| | | |
|---|---|---|
| Lycée qualifiant : Al Zahrawi<br>Matière : Mathématiques | **Série N° 1**<br>**LOGIQUE ET RAISONNEMENTS** | Pr : Ayoub Aissaoui<br>Niveau : 1BAC Sc.Expérimentales |

## Exercice 1

1. Écrire sans quantificateurs les propositions suivantes :
   (a) $(\exists x \in \mathbb{Q})\, x^2 - 2 = 0$
   (b) $(\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2)\, n + m \geq 0$
   (c) $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R})\, x + 2y = 1$
2. Exprimer à l'aide des quantificateurs et des connecteurs logiques les assertions suivantes :
   (a) $P$ : "Il existe un nombre entier naturel unique inférieur ou égal à tous les nombre entiers naturels"
   (b) $R$ : "Pour tout entier naturel $n$ il existe un entier relatif $m$ unique tel que $n + m = 10$"
   (c) $S$ : "Certains réels sont supérieurs à leurs carrés"
   (d) $T$ : "Chaque nombre réel est inférieur à au moins un nombre entier naturel"
   (e) $U$ : "Il n'existe aucun nombre rationnel solution de l'équation $x^2 - 3 = 0$."

## Exercice 2

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes puis donner leurs négations.

- $(P_1)$ : $\sqrt{4} = 2$ **et** $\sqrt{3} + \sqrt{7} > \sqrt{10}$
- $(P_2)$ : $23$ est un nombre premier **ou** $\pi \in \mathbb{Q}$
- $(P_3)$ : $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 1 = 0$
- $(P_4)$ : $\exists n \in \mathbb{N} : \sqrt{n} \in \mathbb{N}$
- $(P_5)$ : $\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 = 1$
- $(P_6)$ : $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0$
- $(P_7)$ : $\forall x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2020$
- $(P_8)$ : $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \cos x \leq 1$
- $(P_9)$ : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{x^2} = x$
- $(P_{10})$ : $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 = 0$
- $(P_{11})$ : $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\, x = 2y$
- $(P_{16})$ : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R} : \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{y-10}{3} = \dfrac{z+1}{2}$
- $(P_{17})$ : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x - y + 3 = 0$
- $(P_{17})$ : $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} : n = 2m$
- $(P_{18})$ : $\forall a \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{Z} : 2a - b \in \mathbb{N}$
- $(P_{18})$ : $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N} : x^2 + y^2 \geq 1$"
- $(P_{19})$ : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x < y$
- $(P_{20})$ : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Q} : y^2 > x$

## Exercice 3

Soient $a, b$ deux réels.
Compléter par le connecteur "et" ou bien "ou" :

- $a \times b = 0 \iff a = 0 \;\ldots\; b = 0$
- $|a| + |b| = 0 \iff a = 0 \;\ldots\; b = 0$
- $|a| = |b| \iff a = b \;\ldots\; a = -b$
- $a^2 > 9 \iff a < -3 \;\ldots\; a > 3$

## Exercice 4

1. Trouver le lien entre les propositions du tableau. L'indiquer par un symbole logique dans la colonne du milieu. (symboles logique : $\Rightarrow$ ; $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$ )

| | | |
|---|---|---|
| $x = 2$ | ... | $x^2 = 4$ |
| $xy > 0$ | ... | $x > 0$ et $y > 0$ |
| $\frac{1}{x} > 0$ | ... | $x > 0$ |
| $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ | ... | $x > 2$ |
| C'est le 1er janvier | ... | Le lycée est fermé |
| $x = y$ ($x$ et $y$ sont des réels) | ... | $|x| = |y|$ |
| $|x - 3| \leq 5$ | ... | $x \in [-2; 8]$ |

2. Donner la négation de chacune des propositions suivantes sans déterminer la valeur de vérité :

- P : $(\forall n \in \mathbb{N}) : x \neq 1 \implies x > 1$
- Q : $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists \alpha > 0) : |x| < \alpha \implies \left| \dfrac{x-1}{x+1} - 1 \right| < \alpha$
- R : $\forall z \in ]-\infty, +\infty[,\ (z = 0 \Leftrightarrow z = 0)$
- S : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ (x^2 + 2x = -1 \Leftrightarrow x = -1)$

## Exercice 5

Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

1. $P \iff \overline{\overline{P}}$
2. $P \Rightarrow Q \iff \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
3. $\overline{(P \Rightarrow Q)} \iff (P$ et $\overline{Q})$
4. $\big[(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow R)\big] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

## Exercice 6 (Raisonnement par contre exemple)

1. Donner avec justification la valeur de vérité de P
   $P$ : « Tous les nombres premiers sont impairs »
2. Montrer que les propositions suivantes sont fausses :
   - $(Q) : \forall n \in \mathbb{N} : n^2 + n + 1$ est un nombre premier.
   - $(R) : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} :\ x^2 + y^2 \geq x + y$
   - $(S) : \forall a, b \in \mathbb{R}^2 :\ a^2 + b^2 = a + b$

## Exercice 7

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) : 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \in \mathbb{N}$ est fausse.

## Exercice 8 (Raisonnement direct)

Montrer que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$
2. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 : x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : 1 + xy = x + y \Rightarrow x = 1$ ou $y = 1$

## Exercice 9

1. Soient $a$ et $b$ deux réels.

   Montrer que :

   - $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |a+b| \leq \sqrt{2}$
   - $(|a| < 1$ et $|b| < 1) \Rightarrow |a+b| < |1+ab|$
2. Soient $x$ et $y$ deux réels positifs. Montrer que si $x \leq y \Rightarrow x \leq \dfrac{x+y}{2} \leq y$ et $0 \leq \sqrt{xy} \leq y$

## Exercice 10 (Raisonnement par contraposition)

En utilisant le raisonnement par contraposition, montrer que :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ : si $n^2$ est impair alors $n$ est impair.
2. $\forall y \in \mathbb{R} : (y + y^3 \geq 2 \implies y \geq 1)$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 1 \Rightarrow x > \dfrac{1}{2}$ ou $y > \dfrac{1}{2}$
4. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ :

   $x \neq y \implies (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R} :\ (x \neq 1$ et $y \neq 1) \Rightarrow xy + 1 \neq x + y$
6. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq -5$ : $x \neq -8 \implies \dfrac{x+2}{x+5} \neq 2$
7. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ :

   $x \neq 2$ et $y \neq 2 \implies 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$
8. Soient $a$ et $b$ de $\mathbb{R}$ avec $b \neq 2a$ : $b \neq \dfrac{a}{4} \Rightarrow \dfrac{a+2b}{2a-b} \neq \dfrac{6}{7}$

## Exercice 11 (Raisonnement par équivalence)

Montrer que :

1. $\forall x \in ]1, +\infty[ : x - 4\sqrt{x-1} = -3 \Leftrightarrow x = 5$
2. $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : \left(\dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - x + 1} \leq \dfrac{4}{3}\sqrt{x}\right)$
3. $\left(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\right) : \dfrac{a^2 + b^2 + 2}{2} = 1 + ab \Leftrightarrow a = b$
4. $(\forall x \in \mathbb{R}) : \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 0\right)$

## Exercice 12 (Raisonnement par disjonction des cas)

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} :\ |x| \leq \dfrac{x^2+1}{2}$
2. Montrer que pour tout $\forall x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq x^2 - x + 1$
3. Montrer que pour tout $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1} + x > 0$
4. Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

## Exercice 13

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_1) : x^2 - |x-2| + 5 = 0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(E_3)$ :

   $\forall x \in \mathbb{R} : |x-1| + 2x - 3 \geq 0$

## Exercice 14 (Raisonnement par l'absurd)

1. Montrer que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
2. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt{2} + \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$

## Exercice 15

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons : $A = \dfrac{n+3}{n+5}$, montrer que $A \neq 1$
5. Soient $a > 0$ et $b > 0$.

   Montrer que si : $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ alors $a = b$

## Exercice 16 (Raisonnement par récurrence)

Montrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$ : 3 divise $n^3 + 2n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ : 9 divise $4^n + 6n - 1$.
3. $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; 11 divise $3^{n+3} - 4^{4n+2}$
4. $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; 15 divise $4^{2n+2} - 1$

## Exercice 17

En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N} :\ 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^* :\ 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\forall n \in \mathbb{N} :\ 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$
4. $\forall n \in \mathbb{N} :\ 2^n \geq 1 + n$
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ :

   $\dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \dfrac{1}{3 \times 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$
6. $\forall n \in \mathbb{N} :\ (1+a)^n \geq 1 + n \times a$ avec $a \in \mathbb{R}_*^+$