Correction de l'exercice 1

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ x^2 + 1 \neq 0\}$
   On a : $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$
   (impossible car $x^2 \geq 0$)
   Donc $D_f = \mathbb{R}$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} x^2 \geq 0 &\Rightarrow \ 1 + x^2 \geq 1 \\ &\Rightarrow \ \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \\ &\Rightarrow \ f(x) \leq 1. \end{aligned}$$
   Ainsi, f est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} x^2 \geq 0 &\Rightarrow \ 1 + x^2 \geq 1 > 0 \\ &\Rightarrow \ \frac{1}{1+x^2} > 0 \\ &\Rightarrow \ f(x) > 0. \end{aligned}$$
   Ainsi, f est minorée par 0 sur $\mathbb{R}$.
4. f est majorée par 1 et minorée par 0 sur $\mathbb{R}$, donc elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 2

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ x^2 + 3x + 3 \neq 0\}$
   On a : $x^2 + 3x + 3 = 0$
$$\begin{aligned} \Delta &= 3^2 - 4 \times 1 \times 3 \\ &= 9 - 12 \\ &= -3 < 0 \end{aligned}$$
   Donc l'équation $x^2 + 3x + 3 = 0$ n'admet pas de solution réelle.
   Donc $D_f = \mathbb{R}$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} f(x) - 1 &= \frac{2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3x + 3} - 1 \\ &= \frac{2x^2 + 7x + 7 - (x^2 + 3x + 3)}{x^2 + 3x + 3} \\ &= \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 3} \\ &= \frac{(x+2)^2}{x^2 + 3x + 3} \end{aligned}$$
   Or, $(x+2)^2 \geq 0$ et $x^2 + 3x + 3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Donc, $f(x) - 1 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Ainsi, f est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} f(x) - \frac{7}{3} &= \frac{2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3x + 3} - \frac{7}{3} \\ &= \frac{3(2x^2 + 7x + 7) - 7(x^2 + 3x + 3)}{3(x^2 + 3x + 3)} \\ &= \frac{6x^2 + 21x + 21 - 7x^2 - 21x - 21}{3(x^2 + 3x + 3)} \\ &= \frac{-x^2}{3(x^2 + 3x + 3)} \end{aligned}$$
   Or, $-x^2 \leq 0$ et $x^2 + 3x + 3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Donc, $f(x) - \frac{7}{3} \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Ainsi, f est majorée par $\frac{7}{3}$ sur $\mathbb{R}$

Correction de l'exercice 3

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ x^2 + 1 \neq 0\}$
   On a : $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$
   (impossible car $x^2 \geq 0$)
   Donc $D_f = \mathbb{R}$
2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} f(x) - 3 &= \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} - 3 \\ &= \frac{2x^2 + 3 - 3(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \\ &= \frac{-x^2}{x^2 + 1} \end{aligned}$$
   Or, $-x^2 \leq 0$ et $x^2 + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Donc, $f(x) - 3 \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Ainsi, f est majorée par 3 sur $\mathbb{R}$.

   (b) Pour que 3 soit une valeur maximale, il faut qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 3$.
   Donc,
$$\begin{aligned} f(x_0) &= 3 \\ \frac{2x_0^2 + 3}{x_0^2 + 1} &= 3 \\ 2x_0^2 + 3 &= 3(x_0^2 + 1) \\ 2x_0^2 + 3 &= 3x_0^2 + 3 \\ -x_0^2 &= 0 \\ x_0 &= 0 \end{aligned}$$
   Donc, $f(0) = 3$
   Puisque : $\forall x \in \mathbb{R}; \ f(x) \leq 3$ et $f(0) = 3$
   Donc, 3 est une valeur maximale de f.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x)-2 &= \frac{2x^2+3}{x^2+1}-2 \\ &= \frac{2x^2+3-2(x^2+1)}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

Or, $1>0$ et $x^2+1>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, $f(x)-2>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, f est minorée par 2 sur $\mathbb{R}$.

(b) On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)>2$.

Donc, il n'existe pas de réel x_0 tel que $f(x_0)=2$

Donc, 2 n'est pas une valeur minimale de f.

Correction de l'exercice 4

1. Soit $x \in \mathbb{R}$

On a : $x^2+2x+2=0$

$$\begin{aligned} \Delta &= 2^2-4\cdot 1\cdot 2 \\ &= 4-8 \\ &= -4<0 \end{aligned}$$

Et comme : $a=1>0$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R};\ x^2+2x+2>0$.

2. $D_f=\{x \in \mathbb{R}/\ x^2+2x+2 \neq 0\}$

Or, d'après la question précédente, $x^2+2x+2>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, $D_f=\mathbb{R}$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x)-1 &= \frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}-1 \\ &= \frac{2x^2+4x+3-(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} \\ &= \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} \\ &= \frac{(x+1)^2}{x^2+2x+2} \end{aligned}$$

Or, $(x+1)^2 \geq 0$ et d'après la question 1, $x^2+2x+2>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, $f(x)-1 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, f est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour que 1 soit une valeur minimale, il faut qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0)=1$.

Donc,

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 1 \\ \frac{2x_0^2+4x_0+3}{x_0^2+2x_0+2} &= 1 \\ 2x_0^2+4x_0+3 &= x_0^2+2x_0+2 \\ x_0^2+2x_0+1 &= 0 \\ (x_0+1)^2 &= 0 \\ x_0 &= -1 \end{aligned}$$

Donc, $f(-1)=1$

Puisque : $\forall x \in \mathbb{R};\ f(x) \geq 1$ et $f(-1)=1$

Donc, 1 est une valeur minimale de f.

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x)-2 &= \frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}-2 \\ &= \frac{2x^2+4x+3-2(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} \\ &= \frac{-x^2-1}{x^2+2x+2} \end{aligned}$$

Or, $-x^2-1<0$ et d'après la question 1, $x^2+2x+2>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, $f(x)-2<0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, f est majorée par 2 sur $\mathbb{R}$.

(b) On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)<2$.

Donc, il n'existe pas de réel x_0 tel que $f(x_0)=2$

Donc, 2 n'est pas une valeur maximale de f.

Correction de l'exercice 5

* $g(x)=-2x^2-4x-2$

Éléments caractéristiques :

— Domaine de définition : $\mathcal{D}_g=\mathbb{R}$

— Nature de la courbe : La courbe représentative $\mathcal{C}_g$ est une parabole ouverte vers le bas.

— Sommet $S(x_S,y_S)$:
$x_S=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-4}{2(-2)}=-1.$
$y_S=g(-1)=-2(-1)^2-4(-1)-2=0.$
Le Sommet est $\mathbf{S(-1,0)}$.

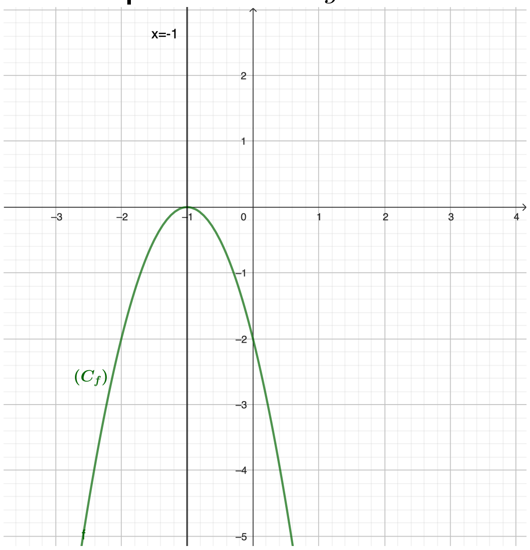
— Axe de symétrie : la droite d'équation $y=-1$

Tableau de variation de g :

On a : $a=-2<0$, donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

Courbe représentative de g :



$*\ h(x) = \dfrac{x-2}{3x+1}$

Éléments caractéristiques :

— Domaine de définition : $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

— Nature de la courbe : La courbe représentative $\mathcal{C}_h$ est une hyperbole.

— Asymptote Verticale : la droite d'équation $\mathbf{x} = \dfrac{-\mathbf{d}}{\mathbf{c}} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

— Asymptote horizontale : la droite d'équation $\mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

— Centre de symétrie Ω : $\mathbf{\Omega}\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$

Tableau de variation de g :

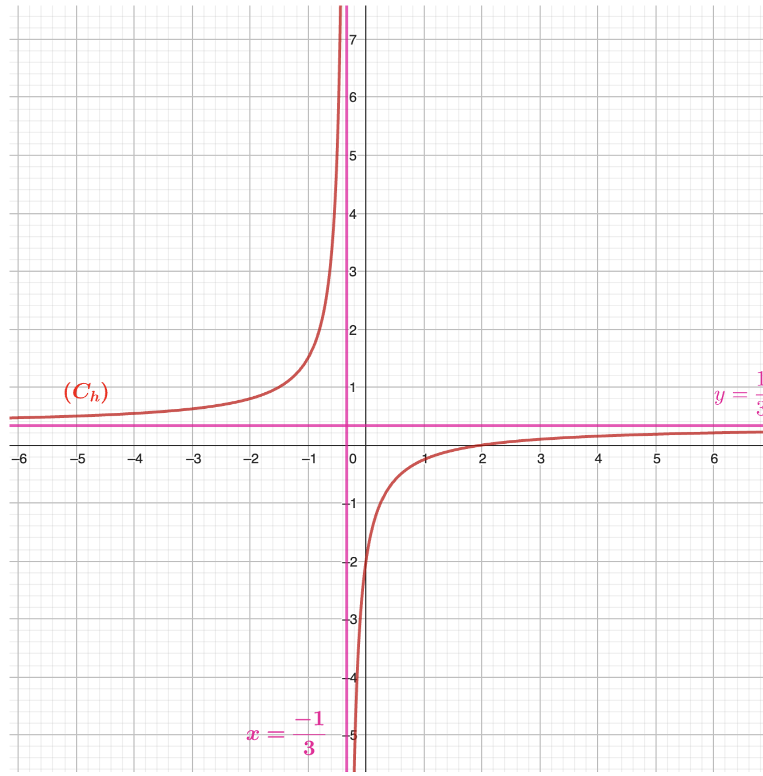
On a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 3 \times (-2) = 1 + 6 = 7 > 0$$

Donc :

x	$-\infty$	$\frac{-1}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

Courbe représentative de h :



Correction de l'exercice 6

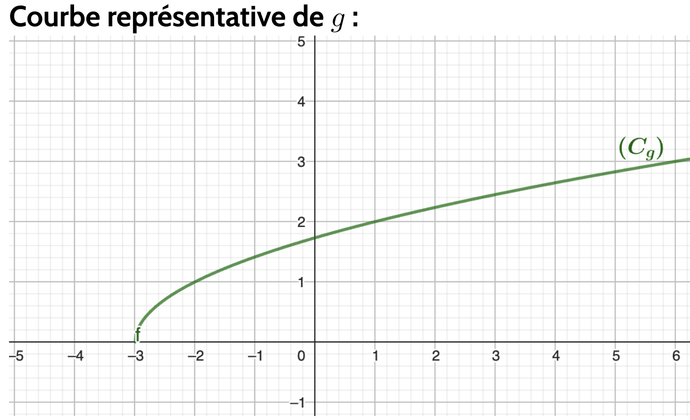
- $g(x) = \sqrt{x+3}$

  On a : $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 3 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\} = [-3, +\infty[$.

  Tableau de variations de g :

x	-3	$+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

  Courbe représentative de g :



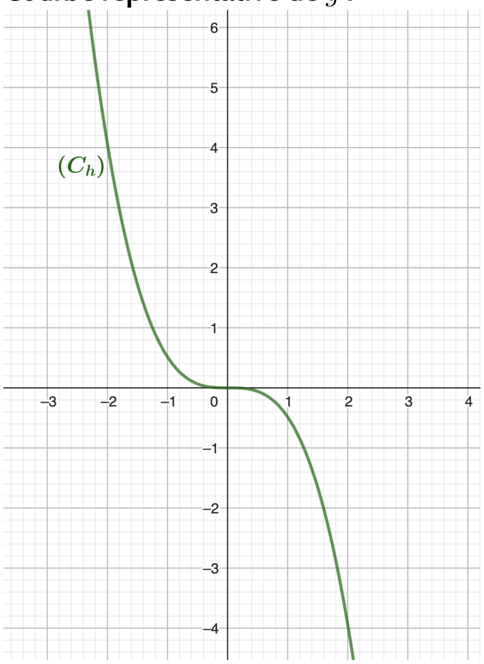
- $h(x) = -\dfrac{1}{2}x^3$

  On a : $D_h = \mathbb{R}$

  Tableau de variations de g : Puisque $a = -\dfrac{1}{2} < 0$, donc :

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↘	$-\infty$

Courbe représentative de g :



Correction de l'exercice 7

Correction de l'exercice 8

1. Déterminons D_f :
   $D_f = \{x \in \mathbb{R}/\ x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$
   Étudions la parité de f :
   - $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad -x \in \mathbb{R}^*$
   - $\forall x \in \mathbb{R}^*,$
     $f(-x) = \dfrac{(-x)}{3} + \dfrac{3}{(-x)} = -\dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{x} = -\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x}\right) = -f(x)$ Donc, f est impaire.
2. Pour $a > 0,\ b > 0$ et $a \neq b$:
   $$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{\frac{a}{3} + \frac{3}{a} - \frac{b}{3} - \frac{3}{b}}{a - b} = \frac{a - b}{a - b}\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{ab}\right) =$$
3. Variations sur $]0; 3]$ et $[3; +\infty[$.
   On a pour $a > 0,\ b > 0$:
   $$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{ab - 9}{3ab}.$$
   - Si $a, b \in]0, 3]$, alors $ab \leq 9$, donc $ab - 9 \leq 0$, ainsi f est **décroissante** sur $]0, 3]$.
   - Si $a, b \in [3, +\infty)$, alors $ab \geq 9$, donc $ab - 9 \geq 0$, ainsi f est **croissante** sur $[3, +\infty)$.
4. Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
f(x)		↗	-2	↘	‖	↘	2	↗	

Ainsi :

- Sur $]0, +\infty[$, f admet un **minimum** en $x = 3$
- Par imparité, sur $]-\infty, 0[$, f admet un **maximum** en $x = -3$:
- Sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, f n'admet **ni maximum ni minimum global**.

Correction de l'exercice 9

Correction de l'exercice 10

Correction de l'exercice 11

Soient les fonctions

$$f(x) = x^2 - 2x - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x - 2}{x + 2}.$$

1. • La fonction f est un polynôme, donc : $D_f = \mathbb{R}$.
   • $D_g = \{x \in \mathbb{R}/x + 2 \neq 0\}$
   $$x + 2 = 0 \iff x = -2.$$
   Donc :
   $$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$
2. **Ensemble de définition et expression de $g \circ f$**
   $$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$$
   $x \in D_f$ donc $x \in \mathbb{R}$.
   $f(x) \in D_g$ signifie que $f(x) \neq -2$.
   Résolvons l'équation $f(x) = -2$:
   $$x^2 - 2x - 1 = -2 \iff x^2 - 2x + 1 = 0$$
   Calculons le discriminant Δ :
   $$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$$
   Puisque $\Delta = 0$, l'équation possède une unique solution réelle :
   $$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

Donc : $D_{g\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

Calcul de $g \circ f(x)$:

$$g(f(x)) = \frac{f(x)-2}{f(x)+2} = \frac{x^2-2x-1-2}{x^2-2x-1+2} = \frac{x^2-2x-3}{x^2-2x+1}$$

3. **Tableaux de variations de f et de g**

   Variations de f : $f(x) = x^2 - 2x - 1$.

   Le sommet $S(x_S; y_S) : x_S = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2\times 1} = 1$

   $y_S = f(1) = 1^2 - 2\times 1 - 1 = -2$

   Puisque $a = 1 > 0$, Donc

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f(x)		↘	-2	↗	

   Variations de g : $g(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$

   On a : $\Delta_g = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2) - (1)(-2) = 4.$

   Puisque $\Delta > 0$, donc

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f(x)		↗	‖	↗	

4. **Tableau de variations de $g \circ f$**

   f est décroissante sur $]-\infty, 1[$ et $f(]-\infty, 1[) =]-2, +\infty[$. Comme g est croissante sur $]-2, +\infty[$, alors $g \circ f$ est décroissante sur $]-\infty, 1[$.

   f est croissante sur $]1, +\infty[$ et $f(]1, +\infty[) =]-2, +\infty[$. Comme g est croissante sur $]-2, +\infty[$, alors $g \circ f$ est croissante sur $]1, +\infty[$.

Correction de l'exercice 12

Correction de l'exercice 13

1. La fonction f est un polynôme, donc $D_f = \mathbb{R}$.

2. Vérification de $f(2) = g(2)$

   $f(2) = 2^2 - 2 = 2$ et $g(2) = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

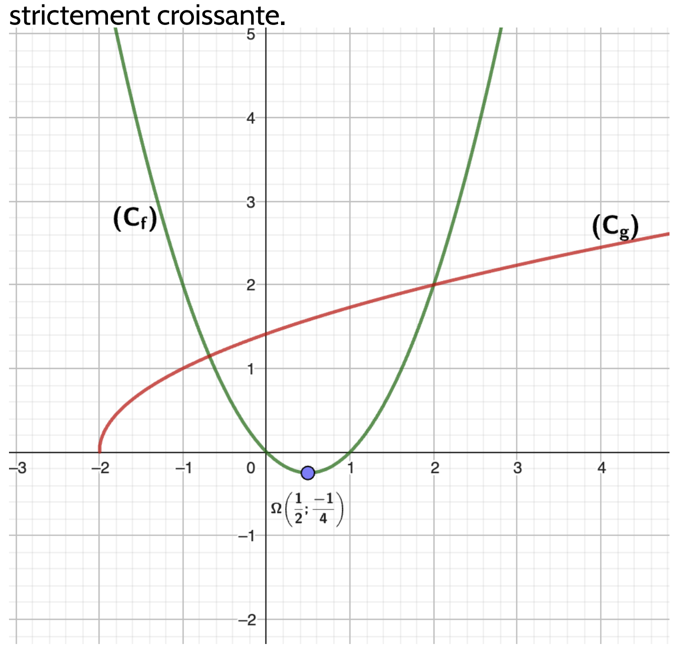
   Donc : $f(2) = g(2)$

3. Représentation graphique de f et g

   La courbe de f est une parabole ouverte vers le haut, d'axe de symétrie $x = \dfrac{1}{2}$ et de sommet

$$\Omega\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right).$$

   La courbe de g est définie pour $x \geq -2$ et est strictement croissante.



4. Image de $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$ par f

   D'après le graphe :

$$f\left(\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[$$

5. Tableau de variations de f

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f(x)		↘	$\frac{-1}{4}$	↗	

6. Montrons que $h(x) = g(f(x))$

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)+2} = \sqrt{x^2-x+2} = h(x)$$

   Donc :

$$h = g \circ f$$

7. La fonction f est décroissante sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$ et

$$f\left(\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[.$$

Or la fonction g est croissante sur $\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[$. Ainsi, la fonction composée $h = g \circ f$ est décroissante sur

$$\left]-\infty, \frac{1}{2}\right].$$

De même, la fonction f est croissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et

$$f\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\right) = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[.$$

Or la fonction g est croissante sur $\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[$. Ainsi, la fonction composée $h = g \circ f$ est croissante sur

$$\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[.$$