Barycentre

1. Barycentre de deux points

Définition 1.1

Soit A un point du plan $\mathcal{P}$ et α un nombre réel. Le couple $(\mathbf{A};\alpha)$ est appelé un point pondéré, et on dit également que A est un point affecté du coefficient α.

Remarque : On dit aussi que α est le poids du point A.

Théorème et Définition 1.1

Soient $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ deux points pondérés du plan $\mathcal{P}$ tels que $\alpha+\beta\neq 0$. Il existe alors un point unique G du plan $\mathcal{P}$ vérifiant :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$$

Ce point G est appelé le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$.

Remarque : Si $\alpha+\beta=0$, il n'est pas possible de déterminer le barycentre des deux points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$.

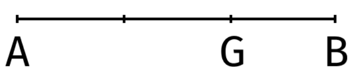
Exemple 1.1 : Considérons les points pondérés $(A;1)$ et $(B;2)$.
Nous avons $1+2=3\neq 0$, donc il existe un point unique G tel que :

$$\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$$

En appliquant la relation de Chasles, on trouve :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

D'où la construction de G.



Remarque : Si $\alpha+\beta\neq 0$, alors la relation :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$$

est équivalente à la relation :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

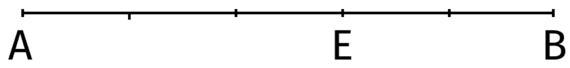
Application 1.1 : Soient A et B deux points distincts du plan.
Construire les points suivants :

- E, le barycentre des points pondérés $(A, -2)$ et $(B, -3)$;
- F, le barycentre des points pondérés $(A, 3)$ et $(B, -1)$.

Correction :

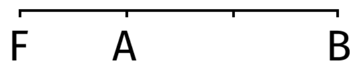
— Construction du point E :

$$E = \mathrm{Bar}\{(A, -2)\ ;\ (B, -3)\} \iff \overrightarrow{AE} = \frac{-3}{-5}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$



— Construction du point F :

$$F = \mathrm{Bar}\{(A, 3)\ ;\ (B, -1)\} \iff \overrightarrow{AF} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$$



Cas particulier

Si $\alpha = \beta$, alors :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

C'est-à-dire que G est le milieu de $[AB]$.

Propriété 1.1

Le barycentre de deux points pondérés ne change pas si l'on multiplie leurs poids par un nombre réel non nul.

Exemple 1.2 : Le barycentre de $\left(A; \frac{2}{3}\right)$ et $\left(B; \frac{1}{3}\right)$ est le même que le barycentre de $(A; 2)$ et $(B; 1)$.

Application 1.2 : Construire les points suivants :

- H, le barycentre des points pondérés $(A, -0.0001)$ et $(B, 0.0003)$;
- K, le barycentre des points pondérés $(A, -\sqrt{8})$ et $(B, -\sqrt{2})$;

Correction :

— Construction du point H :

$$H = \mathrm{Bar}\{(A, -0.0001)\ ;\ (B, 0.0003)\}$$

En multipliant les coefficients par 10000, on obtient :

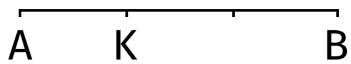
$$H = \mathrm{Bar}\{(A, -1)\ ;\ (B, 3)\} \iff \overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

— Construction du point K :

$$K = \mathrm{Bar}\{(A, -\sqrt{8})\ ;\ (B, -\sqrt{2})\}$$

En multipliant les coefficients par $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient :

$$K = \mathrm{Bar}\{(A, 2)\ ;\ (B, 1)\} \iff \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$



Propriété 1.2 (Propriété Caractéristique du Barycentre)

Soient A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$, et α et β deux nombres réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.
Le point G est le barycentre des deux points pondérés $(A; \alpha)$ et $(B; \beta)$ si et seulement si, pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, on a la relation suivante :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$$

Cas particulier

- En remplaçant le point M par le point A dans la propriété caractéristique, on obtient :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$$

- En remplaçant le point M par le point B dans la propriété caractéristique, on obtient :

$$\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\overrightarrow{BA}$$

Propriété 1.3 (Coordonnées du Barycentre de Deux Points)

On considère le plan $\mathcal{P}$ muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan $\mathcal{P}$.Les coordonnées du barycentre G des points $(A; \alpha)$ et $(B; \beta)$ sont $(x_G; y_G)$ telles que :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

Exemple 1.3 : Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(3; 2)$ et $B(4; 1)$.
Soit G le barycentre du système $\{(A, 1), (B, -5)\}$.
Déterminons les coordonnées du point G.
Soit $G(x_G; y_G)$.

$$x_G = \frac{1 \times x_A + (-5) \times x_B}{1 + (-5)} = \frac{1 \times 3 + (-5) \times 4}{1 - 5} = \frac{3 - 20}{-4} = \frac{-17}{-4} = \frac{17}{4}$$

$$y_G = \frac{1 \times y_A + (-5) \times y_B}{1 + (-5)} = \frac{1 \times 2 + (-5) \times 1}{1 - 5} = \frac{2 - 5}{-4} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

Donc, $G\left(\frac{17}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

2. Barycentre de trois points

Théorème et Définition 2.1

Soient A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$ et α, β et γ trois nombres réels tels que : $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.
Il existe un point unique G vérifiant l'égalité suivante :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Ce point G est appelé le barycentre des points pondérés $(A; \alpha)$, $(B; \beta)$ et $(C; \gamma)$.

Remarque :

- Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, alors il n'est pas possible de déterminer le barycentre des points pondérés $(A; \alpha)$, $(B; \beta)$ et $(C; \gamma)$.
- Le barycentre de trois points ne change pas si l'on modifie l'ordre des points.
- Le barycentre de trois points ne change pas si l'on multiplie leurs coefficients par un nombre réel non nul.

Propriété 2.1 (Propriété Caractéristique du Barycentre de trois points)

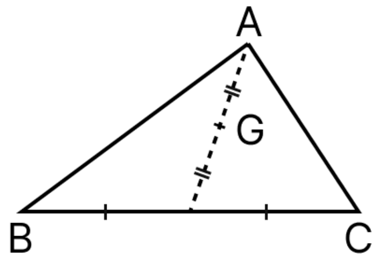
Le point G est le barycentre des points pondérés $(A; \alpha)$, $(B; \beta)$ et $(C; \gamma)$ si et seulement si, pour tout point M du plan P :

$$(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$$

Propriété 2.2 (Propriété d'Associativité du Barycentre)

G est le barycentre de $(A; \alpha)$, $(B; \beta)$ et $(C; \gamma)$, et si $\alpha + \beta \neq 0$, alors G est aussi le barycentre de $(G_1; \alpha + \beta)$ et $(C; \gamma)$, où G_1 est le barycentre de $(A; \alpha)$ et $(B; \beta)$.

Exemple 2.1 : Considérons G le barycentre des points pondérés $(A;2)$, $(B;1)$ et $(C;1)$.D'après la Propriété d'Associativité :G est le barycentre de $(A;2)$ et $(I;2)$, où I est le barycentre de $(B;1)$ et $(C;1)$.C'est-à-dire que I est le milieu du segment $[BC]$. Et par conséquent, G est le milieu du segment $[IA]$.



Application 2.1 : On considère le triangle ABC.
Construire G_1, le barycentre des points $(A;1)$, $(B;1)$ et $(C;-3)$.Puis construire G_2, le barycentre des points $(A;4)$, $(B;1)$ et $(C;1)$.
Correction :

Construction du point G_1 :
On a $G_1 = \mathrm{Bar}\{(A;1),(B;1),(C;-3)\}$. D'après la propriété caractéristique :

$$\forall M \in P, \quad -\overrightarrow{MG_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}.$$

En prenant $M = A$, on obtient :

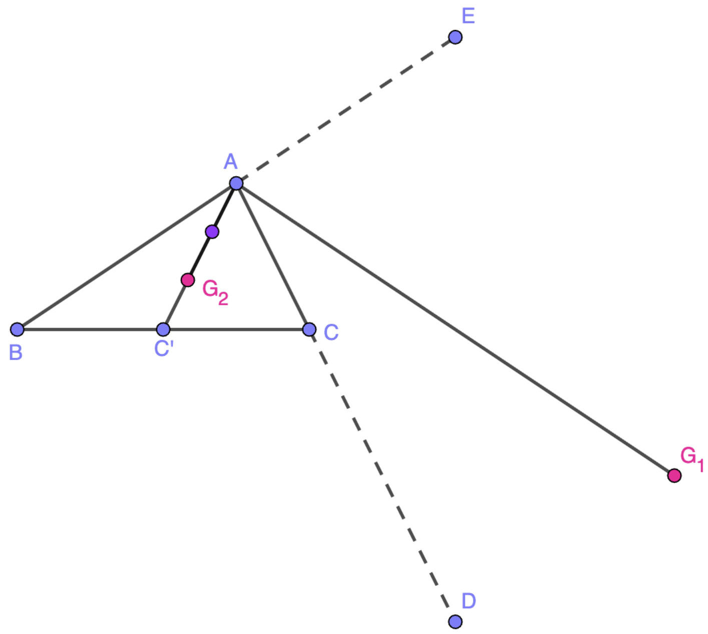
$$\overrightarrow{AG_1} = 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.$$

Construction du point G_2 :
On pose $C' = \mathrm{Bar}\{(B;1),(C;1)\}$; ainsi, C' est le milieu du segment $[BC]$.
Comme $G_2 = \mathrm{Bar}\{(A;4),(B;1),(C;1)\}$, la propriété d'associativité donne :

$$G_2 = \mathrm{Bar}\{(A;4),(C';2)\} = \mathrm{Bar}\{(A;2),(C';1)\}.$$

D'où :

$$\overrightarrow{AG_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC'}.$$



Propriété 2.3 Coordonnées du barycentre de trois points

On considère le plan $\mathcal{P}$ muni du repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soient $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ trois points du plan. Les coordonnées du barycentre G des points pondérés $(A; \alpha)$, $(B; \beta)$ et $(C; \gamma)$ sont (x_G, y_G), avec :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}, \qquad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Exemple 2.2 : Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on donne les points $A(1; 2)$, $B(3; 4)$ et $C(5; 0)$.
Soit G le barycentre du système $\{(A, 2), (B, 1), (C, 3)\}$.
Déterminons les coordonnées du point G.
Soit $G(x_G; y_G)$.

$$x_G = \frac{2 \times x_A + 1 \times x_B + 3 \times x_C}{2 + 1 + 3} = \frac{2 \times 1 + 1 \times 3 + 3 \times 5}{6} = \frac{2 + 3 + 15}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

$$y_G = \frac{2 \times y_A + 1 \times y_B + 3 \times y_C}{2 + 1 + 3} = \frac{2 \times 2 + 1 \times 4 + 3 \times 0}{6} = \frac{4 + 4 + 0}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Donc, $G\left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right)$.