Lycée qualifiant : Al Zahrawi	**Série N° 1**	Pr : Ayoub Aissaoui
Matière : Mathématiques	**CALCUL VECTORIEL DANS LE PLAN**	Niveau : Tronc commun science

Exercice 1

Soit ABC un triangle rectangle en A.

1. Construire le point D tel que : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.
   Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
2. Construire le point E tel que : $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AC}$.
   Justifier que le quadrilatère $ACDE$ est un rectangle.

Exercice 2

A, B, C et D étant quatre points du plan, construire les points E, F, G et K définis par :

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD}$
2. $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
3. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$
4. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$

Exercice 3

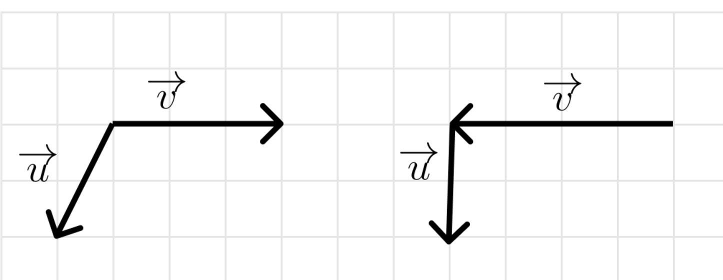
A, B et C étant trois points du plan, Construire les vecteurs définis par :

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} \; ; \; \vec{v} = -3\overrightarrow{AC} \; ; \; \vec{w} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \quad \text{et } \vec{s} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{BC}$$

Exercice 4

Dans chacun des cas de la figure suivante, construire les vecteurs $\vec{w}$, $\vec{s}$, $\vec{z}$ et $\vec{t}$ tels que :

- $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$
- $\vec{s} = \vec{u} - \vec{v}$
- $\vec{z} = 2\vec{u} + \vec{v}$
- $\vec{t} = -2\vec{u} - \vec{v}$



Exercice 5

Soit ABC un triangle et les points E et F tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$$

1. Montrer que :
   $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
2. Faire une figure.
3. Montrer que B est le milieu de [EF].

Exercice 6

On considère trois points non alignés E, F et G. Le point K est défini par : $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{EG} + 2\overrightarrow{EF}$.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que : $\overrightarrow{GK} = 2\overrightarrow{EF}$.
3. Que peut-on conclure sur les vecteurs $\overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{EF}$?

Exercice 7

Soit ABC un triangle.

1. Construire les points E et F tels que :
$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$$
2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont colinéaires.

Exercice 8

Soit ABC un triangle.

1. Construire les points M et N tels que :
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$
2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.

Exercice 9

On considère trois points non alignés A, B et C.

1. Construire les points E et F tels que :
$$\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$
2. Montrer que :
$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$$
3. Montrer que les droites (BF) et (EC) sont parallèles.

Exercice 10

Soit ABC un triangle, tel que :

$$AB = 6 \quad , \quad AC = 4 \quad \text{et} \quad BC = 5.$$

1. Faire une figure.
2. Construire les points E et F tels que :
$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$$
3. Montrer que : $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.
4. Exprimer $\overrightarrow{EC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

5. Que peut-on conclure sur les droites (BF) et (EC) ?

Exercice 11

On considère un parallélogramme ABCD

1. Construire les points E et F tels que :
$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$
2. Montrer que :
$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}.$$
3. En déduire que les points C, E et F sont alignés.

Exercice 12

Soit ABC un triangle. On note E, F et G les points définis respectivement par :
$$\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

1. Faire une figure.
2. (a) Exprimer $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) En déduire que les droites (AF), (BG) et (CE) sont parallèles.

Exercice 13

Soit ABC un triangle. On note I et J les points définis respectivement par :
$$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CJ} = -2\overrightarrow{AB}$$

1. Faire une figure.
2. Montrer que les droites (AB) et (IC) sont parallèles.
3. Montrer que C est le milieu [IJ].

Exercice 14

On considère le triangle ABC et a un nombre réel. M, N et P sont définis par :
$$\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$$

Trouver la valeur du nombre réel a pour que les points M, N et P soient alignés.

Exercice 15

On considère un parallélogramme ABCD.
Soit M le point de $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$ où $x > 1$. On considère le point N tel que : $\overrightarrow{DN} = \dfrac{1}{x+1}\overrightarrow{DB}$.

1. Montrer que les points A, M et N sont alignés.
2. La droite (AN) coupe (CD) en E. Déterminer le réel y tel que : $\overrightarrow{DE} = y\overrightarrow{DC}$.

Exercice 16

Soit ABC un triangle. On considère les points G, E et F définis par :
$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CA}.$$

1. Construire les points G, E et F.
2. Soit I le point tel que :
$$3\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{0}$$
   (a) Montrer que les points A, I et E sont alignés, puis construire I.
   (b) Montrer que les points B, I et F sont alignés.
   (c) Montrer que les points C, I et G sont alignés.
3. Soit H le point tel que :
$$3\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{CH}$$
   Montrer que H $\in$ (FG).

Exercice 17

Soit ABC un triangle. Soit I, J et K les points définis par :
$$\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{KA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KB}$$

Soit H le point tel que : $3\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{HC}$

1. Montrer que, pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MA}$
2. Montrer que les droites (BI), (CK) et (AJ) sont concourantes en H.

Exercice 18

Soit ABCD un quadrilatère tel que : $7\overrightarrow{BC} = 5\overrightarrow{AD}$

1. Exprimer $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. On considère le point M défini par : $5\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{AM}$.
   (a) Calculer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$.
   (b) Exprimer $\overrightarrow{BM}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   (c) En déduire que les segments $[BM]$ et $[CA]$ ont le même milieu.
3. Soit x un nombre réel. On considère le point H tel que :
$$\overrightarrow{BH} = x\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}.$$
   (a) Déterminer x pour que A soit le milieu de $[DH]$.
   (b) Dans le cas général, calculer $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et x.
   (c) Déterminer l'ensemble des points H lorsque x décrit l'ensemble des nombres réels.