NOTIONS DE LOGIQUE

1 Propositions - Fonction proportionnelles

Activité 1

Mettre une croix (x) dans la case qui convient :

Textes mathématiques	Vrai	Faux	On ne peut pas décider sa vérité	N'a pas de sens
15×4				x
$12 \times 3 + 4 = 84$		x		
$-6 \in \mathbb{N}$		x		
2 est une racine du polynôme $P(x) = x^2 - x - 2$	x			
Chaque nombre impair est un nombre premier		x		
$(x \in \mathbb{Z}) : x + 5 \geq 0$			x	
Soient x et y de $\mathbb{Z}$, on a : $2x - y = 1$			x	

Définitions

* **Une proposition** (ou assertion) est une phrase ou une expression qui a un sens et qui est soit vraie, soit fausse, mais pas les deux en même temps.
  On note souvent une proposition par les lettres P, Q ou $R \ldots$
* On appelle **fonction propositionnelle** tout énoncé qui contient une variable (ou plusieurs variables) d'un ensemble, elle devient proposition chaque fois qu'on remplace la variable par un élément de cet ensemble.

Exemples

- "Le nombre 2022 est pair" est une proposition vraie.
- "Tout carré est un parallélogramme" est une proposition vraie.
- "Tout nombre pair est divisible par 4" est une proposition fausse.
- "$x + y = z$" n'est pas une proposition.
- $P(x) : x \in \mathbb{R},\ x^2 - x < 0$ est une fonction propositionnelle.
  $P(0)$ est une proposition fausse mais $P\left(\frac{1}{2}\right)$ est une proposition vraie.

- $P(n,m) : n+m=10$ avec $n, m \in \mathbb{N}$ est une fonction propositionnelle.
  $P(4;6)$ est une proposition vraie mais $P(2;7)$ est une proposition fausse.

Application 1

Déterminer la vérité de chacun des propositions suivantes :

- P : "$\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{7}{3}$".
- Q : "$(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5}) \in \mathbb{N}$".
- R : "L'équation $x^2-3x+5=0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$".

Correction

- On a : $\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{7})^2}{(\sqrt{3})^2} = \frac{7}{3}$. Donc P est vraie.
- On a : $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 = 3-5 = -2$. Or $-2 \notin \mathbb{N}$. Donc Q est fausse.
- Considérons l'équation $x^2-3x+5=0$.
  Le discriminant est : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 9-20 = -11 < 0$.
  L'équation n'admet donc aucune solution réelle, ainsi R est fausse.

2 Quantificateurs

Activité 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $x^2-x-6<0$
2. En déduire la valeur de vérité des propositions suivantes :
   - P_1 : "Quel que soit $x \in]-2;3[,\ x^2-x-6<0$"
   - P_2 : "Il existe au moins un nombre $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2-x-6<0$"
   - P_3 : "Quel que soit $x \in \mathbb{R},\ x^2-x-6<0$"
   - P_4 : "Il existe au moins un nombre $x \in]-2;3[$ tel que $x^2-x-6<0$"
   - P_5 : "Il existe un unique nombre réel x tel que $x^2-x-6=0$"

Correction

1. Résolution de l'inéquation : $x^2-x-6<0$.
   On calcule le discriminant : $\Delta = b^2-4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1+24 = 25$.
   Les racines sont : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{2} = -2, \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{2} = 3.$
   On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
x^2-x-6		+	0	−	0	+	

Donc : $S =]-2;3[$

2. Valeur de vérité des propositions

   - P_1 : «Quel que soit $x \in]-2;3[,\ x^2-x-6<0$».
     Dans l'intervalle $]-2;3[$ l'inéquation est vraie pour tout x. Donc P_1 est **vraie.**
   - P_2 : «Il existe au moins un nombre $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2-x-6<0$».
     Par exemple pour $x=0$, on a : $-6<0$. Donc P_2 est **vraie.**
   - P_3 : «Quel que soit $x \in \mathbb{R},\ x^2-x-6<0$».
     Si on prend $x=4$, on a : $4^2-4-6=6>0$ Donc P_3 est **fausse.**
   - P_4 : «Il existe au moins un nombre $x \in]-2;3[$ tel que $x^2-x-6<0$».
     Par exemple pour $x=0$, on a : $-6<0$. Donc P_4 est **vraie.**
   - P_5 : «Il existe un unique nombre réel x tel que $x^2-x-6=0$».
     L'équation $x^2-x-6=0$ a pour solutions $x=-2$ et $x=3$ (deux racines distinctes). Donc il n'y a pas d'unicité. Donc P_5 est **fausse.**

Définitions

Soit $P(x)$ une proposition dépendant de la variable x appartenant à un ensemble E non vide.

* $(\forall x \in E) : P(x)$ est vraie si chaque élément x de E vérifie la propriété $P(x)$.
  Le symbole $\forall$ est appelé quantificateur universel, et se lit « pour tout » ou « quel que soit ».
* $(\exists x \in E) : P(x)$ est vraie s'il existe au moins un élément x de E qui vérifie la propriété $P(x)$.
  Le symbole $\exists$ est appelé quantificateur existentiel, et se lit « il existe au moins ».
* $(\exists! x \in E) : P(x)$ est vraie s'il existe un unique élément x de E qui vérifie la propriété $P(x)$.
  Le symbole $\exists!$ se lit « il existe un unique ».

Exemples

- P : "$(\forall x \in \mathbb{R}) : 2x+1=0$" est une proposition fausse parce que si $x=0$, alors $2\times 0+1=0$ est faux.
- Q : "$(\exists n \in \mathbb{R}) : 2n-4=0$" est une proposition vraie car l'entier $n=2$ vérifie $2n-4=0$.
- R : "$(\exists! x \in \mathbb{R}) : x^2-2x+1=0$" est une proposition vraie parce que 1 est la seule solution de l'équation $x^2-2x+1=0$.

Application 2

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

- P : "$3 \times 2 = 6$"
- Q : "-1 est une solution de $x^2 - 2x + 3 = 0$"
- R : "Tous les nombres naturels sont positifs"
- S : $(\exists! x \in \mathbb{R}); x^2 = 4$
- T : $(\exists n \in \mathbb{N}); 3n - 1 = 0$
- N : $(\forall x \in \mathbb{R}); |x| = x$
- E : $(\exists n \in \mathbb{R})(\exists m \in \mathbb{R}); n - m = 12$

Correction

1. **P :** "$3 \times 2 = 6$"

   VRAI. $3 \times 2 = 6$ est correct.

2. **Q :** "-1 est une solution de l'équation $x^2 - 2x + 3 = 0$"

   FAUX. En substituant $x = -1 : (-1)^2 - 2(-1) + 3 = 1 + 2 + 3 = 6 \neq 0$.

3. **R :** "Tous les nombres naturels sont **positifs**"

   VRAI. Par définition, tous les nombres naturels ($\mathbb{N}$) sont positifs.

4. **S :** $(\exists! x \in \mathbb{R}); x^2 = 4$

   FAUX. Il existe deux solutions réelles à $x^2 = 4$ ($x = 2$ et $x = -2$), donc ce n'est pas unique.

5. **T :** $(\exists n \in \mathbb{N}); 3n - 1 = 0$

   FAUX. $3n - 1 = 0$ alors $n = \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$.

6. **N :** $(\forall x \in \mathbb{R}); |x| = x$

   FAUX. Pour $x = -1$, $|-1| = 1 \neq -1$.

7. **E :** $(\exists n \in \mathbb{R})(\exists m \in \mathbb{R}); n - m = 12$

   VRAI. Par exemple : $n = 13$, $m = 1$ donne $13 - 1 = 12$.

Remarque

* On peut permuter les quantificateurs de même type.
* On ne peut pas permuter les quantificateurs de nature différentes.

Exemples

- Les propositions “$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x + y = 2$” et “$(\forall y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : x + y = 2$” ont **la même valeur de vérité**.
- Voici une phrase vraie : «Pour toute personne, il existe un numéro de téléphone », bien sûr le numéro dépend de la personne.

  Par contre cette phrase est fausse : «Il existe un numéro, pour toutes les personnes », ce serait le même numéro pour tout le monde !

Application 3

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- P_1 : "$(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + x - 1 = 0$"
- P_2 : "$(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 3x + 7 < 0$"
- P_3 : "$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x \leq y$"
- P_4 : "$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x > 0) : xy > 0$"
- P_5 : "$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) : n - m = 10$"
- P_6 : "$(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : xy \geq 0$"

Correction

- $P_1 : (\exists x \in \mathbb{R}); x^2 + x - 1 = 0$
  On a : $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 = 5 > 0$
  donc l'équation admet deux solutions réelles.
  Donc P_1 est vraie.
- $P_2 : (\forall x \in \mathbb{R}); x^2 + 3x + 7 < 0$
  Pour $x = 0 : 0^2 + 3 \times 0 + 7 = 7 > 0$
  Donc P_2 est fausse.
- $P_3 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}); x \leq y$
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on prend $y = x + 1$
  On a bien $x \leq x + 1$
  Donc P_3 est vraie.
- $P_4 : (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); xy > 0$
  On prend $y = 1$
  Pour tout $x > 0$, on a $x \times 1 = x > 0$
  Donc P_4 est vraie.
- $P_5 : (\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}); n - m = 10$
  Pour $n = 0$ et $m = 1 : 0 - 1 = -1 \neq 10$
  Donc P_5 est fausse.
- $P_6 : (\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}); xy \geq 0$
  On prend $x = 1$ et $y = 1$
  On a $1 \times 1 = 1 \geq 0$
  Donc P_6 est vraie.

3 Opérations sur les propositions

3.1 La négation d'une proposition

Définition

La négation d'une proposition P, notée $\bar{P}$ ou $\neg P$, est la proposition qui est vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.

P	$\bar{P}$
V	F
F	V

Table de vérité de la négation

Exemples

- La négation de la proposition "$3 > 2$" est "$3 \leq 2$"
- La négation de la proposition "$(-2)^2 = -4$" est ""$(-2)^2 \neq -4$"
- La négation de la proposition "$-3 \in \mathbb{N}$" est "$-3 \notin \mathbb{N}$"

Propriété : Négation d'une proposition quantifiée

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle d'une variable x d'un ensemble non vide E.

* La négation de la proposition $(\forall x \in E)\ P(x)$ est la proposition $(\exists x \in E)\ \overline{P(x)}$
* La négation de la proposition $(\exists x \in E)\ P(x)$ est la proposition $(\forall x \in E)\ \overline{P(x)}$
* La négation de la proposition "$(\forall x \in E)(\exists y \in E) : P(x,y)$" est : "$(\exists x \in E)(\forall y \in E) : \overline{P(x,y)}$"
* La négation de la proposition "$(\exists x \in E)(\forall y \in E) : P(x,y)$" est : "$(\forall x \in E)(\exists y \in E) : \overline{P(x,y)}$"

Remarque

* Les propositions P et $\bar{P}$ ont des valeurs de vérité opposées.
* La négation des symboles usuels :

Le symbole	$>$	$<$	$\geq$	$\leq$	$=$	$\in$
Sa négation	$\leq$	$\geq$	$<$	$>$	$\neq$	$\notin$

Exemples

La proposition P	La négation $\bar{P}$
• $(\forall x \in \mathbb{R}) : x \geq 1$	• $(\exists x \in \mathbb{R}) : x < 1$
• $(\exists n \in \mathbb{N}) : \sqrt{n} \in \mathbb{N}$	• $(\forall n \in \mathbb{N}) : \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$
• $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + x + 1 \geq 0$	• $(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + x + 1 < 0$
• $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists m \in \mathbb{N}) : m \geq n$	• $(\exists n \in \mathbb{N})\ (\forall m \in \mathbb{N}) : m < n$

Application 4

Compléter le tableau suivant :

La proposition P	La négation $\bar{P}$
• $(\exists x \in \mathbb{R}) : x \in \emptyset$	• $(\forall x \in \mathbb{R}) : x \notin \emptyset$
• $(\exists x \in \mathbb{N}) : x$ est pair	• $(\forall x \in \mathbb{N}) : x$ est impair
• $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N}) : x < y$	• $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}) : x \geq y$
• $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) : x - y = 3$	• $(\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z}) : x - y \neq 3$
• Tout triangle est rectangle	• Il existe au moins un triangle qui n'est pas rectangle
• $(\forall x \in \emptyset)(\forall y \in \mathbb{Z}) : x \times y \in \mathbb{Z}$	• $(\exists x \in \emptyset)(\exists y \in \mathbb{Z}) : x \times y \notin \mathbb{Z}$

3.2 La disjonction

Définition

La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie si au moins l'une des deux propositions est vraie on la note P ou Q ou $P \vee Q$.

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tableau de vérité de P ou Q

Exemples

- La proposition : $(-5 \geq 2)$ ou $(5 \geq 2)$ est vraie.
- La proposition : $(3 + 2 = 6)$ ou $(-3 \geq 1)$ est fausse.
- La proposition : $(-5 \in \mathbb{R})$ ou $(3$ divise $12)$ est vraie.
- La proposition : $(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 = -1$ ou $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est fausse.

3.3 La conjonction

Définition

La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie uniquement si les deux propositions P et Q sont vraies en même temps on la note : P et Q ou $P \wedge Q$.

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tableau de vérité de $(P$ et $Q)$

Exemples

- La proposition : $(-5 \geq 2)$ et $(5 \geq 2)$ est fausse.
- La proposition : $(3+2=6)$ et $(-3 \geq 1)$ est fausse.
- La proposition : $(-5 \in \mathbb{R})$ et $(3$ divise $12)$ est vraie.
- La proposition : $(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 = -1$ et $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est fausse.

Application 5

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- P_1 : $(3$ est impair$)$ et $(3=5)$.
- P_2 : $(4 \times 8 = 20)$ ou $(10$ est pair$)$.
- P_3 : $(9-3=6)$ et $(-1 \in \mathbb{Z})$.
- P_4 : $(-4 \in \mathbb{N})$ ou $(\forall x \in \mathbb{R} : x^2+1>0)$.

Correction

- P_1 : $(3$ est impair$)$ et $(3=5)$.

  3 est impair : VRAI

  $3=5$: FAUX

  Donc P_1 est **FAUSSE.**

- P_2 : $(4 \times 8 = 20)$ ou $(10$ est pair$)$.

  $4 \times 8 = 32$ donc $4 \times 8 = 20$: FAUX

  10 est pair : VRAI

  Donc P_2 est **VRAIE.**

- P_3 : $(9-3=6)$ et $(-1 \in \mathbb{Z})$.

  $9-3=6$: VRAI

  $-1 \in \mathbb{Z}$: VRAI

  Donc P_3 est **VRAIE.**

- P_4 : $(-4 \in \mathbb{N})$ ou $(\forall x \in \mathbb{R} : x^2+1>0)$.

  $-4 \in \mathbb{N}$: FAUX (car $\mathbb{N}$ contient les entiers positifs)

  $\forall x \in \mathbb{R} : x^2+1>0$: VRAI (car $x^2 \geq 0$ donc $x^2+1 \geq 1 > 0$)

  Donc P_4 est **VRAIE.**

4 L'implication

Définition

L'implication de deux propositions P et Q est la proposition qui est fausse seulement dans le cas P est vraie et Q est fausse. On la note par $P \Rightarrow Q$ et se lit : P implique Q.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tableau de vérité de $P \Rightarrow Q$

Exemples

- La proposition $2 > 1 \Rightarrow 2+3=-1$ est fausse.
- La proposition $3 \times 2 = 9 \Rightarrow 5-1=20$ est vraie.
- La proposition $(3^2 = 9) \Rightarrow 4-1=3$ est vraie.
- La proposition $2 < 0 \Rightarrow 2+3=5$ est vraie.

Remarques

* $P \Rightarrow Q$ signifie si P est vraie, alors Q est vraie.
* L'implication $Q \Rightarrow P$ est appelée l'implication réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$.
* Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est vrai, on suppose que P est vraie, et on montre que Q est vraie.
* Les propositions $P \Rightarrow Q$ et $(\neg P$ ou $Q)$ ont la même valeur de vérité.

Exemples

- "$x=2 \Rightarrow x^2=4$" signifie : "si $x=2$, alors $x^2=4$" et c'est une proposition vraie.
- "$x^2=4 \Rightarrow x=2$" est l'implication réciproque de "$x=2 \Rightarrow x^2=4$" et c'est une proposition fausse.
- Soit x un réel, Montrons que : $|x| \leq 3 \Rightarrow |2x-4| \leq 10$

On a : $|x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -6 \leq 2x \leq 6 \\ &\Rightarrow -10 \leq 2x-4 \leq 2 \\ &\Rightarrow -10 \leq 2x-4 \leq 10 \\ &\Rightarrow |2x-4| \leq 10. \end{aligned}$$

Donc : $|x| \leq 3 \Rightarrow |2x-4| \leq 10$.

Application 6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n pair $\Rightarrow n^2$ pair.

Correction

On a : n est pair $\Rightarrow n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow n^2 = (2k)^2 \\ &\Rightarrow n^2 = 4 \times k^2 \\ &\Rightarrow n^2 = 2 \times (2k^2) \\ &\Rightarrow n^2 = 2k' \quad \text{avec } k' = 2k^2 \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow n^2 \text{ est pair.} \end{aligned}$$

5 L'équivalence

Définition

L'équivalence de deux propositions P et Q est la proposition ($P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$) qu'on note par $P \Leftrightarrow Q$ et se lit « P est équivalente à Q » ou bien « P si et seulement si Q ».

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tableau de vérité de $P \Leftrightarrow Q$

Exemples

Soient a et b deux nombres réels.

Si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Inversement, si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $ab = 0$.

Donc on a l'équivalence suivante : $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

Application 7

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- P_1 : 3 est impair $\Leftrightarrow 3 = 5$
- $P_2 : 4 \times 8 = 20 \Leftrightarrow 10$ est pair
- $P_3 : -1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 9 - 3 = 6$
- $P_4 : -4 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 1 > 0$

Correction

- P_1 : 3 est impair $\Leftrightarrow 3 = 5$

  3 est impair : **Vrai**

  $3 = 5$: **Faux**

  Donc P_1 est **fausse.**

- $P_2 : 4 \times 8 = 20 \Leftrightarrow 10$ est impair

  $4 \times 8 = 20$: **Faux** ($4 \times 8 = 32$)

  10 est impair : **Faux**

  Donc P_2 est **vraie.**

- $P_3 : -1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 9 - 3 = 6$

  $-1 \in \mathbb{Z}$: **Vrai**

  $9 - 3 = 6$: **Vrai**

  Donc P_3 est **vraie.**

- $P_4 : -4 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0)$

  $-4 \in \mathbb{N}$: **Faux**

  $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+1 > 0$: **Vrai** ($x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1 > 0$)

  Faux $\Leftrightarrow$ Vrai : **Faux**

  Donc P_4 est **fausse.**

6 Lois logiques

Définition

Une loi logique est une proposition qui est vraie quel que soit la vérité des propositions qui la constitue.

Exemples

P et Q sont deux propositions. Montrons que $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \text{ et } \neg Q)$ est une loi logique.

On dresse le tableau de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$\neg Q$	P et $\neg Q$	$\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \text{ et } \neg Q)$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V

La proposition $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \text{ et } \neg Q)$ est toujours vraie quelles que soient les valeurs de vérité de P et Q. Donc elle est une loi logique.

7 Raisonnements mathématiques

7.1 Raisonnement par contre-exemple

Définition

Pour montrer qu'une proposition de type $(\forall x \in E)\ P(x)$ est fausse, il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. Ce type de démonstration est appelé **raisonnement par contre-exemple**.

Exemple 1

Montrons que la proposition $P : (\forall x \in [0;1]) : x^2 \geq x$ est fausse.

Un contre-exemple : Pour $x = \frac{1}{2}$, on a $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. Donc P est fausse.

Exemple 2

Montrons que la proposition $Q : (\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R}) : x^2 + y^2 \geq x + y$ est fausse. Un contre-exemple : Pour $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$, on a $x^2 + y^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ et $x + y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Or $\frac{1}{2} < 1$, donc Q est fausse.

7.2 Raisonnement direct

Définition

Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, on suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.
Ce type de démonstration est appelé **raisonnement direct** ou **raisonnement déductif**.

Exemple 1

Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$ Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} &\Rightarrow 1 = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}) \\ &\Rightarrow 1 = 1 - x \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Exemple 2

Soient $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $p, p' \in \mathbb{Z}$ et $q, q' \in \mathbb{N}^*$ tels que $a = \dfrac{p}{q}$ et $b = \dfrac{p'}{q'}$.

On a alors $a + b = \dfrac{p}{q} + \dfrac{p'}{q'} = \dfrac{p\,q' + p'\,q}{q\,q'}$. Or :

$p\,q' + p'\,q \in \mathbb{Z}$ (produit et somme d'entiers),

$q\,q' \in \mathbb{N}^*$ (produit de naturels non nuls).

Donc $a + b$ s'écrit sous la forme $\dfrac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$ et $q'' \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi $a + b \in \mathbb{Q}$.

7.3 Raisonnement par contraposée

Définition

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$, il suffit parfois de montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$. Ce type de démonstration est appelé **raisonnement par contraposée.**

Exemple 1

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Montrer que : $x \neq 2$ et $y \neq 2 \Rightarrow 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$

Utilisons un raisonnement par contraposée.

Montrons que : $2x+2y-xy-2=2 \Rightarrow x=2$ ou $y=2$

$$\begin{aligned}
2x+2y-xy-2=2 &\Rightarrow 2x+2y-xy-4=0\\
&\Rightarrow x(2-y)-2(2-y)=0\\
&\Rightarrow (2-y)(x-2)=0\\
&\Rightarrow 2-y=0 \quad \text{ou} \quad x-2=0\\
&\Rightarrow y=2 \quad \text{ou} \quad x=2
\end{aligned}$$

Par contraposée, on a bien :

$$x \neq 2 \text{ et } y \neq 2 \Rightarrow 2x+2y-xy-2 \neq 2$$

Exemple 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : si n^2 est pair alors n est pair.

Utilisons un raisonnement par contraposée.

Montrons que : si n est impair, alors n^2 est impair. Supposons que n est impair.

Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n=2k+1$.

$$\begin{aligned}
n^2 &= (2k+1)^2\\
&= 4k^2+4k+1\\
&= 2(2k^2+2k)+1\\
&= 2k'+1 \quad \text{avec} \quad k'=2k^2+2k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Donc n^2 est impair.

Par contraposée, on a bien : si n^2 est pair alors n est pair.

7.4 Raisonnement par équivalence

Définition

Pour démontrer qu'une équivalence $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, on utilise l'une des méthodes suivantes :

Méthode 1 :

On montre que : $\left\{\begin{array}{lll} P & \Leftrightarrow & R_1 \\ & \Leftrightarrow & R_2 \\ & \Leftrightarrow & \cdots \\ & \Leftrightarrow & Q \end{array}\right.$ à l'aide des opérations et propriétés mathématiques.

Ce type de démonstration est appelé **raisonnement par équivalences successives. Méthode 2 :**

On montre que les deux implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont vraies.

Exemple 1

Montrons que : $(\forall a \in \mathbb{R})\ (\forall b \in \mathbb{R}) : a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 = 2ab &\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a - b = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b \end{aligned}$$

Exemple 2

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = 2)$

Implication directe :

Montrons que : $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x = 1 \text{ ou } x = 2)$

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 = 0 &\Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \\ &\Rightarrow x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2 = 0 \\ &\Rightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 2 \end{aligned}$$

Implication réciproque :

Montrons que : $(x = 1 \text{ ou } x = 2) \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

$$\text{Si } x = 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$$

Dans les deux cas, $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = 2)$

7.5 Raisonnement par disjonction des cas

Définition

Pour montrer qu'une proposition de type $(\forall x \in E)\ P(x)$ est vraie, il suffit de montrer que $P(x)$ est vraie dans tous les cas possibles de la variable x dans E.

Ce type de démonstration est appelé **raisonnement par disjonction des cas.**

Exemple 1

Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 - x + 1 \geq |x - 1|$

Cas 1 : $x \geq 1$

$$\begin{aligned} |x-1| &= x-1 \\ x^2-x+1-(x-1) &= x^2-2x+2 \\ &= (x-1)^2+1 \geq 1 > 0 \end{aligned}$$

Cas 2 : $x < 1$

$$\begin{aligned} |x-1| &= 1-x \\ x^2-x+1-(1-x) &= x^2-x+1-1+x \\ &= x^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dans les deux cas, $x^2 - x + 1 \geq |x-1|$

Exemple 2

Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ n(n+1)$ est pair **Cas 1 :** n est pair

$$\begin{aligned} n = 2k,\ k \in \mathbb{N} &\Rightarrow n(n+1) = 2k(n+1) \\ &\Rightarrow n(n+1) \text{ est pair} \end{aligned}$$

Cas 2 : n est impair

$$\begin{aligned} n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} &\Rightarrow n+1 = 2k+2 = 2(k+1) \\ &\Rightarrow n(n+1) = n \times 2(k+1) \\ &\Rightarrow n(n+1) \text{ est pair} \end{aligned}$$

Dans les deux cas, $n(n+1)$ est pair.

7.6 Raisonnement par l'absurde

Définition

Pour montrer qu'une proposition P est vraie par **le raisonnement par l'absurde** :

1. On suppose que P est fausse
2. On déduit une contradiction (une proposition logiquement impossible)
3. On conclut que P est nécessairement vraie

Exemple 1

Montrons que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $a, b \in \mathbb{Z}^*$, premiers entre eux (i.e.

$\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$), tels que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

donc :

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad a^2 = 2b^2.$$

Ainsi a^2 est pair, donc a est pair (si a était impair, a^2 serait impair). Écrivons $a = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Alors $a^2 = 4k^2 = 2b^2$ $\Rightarrow 2k^2 = b^2$. Donc b^2 est pair, donc b est pair. Mais alors a et b sont tous deux pairs, ce qui contredit $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$.
Donc : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exemple 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $A = \dfrac{n}{n+1}$, montrons que $A \neq 1$
Supposons que $A = 1$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} &= 1 \Rightarrow n = n+1 \\ &\Rightarrow 0 = 1 \end{aligned}$$

Contradiction. Ainsi, $A \neq 1$.

7.7 Raisonnement par récurrence

Définition

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une fonction propositionnelle $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :
Initialisation : On prouve que $P(n_0)$ est vraie.
Hérédité : On suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \geq n_0$ (hypothèse de récurrence), et on démontre que $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : On conclut que, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exemple 1

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3$ divise $(4^n - 1)$
Soit $P(n)$ la proposition : « 3 divise $4^n - 1$ »
Initialisation : Pour $n = 0$

$$4^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad 3 \text{ divise } 0$$

Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$3 \text{ divise } (4^n - 1) \quad \text{soit} \quad \exists k \in \mathbb{N},\ 4^n - 1 = 3k$$

Montrons $P(n+1)$:

$$\begin{aligned}4^{n+1}-1 &= 4\times 4^n - 1\\ &= 4\times 4^n - 4 + 3\\ &= 4(4^n-1)+3\\ &= 4\times 3k+3 \quad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)}\\ &= 3(4k+1)\end{aligned}$$

Donc 3 divise $(4^{n+1}-1)$, et $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 2

Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Soit $P(n)$ la proposition : « $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ »

Initialisation : Pour $n=1$

$$\frac{1\times(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain $n \geq 1$, c'est-à-dire :

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Montrons $P(n+1)$:

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.