Correction de l'exercice 3

Le point C est le barycentre de $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$, ce qui équivaut à :

$$\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{0}$$

- Cas 1 : $3\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AB} &\iff 3\overrightarrow{AC}-5(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\vec{0}\\ &\iff -2\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{CB}=\vec{0}\\ &\iff -2\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{BC}=\vec{0}\end{aligned}$$

  Donc $\alpha=-2$ et $\beta=5$.

- Cas 2 : B est le milieu du segment $[AC]$.

$$\begin{aligned}B \text{ milieu de } [AC] &\iff \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}\\ &\iff (\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{BC}=\vec{0}\\ &\iff \overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{BC}=\vec{0}\\ &\iff -\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}=\vec{0}.\end{aligned}$$

  Donc $\alpha=-1$ et $\beta=2$.

- Cas 3 : $\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned}7\overrightarrow{AC}=3(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}) &\iff 4\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{CB}=\vec{0}\\ &\iff 4\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}\end{aligned}$$

  Donc $\alpha=4$ et $\beta=3$.

Correction de l'exercice 6

1. On sait que I est le milieu de $[AB]$, donc : $I=\text{bary}\{(A;1),(B;1)\}$. La somme des coefficients est $1+1=2$.
   Et J est le milieu de $[IC]$, donc $J=\text{bary}\{(I;1),(C;1)\}=\text{bary}\{(I;2),(C;2)\}$.
   Par associativité du barycentre, on remplace $(I;2)$ par les points $(A;1)$ et $(B;1)$.
   D'où : $J=\text{bary}\{(A;1),(B;1),(C;2)\}$.
2. Soit $L=\text{bary}\{(A;1),(C;2)\}$.
   (a) Montrons que les points B, J et L sont alignés.
   On a : $L=\text{bary}\{(A;1),(C;2)\}$.
   D'après la question 1 : $J=\text{bary}\{(A;1),(B;1),(C;2)\}$.
   Par associativité du barycentre : $J=\text{bary}\{(B;1),(L;3)\}$.
   donc : B, J et L sont alignés.
   (b) $L=\text{bary}\{A;C\}$, donc $L\in(AC)$.
   L,B,J sont alignés, donc $L\in(BJ)$.
   Comme K est l'intersection de (BJ) et (AC), donc $K=L$.
   Comme $L=\text{bary}\{(A,1),(C,2)\}$, on a : $\overrightarrow{AL}=\dfrac{2}{1+2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
   Ainsi $\overrightarrow{AK}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
3. Détermination des ensembles de points :
   (a) $||\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}||=AC$
   On a : $K=\text{bary}\{(A;1),(C;2)\}$.
   Alors d'après la propriété caractéristique :

$$\forall M\in\mathcal{P}:3\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}|| = AC &\iff ||3\overrightarrow{MK}|| = AC \\ &\iff 3MK = AC \\ &\iff MK = \frac{AC}{3} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points M est le cercle de centre K et de rayon $\dfrac{AC}{3}$.

(b) $||\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}|| = 2||\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}||$

On a : $J =$ bary$\{(A,1),(B,1),(C,2)\}$ et $I =$ bary$\{(A,1),(B,1)\}$.

D'après la propriété caractéristique :

$$\forall M \in \mathcal{P} : \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MJ} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}|| = 2||\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|| &\iff ||4\overrightarrow{MJ}|| = 2||2\overrightarrow{MI}|| \\ &\iff 4MJ = 4MI \\ &\iff MJ = MI \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points M est la médiatrice du segment $[IJ]$.