Lycée : Alqods	**Série N° 3**	Pr : Ayoub Aissaoui
Matière : Mathématiques	**Barycentre**	Niveau : 1BAC-SE

Exercice 1

Soient A et B deux points distincts du plan. Construire les points suivants :

- E, le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 2)$;
- F, le barycentre des points pondérés $(A, 3)$ et $(B, -1)$;
- G, le barycentre des points pondérés $(A, 100)$ et $(B, 100)$;
- H, le barycentre des points pondérés $(A, -0.0001)$ et $(B, 0.0003)$;
- K, le barycentre des points pondérés $(A, -\sqrt{8})$ et $(B, -\sqrt{2})$;

Exercice 2

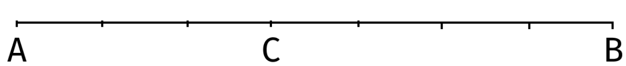
Soient A et B deux points distincts, et soit G le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 1)$.

1. Montrer que A est le barycentre des points pondérés $(G, -3)$ et $(B, 1)$.
2. Montrer que B est le barycentre des points pondérés $(G, -6)$ et $(A, 4)$.

Exercice 3

On considère dans le plan P les points A, B et C.
Déterminer les nombres réels α et β tels que le point C soit le barycentre des points pondérés $(A; \alpha)$ et $(B; \beta)$ dans chacun des cas suivants :

- $3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB}$
- B est le milieu du segment $[AC]$.
- Les points A, B et C sont représentés sur la figure suivante :



Exercice 4

Soit ABC un triangle du plan. Construire le point G dans chacun des cas suivants :

- G est le barycentre des points $(A; 2)$, $(B; 3)$ et $(C; 2)$.
- G est le barycentre des points $(A; -2)$, $(B; 4)$ et $(C; -5)$.
- G est le barycentre des points $(A; -20)$, $(B; 30)$ et $(C; 10)$.
- G est le barycentre des points $\left(A; -\dfrac{1}{6}\right)$, $\left(B; -\dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(C; -\dfrac{1}{6}\right)$.

Exercice 5

Soit ABC un triangle et I le milieu du segment $[BC]$.
On considère les points E et F tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

Soit G le barycentre des points pondérés $(A; 1)$, $(B; 3)$ et $(C; 3)$.

1. (a) Déterminer les nombres réels α et β tels que le point E soit le barycentre des points $(A; \alpha)$ et $(B; \beta)$.
   (b) En déduire que G est le barycentre des points $(E; 4)$ et $(C; 3)$, et que les points C, E et G sont alignés.
2. Montrer, en utilisant la même méthode que la question 1, que les points B, F et G sont alignés, et que les points A, I et G sont également alignés.
3. Que pouvez-vous dire des droites (AI), (BF) et (EC) ?

Exercice 6

Soit ABC un triangle. I et J sont respectivement les milieux des segments $[AB]$ et $[IC]$. K est le point d'intersection des droites (BJ) et (AC).

1. Montrer que J est le barycentre des points $(A; 1)$, $(B; 1)$ et $(C; 2)$.
2. Soit L le barycentre des points $(A; 1)$ et $(C; 2)$.
   (a) Montrer que les points B, J et L sont alignés.
   (b) En déduire que $K = L$ et que $\overrightarrow{AK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
3. Déterminer l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :
   (a) $||\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}|| = ||\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}||$
   (b) $||\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|| = 2||\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}||$

Exercice 7

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(2; 3)$, $B(-1; 2)$, et $C(0; -1)$.

1. Déterminer les coordonnées du point K, barycentre des points pondérés $(A; 3)$, $(B; 3)$ et $(C; -1)$.
2. Déterminer les coordonnées du point G, centre de gravité (isobarycentre) du triangle ABC.
3. Vérifier que les points C, K et G sont alignés.

Exercice 8

Soit ABC un triangle, et I le milieu du segment $[AB]$.

1. On considère G le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;1)$ et $(C;2)$.
   (a) Écrire le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) Construire le point G.
2. (a) Déterminer le barycentre des deux points $(A;1)$ et $(B;1)$.
   (b) En utilisant la propriété d'associativité du barycentre, montrer que G est le milieu de $[CI]$.

Exercice 9

Soit ABC un triangle du plan tel que : $AB = 6$, $BC = 5$ et $AC = 4$. Soit G le centre de gravité du triangle.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan qui vérifient :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 4$$

2. (a) Montrer que, pour tout point M du plan (P), on a :

$$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{IA}$$

   où I est le milieu du segment $[BC]$.
   (b) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M qui vérifient :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

Exercice 10

Soient A, B, C trois points non alignés, et les points I, J, K définis par :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CA}$$

1. Exprimer I, J et K comme barycentres des points A, B ou C (utiliser un seul point comme origine).
2. Montrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes en un seul point.

Exercice 11

Soit ABC un triangle. Les points B et F sont respectivement les milieux des segments $[AE]$ et $[AC]$. Les points E et F sont tels que :

$$\overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{BF}$$

1. Dessiner la figure et montrer que $\overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{BF}$.
2. Soit I le milieu du segment $[EC]$.
   (a) Quelle est la nature du quadrilatère $AFIB$?
   (b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Soit J le barycentre des points pondérés $(A;5)$, $(B;-2)$ et $(C;-1)$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. Montrer que les points A, I et J sont alignés.
5. Soit G le centre de gravité (isobarycentre) du triangle AEC. Montrer que $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$.

Exercice 12

Soit $ABCD$ un carré, et G le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;2)$, $(C;3)$, et $(D;6)$.

1. Construire I, barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(D;6)$, et J, barycentre des points pondérés $(B;2)$ et $(C;3)$.
2. (a) Montrer que G est le barycentre des deux points $(I;7)$ et $(J;5)$.
   (b) Construire le point G.
3. Soit $(\mathcal{D})$ l'ensemble des points M du plan qui vérifient :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}+6\overrightarrow{MD}\right\| = 6\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

   (a) Soit O le centre du carré $ABCD$. Écrire le vecteur $\overrightarrow{MO}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MC}$.
   (b) Déterminer l'ensemble des points M de $(\mathcal{D})$, puis le construire.
4. Soit $(\mathcal{E})$ l'ensemble des points M du plan qui vérifient :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}+6\overrightarrow{MD}\right\| = 24$$

   Déterminer l'ensemble des points M de $(\mathcal{E})$.
5. Le plan est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
   (a) Déterminer les coordonnées du point G.
   (b) Soit G' le barycentre des points $(A;3)$, $(B;6)$, $(C;1)$, et $(D;2)$. Déterminer les coordonnées du point G'.
   (c) En déduire que les points O, G et G' sont alignés.