Rapport du projet

EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Auteurs :
M. BERNOUSSI AYMEN
M. MESKINE HATIM

Avril 2021

Table des matières

Chapitre 1

Equations aux dérivées partielles elliptiques

1.1 Position du problème

Etant donné $f \in L^2(\Omega), u_d \in H^1(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$ le problème de Laplace revient à déterminer u solution de :

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = f(x,y) & \text{sur } \Omega \\ \\ u(x,y) = u_{.}(x,y) & \text{sur } \Omega_d \\ \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial n} = g(x,y) & \text{sur } \Omega_n \end{cases}$$

1.2 Partie théorique

On suppose que $u \in H^1(\Omega)$ et on pose $v = u - u_d \in H_0^1(\Omega)$:={$w \in H^1(\Omega)|\gamma_0(w) = 0$ sur $\partial\Omega_d$}

Formulation variationnelle :

$$\forall w \in H_0^1(\Omega) : -\int_\Omega \Delta u w dx = \int_\Omega f w dx$$

.

D'après la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w dx - \underbrace{\int_{\partial\Omega_d} \gamma_0(w)\gamma_1(u)}_{=0} - \int_{\partial\Omega_n} \gamma_0(w)\gamma_1(u) = \int_\Omega f w dx$$

On a $\gamma_1(u) = \gamma_0(\frac{\partial u(x,y)}{\partial n})$.
Donc sur Ω_n : $\gamma_1(u) = g$.
On remplace dans la formule précédente u par $v + u_d$:

$$\int_\Omega \nabla v \nabla w dx + \int_\Omega \nabla u_d \nabla w dx - \int_{\partial\Omega_n} \gamma_0(w) g = \int_\Omega f w dx$$

. La formulation variationnelle du problème s'écrit donc :

$$\int_\Omega \nabla v \nabla w dx = \int_\Omega f w dx + \int_{\partial\Omega_n} \gamma_0(w) g - \int_\Omega \nabla u_d \nabla w dx$$

.

Existence et unicité de la solution :

Le problème s'écrit : trouver $v \in H_0^1(\Omega)$ tq $\forall w \in H_0^1(\Omega)$ $a(v,w) = l(w)$,

avec

$$a : \begin{cases} H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \to R \\ (v,w) & \to \int_\Omega \nabla v \nabla w dx. \end{cases}$$

et

$$l : \begin{cases} H_0^1(\Omega) & \to R \\ w & \to \int_\Omega f w dx + \int_{\partial\Omega_n} \gamma_0(w) g - \int_\Omega \nabla u_d \nabla w dx. \end{cases}$$

Montrons que l est linéaire continue.

— l linéaire par linéarité de l'intégrale, de γ_0 et de l'opérateur ∇.

— $f \in L^2(\Omega)$ et $w \in L^2(\Omega)$ donc par l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|\int_\Omega f w dx| \leq ||f||_{L^2(\Omega)}.||w||_{L^2(\Omega)}$$

. Or Ω est un ouvert borné donc par l'inégalité de de Poincaré $\exists C_\Omega \geq 0$ tq $\forall w \in H_0^1(\Omega)$ $||w||_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega |w|_{1,\Omega}$

$$|\int_\Omega f w dx| \leq C_\Omega.||f||_{L^2(\Omega)}.|w|_{1,\Omega} \qquad (1)$$

. et on a $g \in L^2(\partial\Omega)$ et $\gamma_0(w) \in L^2(\partial\Omega)$ donc par l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|\int_{\partial\Omega_n} \gamma_0(w)g| \leq ||g||_{L^2(\partial\Omega)}.||\gamma_0(w)||_{L^2(\partial\Omega)}$$

or $\gamma_0(w)$ continue sur $H_0^1(\Omega)$, donc $\exists M_\gamma > 0$ tq $\forall w \in H_0^1(\Omega)$ $||\gamma_0(w)||_{L^2(\partial\Omega)} \leq M_\gamma.|w|_{1,\Omega}$, d'où

$$|\int_{\partial\Omega_n} \gamma_0(w)g| \leq M_\gamma.||g||_{L^2(\partial\Omega)}.|w|_{1,\Omega} \qquad (2)$$

. Enfin, on a $|\int_\Omega \nabla u_d \nabla w dx| \leq |u_d|_{1,\Omega}.|w|_{1,\Omega}$ (Cauchy-Schwartz) (3)

Par (1) ,(2) et (3) , on déduit que $|l(w)| \leq (C_\Omega.||f||_{L^2(\Omega)} + M_\gamma.||g||_{L^2(\partial\Omega)} + |u_d|_{1,\Omega}).|w|_{1,\Omega}$. Ainsi, l est continue.

Montrons que a est bilinéaire continue et coercive.

— a bilinéaire : linéarité de l'intégrale.

— continuité : $|\int_\Omega \nabla v \nabla w dx \leq |v|_{1,\Omega}.|w|_{1,\Omega}|$, donc a est continue.

— $a(w,w) = \int_\Omega \nabla w \nabla w dx = |w|_{1,\Omega}^2$,
ainsi a est bien coercive.

Bilan : a est bilinéaire, continue et coercive sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et l est linéaire continue .

D'après Lax-Milgramm, $\exists! v \in H_0^1(\Omega)$ tq $\forall w \in H_0^1(\Omega)$, $\int_\Omega \nabla v \nabla w dx = \int_\Omega f w dx + \int_{\partial\Omega_n} \gamma_0(w) g - \int_\Omega \nabla u_d \nabla w dx$

Formulation variationnelle discrète

On résout le problème suivant :
(P_h) Trouver $v_h \in V_h, \forall\, w_h \in V_h : a(v_h, w_h) = l(w_h)$

$v_h \in V_h$ donc $v_h = \sum_{j=1}^N x_j \eta_j$

(P_h) s'écrit donc : trouver $(x_j)_{1...N}, \forall (y_i)_{i=1,...N}$ $a(\sum_{j=1}^N x_j\eta_j, \sum_{i=1}^N y_i\eta_i) = l(\sum_{i=1}^N y_i\eta_i)$

$\Longleftrightarrow$ trouver $(x_j)_{1...N}, \forall (y_i)_{i=1,...N}$ $\sum_{i=1}^N y_i[a(\sum_j x_j\eta_j, \eta_i) - l(\eta_i)] = 0$

$\Longleftrightarrow$ trouver $(x_j)_{1...N}, \forall i \in \{1, ...N\}$ $\sum_{j=1}^N a(\eta_j, \eta_i).x_j = l(\eta_i)$

$\Longleftrightarrow A.x = b$

avec $A_{ij} = a(\eta_i, \eta_j) = \int_\Omega \nabla{\eta_i}^T \nabla \eta_j dx$

et $b_i = l(\eta_i) = \int_\Omega f\eta_j dx + \int_{\partial\Omega_n} g\eta_i - \int_\Omega \nabla\eta_i{}^T\nabla(\sum_{k=1}^n U_k\eta_k)dx$

$b_i = \int_\Omega f\eta_j dx + \int_{\partial\Omega_n} g\eta_i - \sum_{k=1}^n U_k \int_\Omega \nabla\eta_i{}^T\nabla\eta_k dx$

Existence et solution de Ax=b

La matrice A étant définie positive, le problème admet une unique solution.

1.3 Mise en oeuvre pratique

Assemblage sur des éléments quadrangle

On a

$$\Phi_Q(\xi,\zeta) : \begin{cases} x = (x_2 - x_1)\xi + (x_4 - x_1)\zeta + x_1 \\ y = (y_2 - y_1)\xi + (y_4 - y_1)\zeta + y_1 \end{cases}$$

Donc on obtient

$$\Phi_Q(x,y)^{-1} : \begin{cases} \xi = \frac{(y_4-y_1)(x-x_1)-(x_4-x_1)(y-y_1)}{(y_4-y_1)(x_2-x_1)-(x_4-x_1)(y_2-y_1)} \\ \zeta = \frac{(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)}{(y_2-y_1)(x_4-x_1)-(x_2-x_1)(y_4-y_1)} \end{cases}$$

La jacobienne $J_{\Phi_Q} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{pmatrix}$

$\nabla\Phi_1(\xi,\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta - 1 \\ \xi - 1 \end{pmatrix}$, $\nabla\Phi_2(\xi,\zeta) = \begin{pmatrix} 1-\zeta \\ -\xi \end{pmatrix}$, $\nabla\Phi_3(\xi,\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \end{pmatrix}$ et $\nabla\Phi_4(\xi,\zeta) = \begin{pmatrix} -\zeta \\ 1-\xi \end{pmatrix}$

On observe que nous avons une relation affine :

$$X = J_{\Phi_Q} U + X_1$$

et

$$U = J_{\Phi_Q}^{-1} X - J_{\Phi_Q}^{-1} X_1$$

avec

$$X = (x,y)^T$$
$$U = (u,v)^T$$
$$X_1 = (x_1,y_1)^T$$

On a :

$$M_{ij} = \int_T \nabla\eta_i(x,y)^T \nabla\eta_j(x,y)dxdy$$

avec $\eta_i(x,y) = \phi_j(\Phi_Q^{-1}(x,y))$

Par application de la formule de changement de variables, on obtient l'expression suivante pour M_{ij} :

$$M_{ij} = \int_{[0,1]^2} \nabla\Phi_i(u,v)^T (J_{\Phi_Q}^T J_{\Phi_Q})^{-1} \nabla\Phi_j(u,v) |J_{\Phi_Q}| dudv$$

Après calcul, on obtient le résulat pour la matrice de raideur :

$$M = \frac{det(J_{\Phi_Q})}{6} \begin{pmatrix} 3b+2(a+c) & -2a+c & -3b-(a+c) & a-2c \\ -2a+c & -3b+2(a+c) & a-2c & 3b-(a+c) \\ -3b-(a+c) & a-2c & 3b+2(a+c) & -2a+c \\ a-2c & 3b-(a+c) & -2a+c & 3b+2(a+c) \end{pmatrix}$$

avec

$$(J_\Phi^T J_\Phi)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Chapitre 2

Fonctionnement du code

2.1 elliptic.m

☞ Choix entre l'utilisation de la génération de points avec la fonction maillage_carre (En entrant 0) ou l'utilisation des fichiers ".dat" (En entrant 1).
☞ Génération de la matrice A.
☞ Génération du vecteur b.
☞ Solution du problème et affichage de la solution.

2.2 erreur_analyse.m

☞ Script permettant de répondre à la partie 1.4.1 du sujet.
☞ Fait la même chose que elliptic.m avec maillage_carre.
☞ Trace la courbe de l'erreur.

2.3 zerosCholeskyA.m

☞ Calcule la matrice A pour différents maillages
☞ Calcule la matrice R obtenue avec la décomposition de Cholesky de A.
☞ Trace le nombre d'éléments non nuls de R et leur pourcentage.

Chapitre 3

Compléments d'analyse du système issu de la discrétisation

3.1 Analyse de l'ordre du schéma de discrétisation dans le cas d'éléments Triangle

☞ En traçant la courbe, on remarque que celle-ci est linéaire et que l'erreur est très faible.
☞ On en déduit donc que l'ordre de discrétisation est de h^2

3.2 Résolution du système linéaire par une méthode directe

☞ On remarque l'augmentation des éléments non nuls mais que leur pourcentage reste faible.
☞ On en déduit donc que nous avons des matrices creuses.
☞ On pourrait donc utiliser la fonction sparse dans matlab pour réduire le coût mémoire de cette factorisation.