
CARRE MAGIQUE DE DIRICHLET

Aymane LEYLI

Zakaria EL BAKKOURI

Professeur encadrant : Mr. Vincent BARRA

1^{ère} année Institut Supérieur d'Informatique, de Modélisation et de leurs Applications

2018/2019

Résumé

Un carré magique de Dirichlet est une grille carrée dont chaque case est la moyenne de ses quatre voisins. C'est une modélisation simplifiée de la propagation de la chaleur. Le but de ce projet est de mettre en œuvre certaines propriétés de ce carré magique et d'implémenter un programme permettant de résoudre ce problème.

Abstract

A Dirichlet's magic square is a grid of which each square is the average of its four neighbours. It is a simplified modeling of heat's propagation. The purpose of this project is to prove some properties of this magic square and to implement a program in order to solve this problem.

Sommaire

| | |
|---|----|
| Introduction | 4 |
| I-Propriétés du carré magique de Dirichlet | 4 |
| 1-Structure d'espace vectoriel | 4 |
| 2-Principe du maximum/minimum..... | 8 |
| 3-Unicité..... | 9 |
| 4-Existence..... | 10 |
| II-Algorithmes de construction | 11 |
| 1-Algorithme simple..... | 12 |
| 2-Algorithme avancé..... | 13 |
| 3-Comparaison entre les deux algorithmes..... | 14 |
| III-Carré magique et équation de la chaleur | 15 |
| Conclusion | 16 |
| Référence | 16 |

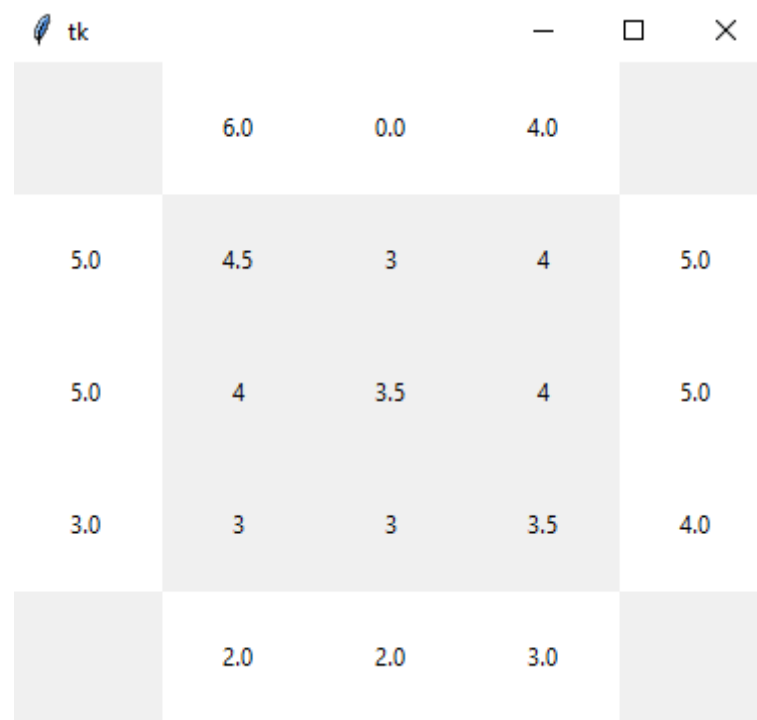
INTRODUCTION

Dans le cadre de notre première année en école d'ingénieur en informatique à l'ISIMA, il nous est proposé un projet permettant de mettre en pratique nos connaissances et nos compétences acquises durant cette année. Pour ce, nous avons mis en place des algorithmes afin de modéliser le carré magique de Dirichlet.

Un carré magique de Dirichlet est une modélisation simplifiée d'un problème très connu « La propagation de la chaleur ». Plus précisément, un carré de Dirichlet a été conçu afin de donner une idée dont la précision dépend de la taille n choisie sur la température à chaque point (considéré ici comme case) à l'équilibre (régime permanent).

Notre étude consiste également à démontrer plusieurs propriétés du Carré de Dirichlet à savoir : l'existence, l'unicité ainsi que le principe du maximum/minimum.

I- Propriétés du Carré Magique de Dirichlet



| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 6.0 | 0.0 | 4.0 | |
| 5.0 | 4.5 | 3 | 4 | 5.0 |
| 5.0 | 4 | 3.5 | 4 | 5.0 |
| 3.0 | 3 | 3 | 3.5 | 4.0 |
| | 2.0 | 2.0 | 3.0 | |

Ci-dessus, un exemple de carré magique dans lequel chaque élément est la moyenne de ses quatre voisins. Par exemple $4.5 = \frac{3+6+5+4}{4}$ et $3.5 = \frac{3+4+3+4}{4}$

1- Structure d'espace vectoriel

Soit E l'ensemble des carrés magiques de Dirichlet de taille n. On prend $n = 3$ pour cette démonstration.

| | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| | A | B | C | |
| L | m_{11} | m_{12} | m_{13} | D |
| K | m_{21} | m_{22} | m_{23} | E |
| J | m_{31} | m_{32} | m_{33} | F |
| | I | H | G | |

| | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | A' | B' | C' | |
| L' | n_{11} | n_{12} | n_{13} | D' |
| K' | n_{21} | n_{22} | n_{23} | E' |
| J' | n_{31} | n_{32} | n_{33} | F' |
| | I' | H' | G' | |

| | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| | A'' | B'' | C'' | |
| L'' | p_{11} | p_{12} | p_{13} | D'' |
| K'' | p_{21} | p_{22} | p_{23} | E'' |
| J'' | p_{31} | p_{32} | p_{33} | F'' |
| | I'' | H'' | G'' | |

Montrons d'abord que $(E, +)$ est un groupe abélien. Soit M, N et P respectivement les carrés magiques de Dirichlet ci-dessous :

$M+(N + P)=$

| | | | | |
|-----------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------|
| | A+A'+A'' | B+ B' + B'' | C+C'+C'' | |
| L+L'+L'' | $m_{11} + n_{11} + p_{11}$ | $m_{11} + n_{12} + p_{12}$ | $m_{13} + n_{13} + p_{13}$ | D+D'+D'' |
| K+K'+K'' | $m_{21} + n_{21} + p_{21}$ | $m_{22} + n_{22} + p_{22}$ | $m_{23} + n_{23} + p_{23}$ | E+E'+E'' |
| J+J'+J'' | $m_{13} + n_{13} + p_{13}$ | $m_{32} + n_{32} + p_{32}$ | $m_{33} + n_{33} + p_{33}$ | F+F'+F'' |
| | I+I'+I'' | H+H'+H'' | G+G'+G'' | |

D'après l'associativité de la loi '+' dans R, on remarque que $M+(N+P)=(M+N)+P$ d'où l'associativité de '+' dans E.

De même puisque $O_E =$

| | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | |

Alors $M + O_E =$

| | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| | A | B | C | |
| L | m_{11} | m_{12} | m_{13} | D |
| K | m_{21} | m_{22} | m_{23} | E |
| J | m_{31} | m_{32} | m_{33} | F |
| | I | H | G | |

Donc $M + O_E = O_E + M = M$

La commutativité de la loi '+' découle de la commutativité dans R.

$(E, +)$ est un groupe abélien.

Montrons que $\forall \alpha \in R, \forall (M, N) \in E^2 \quad \alpha(M + N) = \alpha M + \alpha N$

$\alpha(M + N) =$

| | | | | |
|--------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|--------------------------|
| | $\alpha (\mathbf{A+A'})$ | $\alpha (\mathbf{B+B'})$ | $\alpha (\mathbf{C+C'})$ | |
| $\alpha (\mathbf{L+L'})$ | $\alpha(m_{11} + n_{11})$ | $\alpha(m_{11} + n_{12})$ | $\alpha(m_{13} + n_{13})$ | $\alpha (\mathbf{D+D'})$ |
| $\alpha (\mathbf{K+K'})$ | $\alpha(m_{21} + n_{21})$ | $\alpha(m_{22} + n_{22})$ | $\alpha(m_{23} + n_{23})$ | $\alpha (\mathbf{E+E'})$ |
| $\alpha (\mathbf{J+J'})$ | $\alpha(m_{13} + n_{13})$ | $\alpha(m_{32} + n_{32})$ | $\alpha(m_{33} + n_{33})$ | $\alpha (\mathbf{F+F'})$ |
| | $\alpha (\mathbf{I+I'})$ | $\alpha (\mathbf{H+H'})$ | $\alpha (\mathbf{G+G'})$ | |

$$=$$

| | | | | |
|---------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------|
| | $\alpha \mathbf{A}$ | $\alpha \mathbf{B}$ | $\alpha \mathbf{C}$ | |
| $\alpha \mathbf{L}$ | $\alpha \mathbf{m}_{11}$ | $\alpha \mathbf{m}_{12}$ | $\alpha \mathbf{m}_{13}$ | $\alpha \mathbf{D}$ |
| $\alpha \mathbf{K}$ | $\alpha \mathbf{m}_{21}$ | $\alpha \mathbf{m}_{22}$ | $\alpha \mathbf{m}_{23}$ | $\alpha \mathbf{E}$ |
| $\alpha \mathbf{J}$ | $\alpha \mathbf{m}_{31}$ | $\alpha \mathbf{m}_{32}$ | $\alpha \mathbf{m}_{33}$ | $\alpha \mathbf{F}$ |
| | $\alpha \mathbf{I}$ | $\alpha \mathbf{H}$ | $\alpha \mathbf{G}$ | |

$$+$$

| | | | | |
|----------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|----------------------|
| | $\alpha \mathbf{A}'$ | $\alpha \mathbf{B}'$ | $\alpha \mathbf{C}'$ | |
| $\alpha \mathbf{L}'$ | $\alpha \mathbf{n}_{11}$ | $\alpha \mathbf{n}_{12}$ | $\alpha \mathbf{n}_{13}$ | $\alpha \mathbf{D}'$ |
| $\alpha \mathbf{K}'$ | $\alpha \mathbf{n}_{21}$ | $\alpha \mathbf{n}_{22}$ | $\alpha \mathbf{n}_{23}$ | $\alpha \mathbf{E}'$ |
| $\alpha \mathbf{J}'$ | $\alpha \mathbf{n}_{31}$ | $\alpha \mathbf{n}_{32}$ | $\alpha \mathbf{n}_{33}$ | $\alpha \mathbf{F}'$ |
| | $\alpha \mathbf{I}'$ | $\alpha \mathbf{H}'$ | $\alpha \mathbf{G}'$ | |

$= \alpha M + \alpha N$. D'où la distributivité de la loi \cdot sur la loi $+$.

Montrons que $\forall (\alpha, \beta) \in R^2, \forall M \in E \quad (\alpha + \beta)M = \alpha M + \beta M$

$(\alpha + \beta)M =$

| | | | | |
|------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------|
| | $(\alpha + \beta)\mathbf{A}$ | $(\alpha + \beta)\mathbf{B}$ | $(\alpha + \beta)\mathbf{C}$ | |
| $(\alpha + \beta)\mathbf{L}$ | $(\alpha + \beta)\mathbf{m}_{11}$ | $(\alpha + \beta)\mathbf{m}_{12}$ | $(\alpha + \beta)\mathbf{m}_{13}$ | $(\alpha + \beta)\mathbf{D}$ |
| $(\alpha + \beta)\mathbf{K}$ | $(\alpha + \beta)\mathbf{m}_{21}$ | $(\alpha + \beta)\mathbf{m}_{22}$ | $(\alpha + \beta)\mathbf{m}_{23}$ | $(\alpha + \beta)\mathbf{E}$ |
| $(\alpha + \beta)\mathbf{J}$ | $(\alpha + \beta)\mathbf{m}_{31}$ | $(\alpha + \beta)\mathbf{m}_{32}$ | $(\alpha + \beta)\mathbf{m}_{33}$ | $(\alpha + \beta)\mathbf{F}$ |
| | $(\alpha + \beta)\mathbf{I}$ | $(\alpha + \beta)\mathbf{H}$ | $(\alpha + \beta)\mathbf{G}$ | |

$$\begin{array}{c}
= \\
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
| | | | | |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| | αA | αB | αC | |
| αL | αm_{11} | αm_{12} | αm_{13} | αD |
| αK | αm_{21} | αm_{22} | αm_{23} | αE |
| αJ | αm_{31} | αm_{32} | αm_{33} | αF |
| | αI | αH | αG | |

\\
+ \\
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
| | βA | βB | βC | |
| βL | βm_{11} | βm_{12} | βm_{13} | βD |
| βK | βm_{21} | βm_{22} | βm_{23} | βE |
| βJ | βm_{31} | βm_{32} | βm_{33} | βF |
| | βI | βH | βG | |

= \alpha M + \beta M
\end{array}$$

On peut aisément et de manière similaire démontrer que

$$\forall (\alpha, \beta) \in R^2, \forall M \in E \quad (\alpha \times \beta)M = \alpha.(\beta.M)$$

Et $\forall M \in E \quad 1 \times M = M$ Ce qui nous permet de conclure que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel de dimension $4n$

2- Principe du maximum/minimum

Objectif

Le but de cette partie est de démontrer que le maximum et le minimum des éléments du carré magique se trouvent toujours aux bords. Nous nous contenterons uniquement du maximum. La démonstration du minimum étant similaire, quitte à inverser les inégalités.

Démonstration

Soit M le maximum des éléments du carré magique. On supposera que M se trouve au milieu du carré.

| | | | | | |
|--|--|---|----------|---|--|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | a | | |
| | | d | M | b | |
| | | | c | | |
| | | | | | |

Par définition d'un carré de Dirichlet : $M = \frac{a+b+c+d}{4}$

a, b, c et d étant tous inférieurs à M, leurs moyenne ne pourrait être égale à M sauf si a=b=c=d = M.

Sinon si par exemple $a < M$, alors forcément au moins un des autres trois nombres est strictement supérieur à M, ce qui est absurde (étant donné que M est le max).

De proche en proche, on pourra généraliser cette égalité sur l'ensemble des éléments du carré de Dirichlet (y inclut les éléments de bords). On obtient donc le carré suivant :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | M | M | M | M | |
| M | M | M | M | M | M |
| M | M | M | M | M | M |
| M | M | M | M | M | M |
| M | M | M | M | M | M |
| | M | M | M | M | |

Conclusion

Le maximum ainsi que le minimum se trouvent forcément sur les bords du Carré de Dirichlet.

3- Unicité

Objectif

L'objectif de cette partie est de démontrer l'unicité du carré magique. C'est-à-dire que pour des éléments de bords donnés, le carré magique correspondant est toujours le même

Démonstration

Supposons que N et P ont les mêmes éléments de bords, c'est-à-dire $A' = A''$, $B' = B''$... etc.

$$N - P =$$

| | | | | |
|----------|-------------------|-------------------|-------------------|----------|
| | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | $n_{11} - p_{11}$ | $n_{12} - p_{12}$ | $n_{13} - p_{13}$ | 0 |
| 0 | $n_{21} - p_{21}$ | $n_{22} - p_{22}$ | $n_{23} - p_{23}$ | 0 |
| 0 | $n_{31} - p_{31}$ | $n_{32} - p_{32}$ | $n_{33} - p_{33}$ | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | |

Ayant une structure d'espace vectoriel, la différence de deux carrés magiques est un carré magique. On peut donc appliquer le principe du maximum/minimum. Les éléments de bords étant tous nuls le maximum ainsi que le minimum des éléments du carré magique valent 0.

$$\text{C'est-à-dire } 0 \leq n_{ij} - p_{ij} \leq 0$$

Donc

$$p_{ij} = 0 \text{ pour } i,j=1,2,3$$

Alors $N = P$, d'où l'unicité du carré magique.

4- Existence

Objectif

Cette partie a pour but démontrer l'existence du Carré magique de Dirichlet. C'est-à-dire quelque soit les nombres de bords choisis, il existe un carré vérifiant les propriétés du carré magique de Dirichlet.

Démonstration

Pour démontrer l'existence on expliquera brièvement l'algorithme de construction du carré magique de Dirichlet. Il sera détaillé dans les prochaines parties.

On initialise d'abord tous les éléments à 0.

| | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| | A | B | C | |
| L | a_{11} | a_{12} | a_{13} | D |
| K | a_{21} | a_{22} | a_{23} | E |
| J | a_{31} | a_{32} | a_{33} | F |
| | I | H | G | |

On calcule les éléments a_{ij} . On remarque que leur valeur augmente d'une itération à une autre. Notons bien que les a_{ij} sont inférieurs à la valeur maximale des éléments des bords.

Donc la suite des itérations d'un élément a_{ij} est une suite croissante et bornée, donc elle est convergente vers une limite qui vérifie bien les propriétés d'un carré magique de Dirichlet.

D'où l'existence d'un carré magique de Dirichlet.

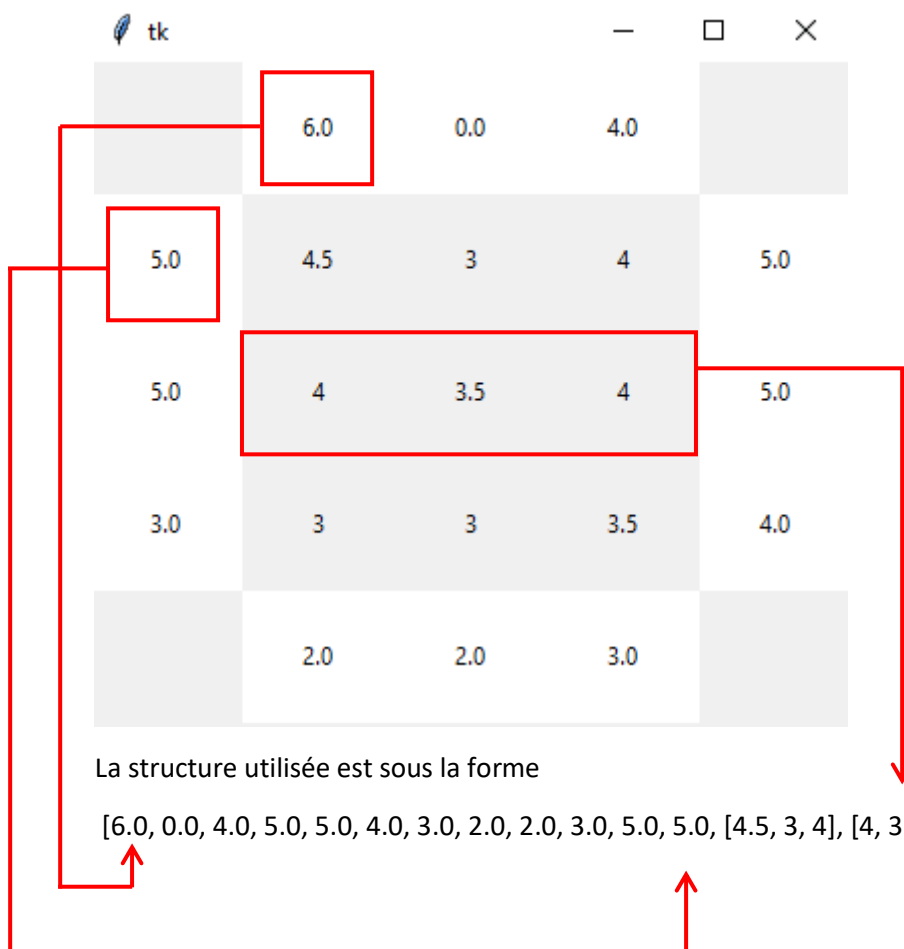
Conclusion

Quelque soit les nombres de bords choisis, il existe un carré vérifiant les propriétés d'un carré magique de Dirichlet.

II- Algorithmes de construction

Structure de données utilisée pour un carré magique de Dirichlet :

Pour l'exemple précédent :



1- Algorithme simple

L'idée de cet algorithme est de parcourir les éléments du carré magique en calculant la moyenne à chaque élément. La fonction `carre_magique` prend en paramètre la taille de carré de Dirichlet n ainsi qu'une précision. Elle demande à l'utilisateur à saisir $4n$ nombres qui seront les éléments de bords. Leur ordre dans le carré magique est illustré dans l'exemple précédent. Une fois les éléments saisis, une boucle commence à calculer les éléments du carré magique qui ont été initialisés à 0. La boucle s'arrête lorsque la différence de deux itérations successives du premier élément est inférieure à la précision. Une interface graphique s'affiche contenant le carré magique en mettant la couleur des éléments de bords en blanc afin qu'ils soient bien distingués. Le temps pris par l'exécution de cette fonction ainsi que le nombre d'itérations pour atteindre la condition d'arrêt sont affichés sur le shell. Après la fermeture de l'interface, la fonction retourne en sortie la liste de listes contenant le carré magique.

Exemple d'exécution :

```
>>> carre_magique(4,0.000001)
donner le chiffre 7
donner le chiffre 3
donner le chiffre 13
donner le chiffre 28
donner le chiffre 19
donner le chiffre 14
donner le chiffre 8
donner le chiffre 14
donner le chiffre 14
donner le chiffre 0
donner le chiffre 4
donner le chiffre 4
donner le chiffre 3
donner le chiffre 1
donner le chiffre 3
donner le chiffre 5
0.0054204463958740234 592
```

| | | | | | |
|-----|-----|-----|------|------|------|
| | 7.0 | 3.0 | 13.0 | 28.0 | |
| 5.0 | 6 | 7 | 12 | 18 | 19.0 |
| 3.0 | 5 | 7 | 10 | 13 | 14.0 |
| 1.0 | 4 | 6 | 8 | 10 | 8.0 |
| 3.0 | 4 | 5 | 6 | 11 | 14.0 |
| | 4.0 | 4.0 | 0.0 | 14.0 | |

Retour de la fonction

```
[7.0, 3.0, 13.0, 28.0, 19.0, 14.0, 8.0, 14.0, 14.0,
0.0, 4.0, 4.0, 3.0, 1.0, 3.0, 5.0, [6, 7, 12, 18],
[5, 7, 10, 13], [4, 6, 8, 10], [4, 5, 6, 11]]
```

2- Algorithme avancé

La structure du carré magique reste la même. On ne change que la manière de se déplacer sur le carré. Cet algorithme consiste à implémenter une marche aléatoire dans le carré. En effet, à chaque étape, on se déplace avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ sur les voisins (gauche, droite, en haut, en bas). Cependant, il nous faudra distinguer les cas où on se trouve sur les bords. On calcule ensuite la valeur de la case sur laquelle on se trouve, puis on continue notre déplacement avec la même méthode.

Les différents cas particuliers à traiter :

- ➔ Cas où on se trouve sur la première ligne et sur la première colonne
- ➔ Cas où on se trouve sur la première ligne et sur la dernière colonne
- ➔ Cas où on se trouve sur la dernière ligne et sur la première colonne
- ➔ Cas où on se trouve sur la dernière ligne et sur la dernière colonne
- ➔ Cas où on se trouve sur la première ligne et sur une colonne quelconque
- ➔ Cas où on se trouve sur la dernière ligne et sur une colonne quelconque
- ➔ Cas où on se trouve sur la première colonne et sur une ligne quelconque
- ➔ Cas où on se trouve sur la dernière colonne et sur une ligne quelconque
- ➔ Cas général (à l'intérieur du carré)

Exemple d'exécution :

| | | | | | |
|--|-----|-----|-----|------|------|
| <pre> >>> carre_magique_ale(4,0.000001) donner un nombre 7 donner un nombre 3 donner un nombre 13 donner un nombre 28 donner un nombre 19 donner un nombre 14 donner un nombre 8 donner un nombre 14 donner un nombre 0 donner un nombre 4 donner un nombre 4 donner un nombre 3 donner un nombre 1 donner un nombre 3 donner un nombre 5 0.031249523162841797 717 </pre> | | | | | |
| | | 7.0 | 3.0 | 13.0 | 28.0 |
| 5.0 | 6 | 7 | 12 | 18 | 19.0 |
| 3.0 | 5 | 7 | 10 | 13 | 14.0 |
| 1.0 | 4 | 6 | 8 | 10 | 8.0 |
| 3.0 | 4 | 5 | 6 | 11 | 14.0 |
| | 4.0 | 4.0 | 0.0 | 14.0 | |

Retour de la fonction :

```
[7.0, 3.0, 13.0, 28.0, 19.0, 14.0, 8.0, 14.0, 14.0, 0.0, 4.0, 4.0, 3.0, 1.0, 3.0, 5.0, [6, 7, 12, 18], [5, 7, 10, 13], [4, 6, 8, 10], [4, 5, 6, 11]]
```

3- Comparaison entre les deux algorithmes

Le premier algorithme "Algorithme simple", est un programme qui permet de se déplacer sur la carré élément par élément en y calculant à chaque itération la moyenne des quatre voisins. Ce processus se répète jusqu'à ce que la condition d'arrêt se vérifie. Il a alors une complexité dépendant directement de la taille du carré n .

Le deuxième algorithme "Algorithme avancé" se base sur le principe de la marche aléatoire sur le carré. Cela signifie qu'à chaque itération, l'itération suivante ne dépend que de l'état actuel et non pas du passé. Normalement, la complexité de ce programme ne dépend pas de la taille du carré magique mais plutôt du pas choisi.

D'après les tests qu'on a réalisés, le premier algorithme s'est avéré plus rapide lorsqu'on choisit un ' n ' plus petit. Mais pour les ' n ' plus grands ($n > 10$), le deuxième algorithme devient plus efficace car il ne dépend pas de la taille n .

III- Carré magique et équation de la chaleur

Principe :

Supposons une pièce bordée par deux autres pièces ayant une certaine température.

Nous connaissons les températures à l'extérieur, et nous recherchons celle de la pièce principale.

| | | |
|--------------|-----------------------|--------------|
| Pièce 1 (T1) | Pièce principale (Tp) | Pièce 2 (T2) |
|--------------|-----------------------|--------------|

Nous savons que, lorsqu'un corps chaud est en contact avec un corps froid, la température de ce dernier va augmenter, et celle du corps chaud va diminuer.

A l'état stationnaire (lorsque la température ne varie plus), et d'après Fourier, il faut que l'écart de température entre la pièce 1 et la pièce principale, soit le même que celui entre la pièce 2 et la pièce principale. En d'autres termes, il faut que T_p soit la moyenne de T_1 et T_2 :

$$T_p = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Généralisation :

Supposons que nous disposons d'un ensemble de pièces comme le montre la figure ci-dessous.

| | | | | |
|--|----|----|----|--|
| | | | | |
| | | T1 | | |
| | T4 | TP | T2 | |
| | | T3 | | |
| | | | | |

D'après l'étude précédente, nous pouvons affirmer que, la température de la pièce principale (TP) sera la moyenne des températures des 4 pièces qui l'entourent (T1, T2, T3 et T4).

Nous avons également montré que nous avons toujours une solution et même que celle-ci est unique. On peut alors confirmer que nous atteindrons un état stationnaire, d'où la validité des résultats précédents.

Démonstration :

D'après l'équation de la chaleur en 2D : $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$ (1)

Avec $T(x,y,t)$: la température au point d'abscisse x , d'ordonnée y à l'instant t ,

Et α le coefficient de diffusion.

Dans notre cas, on considère que l'équilibre est déjà atteint ($t \rightarrow \infty$) et que la distribution de la chaleur dans la plaque est uniforme ($\alpha = 1$).

$$(1) \text{ Devient : } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

En fixant des pas Δx et Δy très petits, l'idée est de chercher à approcher la valeur inconnue $T(x,y)$ pour introduire un système discret. D'où l'utilisation du développement de Taylor pour les dérivées de premier et second ordre, ce qui nous donne :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T(x) - T(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\text{Et donc } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\frac{T(x) - T(x - \Delta x)}{\Delta x} - \frac{T(x + \Delta x) - T(x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

On obtient finalement : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{2T(x) - T(x - \Delta x) - T(x + \Delta x)}{\Delta x^2}$

De même : $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{2T(y) - T(y - \Delta y) - T(y + \Delta y)}{\Delta y^2}$

On peut noter $T(x - \Delta x) = T(i - 1)$ et $T(y - \Delta y) = T(j - 1)$

Avec $\Delta x = \Delta y = 1$ un déplacement d'une case de la grille à une case voisine

(1) Devient $2T(i, j) - T(i - 1, j) - T(i + 1, j) + 2T(i, j) - T(i, j - 1) - T(i, j + 1) = 0$

D'où
$$T(i, j) = \frac{T(i-1, j) + T(i+1, j) + T(i, j-1) + T(i, j+1)}{4}$$

Cette approximation est bien la relation sur laquelle se base le carré magique de Dirichlet.

Conclusion

Nous avons ainsi implémenté deux algorithmes qui nous ont permis de résoudre la problématique du carré magique de Dirichlet.

Le premier algorithme, assez coûteux en termes d'itérations, a été implémenté en parcourant tout le carré et en utilisant une condition d'arrêt qui dépendait de deux itérations successives.

Le second, moins coûteux, nous a paru comme étant plus efficace, surtout quand on dispose d'un carré de grande taille.

Nous avons eu certaines difficultés durant notre projet à savoir trouver une idée pour minimiser la complexité du programme pour un algorithme plutôt avancé. Nous avons pu les surmonter grâce à l'aide de notre professeur encadrant Mr. Vincent Barra que nous tenons à remercier pour le temps qu'il a accordé pour notre projet. Sans lui, ce travail n'aurait pas vu le jour.

Références

Les carrés magiques de Dirichlet (Olivier Druet) :

<https://www.youtube.com/watch?v=2oq1UDpqEGQ&>

Les carrés magiques de Dirichlet et les températures... :

http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/dirichlet.htm

Benhissen, N & Khechekhouche, Abderrahmane. (2012). MODÉLISATION ET RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE POISSON EN 2D PAR LA MÉTHODE DE DIFFÉRENCE FINIE CAS DE L'ÉQUATION DU TRANSFERT DE LA CHALEUR.

https://www.researchgate.net/publication/319879335_MODELISATION_ET_RESOLUTION_NUMERIQUE_DE_L'EQUATION_DE_POISSON_EN_2D_PAR_LA_METHODE_DE_DIFFERENCE_FINIE_CAS_DE_L'EQUATION_DU_TRANSFERT_DE_LA_CHALEUR?fbclid=IwAR0BU7U2o0LswAzrL9BRLL3OafqMsOVMQMvPsbwhSSVWUftXgsaXNBe7ntU

Marches aléatoires Bruno Aebischer d'après Emmanuel Ceba

http://www-irem.univ-fcomte.fr/download/irem/document/ressources/lycee/probastat/chemins3_exposeirem.pdf