça va venir.

Vers les dimensions supérieures...

Nous n'allons pas nous attarder très longtemps sur les dimensions supérieures à 4 car nous y reviendrons plus longuement dans la quatrième partie de ce cours. Et puis pour tout vous dire, nous avons fait le plus dur : la vraie difficulté consiste à passer de la troisième à la quatrième dimension. Une fois que l'on a passé cette étape d'abstraction, les dimensions suivantes coulent plus naturellement.

Par exemple, pour déterminer un point en dimension 5, il faut donner 5 nombres. Que l'on donne sous forme de coordonnées, ainsi, le point (2,5,-6,0,3) est le point sur lequel on se trouve après s'être déplacé :

- De 2 dans la direction de la première coordonnée ;
- de 5 dans la direction de la deuxième coordonnée ;
- de -6 dans la direction de la troisième coordonnée ;
- de 0 dans la direction de la quatrième coordonnée ;
- de 3 dans la direction de la cinquième coordonnée.

Au-delà de la quatrième dimension, il n'y a plus de noms spécifiques. Ainsi on dit simplement « la cinquième coordonnée ». Vous remarquerez que même pour les premières dimensions, je n'utilise plus les mots *avant/arrière*, *haut/bas*, *gauche/droite* ou *ana/kata*. En fait, ces mots je les ai utilisés au début car cela permet de rendre les choses plus concrètes mais en réalité, avec l'habitude en maths on finit par ne plus utiliser ces mots et on dit simplement « première coordonnée », « deuxième coordonnée », *et cætera*.

Et l'on peut continuer longtemps de cette façon :

- un point de l'espace à 6 dimensions a six coordonnées, par exemple (3,6,-1,9,2,4) ;
- un point de l'espace à 7 dimensions a sept coordonnées, par exemple (0,2,-6,-12,19,2,7) ;
- un point de l'espace à 8 dimensions a huit coordonnées, par exemple (36,-21,19,-2,42,42,2000,1) ;
- et ainsi de suite.

D'une manière générale, si la dimension est égale à d (où d est un nombre entier positif), un point de l'espace possède d

coordonnées. Il s'écrit par exemple :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{d-1}, x_d)$$

Pour tout vous dire, les mathématiciens utilisent même des espaces de dimension infinie ! Mais je vous rassure, nous n'irons pas jusque là dans ce cours. Nous avons déjà suffisamment de pain sur la planche avec les dimensions finies.

Le coin des énigmes

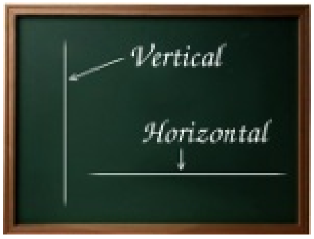
Voici le dernier chapitre de cette première partie consacrée aux dimensions. C'est l'heure de mettre tout ce que vous avez appris en pratique !

Voici donc une sélection de quelques énigmes sur les dimensions et la mesure des figures géométriques. Les énigmes sont classées en trois catégories, des plus faciles aux plus ardues. À vous de jouer !

On commence en douceur...

Horizontal contre vertical

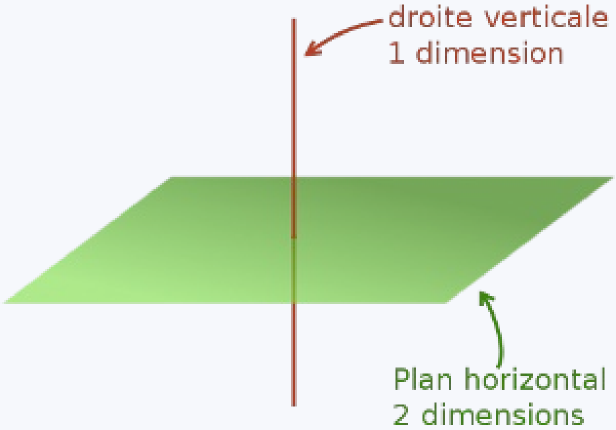
Imaginez que vous êtes en classe. Avez-vous remarqué qu'au tableau votre prof peut tracer des droites horizontales et des droites verticales, alors que vous, sur votre feuille à plat sur votre table ne pouvez tracer que des droites horizontales !
Sauriez-vous expliquer ce paradoxe ?



Solution :

Secret (cliquez pour afficher)

On considère souvent que l'horizontale et la verticale sont deux notions équivalentes. Or ce n'est pas le vrai, dans notre monde en trois dimensions, deux dimensions sont horizontales et une seule est verticale.



Ainsi, au tableau noir, on dispose de la dimension verticale et de l'une des deux dimensions horizontale (mais pas les deux). Sur une feuille de papier posée sur une table en revanche, on dispose des deux dimensions horizontales (avant/arrière et gauche/droite) mais pas de la dimension verticale.

Au final, le tableau comme la feuille sont bien tous les deux en dimension 2 et permettent de tracer les mêmes figures.

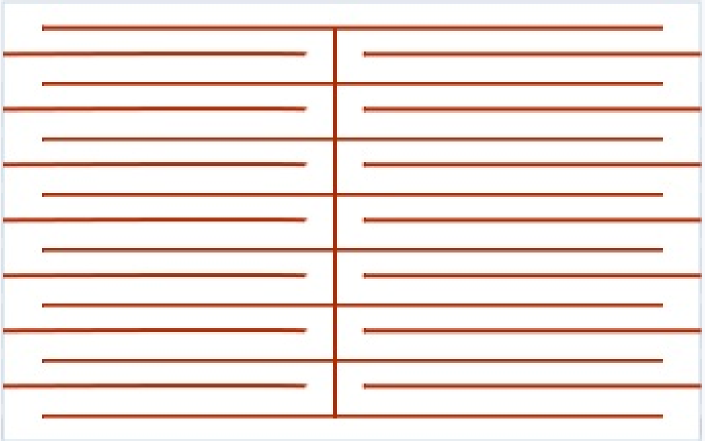
Le découpage

Pouvez-vous découper un trou dans une feuille de papier classique (format A4 ; 21×29,7 cm) de façon à ce que vous puissiez passer à travers ?

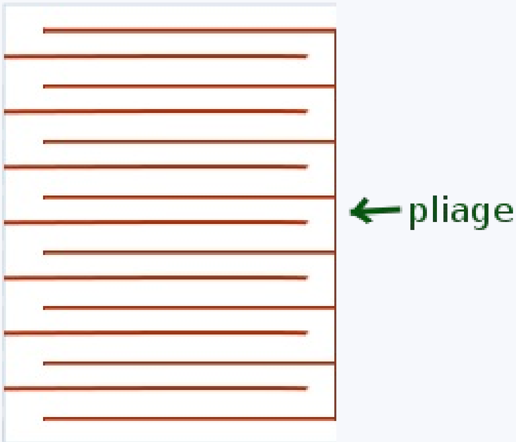
Solution :

Secret (cliquez pour afficher)

Il y a de nombreuses façons de faire ceci. Si vous avez réussi, bravo ! Voici une possibilité de découpage :



Remarquez que comme le découpage est symétrique, le plus pratique pour le réaliser est de plier la feuille en deux et de le faire un découpage comme ceci :



Notez que le premier et le dernier découpage (le plus haut et le plus bas sur le dessin ci-dessus) doivent commencer du côté du pli.

N'oubliez pas à la fin de faire le découpage qui se trouve sur le pli, mais ne coupez pas le pli en entier : il faut éviter la première et la dernière bande.

Quand vous avez fini, dépliez le tout et vous obtenez une longue boucle de papier à travers laquelle vous pouvez passer. Si vous le voulez, vous pouvez changer le nombre de découpes. Plus vous en ferez, plus la boucle est grande et fine (et donc fragile).

Cette énigme est parfois appelé l'énigme de Didon car elle est liée à la légende de la fondation de la ville de Carthage par la princesse phénicienne Didon. Chassée par son frère Pygmalion, elle partit pour un long voyage qui s'acheva sur les côtes de l'actuelle Tunisie. Là, elle demanda au roi berbère, Hiarbas, l'autorisation d'installer sa nouvelle capitale. Celui-ci lui offrit alors un terrain aussi grand que la peau d'une vache. Nullement découragée, Didon découpa astucieusement la peau de vache de façon à entourer un territoire suffisamment grand sur lequel elle fonda Carthage.

En supposant que l'on puisse faire des découpages aussi fins que l'on veut, on peut obtenir une longueur aussi grande que l'on veut. Ceci montre bien que la longueur d'une figure 2D est infinie. D'où l'intérêt de mesurer les figures 2D par leur surface et non par leur longueur.

Le bonhomme de neige

Zozor a construit un magnifique bonhomme de neige. Pour cela il a empilé deux grosses boules de neige : la plus grosse pour faire le corps et la deuxième, deux fois moins grande pour faire la tête. La boule pour faire la tête pèse 3 kilogrammes. Le bonnet, la carotte, les cailloux et les bois pour les bras réunis pèsent 1 kilogramme. Mais combien pèse le bonhomme de neige entier ?

Solution :

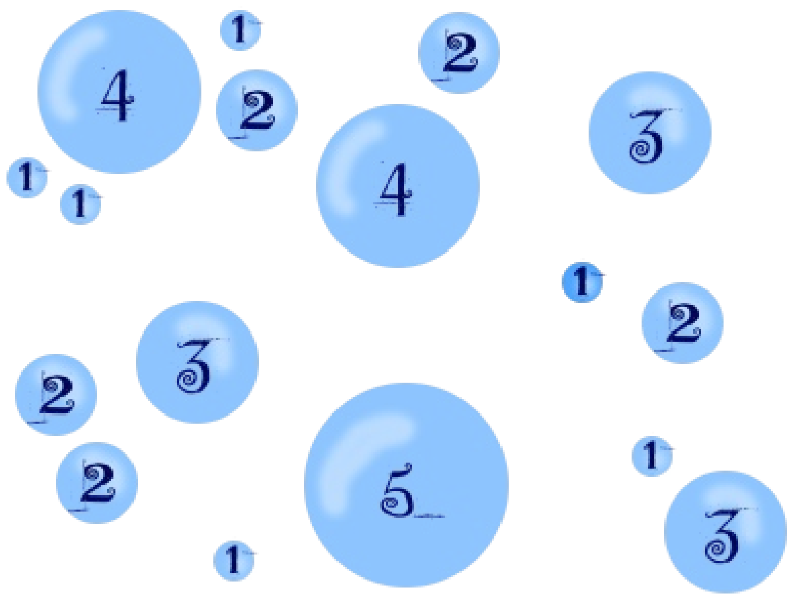
Secret (cliquez pour afficher)

La grosse boule est deux fois plus grande que la petite. Or une boule est un objet en trois dimensions, son volume est donc $2^3 = 8$ fois plus important. Ainsi la grosse boule pèse 3×8=24 kilogrammes. Le bonhomme de neige en entier pèse donc 24+3+1 = 28 kilogrammes.

On corse un peu

Les bulles

Pouvez vous tracer une ligne droite à travers ces bulles, sans les percer, de façon à ce que le volume des bulles des deux côtés soit le même ? (Le rayon des bulles est indiqué à l'intérieur).



Indice :

Secret (cliquez pour afficher)

Attention au piège ! Ce sont les rayons qui sont indiqués à l'intérieur des bulles et non les volumes.

Solution :

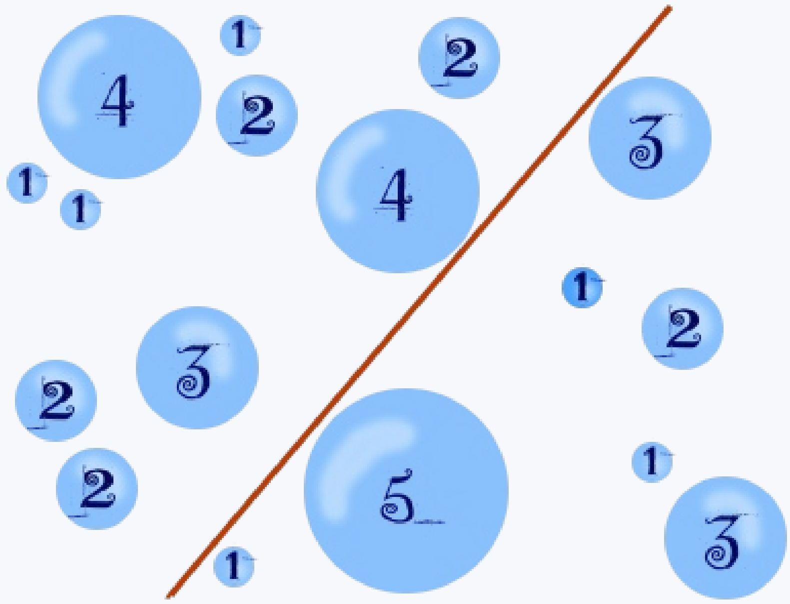
Secret (cliquez pour afficher)

Il faut évidemment se méfier car ce ne sont pas les volumes mais les rayons des bulles qui sont indiqués. Le volume de la bulle est proportionnelle au cube de son rayon (car elles sont en 3D).

Il fallait donc trouver une ligne telle que la somme des cubes des rayons soit la même de chaque côté. La somme de tous les cubes est égale à :

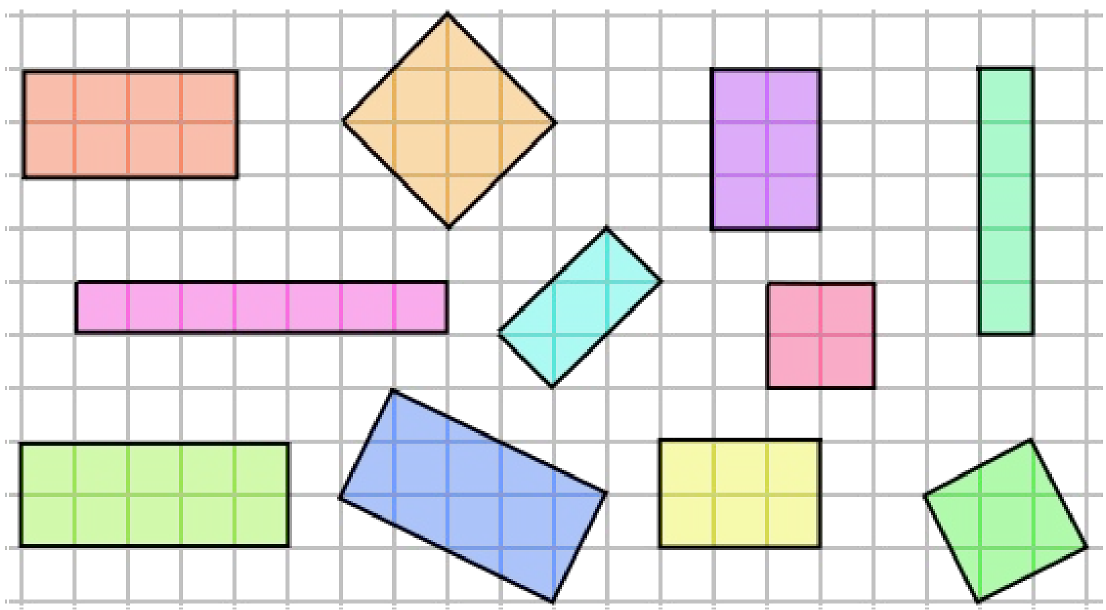
$$5^3+4^3+4^3+3^3+3^3+3^3+2^3+2^3+2^3+2^3+2^3+1^3+1^3+1^3+1^3+1^3+1^3=380.$$

Il faut donc placer 380/2 = 190 de chaque côté. On y arrive de la façon suivante :



Les rectangles

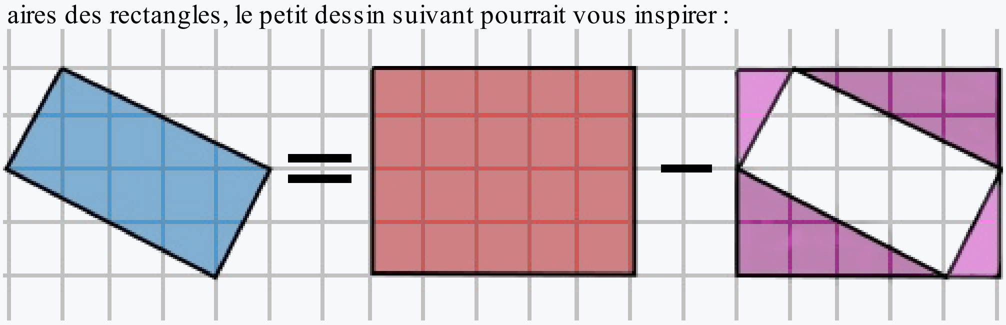
Tous les rectangles suivants sauf un vont par couple ayant la même aire. Trouvez l'intrus.



Indice :

Secret (cliquez pour afficher)

Pour calculer les aires des rectangles, le petit dessin suivant pourrait vous inspirer :

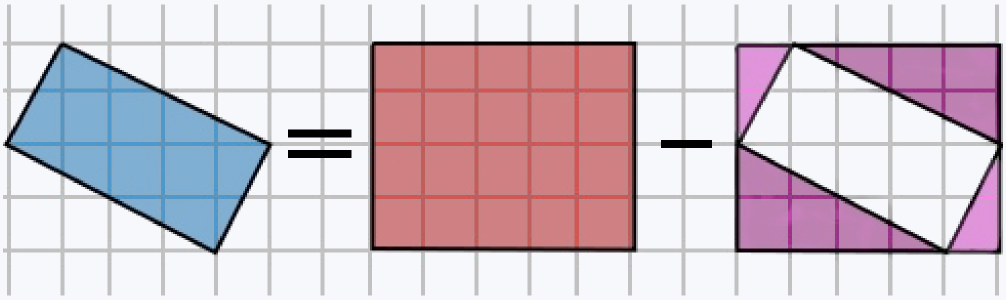


Solution :

Secret (cliquez pour afficher)

Pour les rectangles qui sont droits, il est facile de compter simplement le nombre de petits carreaux en multipliant la longueur par la largeur.

Pour les rectangles penchés en revanche, il faut être un peu plus astucieux. Il y a plusieurs façons de faire, par exemple en voici une :

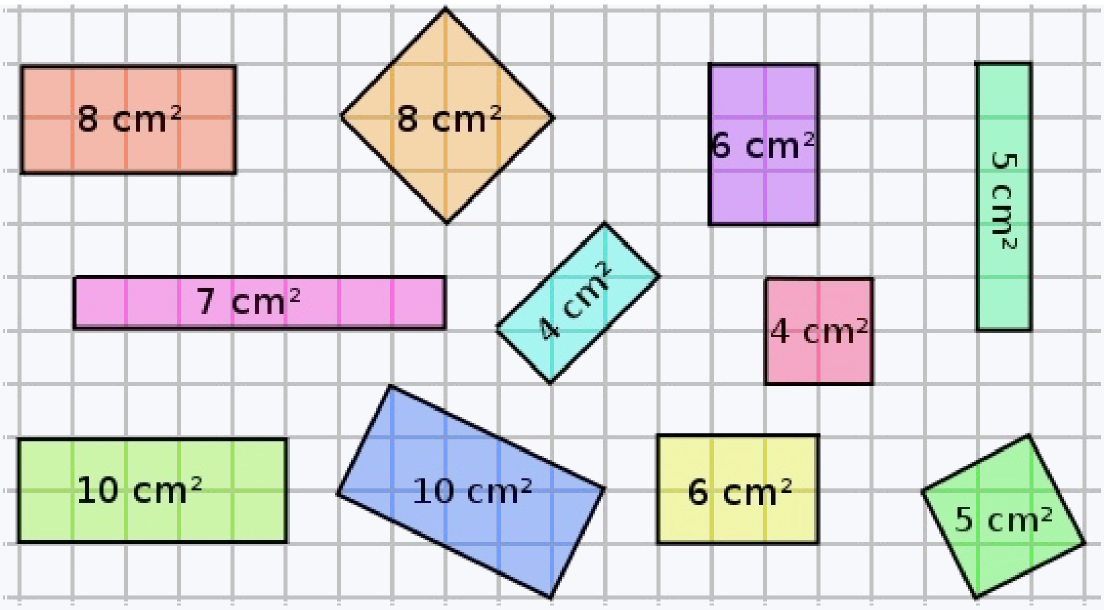


Pour trouver la surface du rectangle bleu, il suffit de mesurer celle du grand rouge et de soustraire la surface des coins violets. Or si on regroupe les coins violets opposés deux par deux, on peut former des rectangles dont on peut calculer l'aire. En bref, dans l'exemple ci-dessus :

- le grand rectangle rouge mesure 4×5=20 cm² ;
- les deux grands coins réunis font un rectangle de 4×2=8 cm² ;
- les deux petits coins réunis font un rectangle de 2×1=2 cm².

Conclusion : le rectangle bleu mesure 20-8-2=10 cm².

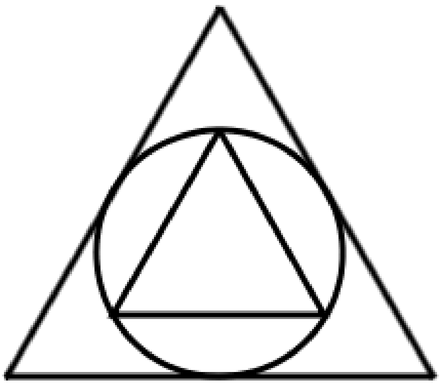
Une fois que vous avez compris la méthode, je vous laisse l'appliquer pour trouver les surfaces de tous les autres rectangles. Vous devez trouver ceci :



L'intrus est donc le rectangle rose de 7 cm² sur la gauche.

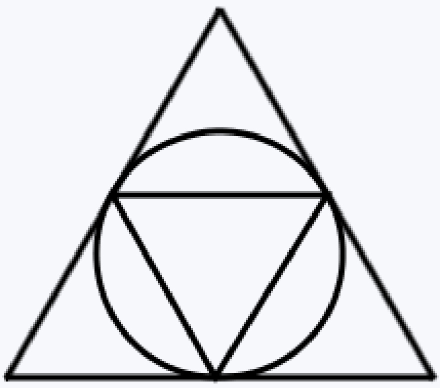
Les triangles emboîtés

Sur la figure suivante, combien de fois le grand triangle est-il plus grand que le petit ?



Indice :

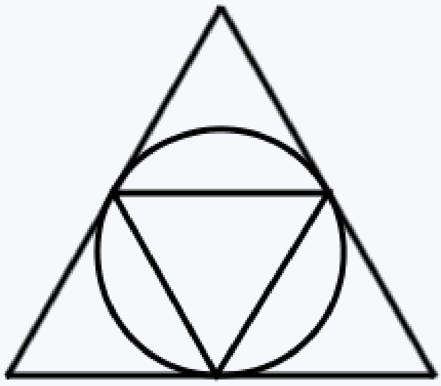
Secret (cliquez pour afficher)



Solution :

Secret (cliquez pour afficher)

Cette énigme est assez jolie car sa réponse n'est pas évidente à trouver et pourtant elle devient toute simple grâce à une petite astuce. Retournons le petit triangle du milieu :



On voit alors que le grand triangle est composé de 4 petits triangles identiques. Le grand triangle a donc une surface 4 fois plus grande que le petit. On peut donc aussi dire que les côtés du grand triangle sont deux fois plus grands que ceux du petit.

Vous aurez peut-être remarqué que l'énigme telle qu'elle est posée est un peu ambigüe. En effet, on demande combien de fois le grand triangle est plus grand que le petit sans préciser si on parle en terme de surface ou en terme de longueur. En terme de longueur, il est 2 fois plus grand, alors qu'en terme de surface il est 2^2=4 fois plus grand.

Ça se complique

Sauriez-vous construire une fractale dont la dimension serait exactement égale à 1,5 ?

Note : pour résoudre, cette énigme, il est nécessaires d'avoir quelques connaissances de base sur la manipulation des logarithmes. Notamment :

$$\log_c(a^b) = b\log_c(a) \text{ et } \log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

Solution :

Secret (cliquez pour afficher)

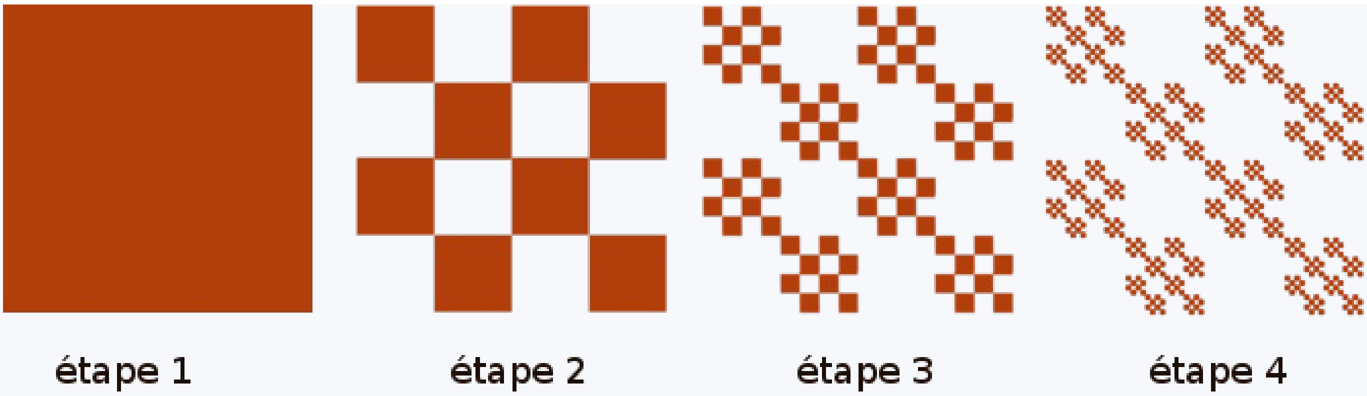
Nous savons que la dimension d'une figure autosimilaire dont la mesure est multipliée par b quand sa taille est multipliée par a est $\log_a(b)$. Nous cherchons donc a et b tels que $\log_a(b) = 1,5$.

Pour cela, l'astuces est de penser à prendre a de la forme x^2 et b de la forme x^3 pour n'importe quel x. En effet, dans ce cas, on a :

$$\log_a(b) = \log_{x^2}(x^3) = \frac{\log(x^3)}{\log(x^2)} = \frac{3\log(x)}{2\log(x)} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

N'importe quel x ferait l'affaire. Prenons par exemple $x = 2$, dans ce cas, $a = 4$ et $b = 8$. Il s'agit donc maintenant de construire une figure dont la mesure est multipliée par 8 quand sa taille est multipliée par 4.

Là encore, il y a de nombreuses façons de faire, pour l'exemple, en voici une :



La figure limite obtenue après une infinité d'étapes aura une dimension égale exactement à 1,5.