

# Nous descendons tous de Gengis Khan !

Par Mickaël Launay (GéoMI17)  
et Mathieu Nebra (Mateo21)



[www.openclassrooms.com](http://www.openclassrooms.com)

*Licence Creative Commons 6 2.0  
Dernière mise à jour le 29/05/2013*

## Sommaire

Sommaire .....	2
Nous descendons tous de Gengis Khan ! .....	3
Gengis Khan est-il notre ancêtre ? .....	3
Le nombre de nos ancêtres .....	3
De quel côté de la moyenne ? .....	6
Descendons-nous de Gengis Khan ? .....	6
D'une génération à l'autre .....	7
L'évolution à travers les siècles ! .....	8
Tout se joue au début .....	9
La loi des grands nombres .....	10
Gengis Khan .....	10
Partager .....	11



# Nous descendons tous de Gengis Khan !



Par

Mickaël Launay (GéoM117) et



Mathieu Nebra (Mateo21)

Mise à jour : 29/05/2013

Difficulté : Facile



Avez-vous déjà essayé de construire votre arbre généalogique ? Peut-être avez-vous trouvé parmi vos ancêtres quelques lignées prestigieuses, peut-être descendez-vous de rois, de grands scientifiques ou encore d'écrivains célèbres !

Nous allons découvrir dans ce mini-cours qu'il est possible d'aborder cette question de façon mathématique. De simples petits calculs suffisent à savoir s'il est raisonnable d'espérer trouver un grand homme dans nos ancêtres. Tenez, Gengis Khan par exemple, fondateur de l'empire mongol, le plus vaste empire contigu de l'histoire de l'humanité, pensez-vous avoir des chances de descendre de lui ? Vous allez le voir, la réponse est surprenante !

(bon si vous avez lu le titre, vous avez déjà une idée de la réponse 😊)

Sommaire du tutoriel :



- Gengis Khan est-il notre ancêtre ?
- Descendons-nous de Gengis Khan ?
- Tout se joue au début

## Gengis Khan est-il notre ancêtre ?

### Le nombre de nos ancêtres



Je me suis toujours demandé, combien avons-nous d'ancêtres ?

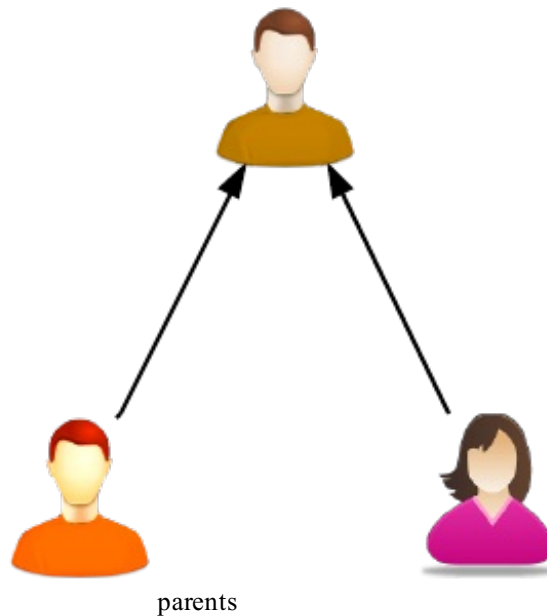
Si l'on veut évaluer les chances que Gengis Khan en fasse partie, il serait bon de commencer par évaluer combien nous avons d'ancêtres.

Commençons donc par nos ancêtres les plus proches : la première génération au dessus-de nous est celle de nos parents, ils sont au nombre de 2.

Un enfant a forcément...

Un enfant a toujours 2

... 2 parents



Viennent ensuite nos grands-parents, qui sont 4, puis nos arrière-grands-parents, 8. Le principe est facile à comprendre : à chaque génération remontée, le nombre de nos ancêtre est multiplié par 2. Logique, puisque chaque individu a toujours deux parents.

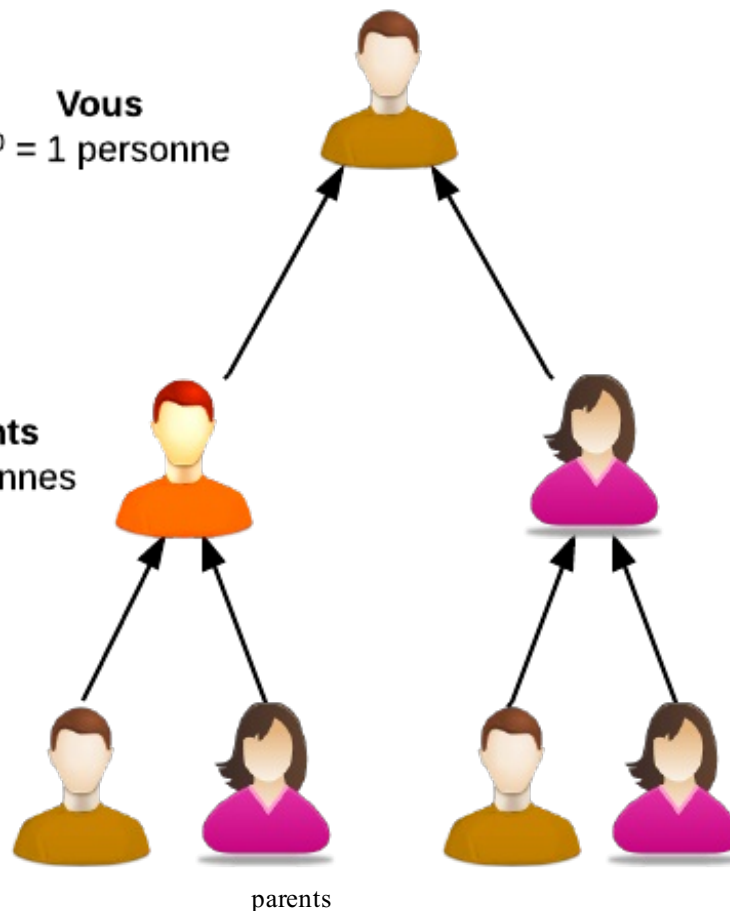
Nous pouvons donc conclure qu'à la  $n^{\text{e}}$  génération avant nous, nous avons  $2^n$  ancêtres. Par exemple, le nombre de nos arrière-arrière-arrière-arrière-arrière-arrière-grands parents est égal à  $2^9 = 512$  !

**Vous**  
 $2^0 = 1$  personne

**Vos parents**  
 $2^1 = 2$  personnes

Calcul du nombre de

**Vos grands-parents**  
 $2^2 = 4$  personnes



N'allons pas trop vite quand même, ce que nous venons de dire n'est valable que s'il n'y a pas de mariages entre personnes d'une même famille. Si vos deux parents sont cousins germains par exemple (cela signifie qu'ils ont les mêmes grands parents), alors vous n'avez que 4 arrière-grands-parents : ceux du côté de votre père sont les mêmes que



ceux du côté de votre mère. Si ce phénomène est assez rare dans les générations proches, il est loin d'être négligeable si l'on remonte de nombreuses générations : nous allons même voir qu'il est absolument certain qu'il y a dans votre famille des mariages entre cousins (plus ou moins éloignés) à condition de remonter assez loin ! 🤔

Pour rester correct, nous pouvons donc dire qu'à la  $n^{\text{e}}$  génération, nous avons  $2^n$  ancêtres théoriques, mais certains de ces ancêtres peuvent en réalité être une seule et même personne.

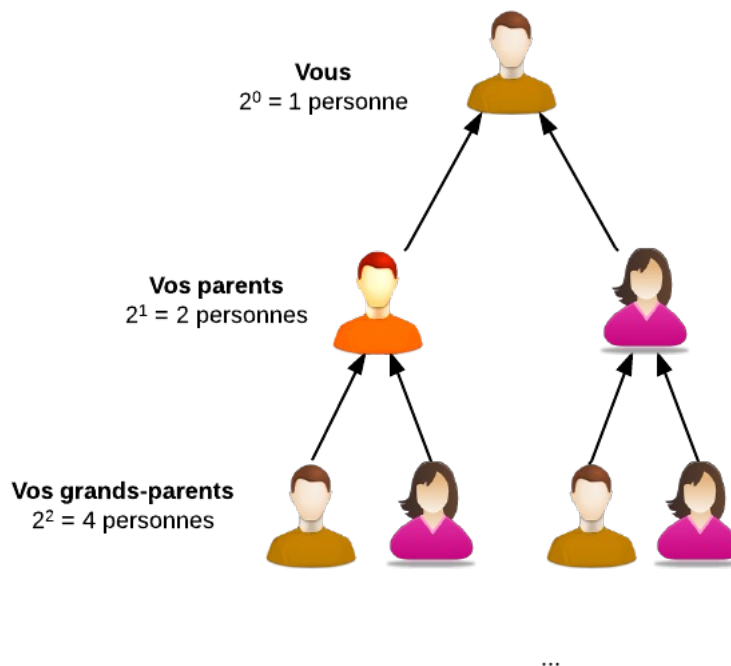
Mais revenons maintenant à Gengis Khan ! Combien avons-nous d'ancêtres à son époque ?

Gengis Khan est né aux alentours de l'an 1155 ou 1162, il y a donc *grosso modo* 850 ans. On considère généralement que l'écart entre deux générations, c'est-à-dire la différence d'âge entre un individu et ses parents est de 25 ans. Ainsi, Gengis Khan a vécu il y a  $850 \div 25 = 34$  générations. Si vous avez 25 ans, il vous faudra compter 33 générations entre lui et vous, si vous avez 50 ans comptez 32 générations et si vous êtes plus proche de 75, comptez-en 31.



Dans nos exemples, nous allons considérer 33 générations, mais n'hésitez pas à adapter les calculs pour vous-même. 😊

En comptant 33 générations, vous avez donc  $2^{33} \approx 8\,500\,000\,000$ , soit 8,5 milliards d'ancêtres théoriques à l'époque de Gengis Khan !



**La génération de Gengis Khan**  
 $2^{33} \approx 8\,500\,000\,000$  personnes



Gengis Khan était-il l'un d'entre eux ?

Gengis Khan est-il notre ancêtre ?

Sachant que l'humanité ne comptait que 500 millions d'individus à l'époque, c'est beaucoup trop ! Pour que ce chiffre soit possible, il est obligatoire qu'il y ait eu des mariages entre cousins éloignés dans votre famille et que certains de vos ancêtres théoriques soient en réalité une même personne. Plus précisément, si on fait le rapport entre le nombre d'ancêtres théorique et la population mondiale de l'époque, on trouve :

$$\frac{8\,500\,000\,000}{500\,000\,000} = 17.$$

Ainsi, nous pouvons conclure que **chaque** individu de l'époque de Gengis Khan est en moyenne 17 fois votre ancêtre !

## De quel côté de la moyenne ?

Chaque individu de cette époque est en moyenne 17 fois votre ancêtre, certes, mais ce n'est qu'une moyenne ! Il est possible que certains individus soient plus de 50 fois votre ancêtre tandis que d'autres ne le soient pas du tout. La preuve, c'est qu'il y a forcément des gens de cette époque qui sont morts sans enfants, et ceux là, inutile de préciser qu'ils ne peuvent pas être de vos ancêtres. 🤔

Alors rassurez-vous, Gengis Khan a bien eu une descendance, il est donc possible qu'il soit notre ancêtre. Mais quelle sont précisément les chances ?

Si vous avez quelques bases en probabilités, nous allons pouvoir faire un petit calcul : cherchons la probabilité pour qu'un individu quelconque de l'époque de Gengis Khan ayant eu une descendance jusqu'à notre époque soit votre ancêtre.



Ou plus précisément, dans un premier temps, calculons la probabilité pour qu'il **ne soit pas** votre ancêtre. En probabilités, il est fréquent qu'il soit plus facile de calculer la probabilité de l'événement contraire à celui que l'on cherche.

Nous avons dit que vous aviez environ 8,5 milliards d'ancêtres théorique à cette époque. Prenons-les un par un (allez courage ! 😊) :

- Le premier de vos ancêtres théoriques a 499 999 999 chances sur 500 000 000 de ne pas être Gengis Khan, puisqu'il y avait 500 000 000 humains sur la Terre à cette époque et que Gengis Khan n'était qu'un seul d'entre eux. 🤔
- De la même façon, le deuxième de vos ancêtres théoriques a aussi 499 999 999 chances sur 500 000 000 de ne pas être Gengis Khan.
- Cette proba est toujours la même pour votre troisième ancêtre théorique et ainsi de suite jusqu'au 8,5 milliardième.

Au final, pour que Gengis Khan ne soit pas votre ancêtre, il faut qu'il ne soit aucun de vos ancêtres théoriques. Cette probabilité est donc égale à :

$$\left(\frac{499\,999\,999}{500\,000\,000}\right)^{8\,500\,000\,000} \approx 0,0000000414 \approx \frac{1}{24\,000\,000}$$

Autrement dit, il y a une chance sur 24 millions pour que Gengis Khan **ne soit pas** votre ancêtre ! Ce qui veut dire à l'inverse que la **probabilité qu'il soit votre ancêtre est égale à 99,999996% !**

Au final, nous voyons que même si chaque individu de l'époque de Gengis Khan est en moyenne 17 fois votre ancêtre, il y a peu de chance que le nombre réel s'éloigne beaucoup de la moyenne et qu'il ne le soit aucune fois.



Selon le même principe, si vous lancez 60 fois un dé, vous devrez faire en moyenne 10 fois un 6 et il est très improbable que vous n'en fassiez aucun : quasiment à tous les coups le 6 apparaîtra entre 5 et 15 fois. C'est également pour cela que les voyants qui prédisent l'avenir font parfois des prévisions justes : quelqu'un qui ferait des prévisions au hasard aurait lui aussi un certain taux de réussite. Si un jour vous croisez un voyant qui se trompe à tous les coups, alors vous pourriez commencer à croire à la voyance, cela signifierait qu'il a réellement des dons mais qu'il interprète mal les signes qu'il reçoit. 🤔

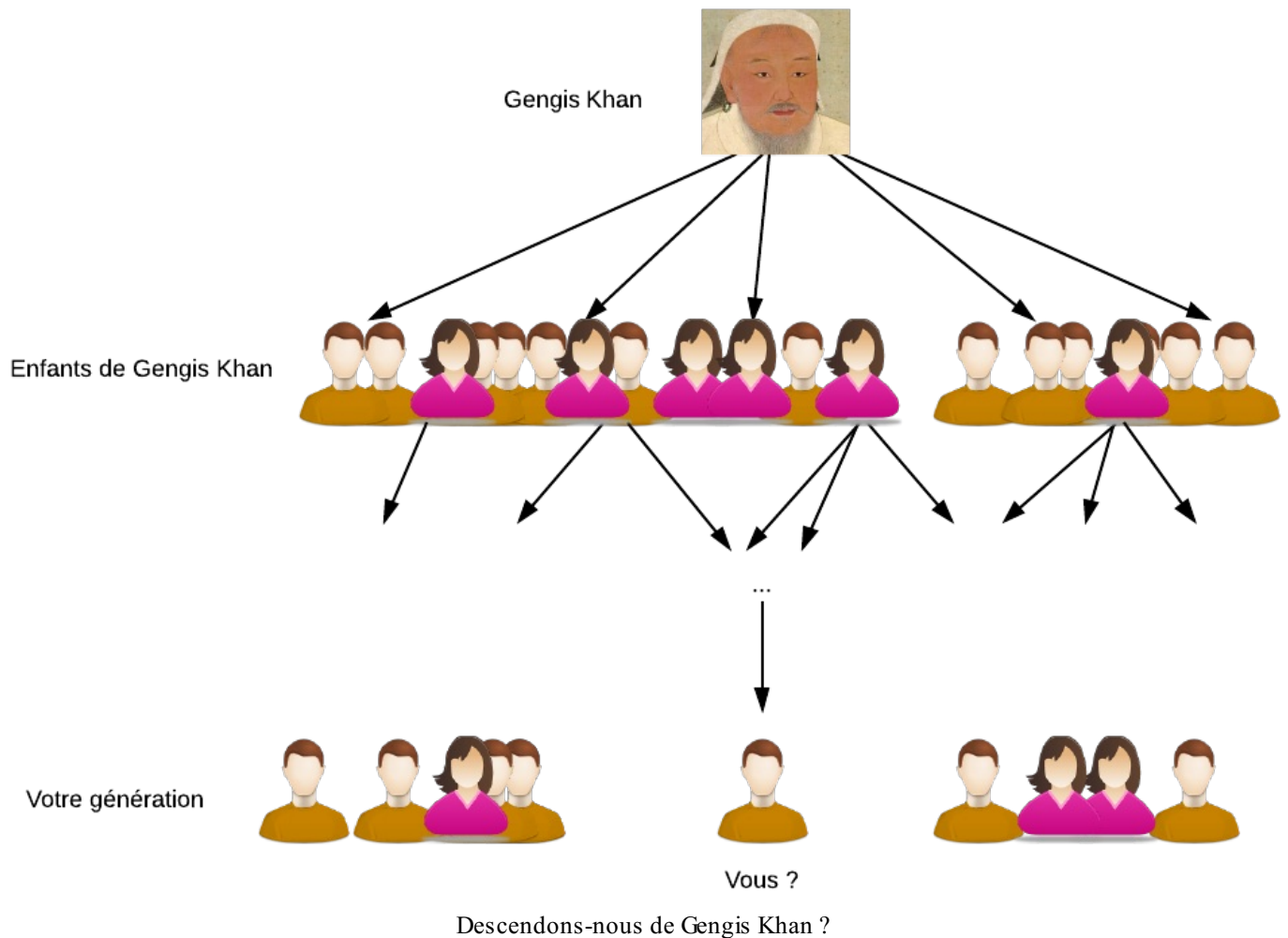
## Descendons-nous de Gengis Khan ?

Dans la section précédente, nous nous sommes demandés si Gengis Khan était notre ancêtre, et maintenant, nous allons nous demander si nous descendons de lui.



Mais, mais... c'est exactement la même question ?

Oui, c'est bien la même question. mais posée différemment ! 🤔 En maths, il est souvent très fertile de changer de point de vue sur une question. Vous allez voir qu'en étudiant le même problème, mais en partant de Gengis Khan pour arriver à notre époque nous allons comprendre des choses étonnantes sur l'évolution d'une descendance.

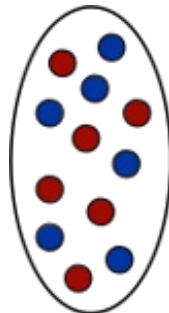


## D'une génération à l'autre



Comment évolue une descendance au cours du temps ? Posons-nous par exemple la question suivante : si dans une génération donnée, 50% de la population descend de Gengis Khan, alors comment aura évolué cette proportion à la génération suivante ?

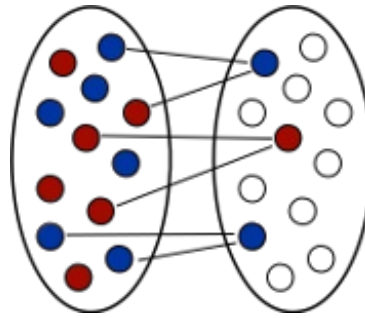
Pour visualiser ceci, nous allons nous aider d'un petit schéma. Voici une population de dix individus dans laquelle les descendants de Gengis Khan sont représentés en bleus et les autres en rouges.



Dans la génération suivante il y a alors plusieurs configurations possibles :

- si un individu a ses deux parents qui descendent de Gengis Khan, alors il descend de Gengis Khan ;
- si un individu a un de ses deux parents qui descend de Gengis Khan et l'autre non, alors il descend de Gengis Khan ;

- si un individu a ses deux parents qui ne descendent pas de Gengis Khan, alors il ne descend pas de Gengis Khan.



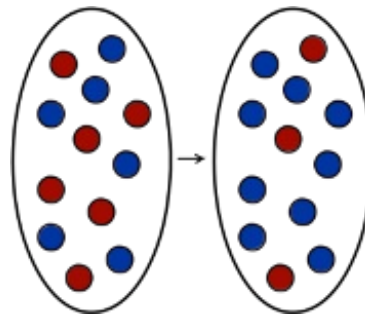
Encore une fois, il est plus facile de se poser la question dans l'autre sens : si 50% d'une génération ne descend pas de Gengis Khan, alors quelle proportion n'en descendra pas dans la génération suivante ? Autrement dit, s'il y a 50% de rouge dans le premier ensemble, quelle sera la proportion de rouge dans le second ?

Imaginons un individu quelconque de la génération suivante. Il a un père et une mère.

Pour que cet individu ne descende pas de Gengis Khan, il faut que ni son père, ni sa mère n'en descende. Or il y a 50% de chances pour que le père ne descende pas de Gengis Khan et 50% également pour la mère. Ainsi la probabilité de ne pas descendre de Gengis Khan pour notre individu est égale à :

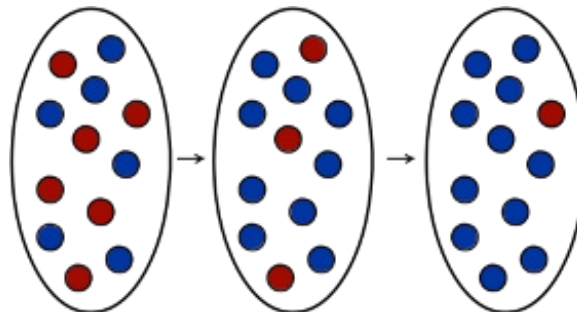
$$50\% \times 50\% = 0,5 \times 0,5 = 0,25 = 25\%$$

Ainsi, la proportion d'une génération qui ne descend pas de Gengis Khan est passée de 50% à 25% !



Si vous avez compris ceci, vous comprendrez aussi que d'une manière générale, si on note  $p$  la proportion ne descendant pas de Gengis Khan dans une génération, alors cette proportion est égale à  $p^2$  à la génération suivante.

Ainsi, deux générations plus tard, la proportion d'individus qui ne descendent pas de Gengis Khan est d'environ 6% ( $0,25 \times 0,25 = 0,0625$ ).



## L'évolution à travers les siècles !

Nous pouvons maintenant revenir à notre problème d'origine. Si nous notons  $p_n$  la proportion d'individus qui ne descendent pas de Gengis Khan, à la  $n^e$  génération après lui, on a alors :

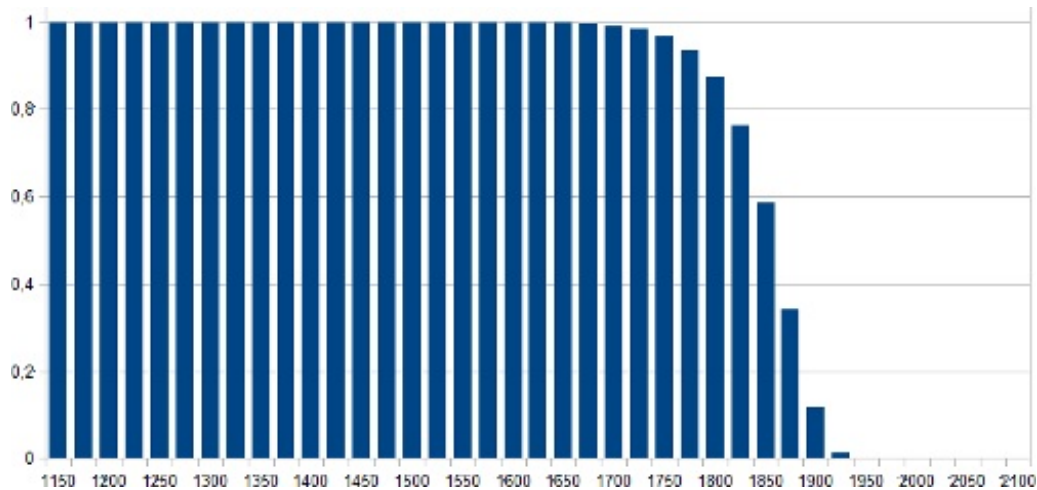
$$p_{n+1} = p_n^2$$



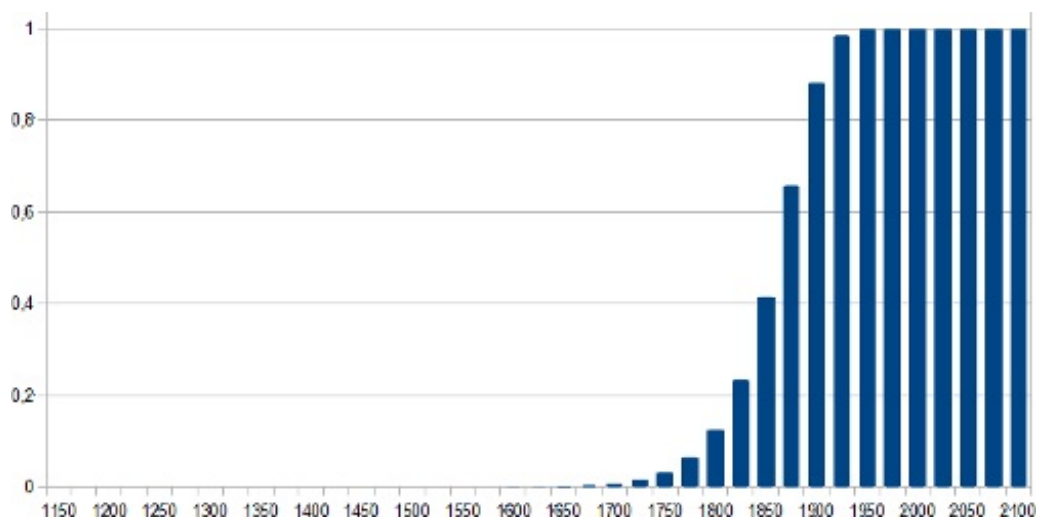
Pour que cette suite soit bien définie, il faut cependant l'initialiser. Au moment de sa naissance, Gengis Khan est le seul représentant de sa lignée. On a donc :

$$p_0 = \frac{499\,999\,999}{500\,000\,000}$$

A partir de cette définition, il est possible de tracer l'évolution de la suite.



Et si on regarde la suite  $1 - p_n$  pour avoir la proportion des individus qui descendent effectivement de Gengis Khan on obtient ceci :

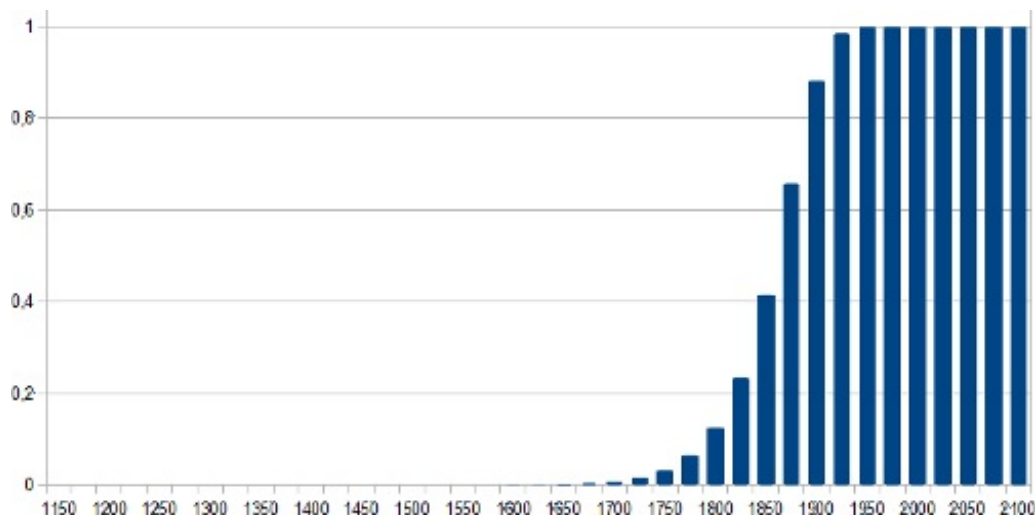


Qu'est ce qu'on constate ?

- Pendant plusieurs siècles, la proportion des descendants de Gengis Khan est extrêmement proche de 0.
- Puis en quelques générations entre 1750 et 1900, cette proportion se met à croître brutalement.
- A partir de 1900, quasiment toute la population descend de Gengis Khan !

## Tout se joue au début

Nous avons vu que la courbe moyenne d'évolution de la descendance d'un individu ressemble à ceci :



Oui, mais voilà, encore une fois il ne s'agit que d'une moyenne. Par exemple, il existe également des individus qui meurent sans enfants et pour lesquels on a donc  $p_1 = 1$ , et par conséquent  $p_n = 1$  pour toutes les générations suivantes.

En réalité, les fluctuations dues au hasard sont surtout présentes pendant les premières générations. Plus le temps passe, plus la courbe devient déterministe, c'est-à-dire que le hasard a de moins en moins son mot à dire et les prévisions données par la suite  $p_n$  sont de plus en plus proches de la réalité. Pour comprendre cela nous devons dire quelques mots de la loi des grands nombres.

## La loi des grands nombres

En probabilité, la loi des grands nombres dit que si on répète une expérience aléatoire un certain nombre de fois et que l'on fait la moyenne, alors, plus le nombre d'expériences réalisées est grand plus il y a de chances que le résultat obtenu soit proche de la moyenne théorique.

Pour comprendre, prenons l'exemple des lancers de dés. La moyenne des points que l'on trouve sur un dé classique est égale à 3,5. Ainsi, si on lance deux dés, la moyenne des deux dés doit tourner aux alentours de 3,5. Cependant, il y a une forte dose de hasard, il est par exemple tout à fait possible de faire un 1 et un 2 et que la moyenne ne soit égale qu'à 1,5.

Si au contraire on lance dix dés, alors il est beaucoup moins probable que le résultat soit plus petit que 2, car sur les dix dés, il y a de fortes chances qu'il y ait quelques 6 ou quelques 5.

Ce que dit la loi des grands nombres, c'est que plus le nombre de dés lancés sera grand, plus la moyenne a de chance d'être très proche de 3,5. Si par exemple vous lancez un million de dés, je suis prêt à vous parier que la moyenne sera comprise entre 3,4 et 3,6. Les chances que ce ne soit pas le cas sont réellement infimes !

### La loi des grands nombres dans la généalogie

La loi des grands nombres peut alors s'appliquer aux descendance. Imaginez qu'à une époque donnée, la descendance d'un individu compte un million de personnes. Alors dans le lot, il y aura des gens qui mourront sans enfants, mais il y en aura aussi qui auront beaucoup d'enfants et tout ceci va se compenser et la descendance prise dans sa globalité aura finalement une évolution très prévisible. Le hasard ne joue presque plus !

En d'autres termes, l'évolution d'une descendance se joue principalement dans les premières générations. Une fois que le processus est lancé et qu'il y a suffisamment de descendants, la suite  $p_n$  définie dans la section précédente devient très fiable et proche de la réalité.

## Gengis Khan

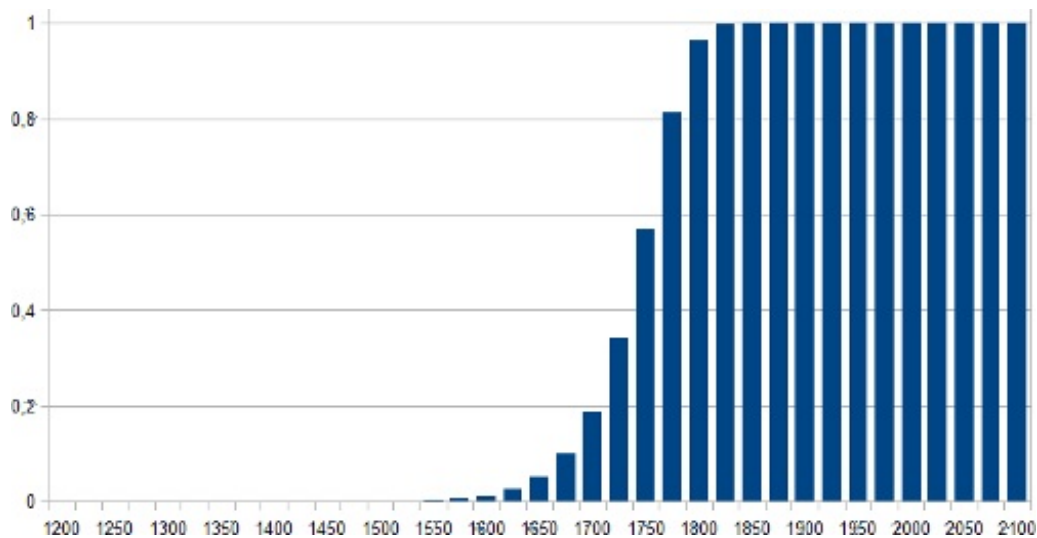
Il est temps de revenir à Gengis Khan. Puisque tout se joue au début, comment sa descendance a-t-elle débuté ?

A vrai dire on ne sait pas précisément combien Gengis Khan a eu d'enfants. Ce que l'on sait c'est qu'il a eu 4 fils et 5 filles de son épouse principale Börte, mais il aurait eu plus d'une trentaine d'autres épouses (et je ne compte pas les femmes qu'il a connues et qu'il n'a jamais épousées !). Il est difficile d'estimer le nombre précis d'enfants de Gengis Khan à partir de ces seules données, mais on peut en déduire deux choses :

- Gengis Khan a eu suffisamment de descendants, dès la première génération, pour avoir sauté la phase la plus aléatoire de l'évolution de la suite  $p_n$ .

- Gengis Khan a probablement eu en une seule génération un nombre de descendants qu'un individu quelconque n'obtient généralement qu'en 5 ou 6 générations, voir plus.

Si par exemple on suppose que Gengis Khan a eu 100 enfants, alors l'évolution de la courbe  $1 - p_n$  prend la forme suivante :



Il y a toujours une marche, mais elle est considérablement décalée ! C'est comme si la descendance de Gengis Khan avait gagné plus d'un siècle d'avance uniquement grâce à sa première génération !

Bref, vous l'aurez compris, il n'y a plus de doutes : nous descendons tous de Gengis Khan ! 🤔

Partager

