Projet 6
Résolution approchée d'équations différentielles / Modélisation de systèmes dynamiques

Groupe 2 - Equipe 2
Responsable : yjouvigne
Secrétaire : alamhamdi001
Codeurs : tgomichon, tmichel003, aliard

Résumé : Dans ce projet, nous allons nous intéresser aux méthodes de résolution d'équations différentielles ordinaires (EDO). L'intérêt de ces équations réside dans le fait qu'elles permettent de modéliser des systèmes complexes relativement facilement. Dans un premier temps, nous implémentons les méthodes de résolution numérique à un pas, adaptées à des équations différentielles ordinaires en dimension finie, et de les tester dans un cadre simple. Ensuite, nous appliquerons ces méthodes au problème du pendule à N maillons et au système proie-prédateur de Lotka-Volterra.

1 Méthodes numériques de résolution d'équations différentielles

Dans cette partie, nous allons programmer les différentes méthodes numériques de résolution des équations différentielles et que nous testerons par la suite. Ces algorithmes sont des méthodes à un pas, de la forme suivante:

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(y_n, t_n, h_n)} \tag{1}$$

Soit le problème de Cauchy suivant: $\begin{cases} y(t_0) & = y_0 \\ y'(t) & = f(y(t), t) \end{cases}$ Nous avons choisi de représenter le problème de Cauchy de la manière suivante: ([y_0,t_0],f)
NOT COMPLETED

1.1 Les méthodes de résolution

La méthode d'Euler:

Elle est d'ordre 1 et consiste à approcher la fonction par la tangente en un point. La fonction ***step_Euler*** calcule la suite des points à l'aide de la formule suivante:

$$y_{n+1} = y_n + h_n F(y_n, t_n, h_n) \tag{2}$$

La méthode du point milieu:

Elle est d'ordre 2 et permet de résoudre l'équation suivante:

$$y_{n+1} = y_n + h_n \int_0^1 F(t_n + x_n h_n, y(t_n + x_n h_n))dx \tag{3}$$

L'algorithme ***step_point_milieu*** fonctionne en trois temps: $\begin{cases} y_{n+\frac{1}{2}} & = y_n + \frac{h_n}{2} F(t_n, y_n) \\ P_n = y'_{n+1} & = F(t_n + \frac{h_n}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}) \\ y_{n+1} & = y_n + h_n P_n \end{cases}$

La méthode de Heun:

Cette méthode est d'ordre 2 et correspond à la méthode des trapèzes.

$$y_{n+1} = y_n + h_n \frac{F(t_n, y_n) + F(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}{2} \tag{4}$$

Elle utilise la moyenne les pentes au point initial et au point qui aurait été obtenu par la méthode d'Euler pour définir la position du point suivant. L'algorithme ***step_Heun*** suit les étapes suivantes: $\begin{cases} P_{n1} & = F(t_n, y_n) \\ y_{n2} & = y_n + h_n p_{n1} \\ p_{n2} & = F(t_n + h_n, y_{n2}) \\ y_{n+1} & = y_n + h_n \frac{p_{n1} + p_{n2}}{2} \end{cases}$

La méthode de Runge_Kutta d'ordre 4:

Cette méthode est d'ordre 4 et correspond à la méthode de Simpson. Elle considère la moyenne de quatre points entre y_n et y_{n+1} L'algorithme ***step_Runge_Kutta*** suit les étapes suivantes:

$$\begin{cases} P_{n1} & = F(t_n, y_n) \\ y_{n2} & = y_n + \frac{1}{2} h_n P_{n1} \\ P_{n2} & = F(t_n + \frac{1}{2} h_n, y_{n2}) \\ y_{n3} & = y_n + \frac{1}{2} h_n P_{n2} \\ P_{n3} & = F(t_n + \frac{1}{2} h_n, y_{n3}) \\ y_{n4} & = y_n + h_n P_{n3} \\ P_{n4} & = F(t_n + h_n, y_{n4}) \\ y_{n+1} & = y_n + \frac{1}{6} h_n (p_{n1} + 2p_{n2} + 2p_{n3} + p_{n4}) \end{cases}$$

1.2 Tests et comparaison

Pour tester les différentes méthodes implémentées, nous avons tracé les solutions obtenues par chacune des méthodes pour un certain problème ou système d'équation.

1.3 Le champ des tangentes

2 Système proie-prédateur de Lotka-Volterra

INTRODUCTION

2.1 Modèles de population mono-espèce

Malthus En posant b le taux de fertilité (nombre de naissances par unité de temps et par individu) et d le taux de décès (nombre de morts par unité de temps et par individu)n le taux de variation de la population est alors (**modèle de Malthus**):

$$N'(t) = bN(t) - dN(t) = \gamma N(t) \tag{5}$$

La solution est donc de la forme $N(t) = N_0 e^{(b-d)t}$. Ainsi on a une croissance exponentielle dans le cas où la fertilité l'emporte sur la mortalité et une extinction lente et progressive dans le cas contraire.

Verhulst Le modèle précédent est simpliste et ne prend pas en compte les interactions possibles avec l'environnement. En effet pour une population insulaire par exemple il arrivera un moment ou l'île sera devenu "trop petite" et la population ne pourra plus croître correctement. On introduit donc une taille critique k, qui correspond au nombre maximum d'individu que l'environnement peut supporter. La croissance devra donc s'annuler lorsque la population atteint cette valeur, ou dimininuer si elle la dépasse, ce qui peut s'écrire de la façon suivante (**modèle de Verhulst**):

$$N(t)' = \gamma N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{k}\right) \tag{6}$$

En prenant comme conditions initiales $a = 0.2$, $b = 0.13$ et $k = 2000$, on observe effectivement une augmentation exponentielle sur la Figure **??**, tandis que sur la Figure **??** la croissance se stabilise autour de $t = 100$ car la population a atteint son effectif maximum.

2.2 Modèle de population proie-prédateur

Les deux modèles précédents décrivent un environnement dans lequel une unique population évolue. Afin de décrire un écosystème de façon plus riche et plus réaliste, on peut modéliser les interactions entre différentes espèces, et notamment entre proies et prédateurs.

2.2.1 Expérimentation

Pour modéliser les interactions proie-prédateur on pose alors

- a le taux de reproduction intrinsèque des proies
- b le taux de mortalité des proies dû aux prédateurs rencontrés
- c le taux de reproduction des prédateurs dû aux proies mangées
- d le taux de mortalité intrinsèque des prédateurs
- $N(t)$ et $P(t)$ les fonctions représentants l'effectif des proies et des prédateurs respectivement

On note que les variables a et c sont indépendantes de la population opposée, tandis que les variables b et d dépendent des interactions avec les prédateurs et et les proies respectivement. On dispose alors du système suivant (**modèle de Lotka-Volterra**):

$$\begin{cases} N'(t) = N(t)(a - bP(t)) \\ P'(t) = P(t)(cN(t) - d) \end{cases} \tag{7}$$

En prenant comme conditions initiales $N(0) = P(0) = 100$, $a = 0.08$, $b = 0.004$, $c = 0.002$ et $d = 0.06$, on a alors :

La Figure **??** montre que le nombre de prédateurs dimininue rapidement lorsque les proies deviennent rares, ce qui permet aux proies de vivre en paix et de se développer. Par la suite la population de prédateurs croît du fait de l'abondance de proies, ce qui fait dimininuer l'effectif de ces dernières et on retrouve la configuration de départ de l'écosystème. On observe notamment que ce cycle semble se répéter à l'infini, ce qui témoigne de la présence de solutions périodiques. Ce résultat semble assez cohérent avec ce que l'on pourrait observer intuitivement dans la nature.

2.2.2 Analyse des solutions

Pour le système de Lokta-Volterra, les points singuliers apparaissent clairement sur les équations et sont les points $(0,0)$ et $(a/b, d/c)$.

3 Pendule à N maillons

Conclusion