Lycée qualifiant : Al Quods	**Devoir à domicile N° 1**	Pr : Ayoub Aissaoui
Année scolaire : 2025/2026	**Semestre 1**	Niveau : 1Bac Exp

Exercice 1

1. Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

P : $\left(\dfrac{25}{9} = \dfrac{5}{3} \quad \text{ou} \quad 3 \text{ divise } 213\right)$

Q : $\left(-\dfrac{5}{2} < -\dfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad |-4| = -4\right)$

R : $(\exists n \in \mathbb{Z}) \quad n^2 - 1 = 0$

S : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \dfrac{n+3}{5} \in \mathbb{N}$

2. On considère la proposition suivante :

$$\text{T} : \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad 3x^2 - 4x + 2 \leq 0$$

   (a) Donner la négation de T.

   (b) Déterminer la valeur de vérité de la proposition T.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+3} - 2$, et la proposition

$$\text{P} : \quad (\forall a, b \in \mathbb{R}^2) \quad f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

   (b) Donner la négation de P.

   (c) Déduire que P est fausse.

4. En utilisant le raisonnement par la contraposée montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x \neq y \quad \text{et} \quad x.y \neq 1) \Rightarrow \left(\frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}\right)$$

5. En utilisant le raisonnement par équivalences successives montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) : \quad \frac{x + \sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1} \leq \sqrt{x} + 3$$

6. En utilisant le raisonnement par récurrence montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 + 7 + 7^2 + \ldots\ldots\ldots\cdots + 7^n = \frac{7^{n+1} - 1}{6}$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 6}{x^2 - 4x + 8}$.

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 - 4x + 8 > 0$, et déduire D_f, le domaine de définition de f.
2. Montrer que $f(2) = \dfrac{1}{2}$ est une valeur minimale de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) \leq 1$.

   (b) Est-ce que 1 est une valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3

On considère les deux fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x-3}$$

C_f et C_g sont respectivement les courbes des fonctions f et g dans un repère orthonormé.

1. (a) Donner le tableau de variations de f.

   (b) Déterminer la nature de C_f et ses éléments caractéristiques.

(c) Déterminer l'intersection de C_f avec les axes (Ox) et (Oy).

2. Déterminer D_g et donner le tableau de variations de g.
3. Construire C_f et C_g dans le même repère orthonormé.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 - 6x + 8 - \sqrt{x-3} \leq 0$.