VECTEURS ET TRANSLATION

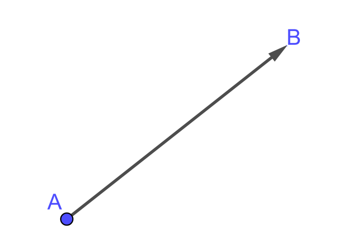
1. Les vecteurs

1.1. Vocabulaire

Définition

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par trois composantes :

- la direction : la direction de la droite (AB)
- le sens : de A vers B.
- la longueur : la distance AB.

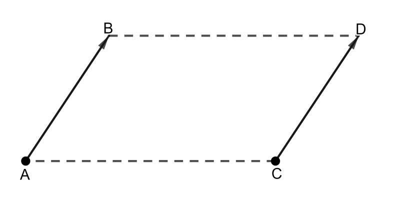


Remarque

Tout point A définit un vecteur nul note $\overrightarrow{0}$, on écrit : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

Propriété 1

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \text{ signifie que : } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \textit{ et } \overrightarrow{CD} \textit{ ont la } \text{même } \textit{direction} \\ \overrightarrow{AB} \textit{ et } \overrightarrow{CD} \textit{ ont le } \text{même } \textit{sens} \\ \overrightarrow{AB} \textit{ et } \overrightarrow{CD} \textit{ ont la } \text{même } \textit{longueur} \end{cases}$$



Remarque

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 1

Soit ABC un triangle

1. Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$
2. Montrer que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$

Définition

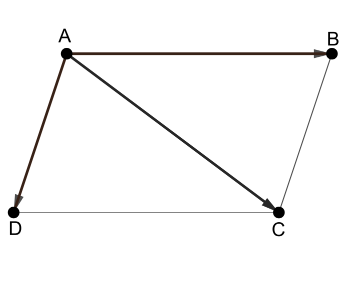
Le vecteur opposé d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$ et on écrit : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Remarque

Deux vecteurs opposés ont la même direction et même longueur mais ils ont des sens opposés.

Définition

La somme de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
On écrit : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$



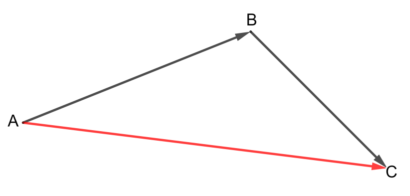
Exercice 2

Soit ABC un triangle

1. Construire le point E tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$
2. Construire les points M et N les symétriques respectifs de A et C par rapport à B
3. Montrer que : $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM}$

Propriété 2

A, B et C sont des points.
La relation $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ est appelée relation de Chasles.



Exemples

Simplifions ce qui suit :

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{MO}$$
$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{EE} = \overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

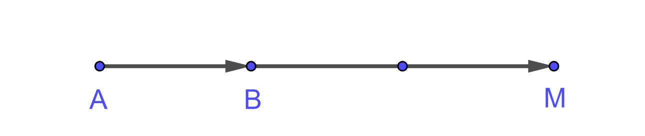
Définition

Soit k un nombre réel et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul.
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le nombre k si $C \in \overrightarrow{AB}$ tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

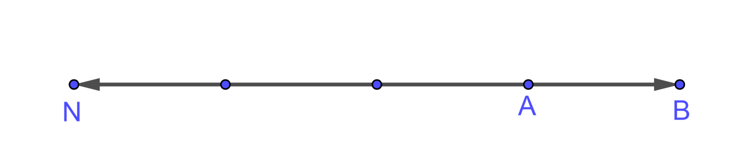
- Si $k > 0$ alors $AC = k \times AB$ et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont le même sens.
- Si $k < 0$ alors $AC = -k \times AB$ et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont le sens contraires.

Exemples

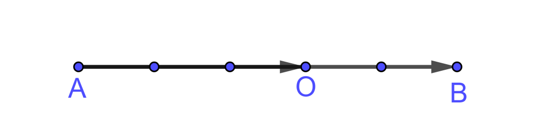
- On construit le point M tel que : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$



▷ On construit le point N tel que : $\overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{AB}$



▷ On construit le point O tel que : $\overrightarrow{AO} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$



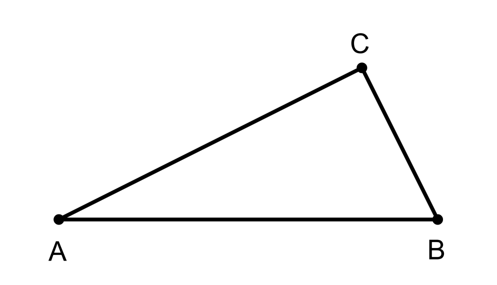
Propriété 3

Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors A, B et C sont des points alignés.

Exercice 3

Copier la figure dans ta feuille et construire le point D tel que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

1. Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
2. Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{AB}$
3. Montrer que : $\overrightarrow{EF} = -2\overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$



Exercice 4

Soit ABC un triangle.

1. Construire les deux points E et F tel que :
$$\overrightarrow{AE} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$$
2. Montrer que : $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$
3. Déduire que les points A, B et F sont alignés.

Exercice 5

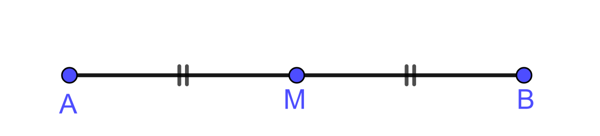
Soit $ABCD$ est un parallélogramme.

1. Construire les deux points M et N tel que : $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BC}$
2. Montrer que :
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{DM}$
3. En déduire que les points A, M et N sont alignés.

Propriété 4

A, *M* et *B* sont des points. *M* est le milieu de [*AB*] signifie que :

- ⋆ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
- ⋆ $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{-MB}$
- ⋆ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$

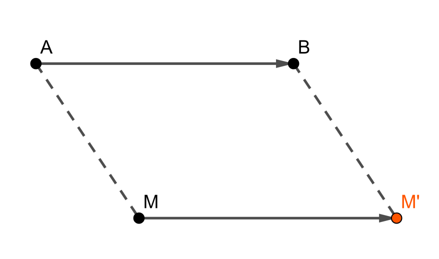


2. La translation

2.1. Image d'un point par une translation

Définition

A et B sont deux points distincts.
M' est l'image de M par la translation qui transforme A en B signifie que :
$ABM'M$ est un parallélogramme

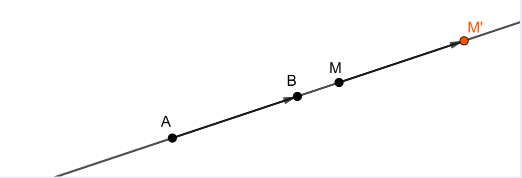


Autrement dit

M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ signifie que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

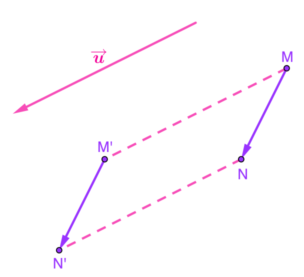
Remarque

Si $M \in (AB)$ alors M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ appartient à la droite (AB).



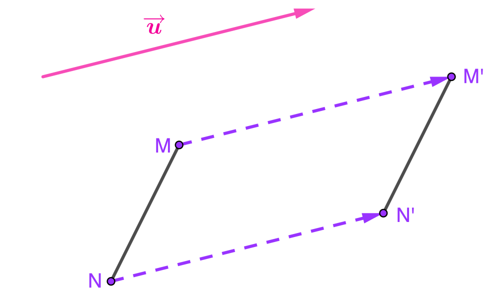
Propriété 5

Soient M et N deux points du plan. Si M' et N' sont les images respectives des points M et N par une translation du vecteur $\overrightarrow{u}$, alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$



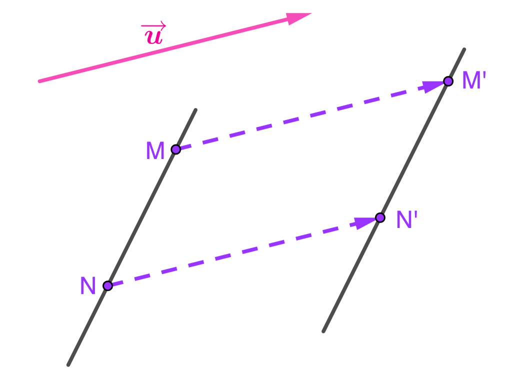
Propriété 6

On considère la translation du vecteur $\overrightarrow{u}$.
L'image du segment $[MN]$ par la translation du vecteur u est le segment $[M'N']$, et on a :
$M'N' = MN$
On dit que la translation conserve les longueurs.



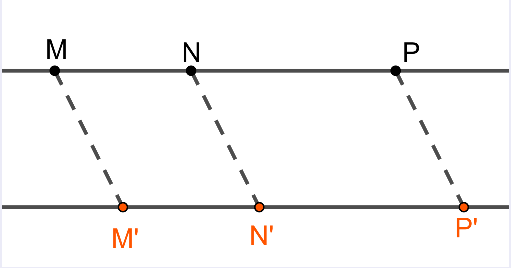
Propriété 7

On considère la translation du vecteur $\overrightarrow{u}$.
L'image de la droite (MN) par la translation du vecteur $\overrightarrow{u}$ est la droite $(M'N')$, et on a : $(M'N') \parallel (MN)$



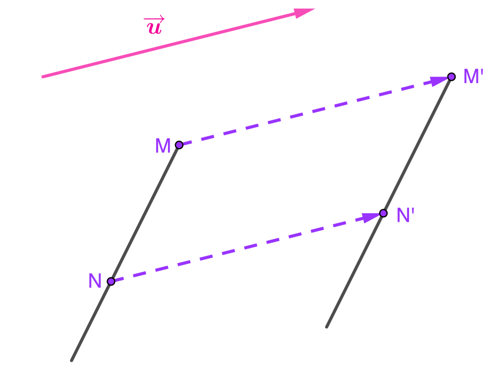
Propriété 8

Si M', N' et P sont trois points alignés, alors leurs images par une translation sont des points alignés.
On dit que la translation conserve l'alignement.



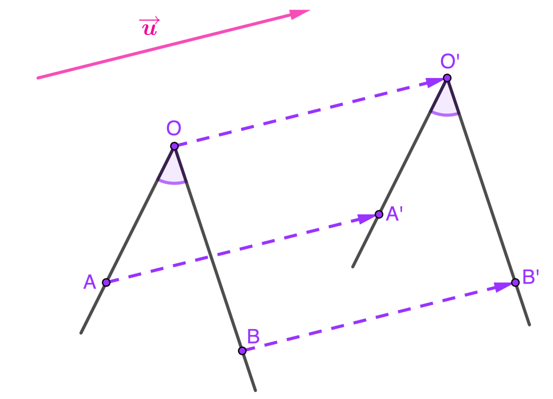
Propriété 9

On considère la translation du vecteur $\overrightarrow{u}$.
L'image de la demi-droite $[MN)$ par la translation du vecteur $\overrightarrow{u}$ est la demi-droite $[M'N')$.



Propriété 10

On considère la translation du vecteur $\vec{u}$.
L'image de l'angle $\widehat{AOB}$ par la translation du vecteur $\vec{u}$ est l'angle $\widehat{A'O'B'}$, et on a : $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$
On dit que la translation conserve la mesure des angles.



Propriété 11

On considère la translation du vecteur $\overrightarrow{u}$.
L'image du cercle (C) de centre O et de rayon r par la translation du vecteur $\overrightarrow{u}$ est le cercle (C') de centre O' et de même rayon r.