

Manier la trigonométrie

Par Nath22



www.openclassrooms.com

*Licence Creative Commons 4 2.0
Dernière mise à jour le 5/02/2012*

Sommaire

Sommaire	2
Partager	1
Manier la trigonométrie	3
Partie 1 : Les bases de la trigonométrie	4
Avec un triangle rectangle	4
La trigonométrie, c'est quoi ?	4
Définition de cos, sin et tan	4
Valeurs remarquables	5
Avec le cercle unité	8
Le cercle unité et le radian	9
Définitions avec le cercle unité	11
Valeurs remarquables, le retour	12
Formules trigonométriques (1/2)	20
Continuons sur de bonnes bases	21
Résumé	21
Une formule à retenir	22
Histoires de symétries	22
Autres formules	25
Résumé	30
Formules trigonométriques (2/2)	30
Point de vue fonction	31
Ensemble de définition	31
Représentations graphiques	31
Quelques propriétés	33
Les équations trigonométriques	40
Au boulot !	44
Mode d'emploi	45
Niveau 1	45
Niveau 2	49
Partie 2 : Annexes	56
La trigonométrie, côté calculatrice	56
Les CASIO	56
Choisir l'unité de mesure	56
Effectuer les calculs trigonométriques de base	56
La calculatrice de l'ordinateur	57
Où est cachée cette calculatrice ?	57
Calculs de base	58
Formulaire	60
Définitions de base	60
Valeurs remarquables	60
Formulaire	61
Lexique	64
Lexique : notions de base	64
A	64
C	64
D	64
I	64
M	64
P	64
R	65



Manier la trigonométrie



Par Nath22

Mise à jour : 05/02/2012

Difficulté : Intermédiaire



1 visites depuis 7 jours, classé 1/27

Amis zéros, bienvenue ! Vous découvrez la trigonométrie ? Vous n'y comprenez rien ? Ou bien vous voulez élargir vos connaissances en trigonométrie ? Pas de souci, vous avez frappé à la bonne porte. Nous allons voir cela (presque) à partir de zéro, normal me direz-vous pour des zéros comme nous. 😊 Dès à présent, je vous précise que j'utiliserai très souvent l'abréviation "trigo" à la place de "trigonométrie".

La trigo c'est quoi ça ? Si je vous parle de sinus, cosinus, tangente, ça vous évoque quelque chose ? Ma mission, si vous l'acceptez : faire de la trigo un outil facile à manier pour vous, ou au moins qui ne vous pose plus de problèmes. 😊 Oui, oui, vous ne tomberez plus dans les pièges de la trigo, mais pour cela il faut bien suivre le cours. Les bavardages ne seront pas tolérés. 😊

Vous verrez que la trigo ne se résume pas à un ensemble de formules, c'est aussi une interprétation géométrique qui a toute son importance. Et puis la trigo n'a pas été inventée pour rien : les applications sont nombreuses en physique.



Aborder la trigonométrie nécessite néanmoins quelques prérequis (fonctions, dérivées, vecteurs ...) que je précise en début de chapitre lorsque c'est nécessaire.
Ce tutoriel est basé sur de la géométrie euclidienne.

Partie 1 : Les bases de la trigonométrie

Cette première partie permet de poser les bases de la trigonométrie. Elle correspond à peu près aux niveaux collège/lycée 4^e à 1^{ère}S. Elle permet surtout d'acquérir des techniques de base pour la résolution d'exercices trigonométriques.

Avec un triangle rectangle

Cosinus, sinus, tangente, c'est quoi tout ce charabia ? 😬 Pas de panique, nous allons voir ici les bases. Ce premier chapitre permet de présenter ces trois fonctions trigonométriques par rapport à un triangle rectangle, comme vu au collège.



Prérequis : le théorème de Pythagore.

La trigonométrie, c'est quoi ?

Voici ce que dit wikipedia de la trigonométrie :

Citation

La trigonométrie (du grec $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\omicron\varsigma$ / trigonos , « triangulaire », et $\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\nu$ / métron , « mesure ») est une branche des mathématiques qui traite des relations entre distances et angles dans les triangles et des fonctions trigonométriques telles que sinus, cosinus et tangente.

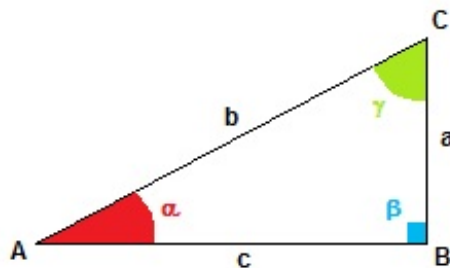
Les fonctions trigonométriques peuvent être définies à partir d'un triangle. Nous les aborderons sous ce point de vue. Ces définitions pourront être étendues grâce au cercle unité que nous verrons un peu plus tard.

Dans un premier temps, à partir d'un triangle, nous n'utiliserons comme mesure d'angle que les degrés. Ce n'est qu'avec le cercle unité que nous utiliserons les radians.

Les présentations faites, le chantier peut à présent commencer. 😊

Définition de cos, sin et tan

Considérons un triangle ABC rectangle en B . Notons a , b et c respectivement les longueurs BC , AC et AB . Notons également α , β et γ respectivement les angles rouge, bleu (cyan) et vert, c'est-à-dire associés respectivement aux sommets A , B et C . On précisera ici que $\beta = 90^\circ$ puisque l'on a supposé le triangle rectangle en B . Voici un schéma de la situation :



Bien sûr, on aurait pu utiliser un triangle rectangle en A ou en C , mais quitte à changer de lettres, ça revient au même.

Nous allons utiliser quelques notions relatives à un triangle rectangle et utiles pour la suite :

- côté adjacent à un angle $\hat{A} \neq 90^\circ$: c'est le côté en commun avec \hat{A} et l'angle droit du triangle ;
- côté opposé à un angle $\hat{A} \neq 90^\circ$: c'est le côté qui est inutile pour former l'angle \hat{A} ;
- hypoténuse : c'est le côté opposé à l'angle droit.

Regardons ce qui se passe dans notre cas. Par exemple avec l'angle α , le côté qui lui est adjacent c'est $[AB]$. Le côté qui lui est opposé c'est $[BC]$. L'hypoténuse c'est le côté opposé à β : c'est donc $[AC]$.

Avant de passer à la suite, je tiens à faire une précision : le mot "hypoténuse" ne prend qu'un seul "h" en début de mot. 😊

Bon nous entrons enfin dans le vif du sujet. 🤔

Les définitions qui sont données par la suite se réfèrent au triangle rectangle montré plus haut et sont appliquées au cas de l'angle α .

Définitions

- Le cosinus d'un angle α , noté $\cos(\alpha)$, est égal au rapport (de la longueur) du côté adjacent sur (la longueur de) l'hypoténuse.
- Le sinus d'un angle α , noté $\sin(\alpha)$, est égal au rapport du côté opposé sur l'hypoténuse.
- La tangente d'un angle α , notée $\tan(\alpha)$, est égal au rapport du côté opposé sur le côté adjacent.

Autrement dit, cela nous donne dans le cas du triangle montré plus haut :

$$\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$$

On peut remarquer ici que : $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$



Mais comment je vais faire pour retenir tout ça ?

Pas d'affolement, c'est au début un peu déroutant toutes ces notations mais ça se retient bien. D'une part, il faut associer les formules à un schéma comme présenté plus haut.



L'erreur consiste souvent à ne retenir que les formules ce qui devient impossible à gérer à la fin. L'apprentissage par cœur est nécessaire, mais il faut savoir l'utiliser à bon escient. En mathématiques (comme en physique), il est important de savoir retrouver des résultats par un raisonnement à partir de quelques formules connues. 😊

Moyen mnémotechnique

Ici, il y a un moyen mnémotechnique (c'est un moyen comme un autre, après c'est à vous de choisir le vôtre) qui est très utile : SOHCAHTOA.

Hein ? C'est quoi ça ? 🤔

C'est un terme facile à retenir qui permet de retrouver les formules. Pour cela, il faut quand même savoir ce que sont l'hypoténuse et les côtés opposé et adjacent à un angle. Décomposons ce terme en 3 parties : SOH-CAH-TOA, qui décrivent les trois formules de \cos , \sin et \tan , où A, C, H, O, S, T sont les initiales de "adjacent", "cosinus", "hypoténuse", "opposé", "sinus" et "tangente".

- SOH : Sinus = Opposé sur Hypoténuse ;
- CAH : Cosinus = Adjacent sur Hypoténuse ;
- TOA : Tangente = Opposé sur Adjacent.

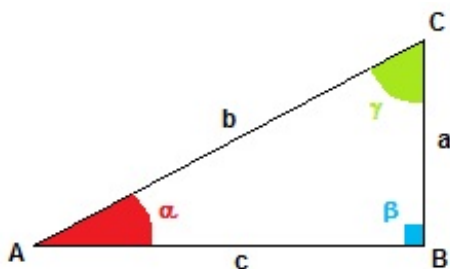
Autre version (pas très sympa, mais bon 😊) : CAHSOHTOA.

Valeurs remarquables

Nous allons ici découvrir plus précisément les fonctions trigonométriques ou plutôt quelques valeurs remarquables pour les angles suivants : 30° , 45° et 60° .

Dans la suite, je vous propose une démonstration pour obtenir ces valeurs remarquables, résumées dans un tableau à la fin.

Reprenons notre triangle. Le voici :



Supposons que $\alpha = 30^\circ$. On a donc que $\gamma = 60^\circ$. Pourquoi ?

Pour ceux qui auraient oublié ou ne sauraient pas :

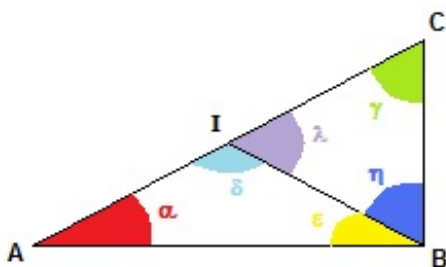


La somme des angles d'un triangle vaut 180° .

C'est donc logiquement que $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ c'est-à-dire $30 + 90 + \gamma = 180$ donc $\gamma = 60^\circ$. Et voilà. 😊

À présent, on veut calculer $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$. Pour cela, il faut connaître les longueurs AB , AC et BC .

À partir du triangle ABC , on va placer un point I qui sera le milieu de $[AC]$.



On obtient ce schéma :

Montrons que IBC est équilatéral.

On a déjà $\gamma = 60^\circ$. Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur et se coupent en leur milieu. ABC constitue ici la partie inférieure droite d'un rectangle dont le milieu des diagonales est I car $[AC]$ est une diagonale de ce rectangle. $[IB]$ et $[IC]$ sont donc des demi-diagonales de même longueur. IBC est donc isocèle en I . On en déduit que $\gamma = \eta = 60^\circ$ et donc $\lambda = 180 - \gamma - \eta = 180 - 60 - 60 = 60$.

Donc IBC est équilatéral. 😊

Ensuite, on en déduit que $BC = IC = \frac{1}{2}AC$.

Il reste à présent à trouver la longueur AB en fonction des autres. Et depuis le temps que je vous parle de triangle rectangle, il fallait bien qu'il intervienne à un moment ou un autre.

Voici le fameux théorème de Pythagore appliqué à notre triangle :

Théorème de Pythagore

Dans un triangle ABC rectangle en B , $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Donc $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$ et comme $BC = \frac{1}{2}AC$ alors $AB = \sqrt{AC^2 - \frac{1}{4}AC^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$

$$\text{Ainsi : } \cos(30^\circ) = \cos(\alpha) = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(30^\circ) = \sin(\alpha) = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$$

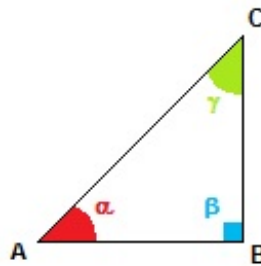
$$\tan(30^\circ) = \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos(60^\circ) = \cos(\gamma) = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(60^\circ) = \sin(\gamma) = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(60^\circ) = \tan(\gamma) = \frac{\sin(\gamma)}{\cos(\gamma)} = \sqrt{3}$$

Il reste à présent à regarder le cas de l'angle α (et donc γ) à 45° . On obtient un triangle rectangle isocèle en B .



Comme le triangle est isocèle, $AB = BC$ donc par le théorème de Pythagore, on a : $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2}AB$

$$\text{Donc } \cos(45^\circ) = \cos(\alpha) = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(45^\circ) = \sin(\alpha) = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(45^\circ) = \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 1$$

En résumé, voici les valeurs remarquables que l'on peut retenir :

Valeurs remarquables

α	30°	45°	60°
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Nous verrons pour le niveau 1^{ère} S, dans le prochain chapitre, une façon plus pratique que du "par cœur" pour retenir ces valeurs.

L'essentiel à retenir de ce chapitre ce sont les définitions données dans la deuxième partie.

Il est l'heure de mettre en pratique ce que vous avez retenu jusqu'alors. 😊 Attention aux pièges. 😈 Ce QCM est là pour vérifier que vous avez compris et retenu l'essentiel.

Vous venez de terminer ce chapitre introductif sur la trigonométrie avec les triangles rectangles. L'essentiel à retenir de ce chapitre, ce sont les définitions avec le schéma correspondant.

Comme vous le verrez par la suite, à part quelques formules de base à retenir, l'essentiel c'est de savoir retrouver les formules. 😊

Le prochain chapitre est basé sur l'utilisation du cercle unité pour obtenir nos fonctions trigo et vous verrez notamment une façon bien plus pratique de retrouver les valeurs remarquables citées dans ce chapitre. 😊

Avec le cercle unité

Nous allons voir dans ce chapitre la "vraie" base de la trigonométrie : celle basée sur le cercle unité. Elle va permettre de définir plus précisément **cos**, **sin** et **tan** comme des fonctions, c'est-à-dire avec leur domaine de définition, dérivées et autres propriétés. À cela s'ajoute une nouvelle (ou pas 🤪) mesure d'angle qu'est le radian.



Prérequis : les vecteurs.

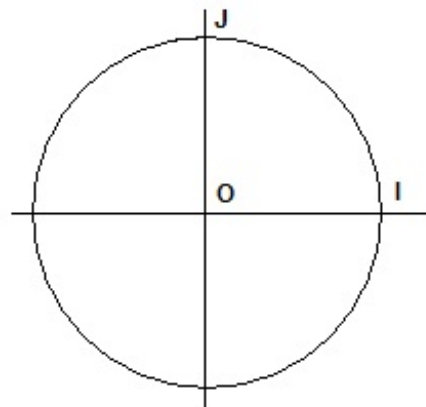
Le cercle unité et le radian

Le cercle unité, c'est la base de la trigonométrie. Dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , le cercle unité c'est le cercle de centre O et de rayon 1 .

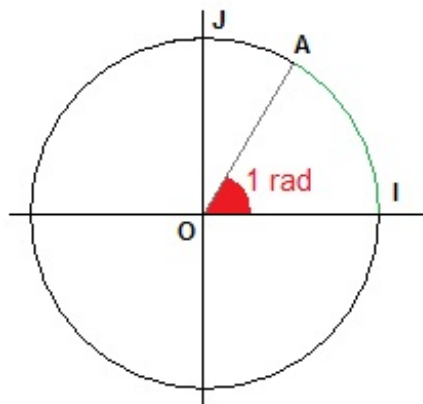
J'ai deux remarques à faire ici :

- \vec{i} et \vec{j} sont des vecteurs orthogonaux car on a parlé de repère orthogonal ;
- dans la suite, nous prendrons un repère orthonormal c'est-à-dire \vec{i} et \vec{j} auront la même norme (même longueur égale à 1).

Notons alors I le point tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et J le point tel que $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$. Ainsi $OI = OJ = 1$. Nous avons alors cette configuration :



En trigonométrie, on utilise une autre mesure d'angle que le degré : le radian, dont l'unité est notée "rad". Un angle mesure 1 radian lorsqu'il intercepte un arc de longueur 1 , sur le cercle unité.



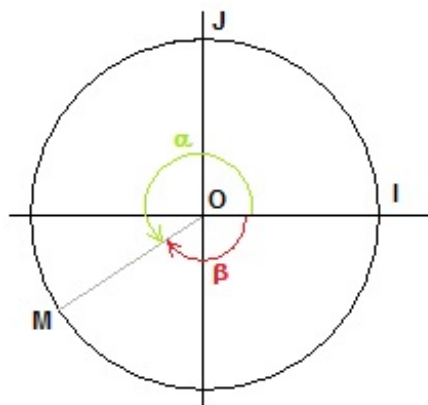
L'arc \widehat{AI} (en vert) a une longueur égale à 1 . Le rayon du cercle unité vaut $OI = 1$.

Comme la circonférence du cercle unité mesure $2\pi * OI = 2\pi$, l'arc qui intercepte le cercle entier a pour mesure 2π rad.

Pour la conversion degrés/radians, on pourra donc retenir : $360^\circ = 2\pi$ rad.

Pour plus d'informations, allez voir l'article [radian](#) sur Wikipédia.

Attention, car la mesure d'angle en radian dépend du sens pris contrairement au degré. Voici un schéma pour vous éclaircir les idées :



Avant d'expliquer ce schéma, je vais ajouter la notion de "sens trigonométrique" ou "sens direct" qui est l'inverse du sens des aiguilles d'une montre. Le sens des aiguilles d'une montre est donc appelé "sens anti-trigonométrique" ou "sens indirect".

Ceci dit, une petite interprétation du schéma s'impose. 😊

α et β sont mesurés en radian d'où l'apparition de flèches indiquant un sens de mesure. α est mesuré dans le sens direct, alors il est positif. En l'occurrence, il fait plus que π rad car un demi-tour de cercle fait π rad.

β , quant à lui, est mesuré dans le sens indirect et est alors négatif. On peut même dire qu'il est inférieur à $-\frac{\pi}{2}$. Dorénavant, je n'écrirai plus "rad" car, sauf exceptions, j'utiliserai toujours dans la suite des radians.

Notation d'un angle orienté

Je vais à présent vous parler de la notation d'un angle orienté grâce aux points du plan que l'on connaît.

Dans le schéma précédent, α c'est l'angle formé par les vecteurs \vec{OI} et \vec{OM} , ce qui se note : $(\vec{OI}; \vec{OM})$.

Vous aurez peut-être remarqué aussi que β c'est l'angle formé par \vec{OI} et \vec{OM} .

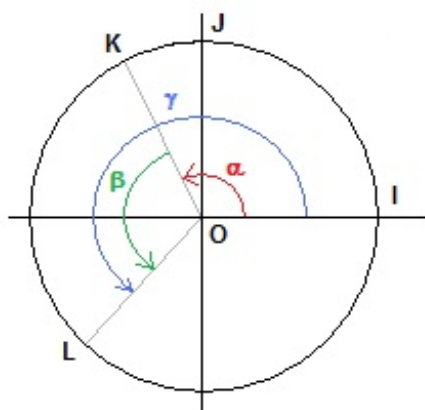
La confusion, vient du fait que un angle orienté avec la notation $(\vec{u}; \vec{v})$ aura une valeur comprise dans $] -\pi; \pi]$. C'est le cas de β uniquement.

On doit donc écrire : $\beta = (\vec{OI}; \vec{OM})$ et $\alpha = (\vec{OI}; \vec{OM}) + 2\pi$.

On dit que β est la **mesure principale** de α . J'en reparle plus loin dans ce chapitre.

Nous avons vu précédemment qu'avec les angles orientés, on a le sens direct et le sens indirect. Avec la notation ici, on constate cette différence de sens par la formule : $(\vec{u}; \vec{v}) = -(\vec{v}; \vec{u})$.

Addition d'angles



Ce schéma illustre l'égalité suivante : $\alpha + \beta = \gamma$.

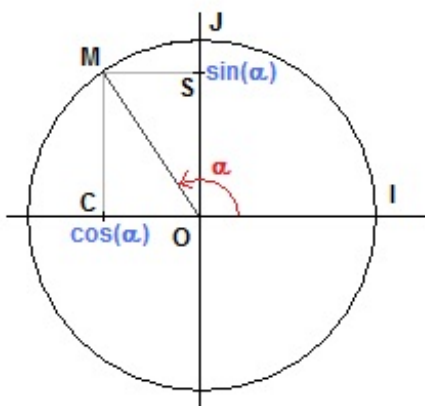
Avec la notation précédente, on obtient : $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OK}) + (\overrightarrow{OK}; \overrightarrow{OL}) = (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OL})$ à 2π près.

Pour avoir l'égalité, il faut ajouter 2π à $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OL})$.

On peut y voir une analogie avec la relation de Chasles pour les vecteurs : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Définitions avec le cercle unité

Les définitions que nous allons voir ici sont, en quelque sorte, une extension des définitions vues dans le chapitre précédent. Comme souvent, un schéma est plus parlant qu'un long discours incompréhensible.



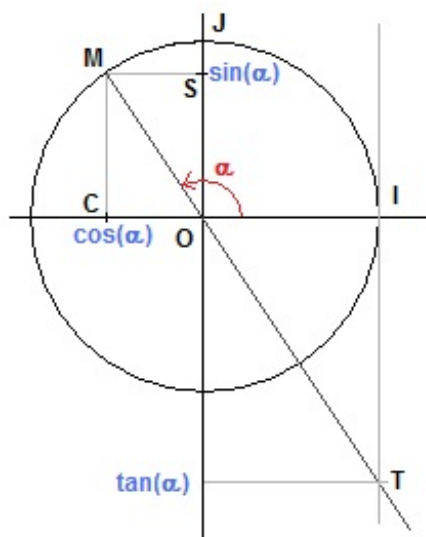
Tout d'abord, on se place dans le repère $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$.

M c'est le point sur le cercle unité tel que $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}) = \alpha$. A partir de là, C est le projeté orthogonal de M sur la droite (OI) . Quoi ? 🤔

En gros, C est le point d'intersection de (OI) et de la droite perpendiculaire à (OI) passant par M . $\cos(\alpha)$ est défini comme étant l'abscisse de ce point. De même S est le projeté orthogonal de M sur (OJ) . $\sin(\alpha)$ est défini comme étant l'ordonnée de ce point.

Et $\tan(\alpha)$ est définie de la façon suivante : $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ mais ça nous le savions déjà.

Notez qu'il y a une façon d'obtenir graphiquement $\tan(\alpha)$:



On a placé le point T à l'intersection de la perpendiculaire à (OI) passant par I (c'est la tangente au cercle en I) et (OM) .

Avec les triangles MCO et TOI et en leur appliquant le théorème Thalès (ou bien en utilisant l'homothétie de rapport $\frac{OI}{OC} = \frac{1}{\cos(\alpha)}$ et de centre O), on obtient : $\frac{TI}{MC} = \frac{OI}{OC}$ donc $TI = MC \frac{OI}{OC} = \sin(\alpha) \frac{1}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$.

T a donc pour ordonnée $\tan(\alpha)$.

Valeurs remarquables, le retour

Maintenant que vous avez une définition plus élargie de **cos**, **sin** et **tan**, vous allez pouvoir retenir plus facilement les valeurs remarquables vues dans le chapitre précédent et on va même en ajouter. 😊 Pas de craintes, ça devrait aller, si vous suivez normalement le cours. Cela nécessite tout de même d'avoir bien compris ce qui précède.

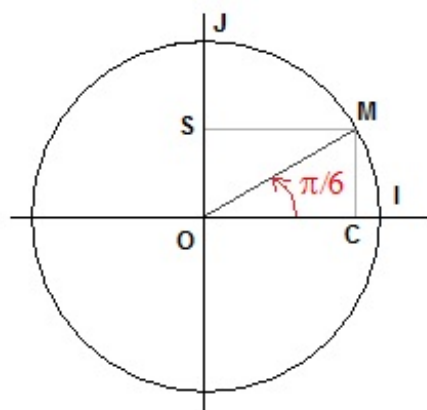
Avant de passer à la suite, voici un tableau de correspondance degrés/radians qui peut vous être utile dans un premier temps pour comprendre :

Angle (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Angle (en degrés)	0	30	45	60	90	120	135	150	180

Nous allons parcourir le cercle de $\alpha = 0$ à $\alpha = \pi$ dans un premier temps.

Commençons par $\alpha = 0$. Que se passe-t-il ? M est alors confondu avec I . Et comme M a pour coordonnées $(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$ c'est-à-dire $(\cos(0); \sin(0))$ et que I a pour coordonnées $(1, 0)$ alors $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$. Les valeurs seront résumées plus bas dans un tableau.

Ensuite, pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$, nous avons le schéma suivant :



Regardez le triangle **MCO** : on a déjà traité un cas similaire dans le premier chapitre avec un triangle rectangle et notamment un angle de 30° (regardez le tableau précédent si vous êtes perdus dans la conversion des degrés en radians et vice-versa). 😊

Il ne nous reste donc qu'à retrouver les valeurs de **cos** et **sin** (et **tan**) en $\frac{\pi}{6}$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Regardons ce qui se passe sur le schéma : **M** a pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

C'est ici qu'apparaît toute l'utilité du cercle unité : retenez les valeurs $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{1}{2}\right)$ puis pour savoir laquelle est associée au cosinus et l'autre au sinus, il suffit de placer le point **M** pour un angle de $\frac{\pi}{6}$ et de regarder la position de **C** sur le segment $[OI]$ et celle de **S** sur $[OJ]$.

Vous constatez que **C** est plus proche de **I** que de **O** donc son abscisse $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ est plus proche de **1** que de **0** : c'est donc $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vous en déduisez alors que $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ c'est l'autre valeur $\left(\frac{1}{2}\right)$.

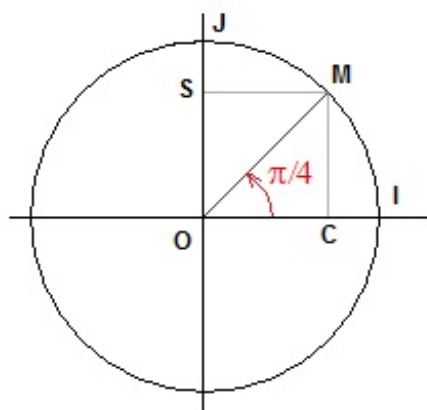
Sinon, on peut partir du point **S** et constater qu'il est au milieu de $[OJ]$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et vous en déduisez la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Mais c'est trop long ta méthode ! 😞

Bon ... déballé comme ça, ça semble peut-être inutile mais avec la pratique vous verrez que cette gymnastique ne vous prendra que quelques secondes. Tracez rapidement le cercle unité sur un coin de brouillon, sans le compas bien sûr, puis placez approximativement le point **M** avec l'angle souhaité et il n'y a plus qu'à associer les valeurs à la bonne fonction (**cos** ou **sin**). D'autre part, vous verrez que vous aurez moins de choses à retenir et ça vous évitera surtout de ne pas vous embrouiller.

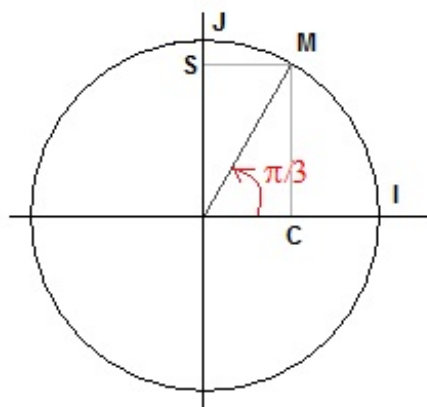
Passons à la suite !

Pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, on a le schéma suivant :



Ici, c'est facile puisque si vous vous rappelez : $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Cela se voit sur le schéma : l'abscisse et l'ordonnée de M sont égales. Il n'y a donc pas de risque de s'embrouiller ici entre **cos** et **sin**. 😊

Pour $\frac{\pi}{3}$, on se retrouve dans une configuration similaire à $\frac{\pi}{6}$:



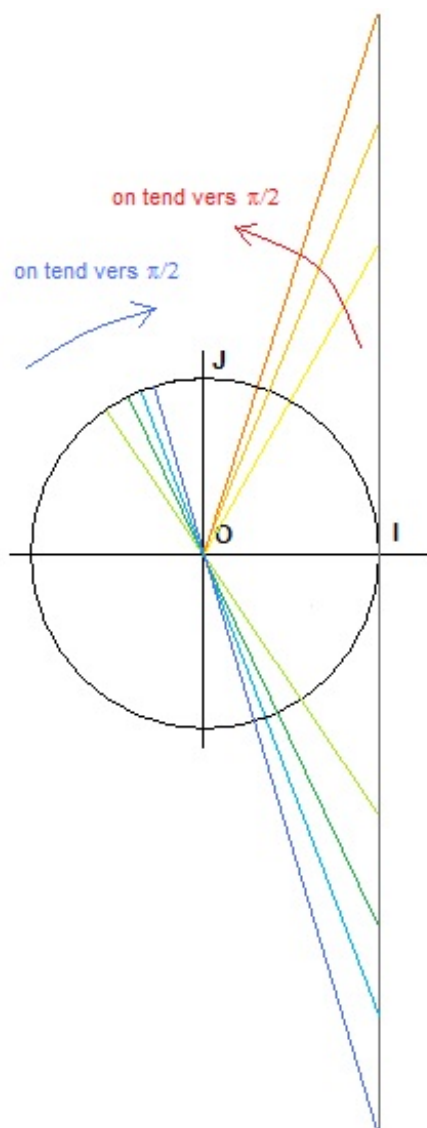
Les valeurs possibles sont $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2}$ (ça il faut le savoir). Cette fois-ci C est le milieu de $[OI]$ donc $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et on en déduit $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour $\frac{\pi}{2}$, le point M est confondu avec J qui a pour coordonnées $(0; 1)$ donc $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

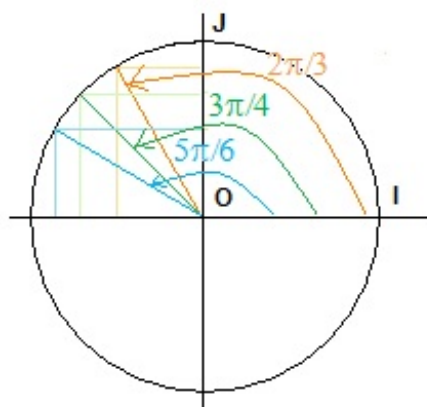


tan n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$ puisque **cos** vaut 0 en cette valeur.

Graphiquement, quand l'angle s'approche de $\frac{\pi}{2}$, sa tangente tend vers $+\infty$ (partie haute de la droite) ou $-\infty$ (partie basse):



Pour les angles $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{6}$, on a le schéma suivant :



On remarque des similarités avec les angles déjà vus. En effet, le point M obtenu pour chacun de ces 3 angles est le symétrique par rapport à l'axe des ordonnées d'un autre point M obtenu avec les angles $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$.

Si l'on note M_1 le point associé à l'angle $\frac{\pi}{6}$ et M_2 celui associé à $\frac{5\pi}{6}$, alors M_2 est le symétrique de M_1 par rapport à (OJ) . Ainsi M_1 et M_2 ont les mêmes ordonnées et des abscisses opposées, c'est-à-dire de signes opposés. On obtient donc :

- pour l'ordonnée : $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$;
- pour l'abscisse : $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

donc : $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

De façon analogue (soyez-en convaincu, cherchez-les par vous-même 😊), on en déduit que :

- $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 1

Et pour finir ce demi-tour de cercle, regardons le cas de l'angle π . Allez, si vous avez compris le principe de fonctionnement ça ne devrait pas vous poser problème.

Quelles sont alors les coordonnées de M ? Déduisez-en $\cos(\pi)$, $\sin(\pi)$ puis $\tan(\pi)$.

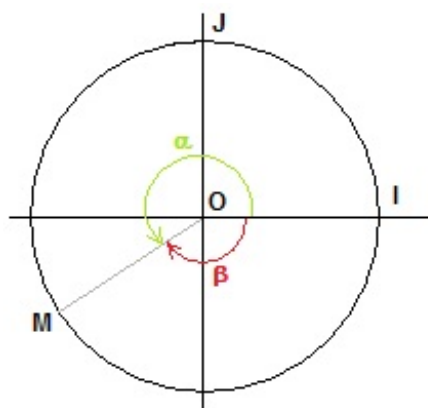
Secret (cliquez pour afficher)

$$M \text{ est placé en } (-1; 0) \text{ donc } \cos(\pi) = -1 \text{ et } \sin(\pi) = 0 \text{ d'où } \tan(\pi) = \frac{\sin(\pi)}{\cos(\pi)} = 0$$

Nous n'avons fait qu'un demi-tour de cercle. Comme vous vous en doutez (ou pas), il va encore y avoir des histoires de symétries pour M parcourant la partie inférieure du cercle. Pour ne pas paraître rébarbatif — quoique vous avez peut-être déjà cette impression 😊 —, vous allez faire un exercice guidé avec un angle de $\alpha = \frac{7\pi}{6}$.

Exercice 2

Voici le schéma correspondant :



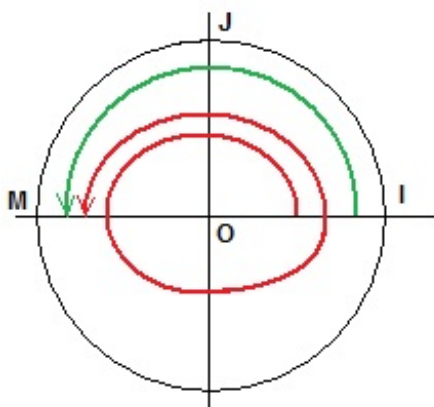
Tiens, tiens c'est quoi le β déjà ?

β c'est un angle mesuré dans le sens indirect. Il est donc négatif. Ce que vous remarquez ici c'est que α et β donnent le même point final M .



Voici donc une propriété essentielle des fonctions trigonométriques : elles sont 2π -périodiques (on dit aussi qu'elles sont périodiques de période 2π). Cela veut dire que pour tout réel x , $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$, $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$ et par conséquent $\tan(x) = \tan(x + 2\pi)$.

À titre d'exemple, on aura : $\cos(3\pi) = \cos(\pi + 2\pi) = \cos(\pi) = -1$, ce qui se transcrit sur le cercle unité du schéma ci-dessous par : Le point M obtenu en faisant un tour et demi du cercle (dans le sens direct, en rouge) a la même abscisse que celui obtenu en faisant un demi-tour du cercle (dans le sens direct, en vert) et pour cause : on retombe sur le même point en ajoutant un tour de cercle, soit 2π . 🤔



Revenons à nos moutons : pourquoi tombe-t-on sur le même point en passant par l'angle α ou β ? Pour faire un tour de cercle, on peut utiliser un angle de 2π . Utilisons alors l'addition d'angles (on l'a vue précédemment). Pour aller de I à M dans le sens direct, il y a un angle α et pour aller de M à I dans le sens direct, on va prendre $-\beta$ car β permet d'aller de I à M dans le sens indirect. Donc $\alpha - \beta = 2\pi$. C'est donc logiquement que $\alpha = \beta + 2\pi$ d'où le même point M à la fin.

À présent, on peut réellement commencer l'exercice. En utilisant le même principe de déduction qu'à l'exercice 1, que vaut $\tan(\frac{7\pi}{6})$ (qui est égale à $\tan(\frac{-5\pi}{6})$ par ailleurs) ?

Indication :

Secret (cliquez pour afficher)

Utilisez la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Solution :

Secret (cliquez pour afficher)

On utilise le point $M(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ obtenu avec un angle de $\frac{5\pi}{6}$ puis on applique la symétrie par rapport à l'axe des abscisses et on trouve notre point $M'(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ donc $\tan(\frac{5\pi}{6}) = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Si l'on place le point T , intersection de (OM) et de la perpendiculaire à (OI) passant par I , on verra effectivement que l'ordonnée de T (qui vaut $\tan(\frac{5\pi}{6})$) est positive et inférieure à 1.

Je ne m'attarderai pas sur les autres valeurs ($-\frac{\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}$, etc.), vous pouvez à présent les retrouver en connaissant le schéma du cercle unité, puis les valeurs de bases (celles associées aux cosinus et sinus des angles $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$).

Dans la suite, vous avez un récapitulatif des valeurs que l'on obtient pour des mesures principales d'angles.

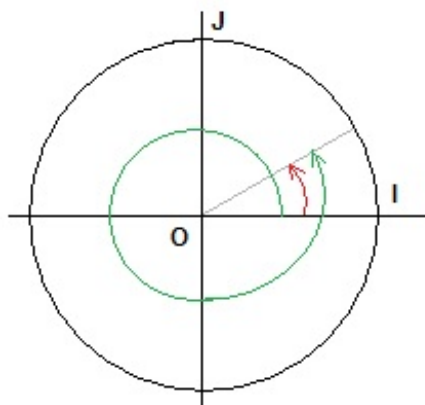


Mesure principale d'angle, c'est quoi ça ? 🤔

Comme je vous l'ai dit rapidement, que l'on fasse **1** tour, **4** tours ou **-3** tours de cercle en plus, on retombe sur nos pattes : les fonctions trigonométriques sont inchangées. On choisit donc, par convention, de définir la mesure principale d'un angle comme étant sa valeur, à un nombre relatif de tours de cercle près, dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Toujours pas compris ? Voici des exemples qui devraient vous aider :

$\frac{13\pi}{6} = 1 * 2\pi + \frac{\pi}{6}$. Donc la mesure principale de $\frac{13\pi}{6}$ c'est $\frac{\pi}{6}$. On est à **2** tours près, c'est-à-dire à un tour de cercle près. Voici un schéma de la situation ($\frac{13\pi}{6}$ en vert et $\frac{\pi}{6}$ en rouge) :



Autre exemple : $-\frac{13\pi}{4} = -2 * 2\pi + \frac{3\pi}{4}$ donc la mesure principale de $-\frac{13\pi}{4}$ c'est $\frac{3\pi}{4}$.

J'ai compris mais moi j'y arriverai jamais ! 😞

Pas de souci, je vous propose une méthode pour trouver la mesure principale d'un angle.

Exemple 1 : $\frac{45\pi}{7}$.

La première étape revient à écrire la fraction devant π ($\frac{45}{7}$ ici) comme somme d'un multiple de **2** et d'une fraction appartenant à l'intervalle $]-1; 1]$. On fait "tout simplement" une division euclidienne.



La division euclidienne de **a** par un entier naturel **b** s'écrit : **a** = **b** * **q** + **r** où **q** est le quotient, il est entier et **r** est le reste, il vérifie $0 \leq r < b$.

Par exemple, la division euclidienne de **14** par **5** s'écrit : **14** = **5** * **2** + **4** **2** est le quotient et **4** est le reste. On a bien $0 \leq 4 < 5$

Ici on effectue la division euclidienne de **45** par **7** : **45** = **42** + **3** = **6** * **7** + **3** donc $\frac{45}{7} = 6 + \frac{3}{7}$. Par chance ici **6** est multiple de **2** donc $\frac{3\pi}{7}$ est la mesure principale de l'angle recherché.

Exemple 2 : $\frac{39\pi}{5}$.

On effectue la division euclidienne de **39** par **5** : $39 = 35 + 4 = 7 * 5 + 4$ donc $\frac{39}{5} = 7 + \frac{4}{5}$. Ensuite deux solutions s'offrent à nous (qui consistent à ajouter **+1** et **-1** aux bons endroits).

1^{er} cas : $\frac{39}{5} = 7 + \frac{4}{5} = (7 - 1) + (\frac{4}{5} + 1) = 6 + \frac{9}{5}$. Ce premier cas ne mène à rien car $\frac{9}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $] -1; 1]$.

2^e cas : $\frac{39}{5} = 7 + \frac{4}{5} = (7 + 1) + (\frac{4}{5} - 1) = 8 + \frac{-3}{5}$. Cette fois-ci c'est bon car **8** est multiple de **2** et $-1 < \frac{-3}{5} \leq 1$.

Donc $\frac{-3\pi}{5}$ est la mesure principale recherchée.

Exemple 3 : $\frac{-13\pi}{3}$.

$-13 = 3 * (-5) + 2$ donc $\frac{-13}{3} = -5 + \frac{2}{3} = (-5 - 1) + (\frac{2}{3} + 1) = -6 + \frac{5}{3}$. La fraction $\frac{5}{3}$ n'est pas dans l'intervalle $] -1; 1]$.

$\frac{-13}{3} = (-5 + 1) + (\frac{2}{3} - 1) = -4 - \frac{1}{3}$. -4 est multiple de **2** et $\frac{-1}{3}$ est dans l'intervalle $] -1; 1]$ donc : $\frac{-\pi}{3}$ est la mesure principale de $\frac{-13\pi}{3}$.



On dit que **a** est égal à **b** modulo **2π** ou plus exactement que **a** est **congru** à **b** modulo **2π** si $a = b + k * 2\pi$ (**k** étant un relatif), c'est-à-dire si **b** auquel on ajoute un multiple de **2π** est égal à **a**. Cela se note $a \equiv b[2\pi]$. Dans la suite, je noterai plutôt $a = b[2\pi]$.

Si l'on revient à l'exemple 3 précédent, on a : $\frac{-13\pi}{3} = \frac{-\pi}{3}[2\pi]$.

En l'occurrence, un angle et sa mesure principale sont égaux modulo **2π**.

Résumé

Voici donc un tableau récapitulatif des mesures principales. Ne retenez que l'essentiel : les valeurs associées aux cosinus et sinus des angles $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$. Sachez néanmoins retrouver rapidement les autres valeurs (donnez l'impression que vous les connaissez par cœur 😊).

α	$\frac{-5\pi}{6}$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(\alpha)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(\alpha)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Je vous rajoute le tableau dans une version plus mnémotechnique (proposé par Nicolas M.) :

Secret (cliquez pour afficher)

α	$-\frac{10\pi}{12}$	$-\frac{9\pi}{12}$	$-\frac{8\pi}{12}$	$-\frac{6\pi}{12}$	$-\frac{4\pi}{12}$	$-\frac{3\pi}{12}$	$-\frac{2\pi}{12}$	$\frac{0\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{12}$	$\frac{6\pi}{12}$	$\frac{8\pi}{12}$	$\frac{9\pi}{12}$	$\frac{10\pi}{12}$	$\frac{12\pi}{12}$
$\cos(\alpha)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$-\frac{\sqrt{1}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\sin(\alpha)$	$-\frac{\sqrt{1}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{4}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\tan(\alpha)$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{3}{3}}$	$\sqrt{\frac{9}{3}}$	X	$-\sqrt{\frac{9}{3}}$	$-\sqrt{\frac{3}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{0}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{3}{3}}$	$\sqrt{\frac{9}{3}}$	X	$-\sqrt{\frac{9}{3}}$	$-\sqrt{\frac{3}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{0}{3}}$

Voilà qui clôt ce 2^e chapitre, certes fastidieux mais essentiel pour la suite. 😊

Pour finir, un petit QCM pour apprendre à manier le cercle trigo. L'idéal étant bien sûr de répondre sans regarder le cours. Allez, tous à vos crayons !

Voilà pour ce chapitre qui fixe les bases de la trigonométrie pour le niveau 1^{ère}. J'espère que vous tenez encore le coup. 😊 Vous devez avoir compris ce cours et retenu ce qu'il a à retenir pour aborder la suite. 😊

Le prochain chapitre va être en quelque sorte un formulaire dont il faudra connaître ou savoir retrouver les formules.

Formules trigonométriques (1/2)

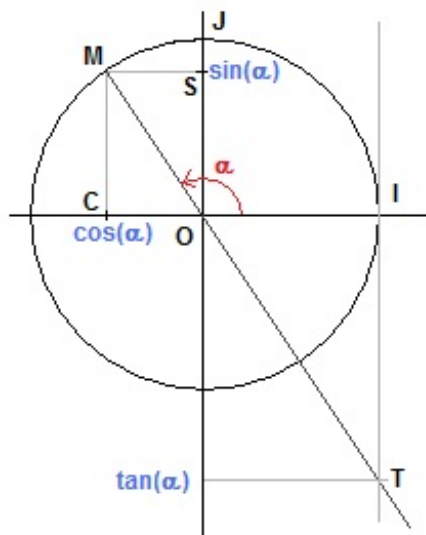
Bon, vous suivez toujours ? C'est une bonne chose. Si vous avez tenu jusqu'ici, ce chapitre, bien que long, ne devrait pas trop vous poser de problèmes. Il faut avoir acquis les bases du chapitre précédent pour ne pas être perdu. Si c'est votre cas (ben oui 😊) il suffira en gros d'utiliser ces bases pour en déduire les formules que vous verrez ici.

Continuons sur de bonnes bases

Résumé

Pour commencer dans de bonnes conditions, je vais vous résumer ce que nous avons vu d'essentiel jusqu'ici. Néanmoins, je ne reviendrai pas sur les définitions avec le triangle rectangle qui sont un peu à part et qui ne serviront pas dans la suite.

Revenons sur la définition de **sin**, **cos** et **tan** avec ce dessin :



Si des détails sur ce dessin vous échappent, je vous suggère de relire le chapitre précédent en partie ou en totalité (ça c'est à vous de voir 😊)

Notez la relation : $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Je vous rappelle que **cos**, **sin** et **tan** sont 2π -périodiques :

- pour tout réel x , pour tout relatif k , $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$
- pour tout réel x , pour tout relatif k , $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$
- pour tout réel x , pour tout relatif k , $\tan(x + 2k\pi) = \tan(x)$



Notez que "pour tout réel x " se note aussi " $\forall x \in \mathbb{R}$ ". De même "pour tout relatif k " se note " $\forall k \in \mathbb{Z}$ ". En fait " \forall " signifie "quel que soit" ou "pour tout", et le reste vous connaissez. Pour ne pas vous encombrer l'esprit je ne le noterai cependant pas ainsi dans la suite.

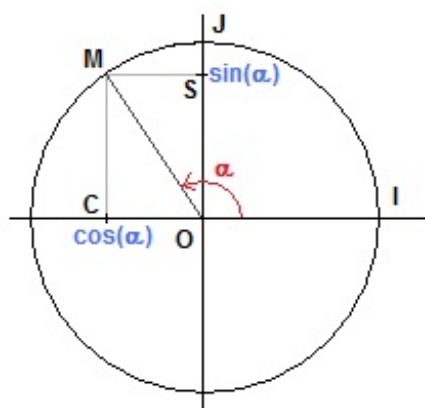
Je vous rappelle au passage que, par définition, pour tout relatif k , $x + 2k\pi = x[2\pi]$ (revoyez-le dans le chapitre précédent si ce n'est pas clair 😊).

Et enfin voici le tableau des valeurs remarquables dont seulement quelques-unes sont à connaître, les autres se déduisant par symétries grâce au cercle unité. À moins que vous ayez une mémoire d'éléphant et infailible 😊, ne retenez pas tout le tableau mais sachez le retrouver.

α	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(\alpha)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(\alpha)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Une formule à retenir

Avant de passer à la suite, nous allons voir une formule essentielle en trigo.
Reprenons notre ami le cercle unité :



Prenez le triangle MOC . On sait que $MO = 1$, $CO = |\cos(\alpha)|$ et $MC = |\sin(\alpha)|$ (n'oubliez pas les valeurs absolues car il s'agit de longueurs).

Appliquons-y le théorème de Pythagore : $CO^2 + MC^2 = MO^2$ donc $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$. Notez que l'on écrit aussi $\cos^2(\alpha)$ à la place de $\cos(\alpha)^2$, de même $\sin^2(\alpha)$ peut remplacer $\sin(\alpha)^2$.

Vous obtenez ainsi une des (si ce n'est LA) formules fondamentales en trigo : pour tout réel x , $\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1}$

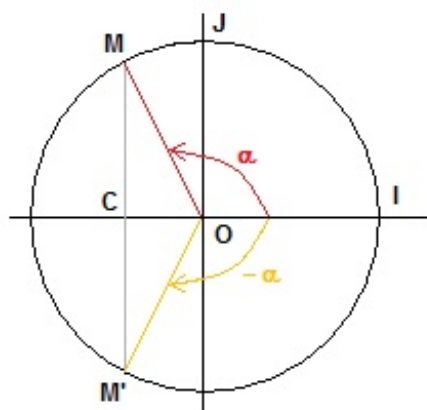
Prêts pour la suite ? Attention, vous allez être mitraillés de formules 🤖, mais si vous suivez le cours, il n'y a pas de soucis à se faire. En effet, je ne vous demanderai pas de tout retenir, après si vous voulez le faire, allez-y mais je ne rembourserai pas les dégâts causés. 😊

Histoires de symétries

Parlons maintenant des formules liées à des symétries.

Parité du cosinus

Commençons par le cas du cosinus et observez ce schéma :



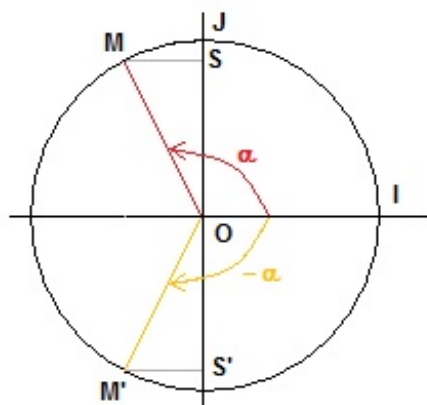
On a représenté deux angles opposés (de même valeur absolue et de signes différents). M et M' sont respectivement associés à α et $-\alpha$ et vous pouvez constater que le point C est à la fois la projection de M sur (OI) et de M' sur (OI) . Cela veut donc dire que : $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$. Cela est valable pour tout réel α . Je vous laisse faire la démonstration tous seuls comme des grand(e)s. 🤔 Pour ceux qui bloqueraient : définissez un point C' projection de M' sur (OI) et montrez que C' c'est C .

Pour résumer, on a la relation : pour tout réel x , $\boxed{\cos(x) = \cos(-x)}$

On dit que **cos** est une fonction **paire** : une fonction f est paire si pour tout réel x , $f(-x) = f(x)$. Vous aurez peut-être remarqué qu'il s'agit en fait d'une symétrie par rapport à l'axe des abscisses (OI) .

Imparité du sinus

Reprenons le même cas que précédemment. Que se passe-t-il quant au sinus ? Voyez ce schéma :



S est le projeté (orthogonal) de M sur (OJ) .
 S' est le projeté (orthogonal) de M' sur (OJ) .

Vous voyez (si vous n'en êtes pas convaincu, démontrez-le. 🤔) que S et S' ont des ordonnées opposées et leurs ordonnées c'est $\sin(\alpha)$ et $\sin(-\alpha)$. Donc $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$, ceci étant valable pour tout réel α .

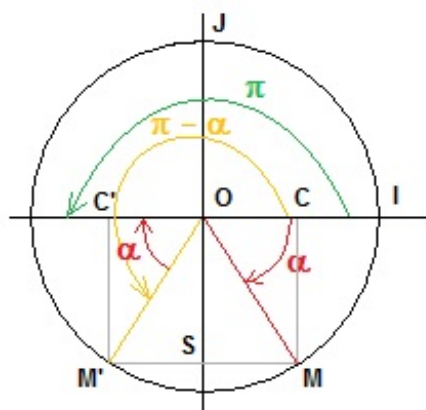
Retenez donc que : pour tout réel x , $\boxed{\sin(-x) = -\sin(x)}$.

On dit que **sin** est une fonction **impaire** : une fonction f est impaire si pour tout réel x , $f(-x) = -f(x)$.

Autre symétrie : par rapport à l'axe des ordonnées

Deux points M et M' seront symétriques par rapport à l'axe des ordonnées si les angles correspondant ont une somme égale à π modulo 2π .

Comme d'habitude, un petit schéma pour illustrer mes propos :



Les angles qui nous intéressent sont α (en rouge) et $\pi - \alpha$ (en orange). Je ne vous ferai pas l'offense de vous demander ce que fait la somme. Bref, les points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Observez (et vérifiez si vous êtes sceptiques), on obtient le même point S et des points C et C' d'abscisses opposées.

Conclusion : $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ et $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$, ceci étant valable pour tout angle α .

On retiendra donc : pour tout réel x , $\boxed{\sin(\pi - x) = \sin(x)}$ et $\boxed{\cos(\pi - x) = -\cos(x)}$.

Et encore des symétries ...

Tout d'abord avant de vous présenter graphiquement ces autres symétries reprenons la partie de tableau à connaître. La voici :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Vous avez dû remarquer ces valeurs récurrentes et peut-être une symétrie (qui à proprement parler n'en est pas une) par rapport à une certaine valeur ...

Revenons-en au tableau et réécrivons son contenu d'une autre façon :

$$\cos(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \iff \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \iff \cos\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 0\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \iff \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(0) \iff \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Vous aurez donc compris que : pour tout réel x , $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

Encore une fois, si vous n'êtes pas complètement convaincu, vérifiez-le graphiquement. À partir de maintenant je ne vous le dirai plus et à vous de faire comme bon vous semble : vérifier ou pas, c'est juste une question de géométrie, pas bien compliquée (un coup d'œil au cercle unité et vous en êtes convaincu, moi c'est ce que je fais. 😊).

Pour en revenir à la formule, je vous propose plutôt la forme suivante, plus visuelle graphiquement :

pour tout réel x , $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.

Exercice

L'exercice que je vous propose ici est un complément au cours : démontrez les formules suivantes (attention, cette fois je vous demande de vérifier par le calcul) :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x).$$

La réponse à cet exercice tient sur 2 lignes et on peut même la caser sur une ligne. À vous.

Une solution :

Secret (cliquez pour afficher)

Posons $y = -x$. On a alors : $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin(y) = \sin(-x) = -\sin(x)$.

De façon analogue, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos(y) = \cos(-x) = \cos(x)$

Autres formules

Vous tenez encore le coup ? Bravo. 😊

Nous avons vu déjà pas mal de formules, que je vous conseille de revoir si vous ne les connaissez pas encore, ou si vous ne savez pas les retrouver avec le cercle unité. Elles vont resservir ici.

Dans cette partie, nous allons voir les formules :

- de soustraction et d'addition,
- de duplication ;
- de transformation produit \rightarrow somme ;
- de transformation somme \rightarrow produit ;
- puis des formules utilisant la fonction **tan**.

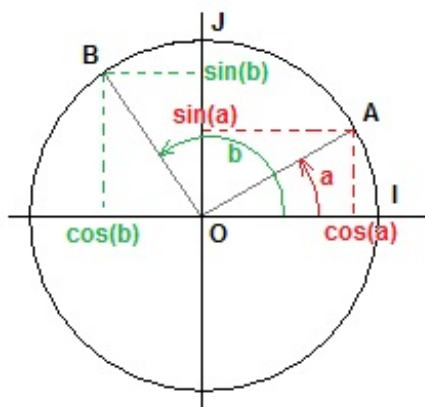
En bref, il va y avoir pas mal de formules, mais si vous retenez la façon de déduire ces formules, tout devrait aller comme sur des roulettes. 😊

L'addition

Nous allons ici commencer par calculer $\cos(a - b)$. Nous allons pour cela utiliser le produit scalaire.

Le produit scalaire de 2 vecteurs \vec{u} et \vec{v} , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est défini de cette façon : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Pour déterminer une expression de $\cos(a - b)$, on va utiliser le schéma suivant :



On se place dans le repère orthonormal (O, \vec{OI}, \vec{OJ}) . Dans ce repère qui est orthonormal, on a la propriété suivante pour le produit scalaire : pour des vecteurs $\vec{u}(x_1; y_1)$ et $\vec{v}(x_2; y_2)$ du plan muni de ce repère, $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

Utilisons tout d'abord la première formule du produit scalaire appliquée aux vecteurs \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \cdot OB \cdot \cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$$

On a : $OA = OB = 1$ et $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB}) = -a + b$

donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(b - a) = \cos(a - b)$ car \cos est paire.

On va à présent utiliser la seconde formule appliquée aux mêmes vecteurs \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} :

On connaît les coordonnées : $O(0; 0)$, $A(\cos(a); \sin(a))$ et $B(\cos(b); \sin(b))$

Ainsi on a : $\overrightarrow{OA}(\cos(a); \sin(a))$ et $\overrightarrow{OB}(\cos(b); \sin(b))$

d'où $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$

Ainsi pour tous réels a et b , $\boxed{\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)}$

La formule pour $\cos(a + b)$ se déduit facilement.

Elle s'écrit pour tous réels a et b , $\boxed{\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)}$

Démonstration :

Secret (cliquez pour afficher)

Posons $c = -b$.

$$\cos(a+b) = \cos(a-c) = \cos(a) \cos(c) + \sin(a) \sin(c) = \cos(a) \cos(-b) + \sin(a) \sin(-b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

. Pour ceux qui ne l'auraient pas vu, j'ai utilisé la parité de \cos et l'imparité de \sin dans la dernière égalité.



Un détail d'ordre rédactionnel (au sens mathématique du terme) : je ne l'ai pas écrit en début de démonstration, mais pour être rigoureux, il faudrait ajouter un "Soit deux réels a et b ". Dernière remarque : on peut utiliser "Soit" ou "Soient", les deux formes sont acceptées.

Pour $\sin(a - b)$, on va utiliser une formule pour passer d'un sinus à un cosinus :

$$\begin{aligned} \sin(a - b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a - b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos(b) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin(b) \\ &= \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b) \end{aligned}$$

En résumé, pour tous réels a et b , $\boxed{\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)}$

De la même façon qu'avec le cosinus précédemment, vous obtenez le résultat voulu pour $\sin(a + b)$ qui est le suivant : pour

tous réels a et b , $\boxed{\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)}$

Moyen mnémotechnique

Pour retenir les 4 formules encadrées, vous pouvez retenir que :

- le sinus est gentil,
- le cosinus est méchant.

(Ou une autre version : le Sinus est Sympathique et le Cosinus est Chiant, 🙄 désolé pour la grossièreté).

Cosinus est méchant, donc il ne veut pas aller voir les sinus, et ne veut pas les laisser passer devant. Par ailleurs, étant méchant, il change les signes. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \\ \cos(a - b) &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \end{aligned}$$

Par contre, le sinus va aller à la rencontre des cosinus, et ne va pas toucher au signe :

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)\end{aligned}$$

Passons à présent à la fonction **tan**.

Soient a et b deux réels tels que $a+b \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$.

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$$

On divise alors le numérateur et le dénominateur par $\cos(a)\cos(b)$ mais pour éviter une division par 0 on doit avoir :

$$\cos(a) \neq 0 \text{ et } \cos(b) \neq 0 \text{ c'est-à-dire } a \neq \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ et } b \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Sous ces conditions, on a alors :

$$\tan(a+b) = \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)} + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1 - \frac{\sin(a)}{\cos(a)} \frac{\sin(b)}{\cos(b)}}$$

D'où le résultat : pour tous réels a et b tels que $a+b \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, $a \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $b \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$:

$$\boxed{\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}}$$

À partir de cette formule déduisez-en $\tan(a-b)$ avec $a-b \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, $a \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $b \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$

Solution :

Secret (cliquez pour afficher)

Sous ces conditions,

$$\tan(a-b) = \tan(a+(-b)) = \frac{\tan(a) + \tan(-b)}{1 - \tan(a)\tan(-b)} = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

Pour ceux qui ne l'aurait pas compris 😊, j'ai utilisé le fait que **tan** est impaire.

Après l'addition, on passe à la multiplication ? Eh bien non, il n'y a pas de formule générique du style $\cos(ab) = \dots$ 😊 Mais avec nos deux formules de base, on peut en faire des choses ! Voyez donc la suite.

La duplication

Du clonage ? En quelque sorte oui, mais il s'agit tout simplement d'une multiplication par 2. Prenons un réel a . Que vaut $\cos(2a)$?

Eh bien, $\cos(2a) = \cos(a+a)$ 😊

Et $\cos(a+a) = \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a)$ donc $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$.

Ensuite sachant que $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, vous pouvez écrire :

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= (1 - \sin^2(a)) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) \text{ et} \\ \cos(2a) &= \cos^2(a) - (1 - \cos^2(a)) = 2\cos^2(a) - 1\end{aligned}$$

Cela vous donne en résumé : pour tout réel a , $\boxed{\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1}$

Et pour $\sin(2a)$? Je vous laisse démontrer que :

pour tout réel a , $\boxed{\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)}$

En réécrivant d'une autre manière ces formules (celles de $\cos(2a)$), on obtient les suivantes :

pour tout réel a , $\boxed{\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}}$ et $\boxed{\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}}$

Transformation de produits en sommes

Continuons à tourner nos formules dans tous les sens. Voici de nouvelles formules qui ne nécessitent pas de démonstration (vous pouvez les faire, mais à part une étape, tout est dans la formule) :

pour tout réels a et b , $\boxed{\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))}$

pour tout réels a et b , $\boxed{\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))}$

pour tout réels a et b , $\boxed{\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))}$

Observez ce qui se passe quand $a = b$...

Transformations de sommes en produits

Ces formules se déduisent des trois précédentes.

L'objectif est de calculer $\cos(p) + \cos(q)$, $\cos(p) - \cos(q)$ et $\sin(p) + \sin(q)$.

Soient deux réels a et b . Posons $p = a + b$ et $q = a - b$. On a alors $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$. Donc :

- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \iff \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cos(p) + \cos(q))$
 $\iff 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \cos(p) + \cos(q)$
- $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \iff \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cos(q) - \cos(p))$
 $\iff 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) = \cos(q) - \cos(p)$
- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \iff \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{1}{2}(\sin(p) + \sin(q))$
 $\iff 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \sin(p) + \sin(q)$

En résumé :

pour tous réels p et q ,
$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

pour tous réels p et q ,
$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
 (n'oubliez pas le signe "-")

pour tous réels p et q ,
$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

pour $\sin(p) - \sin(q)$? C'est identique à $\sin(p) + \sin(-q)$ et avec ça vous pouvez vous débrouiller. 😊

Formules avec la fonction tangente

tan, ça fais longtemps qu'on ne l'a pas vue. La revoilà. 😊 Nous allons ici exprimer **cos** et **sin** en fonction de **tan** exclusivement. Soyez prêts à réutiliser les formules vues jusqu'alors.

Soit $x \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ (ce qui veut dire x réel différent de $(2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ou encore x réel différent de π modulo 2π). C'est le domaine de définition de $f : x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$\frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$$

Donc :
$$\cos(x) = \frac{2}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 = \frac{2 - 1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Concernant **sin**(x), on a :
$$\frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin(x)}{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$
, avec x non multiple de π (pour éviter la division par zéro)

donc :
$$\sin(x) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$
, avec x non multiple de π mais comme l'égalité reste valable pour les multiples de 2π , le domaine de définition pour cette égalité reste le même que celui de f .

Pour x dans le domaine de définition de f privé de $\frac{\pi}{2}$ modulo π , on peut ajouter :

$$\tan(x) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$



Pourquoi on ne prend pas l'ensemble $\{x : x = \frac{\pi}{2}[\pi]\}$?

Eh bien, le dénominateur ne doit pas être nul. 😊 Une CNS (condition nécessaire et suffisante, c'est-à-dire une condition équivalente) pour avoir cela est que $\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) \neq 1 \iff \tan\left(\frac{x}{2}\right) \neq 1$ et $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \neq -1 \iff \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{4}[\pi]$ et

$$\frac{x}{2} \neq \frac{3\pi}{4}[\pi]$$

\iff (on multiplie même le modulo par 2, ne l'oubliez pas) $x \neq \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $x \neq \frac{3\pi}{2}[2\pi]$

\Longleftrightarrow (aidez-vous d'un dessin pour la conclusion) $x \neq \frac{\pi}{2} [2\pi]$

On doit également tenir compte du domaine de définition de $f : x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, ce qui donne :

pour tout réel x différent de π modulo 2π , $\cos(x) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ et $\sin(x) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

pour tout réel x différent de $\frac{\pi}{2}$ modulo π et différent de π modulo 2π , $\tan(x) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

Résumé

Nous avons revu les définitions et les valeurs remarquables rapidement. Puis il y a ce tas de formules. Certaines sont à connaître, d'autres à savoir retrouver (je pense notamment aux formules de transformation) rapidement, le temps de réécrire la démo sur un brouillon. Après si un prof vous demande de les connaître toutes, ben là ... adaptez-vous 😊 (mais je peux vous dire que retrouver les formules c'est plus intéressant et moins risqué).

Allez, pratiquons un peu avec un exercice puis le QCM.

Exercice

Calculez $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$. (attention à celui qui me sort sa calculatrice 🤖)

Si après quelques minutes vous bloquez, voici une indication :

Secret (cliquez pour afficher)

Utilisez $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Solution :

Secret (cliquez pour afficher)

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2 * \frac{\pi}{8}\right)$ et comme vous avez la formule : pour tout réel a $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$, vous l'appliquez à $a = \frac{\pi}{8}$.

Ce qui vous donne : $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 + \cos\left(2 * \frac{\pi}{8}\right)}{2} = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$

En regardant le cercle unité, vous constatez que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ a un \co sinus positif donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

Vous avez fini avec ce chapitre copieux sur les formules. Retenez-les ou sachez les retrouver car elles sont essentielles mais apprenez-les à votre rythme quitte à revenir sur ce chapitre ultérieurement.

Le chapitre suivant sera consacré au point de vue fonction (courbes, dérivées ...) puis vous pourrez enfin pratiquer avec les équations trigo. 😊

Formules trigonométriques (2/2)

Je tiens à vous féliciter pour votre ténacité. 😊 Ne nous arrêtons donc pas en si bon chemin. On parle depuis le début de fonctions trigonométriques et on n'a jusqu'alors pas vraiment abordé des fonctions. L'heure est venue pour les étudier : courbe, dérivée ...

Il sera alors venu le temps de faire un point sur ce que vous avez acquis en pratiquant. Comment ? Et bien voici venues les équations trigonométriques.



Prérequis : les fonctions et les bases de la dérivation (définition avec la limite).

Point de vue fonction

Ensemble de définition

Pour cette partie analytique, nous allons voir les ensembles de définitions. Grâce à ce que vous avez vu précédemment, vous les connaissez a priori déjà. Pour continuer sur de bonnes bases, voyons-les même si cela peut vous paraître évident. 😊

Nous avons vu, grâce au cercle unité que pour un angle α on lui associe un point M (notons-le M_α) dont l'abscisse est égale à $\cos(\alpha)$. Quel que soit α dans \mathbb{R} , le point M_α a toujours une abscisse qui vaut $\cos(\alpha)$. Ainsi \cos est définie sur \mathbb{R} .

De façon analogue avec les ordonnées, \sin est définie sur \mathbb{R} .

Pour \tan , il faut déterminer les cas où \cos s'annule. \tan est alors définie dans les autres cas.

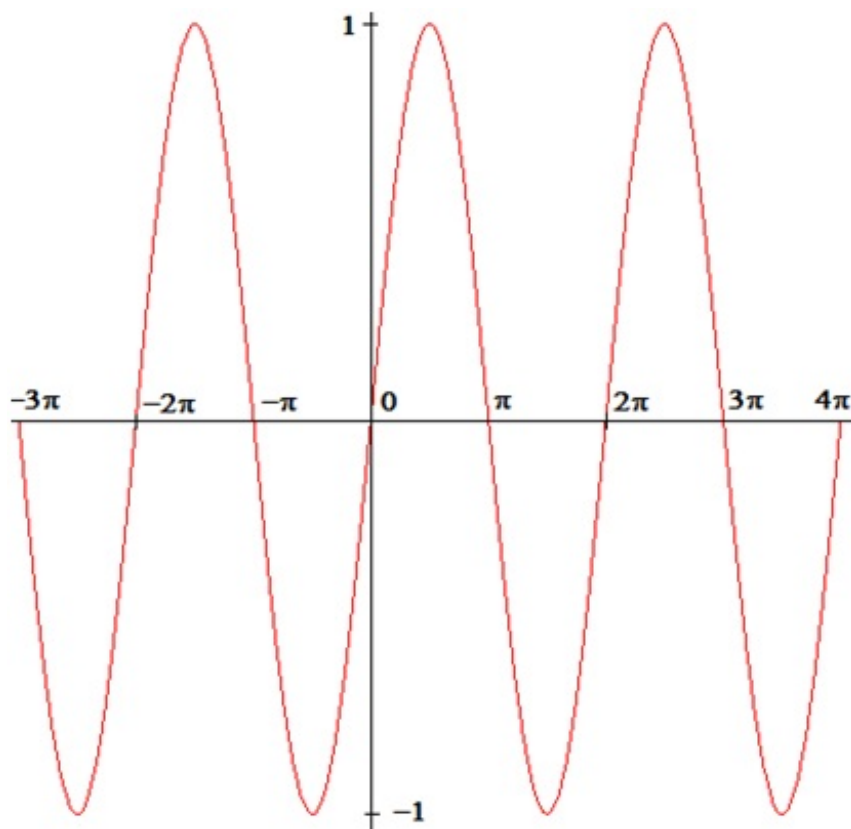
Dans $[-\pi, \pi]$, \cos s'annule en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Sur \mathbb{R} , on prend donc ces valeurs modulo 2π .

On obtient l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2}[\pi]\}$ qui constitue les valeurs interdites ("[" signifie "tel que").

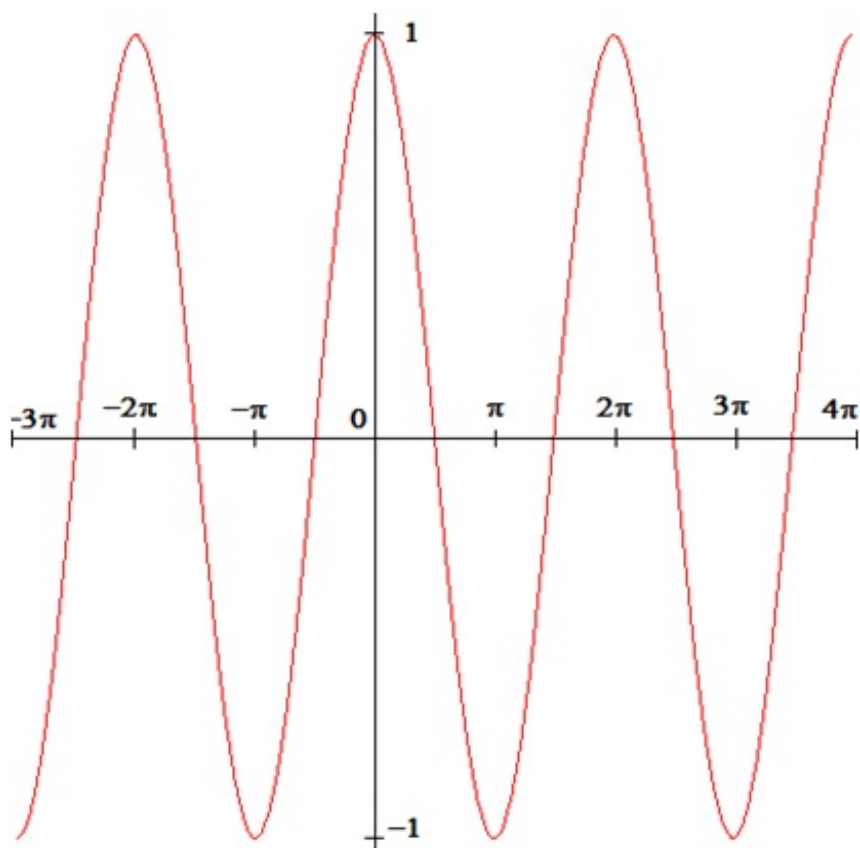
\tan est donc définie sur $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2}[\pi]\}$

Représentations graphiques

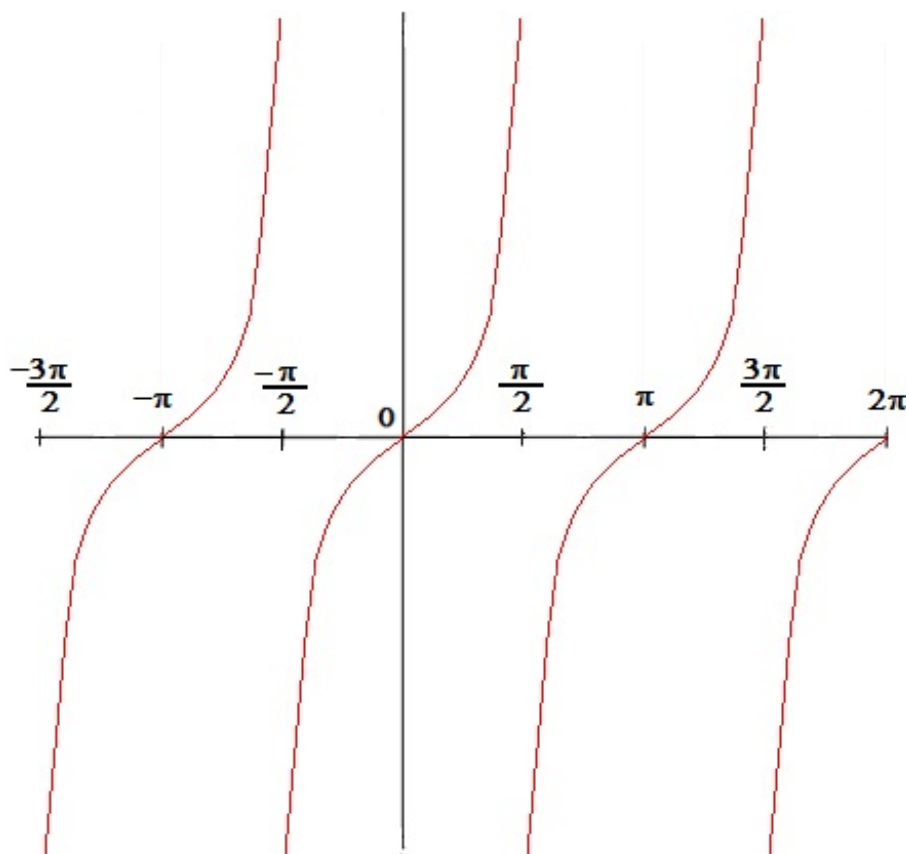
Pour la fonction **sinus**, on obtient cette représentation :



La fonction **cosinus** donne cette courbe :



La courbe représentative de **tan** a l'allure suivante :



Quelques propriétés

Du déjà vu

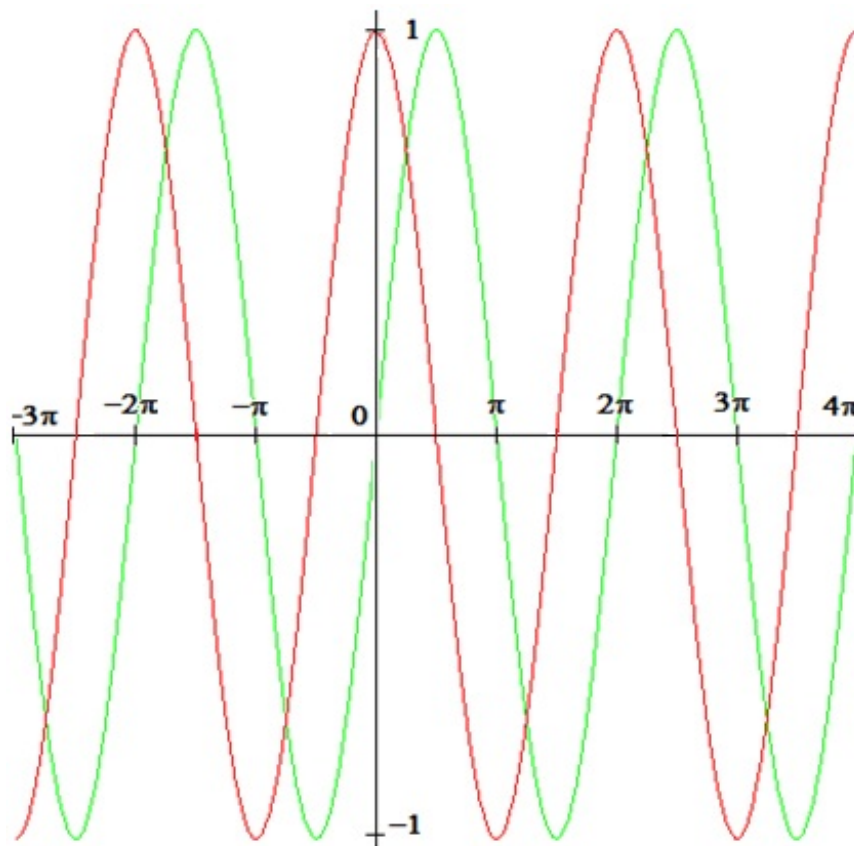
Dans les chapitres précédents, nous avons remarqué la périodicité de ces fonctions. Cela se voit ici dans la répétition des motifs.

Nous avons également étudié la parité des 3 fonctions trigo de base. Pour rappel, **cos** est paire puis **sin** et **tan** sont impaires.

D'un point de vue graphique, une fonction est paire si sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. C'est le cas de **cos**.

Une fonction impaire a sa courbe symétrique par rapport à l'origine du repère : c'est le cas de **sin** et **tan**.

Une dernière remarque : vous avez dû noter la ressemblance entre les allures des courbes de sinus et cosinus. Si vous regardez bien, la courbe de **sinus** c'est la courbe de **cosinus** décalée de $\frac{\pi}{2}$ sur l'axe des abscisses.



Cela nous ramène à une formule que l'on a déjà vue (et démontrée) : pour tout réel x , $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, en utilisant la parité de **cos**.



Une translation de $+\frac{\pi}{2}$ sur l'axe des abscisses se traduit dans la formule par " $x - \frac{\pi}{2}$ ".

Continuité, dérivabilité

Je suppose ici que ces 2 notions (continuité et dérivabilité) vous sont familières.
Sur leur ensemble de définition, on constate graphiquement que **cos**, **sin** et **tan** sont continues.
De plus, elles sont dérivables et même infiniment dérivables sur leur ensemble de définition.



Tu as parlé de "infiniment dérivable". Qu'est-ce que c'est que ça ? 🤔

Pour ceux que ça intéresse voici une explication, mais sachez que ce n'est pas essentiel pour la suite de ce tutoriel.

Secret (cliquez pour afficher)

Une fonction f est dite infiniment dérivable sur un intervalle I si on peut la dériver autant de fois que l'on veut sur I . On dit que f est de classe C^∞ sur I .

Exemple : sur \mathbb{R} , la fonction $f : x \rightarrow x^2 + 2x$ est infiniment dérivable.

En effet pour un réel x , f' est définie et $f'(x) = 2x + 2$.

f'' est définie et $f''(x) = 2$. f''' , notée aussi $f^{(3)}$ est définie et $f^{(3)}(x) = 0$.

En dérivant ainsi de suite, on retombera sur la fonction nulle. On peut donc dériver tant qu'on veut.

Continuité

cos et **sin** sont continues sur \mathbb{R} .

Démonstration :

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I est **continue** si elle est continue en tout point de cet intervalle.

On dit alors que f est continue en $a \in I$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Et pour être complet sur le sujet :

Secret (cliquez pour afficher)

On dit que f est continue à gauche en $a \in I$ si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

On dit que f est continue à droite en $a \in I$ si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

Ainsi " f est continue en $a \in I$ " est équivalent à " f est continue à gauche et à droite en $a \in I$ ".

Ici, on va montrer que **cos** et **sin** sont continues en tout réel a .

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Montrons que $\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a)$ et de même pour le sinus.

Commençons par le cosinus. Montrer que $\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a)$ revient à montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \cos(a+h) = \cos(a)$.

$$\cos(a+h) = \cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h)$$

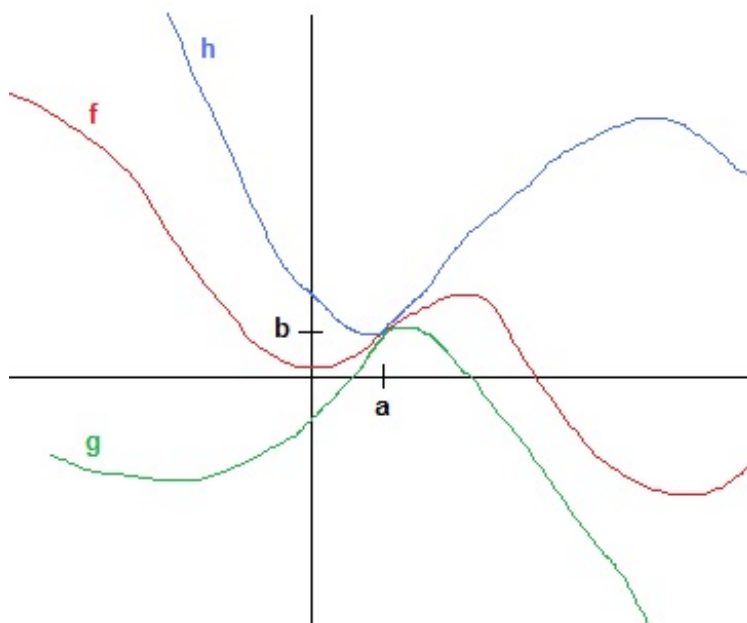
On veut montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \cos(h) = 1$ et que $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(h) = 0$.



Vous l'aurez peut-être remarqué : on veut démontrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \cos(h) = \cos(0)$ et que $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(h) = \sin(0)$, c'est-à-dire que **cos** et **sin** sont continues en 0.

Pour cela, on va utiliser le **théorème d'encadrement** aussi appelé **théorème des gendarmes**. 😊

C'est un théorème vu en terminale mais il est facile à comprendre. Mettons nous en situation : le bandit nommé f est recherché par deux gendarmes g et h . g et h veulent "coincer"/"encercler" f pour qu'il ne leur échappe pas. D'un point de vue graphique avec des fonctions :



Ce théorème nous dit que :

Théorème des gendarmes

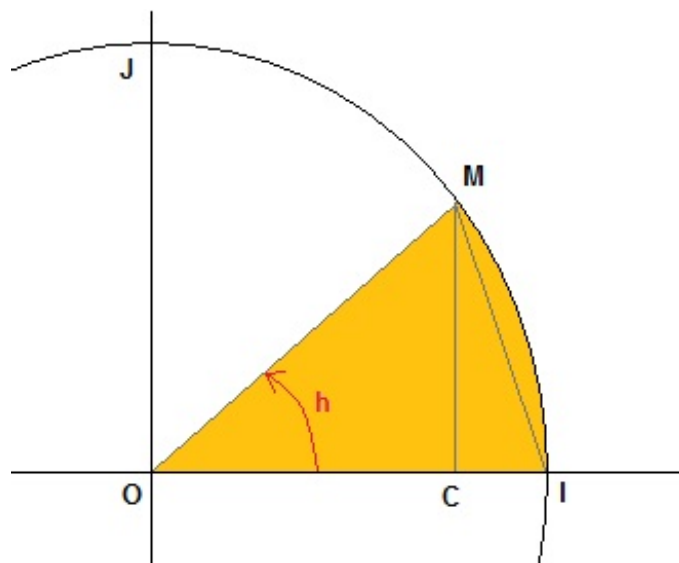
Si sur l'intervalle I privé du réel a , $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, on a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ (limite finie ou infinie), alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Notre objectif sera d'obtenir un encadrement de **sin(h)**, pour ensuite appliquer le théorème des gendarmes en passant à la

limite en 0 .

Pour obtenir cet encadrement, faisons un peu de géométrie :

On prend $h \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, l'essentiel étant que 0 soit compris dans cet intervalle (que l'on peut qualifier de "voisinage" de 0).



Nous avons l'encadrement suivant :

$0 \leq \text{Aire du triangle } OMI \leq \text{Aire du secteur } OMI$ (en orange)

L'aire du triangle OMI vaut $\frac{MC \times OI}{2} = \frac{|\sin(h)|}{2}$

Pour l'aire du secteur OMI , je vous rappelle que le disque unité a une surface totale de π (unité d'aire) pour un angle de 2π . On applique la proportionnalité avec l'angle $|h|$, et on obtient :

Aire du secteur $OMI = \frac{|h|}{2}$

On a donc l'encadrement : $0 \leq \frac{|\sin(h)|}{2} \leq \frac{|h|}{2}$ ce qui revient à $0 \leq |\sin(h)| \leq |h|$

$\lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$ et $\lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit : $\lim_{h \rightarrow 0} |\sin(h)| = 0$ ce qui revient à $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(h) = 0$

Montrons à présent que $\lim_{h \rightarrow 0} \cos(h) = 1$. Pour cela montrons que $\lim_{h \rightarrow 0} |\cos(h) - 1| = 0$.

D'après l'encadrement précédent, $|\cos(h) - 1| = 2\sin^2(\frac{h}{2}) \leq 2\frac{h^2}{4}$. Donc $0 \leq |\cos(h) - 1| \leq \frac{h^2}{2}$.

$\lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{2} = 0$. Donc par le théorème d'encadrement, $\lim_{h \rightarrow 0} |\cos(h) - 1| = 0$ c'est-à-dire $\lim_{h \rightarrow 0} \cos(h) = 1$.

Revenons à ce que nous voulions calculer au départ.

$$\cos(a + h) = \cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h)$$

Nous avons montré que $\lim_{h \rightarrow 0} \cos(h) = 1$ et que $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(h) = 0$.

Ainsi $\lim_{h \rightarrow 0} \cos(a + h) = \cos(a)$. Cela achève la démonstration de la continuité de \cos . 🧐

Si vous vous en sentez capables, je vous propose de démontrer la continuité de \sin sur \mathbb{R} . Si vous avez suivi la démonstration

précédente, celle-ci ne devrait pas vous poser problème.

Secret ([cliquez pour afficher](#))

Soit $a \in \mathbb{R}$. $\sin(a+h) = \sin(a)\cos(h) + \sin(h)\cos(a)$.

$\lim_{h \rightarrow 0} \cos(h) = 1$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(h) = 0$ (vous ne croyiez tout de même pas que j'allais refaire toute la démo 😊)

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(a+h) = \sin(a)$

Nous avons démontré que **sin** est continue sur \mathbb{R} .

Pour **tan**, étant donné que c'est le quotient de 2 fonctions continues sur \mathbb{R} , avec **cos** qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ modulo π , **tan** est continue sauf en $\frac{\pi}{2}$ modulo π .

Dérivabilité

cos et **sin** sont dérivables sur \mathbb{R} et ont pour dérivée respective $-\sin$ et **cos**.

Démonstration :

Je suppose que vous connaissez les 2 définitions d'une dérivée qui utilisent les limites.

(Pour rappel) f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est finie, c'est-à-dire différente de $-\infty$ et de $+\infty$.

Dans ce cas on note $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ la dérivée de f en a .

Passons au cas du cosinus :

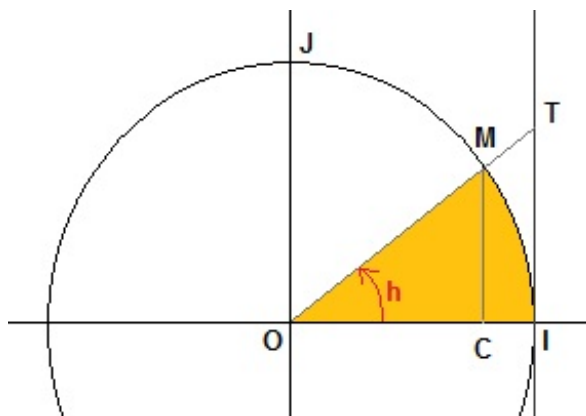
Soit $x \in \mathbb{R}$. Etudions $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$.

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1) - \sin(x)\sin(h)}{h} \\ &= \cos(x) \frac{(\cos(h) - 1)}{h} - \sin(x) \frac{\sin(h)}{h} \end{aligned}$$

Commençons par étudier le second terme $-\sin(x) \frac{\sin(h)}{h}$.

On va ici chercher à obtenir un encadrement de $\frac{\sin(h)}{h}$, pour ensuite appliquer encore une fois le théorème des gendarmes en passant à la limite en 0.

Pour cela, on va refaire un peu de géométrie (on prend $h \in]0; 2\pi[$):



Vous avez l'encadrement suivant :

Aire du triangle $OMC \leq$ Aire du secteur $OMI \leq$ Aire du triangle TOI .

$$\text{Aire du triangle } OMC = \frac{\sin(h) \cos(h)}{2}$$

Pour l'aire du secteur OMI , je vous rappelle que le disque unité a une surface totale de π (unité d'aire) pour un angle de 2π .
On applique la proportionnalité avec l'angle h , et on obtient :

$$\text{Aire du secteur } OMI = \frac{h}{2}$$

$$\text{Aire du triangle } TOI = \frac{\tan(h)}{2}$$

D'où l'encadrement :

$$\frac{\sin(h) \cos(h)}{2} \leq \frac{h}{2} \leq \frac{\tan(h)}{2} \iff \cos(h) \leq \frac{h}{\sin(h)} \leq \frac{1}{\cos(h)}$$

$$\iff \cos(h) \leq \frac{\sin(h)}{h} \leq \frac{1}{\cos(h)}$$

$$\text{On a } \lim_{h \rightarrow 0} \cos(h) = 1 \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(h)} = 1.$$

$$\text{Donc d'après le théorème d'encadrement } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x) \frac{\sin(h)}{h} = \sin(x).$$

$$\text{Passons à l'autre terme } \cos(x) \frac{(\cos(h) - 1)}{h}$$

$$\begin{aligned} \frac{(\cos(h) - 1)}{h} &= \frac{\cos^2(h) - 1}{(\cos(h) + 1)h} = \frac{-\sin^2(h)}{(\cos(h) + 1)h} \\ &= -\frac{\sin(h)}{h} \times \frac{\sin(h)}{1 + \cos(h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x) \frac{(\cos(h) - 1)}{h} - \sin(x) \frac{\sin(h)}{h} = -\sin(x)$$

D'où $\cos'(x) = -\sin(x)$. Fin de la démonstration pour cosinus. 🤔



Et pour la dérivée du sinus ?

Le principe est le même. Je vous laisse la déterminer.

Secret (cliquez pour afficher)

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$.

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h} \\ &= \sin(x)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos(x)\end{aligned}$$

D'où $\sin'(x) = \cos(x)$

Pour résumer : pour tout réel x , $\boxed{\cos'(x) = -\sin(x)}$ et $\boxed{\sin'(x) = \cos(x)}$.

Pour déterminer la dérivée de **tan**, un petit calcul avec les dérivées sera nécessaire : Pour x dans le domaine de définition de **tan**, c'est-à-dire dans \mathbb{R} privé des multiples de $\frac{\pi}{2}$ (ce qui peut se noter $\mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$),

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}.$$

À partir de là on obtient 2 expressions possibles : $1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)^2 = 1 + \tan^2(x)$ ou bien $\frac{1}{\cos^2(x)}$.

En résumé : pour tout réel x non multiple de $\frac{\pi}{2}$, $\boxed{\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)}$

Limites de la tangente

tan n'est pas continue en $\frac{\pi}{2}$ modulo π . Que se passe-t-il alors en ces points ?

Eh bien étudions les limites de **tan** en ces valeurs.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. **tan** n'est pas définie en $\frac{\pi}{2} + k\pi$.



Que valent $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^-} \tan(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^+} \tan(x)$?

Posons $y = x - k\pi$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^-} \tan(x) = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(y + k\pi)$

tan est π -périodique (on l'a montré dans le QCM du chapitre précédent) donc $\tan(y + k\pi) = \tan(y)$

D'où $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^-} \tan(x) = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(y + k\pi) = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(y)$.

Et $\tan(y) = \frac{\sin(y)}{\cos(y)}$ avec $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin(x) = 1^-$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = 0^+$

Finalement : $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^-} \tan(x) = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(y) = +\infty$.

De façon analogue : $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^+} \tan(x) = -\infty$

En résumé : pour tout entier relatif k , $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^-} \tan(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^+} \tan(x) = -\infty$

Vous aurez remarqué dans la représentation graphique de la tangente ces limites auxquelles on peut associer les asymptotes verticales de la forme $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Les équations trigonométriques

Sans transition, passons aux équations trigonométriques.

Nous arrivons enfin à la pratique 🧐

Sans plus attendre, commençons dans le vif du sujet.

Exemple 1

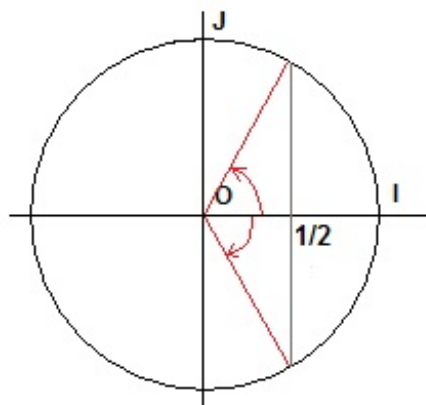
Vous avez peut-être remarqué l'équation écrite sur l'icône de ce chapitre : $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

Je vous propose de la résoudre dans \mathbb{R} . Pour cela nous allons procéder en 2 temps :

1) Résoudre $\cos(x) = \frac{1}{2}$ dans $] -\pi; \pi]$.

2) Résoudre $\cos(x) = \frac{1}{2}$ dans \mathbb{R} .

1) On résout l'équation dans $] -\pi; \pi]$. Il s'agit donc de déterminer les $x \in] -\pi; \pi]$ qui vérifient $\cos(x) = \frac{1}{2}$. Vous connaissez la réponse : regardez le cercle unité (ou référez-vous à votre tableau des valeurs remarquables).



Vous notez qu'il y a 2 possibilités pour $x \in] -\pi; \pi]$ tel que $\cos(x) = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{3}$.

Pour conclure, on peut dire que l'ensemble des solutions c'est $S_{]-\pi; \pi]} = \left\{ -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right\}$.

2) Ensuite on veut déterminer l'ensemble des solutions dans \mathbb{R} . Pour chaque solution x_0 dans $S_{]-\pi; \pi]}$, on a l'ensemble des $x_0 + k \times 2\pi$, qui sont solutions de $\cos(x) = \frac{1}{2}$. En effet, $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} = \cos(-\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi)$.

Ainsi les réels $2k\pi - \frac{\pi}{3}$, où $k \in \mathbb{Z}$, sont solutions.

De même, les réels $2k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$, sont solutions.

Il en résulte que l'ensemble des solutions pour $\cos(x) = \frac{1}{2}$ c'est

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$



Une précision s'impose sur le symbole " \cup ", nommé "union", et utilisé avec des ensembles. Cela veut dire (c'est une définition) que "si $x \in A \cup B$ alors $x \in A$ ou $x \in B$ ". Par exemple $[-1; 1] \cup [0; 2[= [-1; 2[$.

Nous en avons fini pour ce premier exemple de base. Pour que vous compreniez la résolution j'ai tout détaillé, mais à partir de maintenant vous devrez savoir donner la réponse directement en vous servant du cercle unité.

Exemple 2

Résoudre l'équation $\sin(2x) = 1$ dans \mathbb{R} .

Dans ce type d'équation vous avez la possibilité de poser $y = 2x$.

Je vous propose néanmoins de sauter cette étape de changement de variable.

$$\begin{aligned}\sin(2x) = 1 &\iff 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Ainsi $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Je noterai dorénavant S l'ensemble des solutions de l'équation.

L'autre présentation possible pour la résolution de cette équation est d'utiliser les modulus.

$$\begin{aligned}\sin(2x) = 1 &\iff 2x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{4} [\pi]\end{aligned}$$

Attention, on divise tout par 2, le modulo également. Dans la suite logique de cette présentation, on peut noter l'ensemble des solutions sous la forme $S = \left\{ \frac{\pi}{4} \right\} [\pi]$.

Exemple 3

Ça se complique...

Voici l'équation à résoudre dans \mathbb{R} : $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{3}$.

Le but ici est de faire apparaître des valeurs connues qui comportent notamment du $\sqrt{3}$. 2 choix : on divise tout par 3 pour avoir du $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou par 2 pour avoir du $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dans le premier cas on se retrouve avec : $\frac{1}{3}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Problème : $\frac{1}{3}$ c'est inconnu pour nous.

Il nous reste donc à diviser tout par 2 : $\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Voilà qui est préférable...



Mais ça n'arrange rien ta manip. 😬 Comment je vais m'en sortir ?

Au contraire, ça facilite les choses : on va essayer de retrouver une formule bien connue. En l'occurrence il peut s'agir de " $\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ ".

Cherchons a tel que $\cos(a) = \frac{1}{2}$ et $\sin(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Le cercle unité à notre rescousse et (roulement de tambour)... l'heureux élu est $\frac{\pi}{3}$.

Ainsi notre équation de départ devient : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc en utilisant une certaine formule, vous obtenez : $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Eh bien la situation s'est améliorée :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff \frac{\pi}{3} + x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{6} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } S = \left\{-\frac{\pi}{6}\right\}[2\pi] \cup \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}[2\pi] = \left\{-\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}\right\}[2\pi]$$

Exemple 4

Résoudre $\sin(3x) = \cos(4x)$ dans \mathbb{R} .

Pour cela, on va avoir besoin de ce qui suit :

- $\cos(A) = \cos(B) \iff A \equiv B[2\pi] \text{ ou } A \equiv -B[2\pi]$ (on utilise le fait que \cos est paire)
- $\sin(A) = \sin(B) \iff A \equiv B[2\pi] \text{ ou } A \equiv \pi - B[2\pi]$ (on utilise le fait que $\sin(\pi - x) = \sin(x)$)

Pour résoudre une telle équation, on va donc essayer de se retrouver dans l'un des cas ci-dessus.

$$\sin(3x) = \cos(4x) \iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos(4x)$$

$$\iff \frac{\pi}{2} - 3x \equiv 4x[2\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} - 3x \equiv -4x[2\pi]$$

$$\iff -7x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\iff x \equiv \frac{\pi}{14} \left[-\frac{2\pi}{7}\right] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\text{D'où } S = \left\{\frac{\pi}{14}\right\} \left[\frac{2\pi}{7}\right] \cup \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}[2\pi].$$

Au passage, j'ai enlevé le "—" dans le premier modulo car ça ne change rien au résultat.

Pour avoir une solution en un bloc (sans l'union),

$$\left\{\frac{\pi}{14}\right\} \left[\frac{2\pi}{7}\right] = \left\{\frac{\pi}{14}; \frac{5\pi}{14}; \frac{9\pi}{14}; \frac{13\pi}{14}; \frac{17\pi}{14}; \frac{21\pi}{14}; \frac{25\pi}{14}\right\}[2\pi]$$

Le problème c'est que $\frac{17\pi}{14}, \frac{21\pi}{14}$ et $\frac{25\pi}{14}$ ne sont pas dans $]-\pi; \pi]$, on va donc leur oter 2π .

On obtient alors :

$$\left\{\frac{\pi}{14}\right\} \left[\frac{2\pi}{7}\right] = \left\{-\frac{11\pi}{14}; -\frac{7\pi}{14}; -\frac{3\pi}{14}; \frac{\pi}{14}; \frac{5\pi}{14}; \frac{9\pi}{14}; \frac{13\pi}{14}\right\}[2\pi]$$

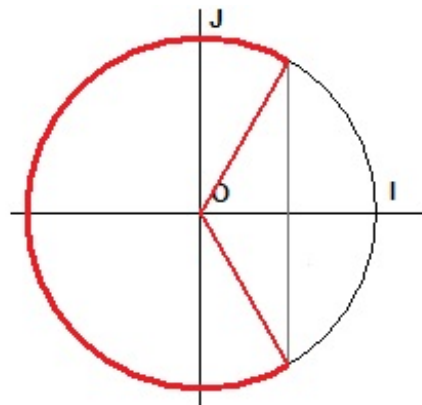
$$\text{Donc } S = \left\{ -\frac{11\pi}{14}; -\frac{7\pi}{14}; -\frac{3\pi}{14}; \frac{\pi}{14}; \frac{5\pi}{14}; \frac{9\pi}{14}; \frac{13\pi}{14} \right\} [2\pi]$$

Notez que $-\frac{7\pi}{14} = -\frac{\pi}{2}$ donc l'ensemble $\left\{ -\frac{\pi}{2} \right\} [2\pi]$ était compris dans $\left\{ \frac{\pi}{14} \right\} \left[\frac{2\pi}{7} \right]$

Exemple 5 : Une inéquation trigonométrique

Je vous propose de terminer sur une inéquation trigonométrique : Résoudre $\cos(2x) < \frac{1}{2}$ dans \mathbb{R} .

Un coup d'œil sur le cercle unité :

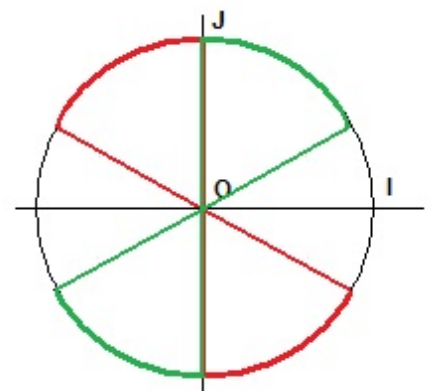
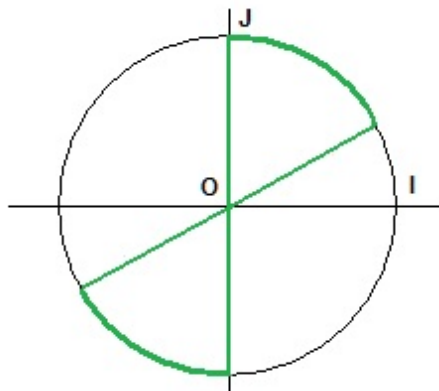
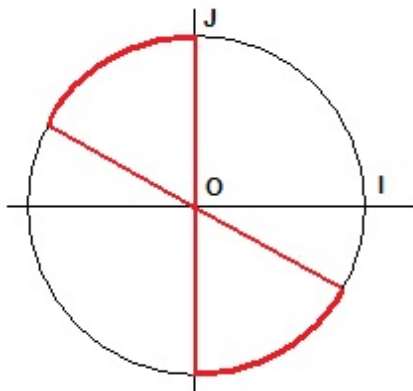


L'angle $2x$ doit être dans le secteur rouge donc :

$$\begin{aligned} \cos(2x) < \frac{1}{2} &\iff -\pi < 2x < -\frac{\pi}{3} \quad (\text{modulo } 2\pi) \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{3} < 2x < \pi \quad (\text{modulo } 2\pi) \\ &\iff -\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{6} \quad (\text{modulo } \pi) \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \quad (\text{modulo } \pi) \end{aligned}$$

Pour visualiser la solution, l'encadrement $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{6}$ (modulo π) correspond aux 2 secteurs **rouges**. Le "modulo π " fait apparaître un 2^e encadrement : $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$.

L'encadrement $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ (modulo π) correspond aux 2 secteurs **verts**. De même que précédemment, un 2^e encadrement apparaît : $-\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{2}$.



L'union des secteurs rouges et verts donne l'ensemble des solutions :

$$S = \left] -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6} \right[\cup \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6} \right[\pmod{2\pi}$$

Ici, sachant que l'inégalité est stricte, il ne faut pas prendre les extrémités des 4 secteurs (les 2 rouges + les 2 verts).

Dans la solution on prend un modulo 2π car $\left] -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6} \right[\cup \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6} \right[$ c'est l'ensemble des solutions dans $] -\pi; \pi]$.

Voilà qui termine ce chapitre. Un petit QCM pour voir ce que vous avez retenu et on se repose 🤔 (je pense nous l'avons mérité).
Voilà un chapitre qui vient clore de copieuses bases en trigonométrie.

Ça y est : le moment de la pratique est venu. Préparez vos feuilles, cahiers et crayons. Cette fois-ci c'est vous qui allez travailler.
Travailler ? Tu parles... la trigonométrie c'est une passion maintenant que j'ai tout compris. 😊

Au boulot !

Voilà la partie la plus intéressante. Vous allez enfin pouvoir pratiquer ce que vous avez pu apprendre comme connaissances ou savoir-faire. Saurez vous manier la trigonométrie à travers ces exercices ? C'est tout le mal que je vous souhaite. 😊

Les exercices que je vous propose sont plus que de simples exercices, comme j'ai pu vous en poser précédemment dans les QCM. Ces exercices demandent un peu de réflexion. 🤔 Je les ai classés en 2 catégories : le niveau 1, correspondant au chapitre "avec un triangle rectangle" et le niveau 2, correspondant aux autres chapitres.

Mode d'emploi

C'est parti pour les exercices. Voici la façon de travailler que je vous propose : pour chaque exercice, lisez l'énoncé en entier, prenez un temps de réflexion pour mettre en place votre stratégie de résolution (aidez-vous de schémas, c'est très utile et ça permet bien souvent de débloquer un exercice) et au boulot !

En gros, ce que je vous dis c'est : ne foncez pas dans le tas comme des bourrins ! 😊

Lorsque je vous propose une indication pour certains exercices, utilisez-les uniquement si après quelques minutes de réflexion vous ne voyez pas comment débiter l'exercice.

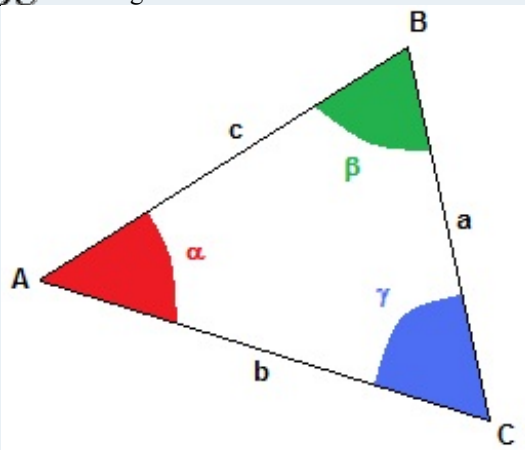
Et dites-vous bien qu'il est normal que vous en ayez besoin lorsque j'en mets une. Dans le cas contraire, soit vous êtes un zéro qui a tout retenu, dans ce cas je vous dit chapeau 🧐, soit vous vous y connaissiez avant et dans ce cas ... vous faites partie du même cas que moi.

Niveau 1

Exercice 1 : La loi des sinus

Loi des sinus

Soit ABC un triangle avec les notations du schéma suivant :



On a alors la relation suivante :
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Votre mission : démontrez cette loi.

Indication :

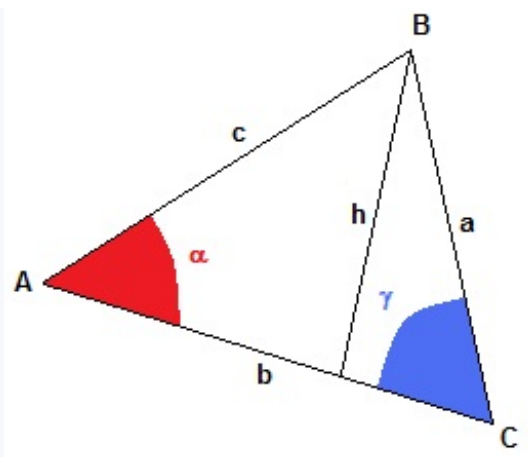
Secret (cliquez pour afficher)

Tracez une hauteur. Par exemple celle issue de B. Montrez alors que
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Solution :

Secret (cliquez pour afficher)

Commençons par tracer la hauteur issue de B . Notons h sa longueur :



On a alors $\sin(\alpha) = \frac{h}{c}$ et $\sin(\gamma) = \frac{h}{a}$.

D'où $h = c \sin(\alpha) = a \sin(\gamma)$ ainsi : $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Exercice 2 : Le théorème d'Al-Kashi

Vous connaissez le théorème de Pythagore. Il s'applique uniquement sur des triangles rectangles. Eh bien ici je vais vous proposer la généralisation du théorème de Pythagore :

Théorème d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle avec les notations du schéma suivant :

On a alors la relation suivante : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$

Remarque : On a aussi $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$

- Tracez un triangle ABC tel que $AB = 5\text{cm}$, $\widehat{BAC} = 50^\circ$ et $AC = 6\text{cm}$. Mesurez alors la longueur de BC à l'aide d'une règle (graduée).
- Utilisez le théorème d'Al-Kashi pour calculez BC . Vérifiez alors avec le résultat que vous obtenez à la question 1.

Solution :

Secret ([cliquez pour afficher](#))

1) Je ne vais pas vous refaire un schéma. Vous savez tracer un triangle. Vous savez mesurer des longueurs avec une règle graduée. Vous trouverez une valeur proche de $4,7\text{cm}$ pour BC (à moins que vous ne soyez des sagouins et que votre triangle ne ressemble à une patate 🤪)

2) Notons $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et $\alpha = \widehat{BAC}$. On veut exprimer a en fonction des autres données.

On applique le théorème d'Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$

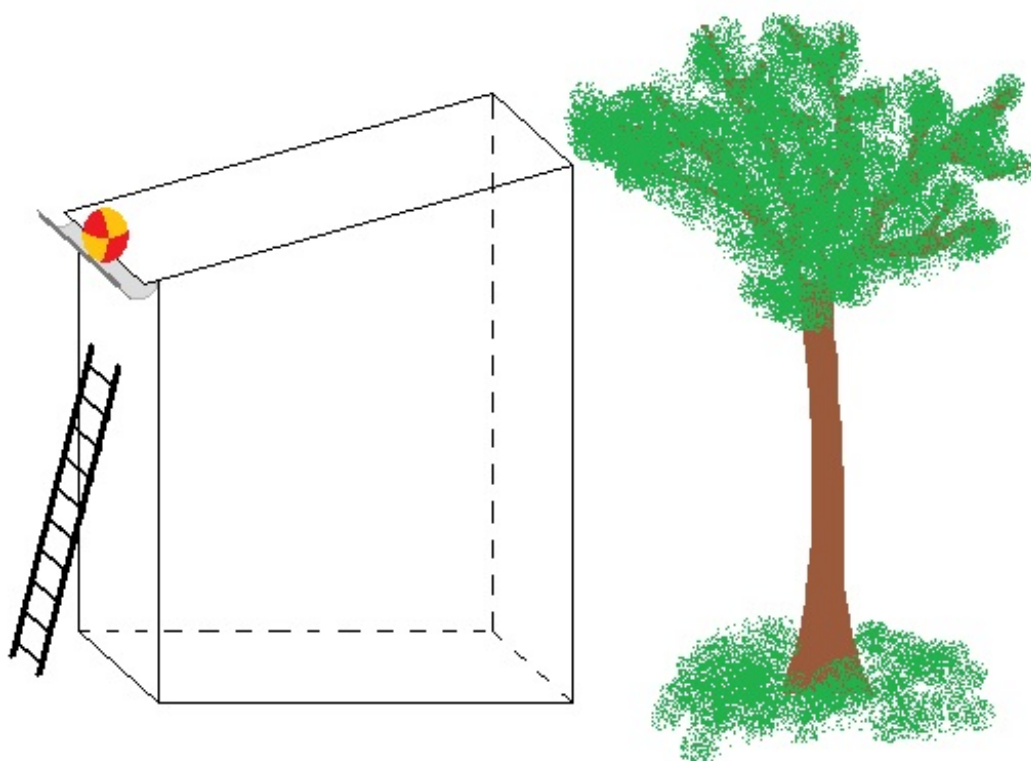
donc

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)} = \sqrt{6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \cos(50^\circ)} = \sqrt{61 - 60 \cos(50^\circ)} = 4,74\text{cm}$$

à 0,01cm près.

Exercice 3

Toto a perdu son ballon : il est bloqué par la gouttière d'un petit bâtiment. Comme Toto est un intrépide, il va grimper sur une échelle de 4m de longueur. Toto mesure 1,75m le bras levé. Toto incline l'échelle de 75° par rapport au sol. Il ne veut pas l'incliner davantage de peur qu'elle tombe. Le sol est supposé plat et le bâtiment droit.



1) Le ballon étant à 5,75m du sol, peut-il l'atteindre ? Si non, quelle longueur lui manque-t-il (à 0,01m près) ?

Arrondir à 0,01m près (ou à 10^{-2} m près) signifie que vous devez arrondir à 2 chiffres après la virgule. Exemple d'arrondissement à 0,01m près :



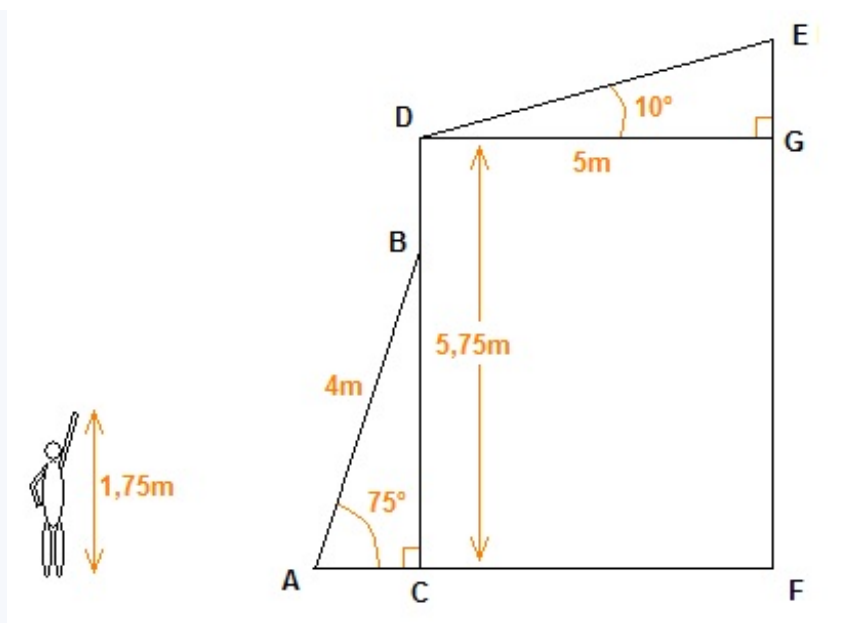
- $0,0219 = 0,02\text{m}$ ($1 < 5$ donc on garde le 2)
- $10,836 = 10,84\text{m}$ ($6 \geq 5$ donc on passe au-dessus : le 3 devient 4)
- $10,075 = 10,08\text{m}$ ($5 \geq 5$ donc on passe au-dessus : le 7 devient 8)
- $7,1986\text{m} = 7,20\text{m}$ ($8 \geq 5$ donc on passe au-dessus : le 19 devient 20)

2) Abandonnant la piste de l'échelle, Toto décide de grimper sur l'arbre de l'autre côté du bâtiment. A quelle hauteur (à 10^{-2} m près) va-t-il grimper sachant que le toit du bâtiment est incliné à 10° et que la longueur du bâtiment vaut 5m ?

Indication :

Secret (cliquez pour afficher)

Faites un schéma comme celui-ci : (dessiner Toto n'est pas nécessaire 😊)



Je reformule les questions d'après ce schéma :

- 1) Que vaut BC et est-ce que $BC + 1,75 \geq 5,75$? Si non, que vaut $5,75 - (BC + 1,75)$? (à 0,01m près)
- 2) Que vaut EF ?

Solution :

Secret (cliquez pour afficher)

Je me réfère au schéma de l'indication.

1) On veut calculer BC . Pour cela utilisons les données du triangle ABC rectangle en C . On connaît AB et \widehat{BAC} . Pour calculer BC , utilisons le sinus :

$$\sin(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AB} \text{ donc } BC = AB \times \sin(\widehat{BAC}) = 4 \times \sin(75^\circ) = 3,86m$$

Et $BC + 1,75 = 3,86 + 1,75 = 5,61 < 5,75$. Il lui manque donc $5,75 - 5,61 = 0,14m = 14cm$.

Le malheureux Toto ne peut donc pas atteindre le ballon. 😞

2) Ici on veut calculer EF . On a $EF = EG + GF$ avec $GF = 5,75m$. Que vaut EG ?

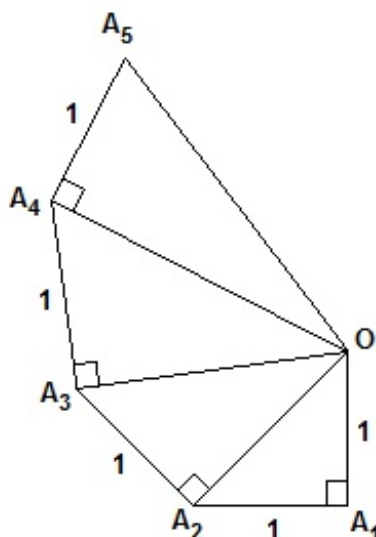
Utilisons pour cela le triangle DEG rectangle en G :

$$\tan(\widehat{EDG}) = \frac{EG}{DG} \text{ donc } EG = DG \times \tan(\widehat{EDG}). \text{ Ainsi } EF = EG + GF = 5 \times \tan(10^\circ) + 5,75 = 6,63m.$$

Toto l'intrépide va donc devoir grimper à une hauteur de 6,63m.

Exercice 4

Dans le schéma ci-dessous, que vaut l'angle $\widehat{A_4OA_5}$ (à 1° près) ? Utilisez la calculatrice. Consultez l'annexe si besoin.

**Indication :****Secret** (cliquez pour afficher)

Commencez par calculer A_2O , A_3O puis A_4O . Puis utilisez \cos , \sin ou \tan dans le triangle A_4OA_5 (selon votre convenance). A l'aide la calculatrice, vous pourrez alors déterminer l'angle $\widehat{A_4OA_5}$.

Solution :**Secret** (cliquez pour afficher)

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle OA_1A_2 : $OA_2^2 = OA_1^2 + A_1A_2^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ donc $OA_2 = \sqrt{2}$.

Idem dans le triangle OA_2A_3 : $OA_3^2 = OA_2^2 + A_2A_3^2 = \sqrt{2}^2 + 1^2 = 3$ donc $OA_3 = \sqrt{3}$.

Idem dans le triangle OA_3A_4 : $OA_4^2 = OA_3^2 + A_3A_4^2 = \sqrt{3}^2 + 1^2 = 4$ donc $OA_4 = \sqrt{4} = 2$.

Ainsi $\tan(\widehat{A_4OA_5}) = \frac{A_4A_5}{OA_4} = \frac{1}{2} = 0,5$ d'où $\widehat{A_4OA_5} = \tan^{-1}(0,5) = 27^\circ$ à 1° près

Niveau 2

Exercice 4

Simplifiez :

a) $\sin\left(\frac{1243\pi}{6}\right)$

b) $\cos^4(x) - \sin^4(x)$

c) $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

Solution :**Secret** (cliquez pour afficher)

a) Commençons par effectuer la division euclidienne de 1243 par 6 : $1243 = 6 \times 207 + 1$ donc $\frac{1243}{6} = 207 + \frac{1}{6}$

Si vous avez une calculatrice CASIO, vous avez la touche **a+b/c**. Ecrivez "1243/6" à l'écran puis appuyez sur **EXE**. Ensuite appuyez sur la touche **a+b/c** (si c'est une CASIO collègue, n'oubliez pas la touche "**SECONDE**").



Votre calculatrice vous sort alors un "207┘1┘6", ce qui signifie que $\frac{1243}{6} = 207 + \frac{1}{6}$. C'est une façon pour vous de vérifier votre division euclidienne. 😊

207 n'est pas multiple de 2. On a $207 + \frac{1}{6} = 208 + \frac{1}{6} - 1 = 208 - \frac{5}{6}$.

208 est multiple de 2 et $-1 < -\frac{5}{6} \leq 1$ donc $\sin(\frac{1243\pi}{6}) = \sin(208\pi - \frac{5\pi}{6}) = \sin(-\frac{5\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$.

$$b) \cos^4(x) - \sin^4(x) = (\cos^2(x) - \sin^2(x))(\cos^2(x) + \sin^2(x)) = \cos(2x) \times 1 = \cos(2x)$$

c) Avant de vouloir calculer chacun des termes, observez un peu... pensez à regrouper d'un côté $\cos(-\frac{\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5})$

puis de l'autre $\sin(\frac{7\pi}{10})$ et $-\sin(\frac{3\pi}{10})$.

$$\cos(-\frac{\pi}{5}) = \cos(\frac{\pi}{5}) = \cos(\pi - \frac{4\pi}{5}) = -\cos(\frac{4\pi}{5})$$

$$\sin(\frac{7\pi}{10}) = \sin(\pi - \frac{3\pi}{10}) = \sin(\frac{3\pi}{10})$$

Donc

$$\cos(-\frac{\pi}{5}) + \sin(\frac{7\pi}{10}) + \cos(\frac{4\pi}{5}) - \sin(\frac{3\pi}{10}) = (\cos(-\frac{\pi}{5}) + \cos(\frac{4\pi}{5})) + (\sin(\frac{7\pi}{10}) - \sin(\frac{3\pi}{10})) = 0 + 0 = 0$$

Exercice 5

Donnez la valeur exacte de $\tan(\frac{\pi}{12})$ de 2 façons.



Prérequis : méthode de résolution des équations du second degré.

Indications :

Secret (cliquez pour afficher)

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{6} = 2 \times \frac{1}{12}$$

Solution :

Secret (cliquez pour afficher)

$$\text{1}^{\text{ère}} \text{ méthode : } \tan(\frac{\pi}{12}) = \tan(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan(\frac{\pi}{3}) - \tan(\frac{\pi}{4})}{1 + \tan(\frac{\pi}{3}) \tan(\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$$

Je sais que vous n'aimez pas les racines carrées au dénominateur 😞 donc nous allons nous empresser d'utiliser l'expression conjuguée de $1 + \sqrt{3}$ qui vaut $1 - \sqrt{3}$.

$$\text{Ainsi } \tan(\frac{\pi}{12}) = \frac{(\sqrt{3} - 1)(1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{-2} = 2 - \sqrt{3}$$

2^e méthode : Vous vous rappelez du $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ que je vous avais fait calculer ? On va faire la même chose ici :

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}. \text{ Posons } T = \tan\left(\frac{\pi}{12}\right). \text{ Vous savez que } \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } \frac{\sqrt{3}}{3} &= \frac{2T}{1 - T^2} \iff \sqrt{3} - \sqrt{3}T^2 = 6T \\ &\iff \sqrt{3}T^2 + 6T - \sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

On résout alors l'équation du second degré.

$$\text{Le déterminant vaut } \Delta = 36 - 4\sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) = 36 + 12 = 48 = 16 \times 3 = (4\sqrt{3})^2$$

$$\text{Les solutions sont : } T_1 = \frac{-6 - 4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\sqrt{3} - 2 \text{ et } T_2 = -\sqrt{3} + 2.$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0 \text{ donc } \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = T_2 = 2 - \sqrt{3}$$

Exercice 6

Résoudre les équations et inéquations suivantes dans \mathbb{R} puis dans $] -\pi; \pi]$:

a) $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$

b) $\sin^2(3x) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$

c) $2\cos^2(x) + 5\cos(x) - 3 < 0$

d) $\tan(x) - \tan(3x) > 0$

e) $\sin\left(\frac{5x}{6}\right) \leq \frac{1}{2}$

f) $\cos(|x|^\pi - \pi^x) > \frac{3}{2}$

Solution :

Secret (cliquez pour afficher)

Ici je ne fais pas de schéma, mais faites en de votre côté. 😊

a)

$$2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0 \iff \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

$$\iff 3x = \frac{\pi}{12}[2\pi] \text{ ou } 3x = \frac{7\pi}{12}[2\pi]$$

$$\iff x = \frac{\pi}{36}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \text{ ou } x = \frac{7\pi}{36}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$$

Donc l'ensemble des solutions dans \mathbb{R} c'est $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{36}; \frac{7\pi}{36} \right\} \left[\frac{2\pi}{3} \right]$.

L'ensemble des solutions dans $] -\pi; \pi]$ c'est

$$S_{]-\pi; \pi]} = \left\{ -\frac{23\pi}{36}; \frac{\pi}{36}; \frac{25\pi}{36} \right\} \cup \left\{ -\frac{17\pi}{36}; \frac{7\pi}{36}; \frac{31\pi}{36} \right\} = \left\{ -\frac{23\pi}{36}; -\frac{17\pi}{36}; \frac{\pi}{36}; \frac{7\pi}{36}; \frac{25\pi}{36}; \frac{31\pi}{36} \right\}$$

b) Attention c'est du lourd ! 😓 Mais je vous rassure : c'est plus facile qu'il n'y paraît. 😊

$$\sin^2(3x) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \iff \left(\sin(3x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \left(\sin(3x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 0$$

$$\iff (*) \quad \sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{ou} \quad (**) \quad \sin(3x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\iff (*) \quad 3x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi \quad \text{ou} \quad 3x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi$$

$$\text{ou} \quad (**) \quad 3x = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi \quad \text{ou} \quad 3x = \pi - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi = \frac{3\pi}{2} - x + 2\pi$$

$$\iff (*) \quad 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi$$

$$\text{ou} \quad (**) \quad 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \quad \text{ou} \quad 4x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi$$

$$\iff x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}$$

$$\iff x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$$

Donc l'ensemble des solutions dans \mathbb{R} c'est $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{8} \right\} \left[\frac{\pi}{4} \right] \cup \left\{ \frac{\pi}{4} \right\} \left[\frac{\pi}{2} \right] = \left\{ \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{8} \right\} \left[\frac{\pi}{2} \right]$.

L'ensemble des solutions dans $] -\pi; \pi]$ c'est

$$S_{]-\pi; \pi]} = \left\{ -\frac{7\pi}{8}; -\frac{3\pi}{4}; -\frac{5\pi}{8}; -\frac{3\pi}{8}; -\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}; \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{8} \right\}$$

c) Pour résoudre l'inéquation $2\cos^2(x) + 5\cos(x) - 3 < 0$ dans \mathbb{R} , nous allons poser $X = \cos(x)$.

Ainsi l'inéquation devient : $2X^2 + 5X - 3 < 0$ avec $X \in [-1; 1]$.

On passe à la résolution de : $2X^2 + 5X - 3 = 0$. Le discriminant vaut : $\Delta = 25 + 24 = 49$

$$\text{Ainsi les racines sont : } X_1 = \frac{-5-7}{4} = -3 \text{ et } X_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$$

X	$-\infty$	X_1	-1	X_2	1	$+\infty$
$2X^2 + 5X - 3$	+	0	-	0	+	

De ce tableau de signes, on en déduit que $X \in [-1; X_2] = \left[-1; \frac{1}{2}\right]$ c'est-à-dire $\cos(x) \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$

Donc l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} c'est $S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right] \pmod{2\pi}$.

Et sur $] -\pi; \pi]$, on a l'ensemble $S_{]-\pi; \pi]} = \left]-\pi; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$

d) Nous allons commencer ici par faire quelque chose que nous n'avons pas fait jusqu'alors : nous allons réduire l'intervalle de résolution.

Commençons par étudier la périodicité de la fonction $f : x \rightarrow \tan(x) - \tan(3x)$. f est 2π -périodique mais on peut trouver mieux : elle est π -périodique.

Nous allons donc rechercher les solutions de $\tan(x) - \tan(3x) > 0$ sur un intervalle de longueur π : par exemple $[0; \pi]$. Le reste se déduisant par π -périodicité.

$$\begin{aligned} \tan(x) - \tan(3x) > 0 &\iff \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} > 0 \\ &\iff \frac{\sin(x) \cos(3x) - \sin(3x) \cos(x)}{\cos(x) \cos(3x)} > 0 \\ &\iff \frac{\sin(x - 3x)}{\cos(x) \cos(3x)} > 0 \\ &\iff \frac{-\sin(2x)}{\cos(x) \cos(3x)} > 0 \end{aligned}$$

On passe au tableau de signe dans $[0; \pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π				
$\cos(x)$	+	+	0	-	-				
$\cos(3x)$	+	0	-	0	-				
$\cos(x) \cos(3x)$	+	0	-	0	+				
$-\sin(2x)$	0	-	-	0	+	0			
$\frac{-\sin(2x)}{\cos(x) \cos(3x)}$	0	-		+		-		+	0

Dans $[0; \pi]$, l'ensemble des solutions c'est donc $\left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{5\pi}{6}; \pi \right[$.

Dans \mathbb{R} , l'ensemble des solutions c'est donc $S_{\mathbb{R}} = \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{5\pi}{6}; \pi \right[\pmod{2\pi}$.

Et dans $] -\pi; \pi]$, on a l'ensemble des solutions $S_{]-\pi; \pi]} = \left] -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{6}; 0 \right[\cup \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{5\pi}{6}; \pi \right[$.

e)

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{5x}{6}\right) \leq \frac{1}{2} &\iff -\frac{7\pi}{6} \leq \frac{5x}{6} \leq \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \\ &\iff -\frac{7\pi}{5} \leq x \leq \frac{\pi}{5} \pmod{\frac{12\pi}{5}} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions dans \mathbb{R} c'est $S_{\mathbb{R}} = \left[-\frac{7\pi}{5}; \frac{\pi}{5} \right] \pmod{\frac{12\pi}{5}}$, et dans $] -\pi; \pi]$,

$$S_{]-\pi;\pi]} = \left[-\pi; \frac{\pi}{5}\right].$$

f) Pour la dernière, tu ne nous as pas épargnés ! 😞 Effectivement c'est une inéquation en apparence compliquée à résoudre.

😞 Mais remarquez ceci : pour tout réel x , $-1 \leq \cos(|x|^\pi - \pi^x) > \frac{3}{2} \leq 1$.

Et donc... il n'y a pas de solution pour cette inéquation. $S_{\mathbb{R}} = S_{]-\pi;\pi]} = \emptyset$.

Exercice 7



Prérequis : dérivation.

Le but de cet exercice est de calculer les dérivées de \cos^{-1} , \sin^{-1} et \tan^{-1} . A propos de la 3^e question, si vous êtes au lycée, on ne vous demandera pas de connaître ces dérivées. 😊

Si néanmoins cela vous intéresse, je vous donne rendez-vous dans la 2^e partie du tutoriel.

1) **Dérivée de fonctions composées** : Soient $f : F \rightarrow G$ et $g : G \rightarrow H$ deux fonctions dérivables sur leur ensemble de définition. Montrez que $(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$

La composition $g \circ f$ ("g rond f") est l'application qui à $x \in F$ associe $g(f(x))$.

2) **Dérivée de la fonction réciproque** : Soit $f : F \rightarrow G$ une fonction bijective. Montrez que $f^{-1} = \frac{1}{f' \circ f}$.

Une fonction $f : F \rightarrow G$ est bijective lorsque chaque élément $y \in G$ possède un unique antécédent $x \in F$ par $f : f(x) = y$.

Id_F désigne la fonction identité définie sur F et qui à x associe x .

3) Dédisez-en $(\cos^{-1})'$, $(\sin^{-1})'$ et $(\tan^{-1})'$.

Indications :

Secret (cliquez pour afficher)

1) Posez $j = f(x+h) - f(x)$. Plus rigoureusement, il faudrait écrire $j(x, h)$, mais on s'épargne des notations lourdes. 😊

2) Utilisez le fait que $f \circ f^{-1} = Id_F$

Solution :

Secret (cliquez pour afficher)

1) Soit $x \in F$.

On veut montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = g'(f(x)) \times f'(x)$.

Posons $j = f(x+h) - f(x)$. On a : $\lim_{h \rightarrow 0} j = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} &= \frac{g(f(x) + j) - g(f(x))}{h} \\ &= \frac{g(f(x) + j) - g(f(x))}{j} \times \frac{j}{h}\end{aligned}$$

$$\text{Or } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x) + j) - g(f(x))}{j} = g'(f(x)) \text{ et puis } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{j}{h} = f'(x)$$

$$\text{D'où : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = g'(f(x)) \times f'(x)$$

$$2) (f \circ f^{-1})' = (Id_F)' \text{ donc } (f' \circ f^{-1}) \times (f^{-1})' = 1 \text{ d'où le résultat : } (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

3) \cos^{-1} , notée aussi **arccos** pour "arccosinus", est définie de $[-1; 1]$ vers $[0; \pi]$ (vous ne pouviez pas le deviner 😊).
Soit $x \in [-1; 1]$.

$$\text{arccos}'(x) = \frac{1}{-\sin(\text{arccos}(x))}.$$

Posons $z = \sin(\text{arccos}(x))$ et $y = \text{arccos}(x)$. On a donc $z = \sin(y)$ et $x = \cos(y)$ d'où
 $x^2 + z^2 = \cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$ donc $z = \sqrt{1 - x^2}$



Et pourquoi pas $-\sqrt{1 - x^2}$?

$z = \sin(\text{arccos}(x))$. $\text{arccos}(x) \in [0; \pi]$ et l'image de $[0; \pi]$ par \sin c'est $[0; 1]$. On est donc dans les positifs.

$$\text{En résumé : } \text{arccos}'(x) = \frac{1}{-\sin(\text{arccos}(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\text{De même (je passe les calculs), pour } x \in [-1; 1], \text{arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Notez que **arcsin** est définie de $[-1; 1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

$$\text{Et pour } \text{arctan}', \text{ c'est plus facile que les précédents. Vous devriez obtenir : pour } x \in \mathbb{R}, \text{arctan}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Notez également que **arctan** est définie de \mathbb{R} vers $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Voilà qui met fin à cette première partie sur les bases de la trigonométrie. 🤔

Après cette série d'exercices, je crois que vous pouvez faire une pause... avant de repartir de plus belle pour les prochains chapitres qui ne viendront pas tout de suite. Un jour ils seront là, ne vous en faites pas. 😊

Partie 2 : Annexes

Cette partie annexe regroupe d'une part une annexe sur la calculatrice et d'autre part un récapitulatif sur 2 chapitres.

La trigonométrie, côté calculatrice

Je vais vous indiquer ici comment utiliser votre calculatrice CASIO. Hélas je ne connais pas les TI. Je vous propose cependant une autre calculatrice : celle de votre ordinateur.

Dans la suite, une valeur sans le degré ($^{\circ}$) correspondra à une valeur exprimée en radians. Par exemple j'écris le "cosinus de 10 radians" sous la forme $\cos(10)$. Mais avec les radians, il y a de fortes chances que π pointe le bout de son nez. 😊

Les CASIO

Choisir l'unité de mesure

Passer en mode degré

- Si vous avez une CASIO collège : Appuyez 2 fois sur le bouton **MODE**, puis tapez 1 (c'est le mode "Deg" pour les degrés).
- Si vous avez une CASIO lycée (35+, 100+) : Allez dans le menu SET UP en appuyant au préalable sur **SHIFT** (35+) ou **CTRL** (100+). Dans la liste des options disponibles, allez à la ligne "Angle" puis appuyez sur F1 ("Deg").

Passer en mode radian

- Si vous avez une CASIO collège : Appuyez 2 fois sur le bouton **MODE**, puis tapez 2 (c'est le mode "Rad" pour les radians).
- Si vous avez une CASIO lycée (35+, 100+) : idem que précédemment mais appuyez sur F2 ("Rad") au lieu de F1.



C'est quoi la troisième unité de mesure notée "Gra" quand on choisit l'unité ?

Ah le grade... une autre unité très peu utilisée. Vous voulez en savoir plus ? Allez voir son [article](#) sur Wikipédia.

Effectuer les calculs trigonométriques de base

J'entends par "calculs de base" les calculs du genre : $\cos(10^{\circ})$, $\sin(22)$ ou encore $\tan^{-1}(20^{\circ})$.

Calcul avec les fonctions trigonométriques

Supposons que vous vouliez calculer $\cos(50)$ et $\tan(20^{\circ})$.

Pour cela, il vous suffit de choisir la bonne unité (cf. paragraphe précédent) puis :

- Pour $\cos(50)$ (vous avez sélectionné les radians) : appuyez sur la touche **cos** puis tapez 50 puis **EXE**. Vous obtenez à l'écran "0.96" et des poussières.
- Pour $\tan(20^{\circ})$ (vous avez sélectionné les degrés) : appuyez sur **tan** puis tapez 20 puis **EXE**. Vous obtenez à l'écran "0.36" et des poussières.

Calcul avec les fonctions trigonométriques réciproques

Imaginez que vous voulez connaître la valeur d'un angle α tel que $\cos(\alpha) = 0,6$ par exemple, il vous faut utiliser votre calculatrice scientifique.

Sur votre feuille, vous écrivez : $\alpha = \cos^{-1}(0,6)$.



Et comment fait-on pour calculer ce " $\cos^{-1}(0,6)$ " sur la calculatrice ?

Eh bien, vous allez appuyer sur le bouton **SECONDE** (ou **SHIFT**) puis sur le bouton **cos**. Vous voyez alors s'afficher " \cos^{-1} " sur l'écran de la calculatrice. Il vous reste ensuite à écrire le "0.6" puis **EXE**.

1^{er} cas : la calculatrice affiche un "53.13" environ. Vous étiez en mode degrés. Vous pouvez le vérifier : pour les CASIO collège, vous avez un petit "D" en bas de l'écran ; pour les CASIO lycée, allez voir le menu SET UP.

2^e cas : la calculatrice vous affiche un "0.927" environ, et dans ce cas, vous êtes en mode radians.



Sur ma calculatrice c'est écrit "Acs" à la place de \cos^{-1} . C'est normal docteur ?

Effectivement, la fonction réciproque de **cos** porte le joli nom de "**arccosinus**" 🤖 que l'on note **arccos** ou parfois **acos**. La notation de la calculatrice n'est pas utilisée en pratique.

De même **sin**⁻¹ et **tan**⁻¹ sont appelées **arcsinus** et **arctangente**, notées arcsin (ou asin) et arctan (ou atan).

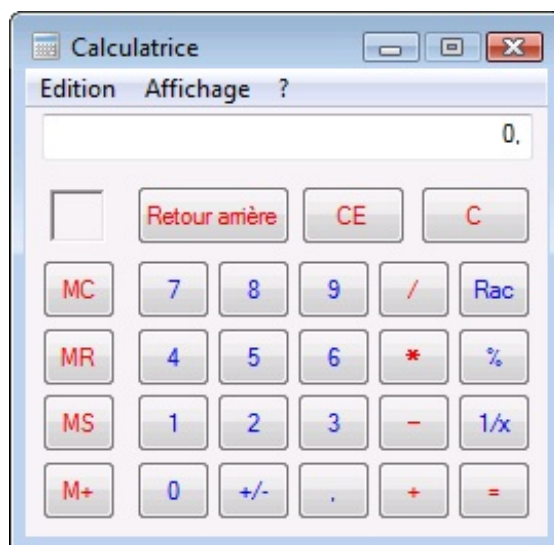
Vous en saurez plus sur les fonctions trigonométriques réciproques dans la 2^e partie du tutoriel.

La calculatrice de l'ordinateur Où est cachée cette calculatrice ?

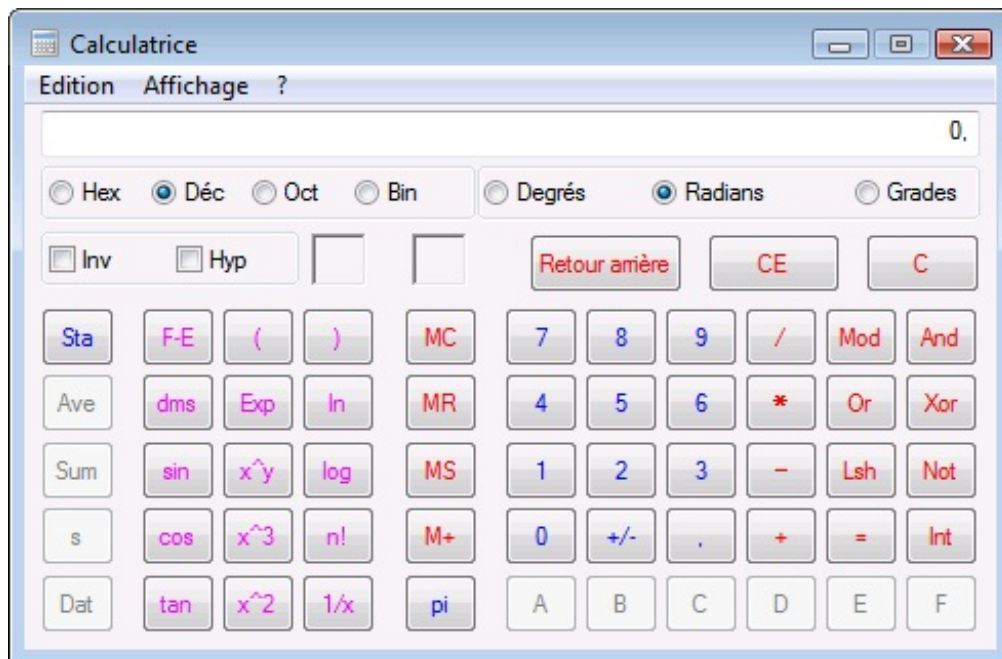
Pour lancer la calculatrice :

- à partir du menu *Démarrer* puis *Rechercher*, tapez "calculatrice" puis cliquez sur le lien ("Calculatrice") qui vous est proposé.
- à partir du menu *Démarrer* puis *Tous les programmes* puis *Accessoires*, puis cliquez sur le lien ("Calculatrice") qui vous est proposé.

Vous devriez avoir la calculatrice standard :



ou la calculatrice scientifique :

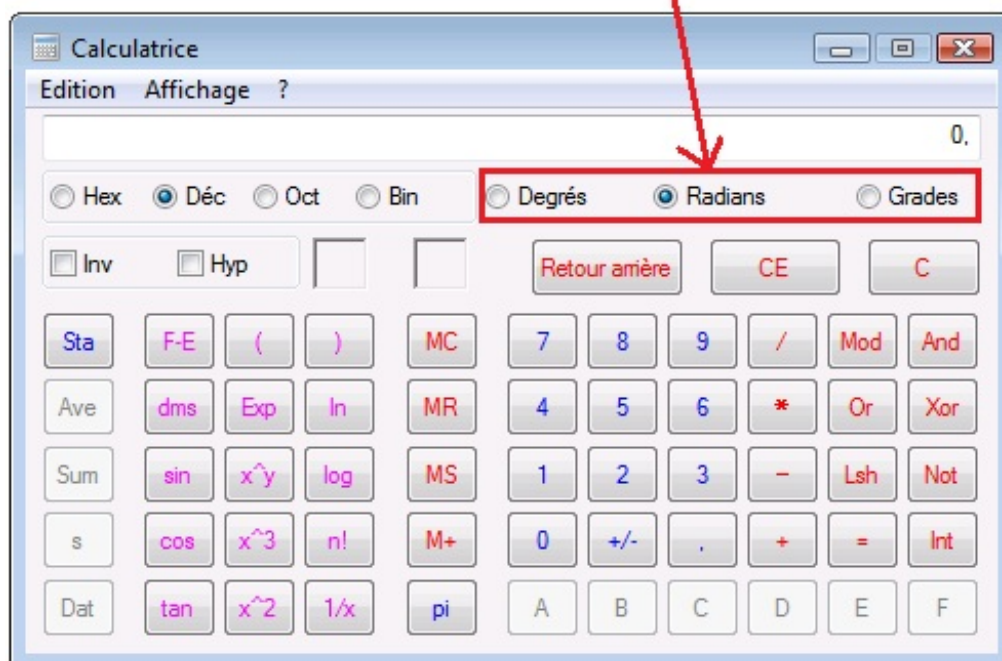


Pour ceux qui sont dans le mode standard, pour les calculs trigonométriques, nous devons utiliser le mode scientifique. Pour cela, sélectionnez *Affichage* puis *Scientifique*.

Calculs de base

Choisissez l'unité souhaitée :

Choisissez l'unité souhaitée dans ce cadre



Calcul avec les fonctions trigos

Nous voulons calculer : $\cos(50)$ puis $\tan(20^\circ)$.

- Pour calculer $\cos(50)$, choisissez le mode "Radians" puis écrivez 50 (avec les touches de votre ordinateur ou de la calculatrice) et appuyez sur le bouton **cos**. Vous retrouvez le 0.96 et quelques.
- Pour $\tan(20^\circ)$, choisissez le mode "Degrés" puis écrivez 20 et appuyez sur le bouton **tan**. Vous retrouvez le 0.36 et quelques.

Calcul avec les fonctions trigos réciproques

Nous voulons calculer $\sin^{-1}(0,8)$ et $\tan^{-1}(10)$. On veut les résultats (ce sont des angles) en degrés. Tout d'abord on choisit donc le mode "Degrés".

- Pour calculer $\sin^{-1}(0,8)$, cochez la case "Inv" (qui permet d'obtenir les fonctions réciproques) puis écrivez 0,8 et appuyez sur le bouton **sin**. Vous obtenez environ 53° .
- Pour $\tan^{-1}(10)$, cochez "Inv" puis écrivez 10 et appuyez sur le bouton **tan**. Vous obtenez environ 84° .



J'ai essayé de calculer $\cos^{-1}(10)$ et la calculatrice affiche "Entrée fonction incorrecte". Pourquoi ?

Eh bien, tout simplement parce que \cos^{-1} n'est définie que sur $[-1; 1]$, de même pour \sin^{-1} . Par contre \tan^{-1} est définie sur \mathbb{R} .

Encore une fois, vous en saurez davantage dans la 2^e partie du tutoriel. 😊

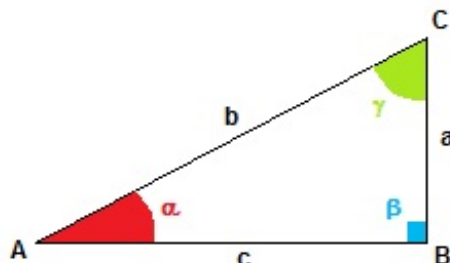
Avec ça, vous voilà fin prêts pour les calculs trigonométriques les plus tarabiscotés. 🤪

Formulaire

Comme son nom l'indique, cette annexe regroupe l'essentiel des formules que vous pouvez rencontrer dans ce tutoriel. Logiquement, si vous suivez le tutoriel comme il faut, ce formulaire ne vous sera pas nécessaire. Mais pour des révisions ou alors une formule oubliée 😊, ça peut vous être utile.

Définitions de base

Avec un triangle rectangle



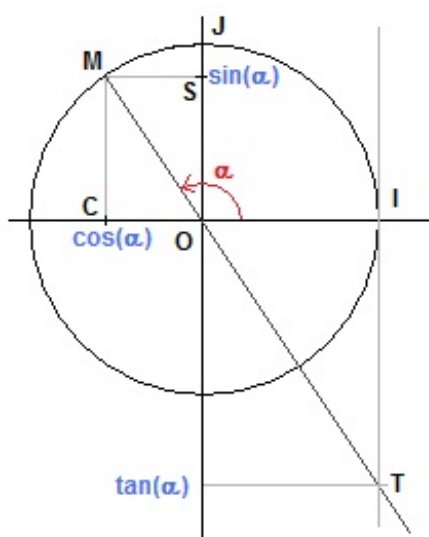
ABC est un triangle rectangle en B . On note $\alpha = \widehat{CAB}$ (puis $\beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{BCA}$). Pour les longueurs : $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. On définit alors :

$$\cos(\alpha) = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{CB}{AC} = \frac{a}{b}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{CB}{AB} = \frac{a}{c}$$

Avec le cercle unité



On se place dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. On place M sur le cercle unité. On note $\alpha = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$. Soient C et S les projetés orthogonaux de M respectivement sur (OI) et (OJ) . On place T à l'intersection de (OM) et de la perpendiculaire à (OI) passant par I . Sous ces conditions, on définit :

$$\cos(\alpha) = \overline{OC}$$

$$\sin(\alpha) = \overline{OS}$$

$$\tan(\alpha) = \overline{IT}$$

Remarque : La notation d'une longueur surmontée d'une barre correspond à une mesure algébrique. C'est une longueur qui a un signe. Ce signe dépend du repère. Ainsi, dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, sachant que \overrightarrow{OC} a un sens opposé à celui de \overrightarrow{OI} , $\overline{OC} < 0$.

Valeurs remarquables

Version triangle rectangle

Fonctions/angles	30°	45°	60°
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Version cercle unité

Fonctions/angle	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
sin	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Formulaire

Périodicité

cos, **sin** et **tan** sont 2π -périodiques. **tan** est de plus π -périodique.

Domaine de définition	Formule
$x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}$	$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$
$x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}$	$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$
$x \in \mathbb{R} - \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}$	$\tan(x + 2k\pi) = \tan(x)$
$x \in \mathbb{R} - \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}$	$\tan(x + k\pi) = \tan(x)$

Parité

La fonction **cos** est paire, tandis que **sin** et **tan** sont impaires.

Domaine de définition	Formule
$x \in \mathbb{R}$	$\cos(-x) = \cos(x)$
$x \in \mathbb{R}$	$\sin(-x) = -\sin(x)$
$x \in \mathbb{R} - \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$	$\tan(-x) = -\tan(x)$

Et les autres formules

Domaine de définition	Formule
$x \in \mathbb{R}$	$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$x \in \mathbb{R}$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
$x \in \mathbb{R}$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$
$x \in \mathbb{R}$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
$x \in \mathbb{R}$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
$x \in \mathbb{R}$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
$x \in \mathbb{R}$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
$a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}$	$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$
$a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}$	$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$
$a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}$	$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$
$a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}$	$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$
$a \in \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \quad b \in \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right),$ $(a + b) \in \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \tan(b)}$
$a \in \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \quad b \in \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right),$ $(a - b) \in \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \tan(b)}$
$a \in \mathbb{R}$	$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ &= 1 - 2\sin^2(a) \\ &= 2\cos^2(a) - 1 \end{aligned}$
$a \in \mathbb{R}$	$\sin(2a) = 2\sin(a) \cos(a)$
$a \in \mathbb{R}$	$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$
$a \in \mathbb{R}$	$\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$
$a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}$	$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b))$
$a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}$	$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$
$a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}$	$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b))$
$p \in \mathbb{R}, \quad q \in \mathbb{R}$	$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$p \in \mathbb{R}, \quad q \in \mathbb{R}$	$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$p \in \mathbb{R}, \quad q \in \mathbb{R}$	$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$x \in \mathbb{R} - (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$	$\cos(x) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
$x \in \mathbb{R} - (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$	$\sin(x) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
$x \in \mathbb{R} - ((\pi + 2\pi\mathbb{Z}) \cup (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}))$	$\tan(x) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
$x \in \mathbb{R}$	$\cos'(x) = -\sin(x)$
$x \in \mathbb{R}$	$\sin'(x) = \cos(x)$
$x \in \mathbb{R} - (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$	$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

Résolution d'équations trigonométriques

- $\cos(A) = \cos(B) \iff A \equiv B[2\pi] \text{ ou } A \equiv -B[2\pi]$
- $\sin(A) = \sin(B) \iff A \equiv B[2\pi] \text{ ou } A \equiv \pi - B[2\pi]$

Lexique

Ce chapitre fait office de lexique regroupant les notions rencontrées au fil de ce tutoriel. La première partie du lexique est consacrée à la partie "Les bases de la trigonométrie". Une deuxième partie sur les notions avancées apparaîtra en temps voulu.

Lexique : notions de base

A

Angle orienté : c'est un angle qui est mesuré dans un sens (direct ou indirect) : il est positif ou négatif. L'angle orienté mesuré entre 2 vecteurs \vec{u} et \vec{v} est noté $(\vec{u}; \vec{v})$.

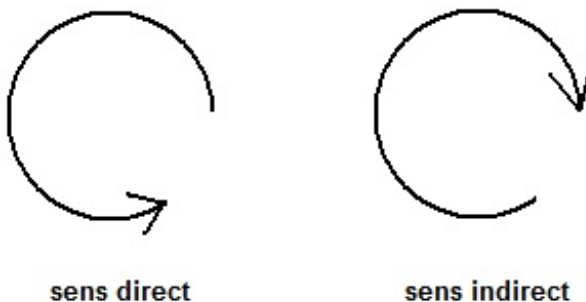
C

Cercle unité : dans un repère orthonormal d'origine O , on définit le cercle unité comme étant le cercle de centre O et de rayon 1 .

Congruence : cf. **Modulo**.

D

Direct (sens) : nommé également sens trigonométrique, le sens direct correspond au sens inverse des aiguilles d'une montre. Le sens indirect ou anti-trigonométrique correspond alors au sens des aiguilles d'une montre.



I

Impaire (fonction) : cf. **Paire**.

Indirect (sens) : cf. **Direct**.

M

Mesure principale : soit a un angle mesuré en radians. Notons m_a la mesure principale de a . m_a est telle que : $a \equiv m_a[2\pi]$ et $m_a \in]-\pi; \pi]$.

Modulo : soient a , b et m des réels. On dit que a est congru (ou égal) à b modulo m , et on note $a \equiv b[m]$ (ou $a = b[m]$ par abus de langage), s'il existe un entier relatif k tel que $a = b + k \times m$.

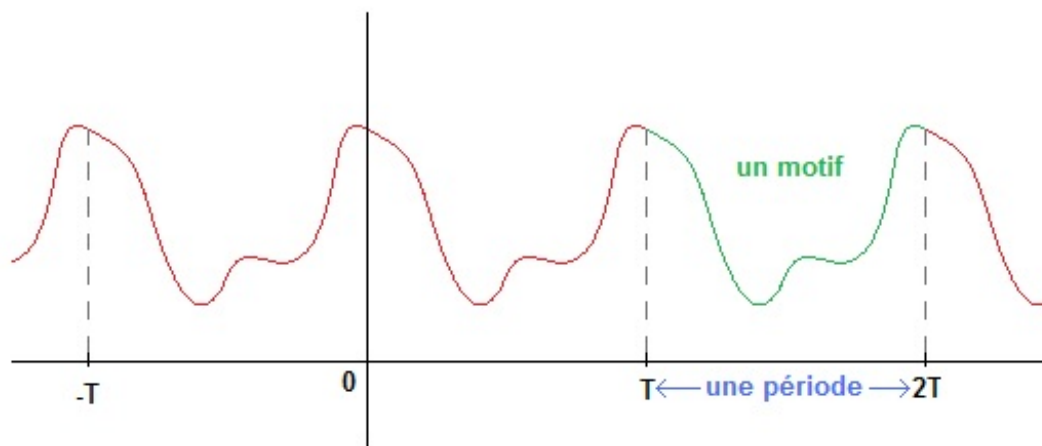
P

Paire (fonction) : soit f une fonction définie sur l'ensemble E (symétrique par rapport à $\{0\}$).

f est paire si pour tout x de E , $f(-x) = f(x)$.

f est impaire si pour tout x de E , $f(-x) = -f(x)$.

Périodique : une fonction f définie sur un ensemble E est périodique de période $T \in \mathbb{R}$ si pour tout x de E tel que $x + T \in E$, $f(x + T) = f(x)$. On dit aussi que f est T -périodique. Graphiquement une fonction est périodique si sa courbe contient un motif qui se répète.



R

Radian : c'est une unité de mesure d'angle signée et notée "rad". La mesure est positive dans le sens direct et négative dans le sens indirect. Pour passer en degrés, on multiplie par $\frac{\pi}{180}$. Pour plus d'informations, retournez [ici](#).

Ce tutoriel est loin d'être fini mais, pour les niveaux collège/lycée, il peut déjà constituer une bonne base pour s'en sortir en trigo.

Si vous avez des remarques (vous en aurez très certainement 😊), n'hésitez pas à m'en faire part.

Sur la suite de ce tutoriel/cours, voici ce que j'envisage (je n'ai pas encore réfléchi à ce que j'y mettrai dans le détail) :

Partie II : La trigo : notions avancées

1. La trigo et les complexes
2. Applications (équations différentielles notamment)
3. Les fonctions réciproques
4. La trigo hyperbolique(1/2)
5. La trigo hyperbolique(2/2)
6. Exercices

Partie III : Annexes

1. Formulaire
2. Lexique

Pour la partie "Annexes", je pense ajouter des chapitres non abordés dans les 2 premières parties :

- coordonnées polaires
- développements limités en trigo
- séries de Fourier (ça reste à voir)
- bric-à-brac (ce qui n'a pu être casé ailleurs)

Sur ce, je vous souhaite une bonne lecture. 😊