Exercice 1

Soit f une fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

1. déterminer D_f
2. Montrer que f est majore sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que f est majore sur $\mathbb{R}$
4. Conclure

Correction de l'exercice 1

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ x^2+1 \neq 0\}$
   On a : $x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$
   (impossible car $x^2 \geq 0$)
   Donc $D_f = \mathbb{R}$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x^2 \geq 0 &\Rightarrow \ 1+x^2 \geq 1 \\ &\Rightarrow \ \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \\ &\Rightarrow \ f(x) \leq 1. \end{aligned}$$

   Ainsi, f est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x^2 \geq 0 &\Rightarrow \ 1+x^2 \geq 1 > 0 \\ &\Rightarrow \ \frac{1}{1+x^2} > 0 \\ &\Rightarrow \ f(x) > 0. \end{aligned}$$

   Ainsi, f est minorée par 0 sur $\mathbb{R}$.
4. f est majorée par 1 et minorée par 0 sur $\mathbb{R}$, donc elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit f est une fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$$

1. Déterminer D_f
2. Montrer que f est minorée par 1
3. Montrer que f est majorée par $\frac{7}{3}$

Correction de l'exercice 2

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ x^2+3x+3 \neq 0\}$
   On a : $x^2+3x+3=0$

$$\begin{aligned} \Delta &= 3^2 - 4 \times 1 \times 3 \\ &= 9-12 \\ &= -3 < 0 \end{aligned}$$

   Donc l'équation $x^2+3x+3=0$ n'admet pas de solution réelle.
   Donc $D_f = \mathbb{R}$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) - 1 &= \frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3} - 1 \\ &= \frac{2x^2+7x+7-(x^2+3x+3)}{x^2+3x+3} \\ &= \frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+3} \\ &= \frac{(x+2)^2}{x^2+3x+3} \end{aligned}$$

   Or, $(x+2)^2 \geq 0$ et $x^2+3x+3>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Donc, $f(x)-1 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Ainsi, f est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{7}{3} &= \frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3} - \frac{7}{3} \\ &= \frac{3(2x^2+7x+7)-7(x^2+3x+3)}{3(x^2+3x+3)} \\ &= \frac{6x^2+21x+21-7x^2-21x-21}{3(x^2+3x+3)} \\ &= \frac{-x^2}{3(x^2+3x+3)} \end{aligned}$$

   Or, $-x^2 \leq 0$ et $x^2+3x+3>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Donc, $f(x) - \frac{7}{3} \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Ainsi, f est majorée par $\frac{7}{3}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 3

Soit f une fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2+1}$$

1. Déterminer D_f
2. (a) Démontrer que f est majorée par 3
   (b) Est ce que 3 est un valeur maximale de f ?
3. (a) Démontrer que f est minorée par 2
   (b) Est ce que 2 est un valeur minimale de f ?

Correction de l'exercice 3

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ x^2+1 \neq 0\}$
   On a : $x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$
   (impossible car $x^2 \geq 0$)
   Donc $D_f = \mathbb{R}$
2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) - 3 &= \frac{2x^2+3}{x^2+1} - 3 \\ &= \frac{2x^2+3-3(x^2+1)}{x^2+1} \\ &= \frac{-x^2}{x^2+1} \end{aligned}$$

Or, $-x^2 \leq 0$ et $x^2+1>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, $f(x)-3 \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, f est majorée par 3 sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour que 3 soit une valeur maximale, il faut qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0)=3$.

Donc,

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 3 \\ \frac{2x_0^2+3}{x_0^2+1} &= 3 \\ 2x_0^2+3 &= 3(x_0^2+1) \\ 2x_0^2+3 &= 3x_0^2+3 \\ -x_0^2 &= 0 \\ x_0 &= 0 \end{aligned}$$

Donc, $f(0)=3$

Puisque : $\forall x \in \mathbb{R};\ f(x) \leq 3$ et $f(0)=3$

Donc, 3 est une valeur maximale de f.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x)-2 &= \frac{2x^2+3}{x^2+1}-2 \\ &= \frac{2x^2+3-2(x^2+1)}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

Or, $1>0$ et $x^2+1>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, $f(x)-2>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, f est minorée par 2 sur $\mathbb{R}$.

(b) On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)>2$.

Donc, il n'existe pas de réel x_0 tel que $f(x_0)=2$

Donc, 2 n'est pas une valeur minimale de f.

Exercice 4

Soit f est une fonction numérique définie par :

$$f(x)=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}$$

1. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2+2x+2>0$
2. Déterminer D_f
3. (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) \geq 1$
   (b) En déduire que 1 est le minimum absolue de f.
4. (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x)<2$
   (b) Est-ce que 2 est une valeur maximale de f ?

Correction de l'exercice 4

1. Soit $x \in \mathbb{R}$

On a : $x^2+2x+2=0$

$$\begin{aligned} \Delta &= 2^2-4\cdot 1\cdot 2 \\ &= 4-8 \\ &= -4<0 \end{aligned}$$

Et comme : $a=1>0$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R};\ x^2+2x+2>0$.

2. $D_f=\{x \in \mathbb{R}/\ x^2+2x+2 \neq 0\}$

Or, d'après la question précédente, $x^2+2x+2>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, $D_f=\mathbb{R}$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x)-1 &= \frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}-1 \\ &= \frac{2x^2+4x+3-(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} \\ &= \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} \\ &= \frac{(x+1)^2}{x^2+2x+2} \end{aligned}$$

Or, $(x+1)^2 \geq 0$ et d'après la question 1, $x^2+2x+2>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, $f(x)-1 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, f est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour que 1 soit une valeur minimale, il faut qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0)=1$.

Donc,

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 1 \\ \frac{2x_0^2+4x_0+3}{x_0^2+2x_0+2} &= 1 \\ 2x_0^2+4x_0+3 &= x_0^2+2x_0+2 \\ x_0^2+2x_0+1 &= 0 \\ (x_0+1)^2 &= 0 \\ x_0 &= -1 \end{aligned}$$

Donc, $f(-1)=1$

Puisque : $\forall x \in \mathbb{R};\ f(x) \geq 1$ et $f(-1)=1$

Donc, 1 est une valeur minimale de f.

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x)-2 &= \frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}-2 \\ &= \frac{2x^2+4x+3-2(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} \\ &= \frac{-x^2-1}{x^2+2x+2} \end{aligned}$$

Or, $-x^2-1<0$ et d'après la question 1, $x^2+2x+2>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, $f(x)-2<0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, f est majorée par 2 sur $\mathbb{R}$.

(b) On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 2$.
Donc, il n'existe pas de réel x_0 tel que $f(x_0) = 2$
Donc, 2 n'est pas une valeur maximale de f.