Rapport du TP Analyse Hilbertienne

Reconnaissance de chiffres et débruitage par généralisation de l'ACP aux RKHS

Auteurs :
M. Bernoussi Aymen
M. Meskine Hatim

mai 2021

Table des matières

Chapitre 1

Implantation des deux approches

1.1 Stratégie 1 : ACP classique

On suit les étapes de l'ACP qui nous permettent de réduire la dimension du problème et on calcule les distances d_i pour la classification à travers la formule suivante :

$$d_i = \frac{||(I - U_i U_i^T)C||_2}{||C||_2}$$

. Ensuite, l'image reconstuite est obtenue en additionnant l'Individu_moyen avec $U_i \times C$.

1.2 Stratégie 2 : généralisation aux RKHS

☞ Calcul de la distance d_i. Ici, on a

$$d_i = \frac{||(\Phi(x) - m) - \Pi_k(\Phi(x) - m)||^2}{||(\Phi(x) - m)||^2}$$

donc

$$d_i = 1 - \frac{||\Pi_k(\Phi(x) - m)||^2}{||(\Phi(x) - m)||^2}$$

. Après calcul, on obtient pour le dénominateur

$$||(\Phi(x) - m)||^2 = k(x, x) - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} k(x_j, x) + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} k(x_j, x_l) \tag{1}$$

D'autre part, on a

$$\Pi_k \Phi(x) = \sum_{j=1}^{k}(\sum_{i=1}^{n}[\alpha_j]_i k(x, x_i))v_j$$

et

$$\Pi_k m = \sum_{j=1}^{k} (\sum_{l=1}^{n} [\alpha_j]_l (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k(x_i, x_l))) v_j$$

donc on obtient

$$\Pi_k(\Phi(x) - m) = \sum_{j=1}^{k} ((\sum_{i=1}^{n} [\alpha_j]_i k(x, x_i)) - (\sum_{l=1}^{n} [\alpha_j]_l (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k(x_i, x_l))) v_j$$

$$\Pi_k(\Phi(x) - m) = \sum_{j=1}^{k} \beta_j v_j$$

, avec $\forall j \in [1, k]$

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{n} [\alpha_j]_i k(x, x_i) - \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} [\alpha_j]_l \sum_{i=1}^{n} k(x_i, x_l)$$

. Dans le code, les coefficents β_i sont stockés dans le vecteur beta.
On a ainsi

$$||\Pi_k(\Phi(x) - m)||^2 =< \Pi_k(\Phi(x) - m), \Pi_k(\Phi(x) - m) >$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \beta_i \beta_j < v_i, v_j >$$

et on connait l'expression des v_i , l'expression finale est donc :

$$||\Pi_k(\Phi(x) - m)||^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} [\alpha_i]_p [\alpha_j]_q < \Phi(x_p), \Phi(x_q) >$$

$$||\Pi_k(\Phi(x) - m)||^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} [\alpha_i]_p [\alpha_j]_q k(x_p, x_q) \qquad (2)$$

. En utilisant les formules (1) et (2) , on parvient à calculer les distances d_i

☞ On a implmémenté une fonction $noyau(x, y)$ (fonction implémentée dans la fin du code) qui retourne un des noyaux suivants : noyau linéaire, polynomial et gaussien.
☞ En ce qui concerne la reconstruction débruitée, nous l'avons implémenté uniquement pour le noyau gaussien. Pour cela, on utilise la formule itérative (on itère 4 fois) :

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i k(z, x_i) x_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i k(z, x_i)}$$

avec $\gamma_i = \sum_{j=1}^{k} y_j(x) [\alpha_j]_i$

Chapitre 2

Choix des paramètres

2.1 Choix de PrecApprox

PrecApprox = la precision qui nous permet de determiner la valeur de k :

— PrecApprox = 0.25

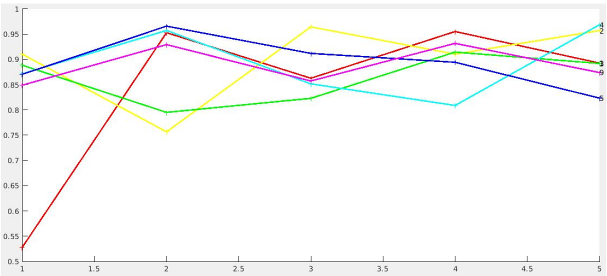

FIGURE 2.1 – ACP

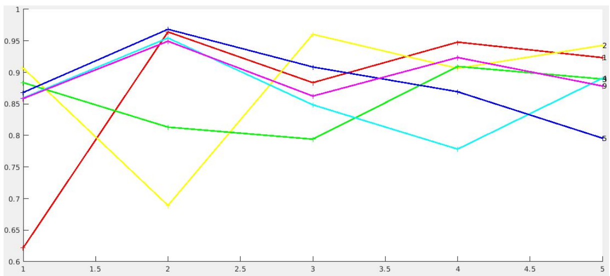

FIGURE 2.2 – Kernel ACP

— PrecApprox = 0.75

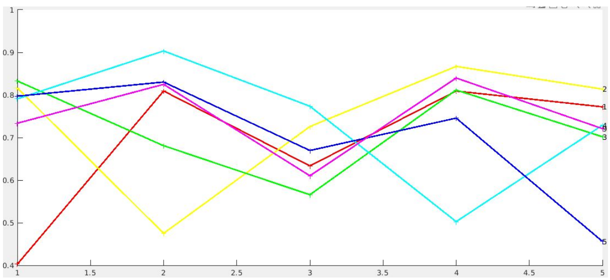

FIGURE 2.3 – ACP

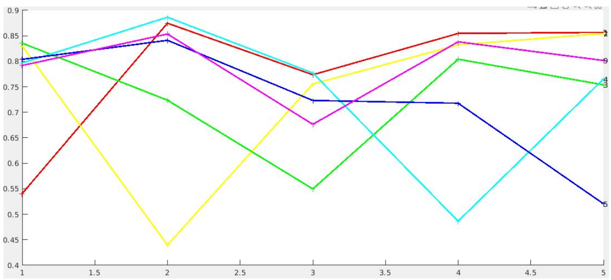

FIGURE 2.4 – Kernel ACP

On remarque que pour une précision égale à 0.75, les distances des images à chacun des sous-espaces représentatifs des différentes classes sont inférieures que celles obtenues pour une précision de 0.25. On obtient donc clairement une reconstruction plus nette pour la précision 0.75 comme on l'observe sur la figure ci-dessous :

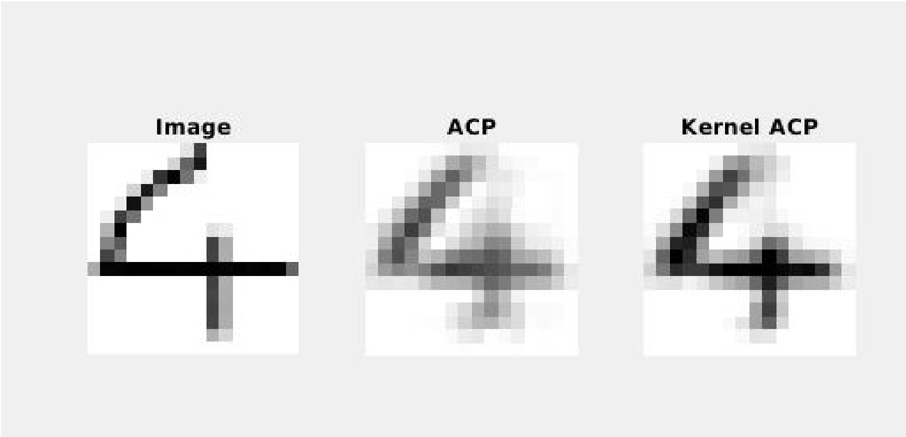

FIGURE 2.5 – PrecApprox = 0.25

FIGURE 2.6 – PrecApprox = 0.75

2.2 Variance du bruit

Le paramètre qui fait référence à la variance du bruit est noté sig0 dans le code. On voit bien, sur l'exemple ci-dessous du chiffre 2, que plus on augmente sa valeur moins on arrive à reconnaitre le chiffre en particulier pour la stratégie Kernel ACP.

FIGURE 2.7 – sig0 = 0.02

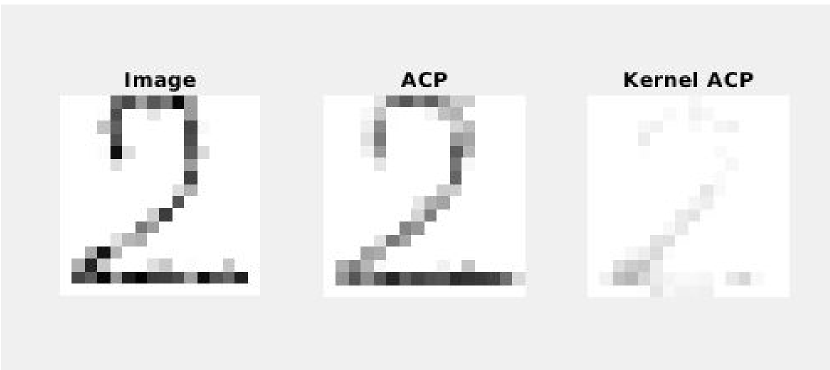

FIGURE 2.8 – sig0 = 0.7