Exercice 1

1. Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

P : $\left(\frac{25}{9} = \frac{5}{3} \quad \text{ou} \quad 3 \text{ divise } 213\right)$

Q : $\left(-\frac{5}{2} < -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad |-4| = -4\right)$

R : $(\exists n \in \mathbb{Z}) \quad n^2 - 1 = 0$

S : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{n+3}{5} \in \mathbb{N}$

2. On considère la proposition suivante :

$$\text{T} : \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad 3x^2 - 4x + 2 \leq 0$$

   (a) Donner la négation de T.

   (b) Déterminer la valeur de vérité de la proposition T.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+3} - 2$, et la proposition

$$\text{P} : \quad \left(\forall a, b \in \mathbb{R}^2\right) \quad f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

   (b) Donner la négation de P.

   (c) Déduire que P est fausse.

4. En utilisant le raisonnement par la contraposée montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \neq y \quad \text{et} \quad x.y \neq 1) \Rightarrow \left(\frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}\right)$$

5. En utilisant le raisonnement par équivalences successives montrer que :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right) : \quad \frac{x + \sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1} \leq \sqrt{x} + 3$$

6. En utilisant le raisonnement par récurrence montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 + 7 + 7^2 + \ldots\ldots\ldots\cdots + 7^n = \frac{7^{n+1} - 1}{6}$$

Correction de l'exercice 1

1. P : Vraie. Car 3 divise 213 ($213 = 3 \times 71$), donc la disjonction est vraie.

   Q : Fausse. Car $|-4| = 4 \neq -4$, donc la conjonction est fausse.

   R : Vraie. Car $n = 1 \in \mathbb{Z}$ satisfait $1^2 - 1 = 0$.

   S : Fausse. Car pour $n = 1$, on obtient $\frac{1+3}{5} = \frac{4}{5} \notin \mathbb{N}$.

2. (a) La négation de T est :

$$\overline{T} : \quad (\exists x \in \mathbb{R}) \quad 3x^2 - 4x + 2 > 0$$

   (b) La proposition T est fausse.
   Car, pour $x = 0$, on a $3(0)^2 - 4(0) + 2 = 2 > 0$.

3. (a) Résolvons l'équation $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} = 2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 3 = 4 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{1} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{1} \\ &\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1 \end{aligned}$$

   (b) La négation de P est :

$$\overline{P} : \quad \left(\exists a, b \in \mathbb{R}^2\right) \quad f(a) = f(b) \quad \text{et} \quad a \neq b$$

(c) La proposition P est fausse.
Car, en prenant $a = 1$ et $b = -1$, on a $f(1) = 0 = f(-1)$ et $1 \neq -1$.

4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
En raisonnant par contraposée, on montre que : $\dfrac{x}{x^2+x+1} = \dfrac{y}{y^2+y+1} \implies x = y$ ou $xy = 1$. Supposons donc que

$$\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{y}{y^2+y+1}.$$

Comme pour tout réel t, on a $t^2+t+1 \neq 0$ (car le discriminant $1-4 = -3 < 0$), on peut effectuer un produit en croix :

$$x(y^2+y+1) = y(x^2+x+1)$$

Développons :

$$xy^2 + xy + x = yx^2 + xy + y$$

Simplifions par xy :

$$xy^2 + x = yx^2 + y$$

Regroupons tous les termes d'un côté :

$$xy^2 - yx^2 + x - y = 0$$

Factorisons les deux premiers termes par xy :

$$xy(y-x) + (x-y) = 0$$

Comme $x - y = -(y-x)$, on a :

$$xy(y-x) - (y-x) = 0$$

Factorisons par le facteur commun $(y-x)$:

$$(y-x)(xy-1) = 0$$

D'où $y - x = 0$ ou $xy - 1 = 0$, c'est-à-dire $x = y$ ou $xy = 1$. Par contraposée, on a bien montré que :

$$\big(x \neq y \text{ et } xy \neq 1\big) \Rightarrow \left(\frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}\right).$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}
\frac{x+\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} \leq \sqrt{x}+3 &\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+3 \leq (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)\\
&\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+3 \leq x+3\sqrt{x}+\sqrt{x}+3\\
&\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+3 \leq x+4\sqrt{x}+3\\
&\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+3-x-4\sqrt{x}-3 \leq 0\\
&\Leftrightarrow -3\sqrt{x} \leq 0\\
&\Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0
\end{aligned}$$

L'inégalité finale $\sqrt{x} \geq 0$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
Donc la proposition initiale est vraie.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que : $1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n = \dfrac{7^{n+1}-1}{6}$

Soit $P(n)$ la proposition : $P(n)$: $\quad 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n = \dfrac{7^{n+1}-1}{6}$
Initialisation : Pour $n = 0$:

$$\frac{7^{n+1}-1}{6} = \frac{7^{0+1}-1}{6} = \frac{7-1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n = \frac{7^{n+1}-1}{6}$$

Montrons que $P(n+1)$ est vraie :

$$\begin{aligned}
1+7+7^2+\cdots+7^{n+1} &= \left(1+7+7^2+\cdots+7^n\right)+7^{n+1} \\
&= \frac{7^{n+1}-1}{6}+7^{n+1} \\
&= \frac{7^{n+1}-1+6\cdot 7^{n+1}}{6} \\
&= \frac{7^{n+1}+6\cdot 7^{n+1}-1}{6} \\
&= \frac{7^{n+1}(1+6)-1}{6} \\
&= \frac{7^{n+2}-1}{6}
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2-4x+6}{x^2-4x+8}$.

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2-4x+8>0$, et déduire D_f, le domaine de définition de f.
2. Montrer que $f(2) = \dfrac{1}{2}$ est une valeur minimale de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x)<1$.
   (b) Est-ce que 1 est une valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$?

Correction de l'exercice 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   On a $x^2-4x+8=0$
   Donc $\Delta = (-4)^2-4\times 1\times 8 = 16-32=-16$
   Puisque $\Delta<0$ et $a=1>0$, donc $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2-4x+8>0$
   Ainsi $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2-4x+8 \neq 0$, donc $D_f=\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Pour montrer que $f(2)=\dfrac{1}{2}$ est une valeur minimale, Il faut montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq f(2)$.

$$\begin{aligned}
f(x)-\frac{1}{2} &= \frac{x^2-4x+6}{x^2-4x+8}-\frac{1}{2} \\
&= \frac{2(x^2-4x+6)-1(x^2-4x+8)}{2(x^2-4x+8)} \\
&= \frac{2x^2-8x+12-x^2+4x-8}{2(x^2-4x+8)} \\
&= \frac{x^2-4x+4}{2(x^2-4x+8)} \\
&= \frac{(x-2)^2}{2(x^2-4x+8)}
\end{aligned}$$

   Or $(x-2)^2 \geq 0$ et $x^2-4x+8>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, donc $f(x) \geq \dfrac{1}{2} = f(2)$.
   Ainsi, $f(2)=\dfrac{1}{2}$ est une valeur minimale de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(x)-1 &= \frac{x^2-4x+6}{x^2-4x+8}-1 \\
&= \frac{x^2-4x+6-(x^2-4x+8)}{x^2-4x+8} \\
&= \frac{-2}{x^2-4x+8}
\end{aligned}$$

Comme $x^2 - 4x + 8 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $f(x) - 1 < 0$, c'est-à-dire $f(x) < 1$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) < 1$, donc 1 n'est pas une valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

On considère les deux fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x-3}$$

C_f et C_g sont respectivement les courbes des fonctions f et g dans un repère orthonormé.

1. (a) Donner le tableau de variations de f.
   (b) Déterminer la nature de C_f et ses éléments caractéristiques.
   (c) Déterminer l'intersection de C_f avec les axes (Ox) et (Oy).
2. Déterminer D_g et donner le tableau de variations de g.
3. Construire C_f et C_g dans le même repère orthonormé.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 - 6x + 8 - \sqrt{x-3} \leq 0$.

Correction de l'exercice 3

1. (a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$
   f est une polynôme, donc $D_f = \mathbb{R}$.
   On a : $a = 1, b = -6, c = 8$
   donc : $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{6}{2 \times 1} = \dfrac{6}{2} = 3$ et $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 8 = 1$
   Puisque $a = 1 > 0$ Donc :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

   (b) Nature de C_f : La courbe C_f est une parabole.
   Éléments caractéristiques :
   - Sommet $S(3, -1)$
   - Axe de symétrie : La droite verticale d'équation $x = 3$.

   (c) Intersection de C_f avec l'axe (Oy) : On calcule $f(0)$.

$$f(0) = 0^2 - 6(0) + 8 = 8$$

   Le point d'intersection est $\mathbf{A(0, 8)}$.
   Intersection de C_f avec l'axe (Ox) : On résout $f(x) = 0$, soit $x^2 - 6x + 8 = 0$. Le discriminant est $\Delta = (-6)^2 - 4(1)(8) = 36 - 32 = 4$. Les solutions sont :

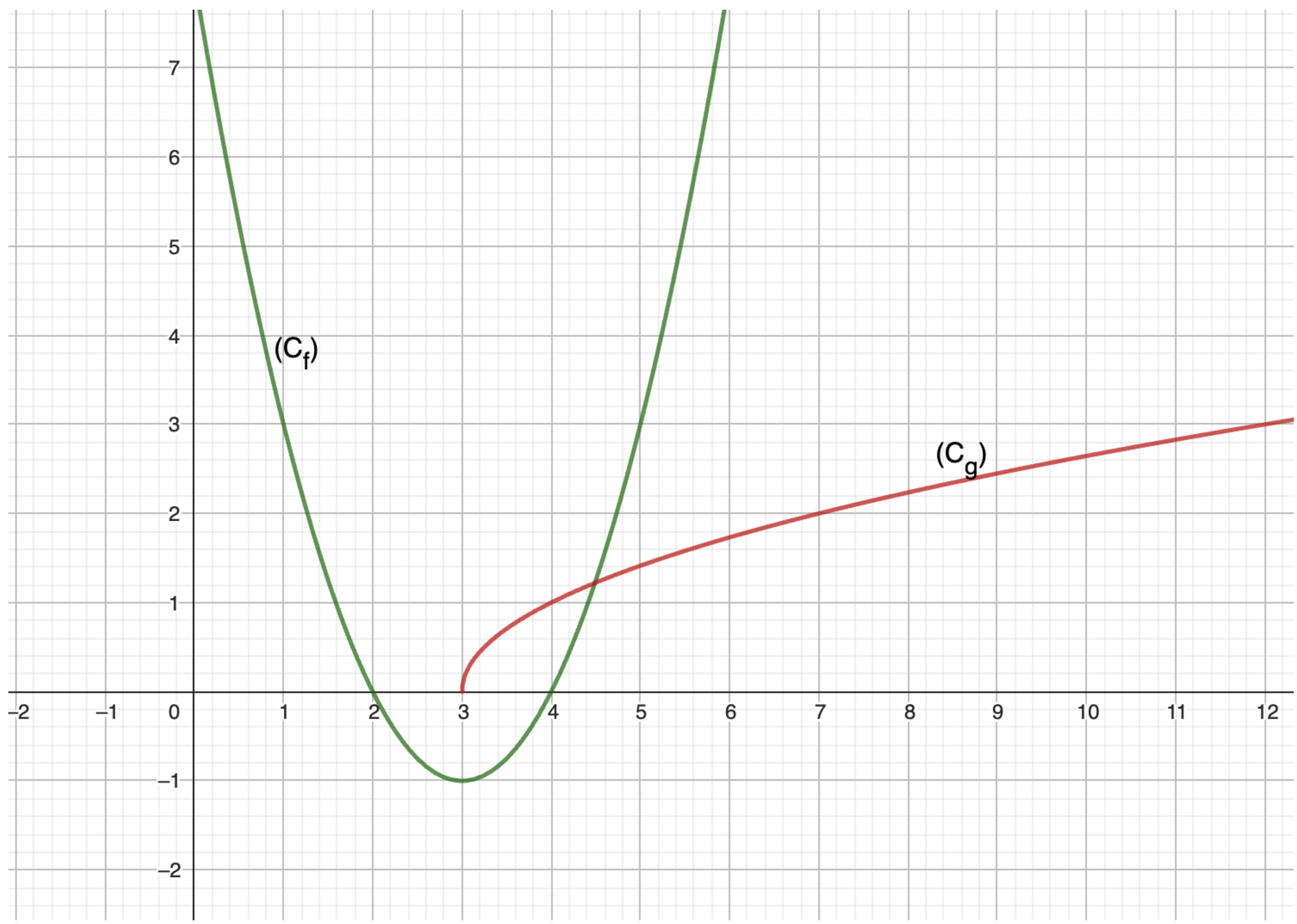
$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{4}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6 + \sqrt{4}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

   Les points d'intersection sont $\mathbf{B(2, 0)}$ et $\mathbf{C(4, 0)}$.

2. La fonction g est définie par $g(x) = \sqrt{x-3}$.
   $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 3 \geq 0\}$
   On a : $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$ Donc $D_f = [3; +\infty[$
   Tableau de variations de g :

x	3	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

3.



4. Résolvons graphiquement l'inéquation $x^2 - 6x + 8 - \sqrt{x-3} \leq 0$.
   L'inéquation $x^2 - 6x + 8 - \sqrt{x-3} \leq 0$ est équivalente à $f(x) \leq g(x)$, ce qui signifie que la courbe C_f (verte) doit être en dessous ou coïncider avec la courbe C_g (rouge).Puisque C_f est en dessous de C_g à partir de ($x = 3$) et jusqu'à leur point d'intersection $\mathbf{x_I = 4.49}$
   Donc : $\mathcal{S} = [3,\ 4.49]$.