

Correction de l'exercice 1

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$
On a : $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$
(impossible car $x^2 \geq 0$)
Donc $D_f = \mathbb{R}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}x^2 \geq 0 &\Rightarrow 1 + x^2 \geq 1 \\&\Rightarrow \frac{1}{1 + x^2} \leq 1 \\&\Rightarrow f(x) \leq 1.\end{aligned}$$

Ainsi, f est majorée par 1 sur \mathbb{R} .

3. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}x^2 \geq 0 &\Rightarrow 1 + x^2 \geq 1 > 0 \\&\Rightarrow \frac{1}{1 + x^2} > 0 \\&\Rightarrow f(x) > 0.\end{aligned}$$

Ainsi, f est minorée par 0 sur \mathbb{R} .

4. f est majorée par 1 et minorée par 0 sur \mathbb{R} , donc elle est bornée sur \mathbb{R} .

Correction de l'exercice 2

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x + 3 \neq 0\}$
On a : $x^2 + 3x + 3 = 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= 3^2 - 4 \times 1 \times 3 \\&= 9 - 12 \\&= -3 < 0\end{aligned}$$

Donc l'équation $x^2 + 3x + 3 = 0$ n'admet pas de solution réelle.

Donc $D_f = \mathbb{R}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}f(x) - 1 &= \frac{2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3x + 3} - 1 \\&= \frac{2x^2 + 7x + 7 - (x^2 + 3x + 3)}{x^2 + 3x + 3} \\&= \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 3} \\&= \frac{(x+2)^2}{x^2 + 3x + 3}\end{aligned}$$

Or, $(x+2)^2 \geq 0$ et $x^2 + 3x + 3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, $f(x) - 1 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, f est minorée par 1 sur \mathbb{R} .

3. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}f(x) - \frac{7}{3} &= \frac{2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3x + 3} - \frac{7}{3} \\&= \frac{3(2x^2 + 7x + 7) - 7(x^2 + 3x + 3)}{3(x^2 + 3x + 3)} \\&= \frac{6x^2 + 21x + 21 - 7x^2 - 21x - 21}{3(x^2 + 3x + 3)} \\&= \frac{-x^2}{3(x^2 + 3x + 3)}\end{aligned}$$

Or, $-x^2 \leq 0$ et $x^2 + 3x + 3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, $f(x) - \frac{7}{3} \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, f est majorée par $\frac{7}{3}$ sur \mathbb{R}

Correction de l'exercice 3

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$

On a : $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$

(impossible car $x^2 \geq 0$)

Donc $D_f = \mathbb{R}$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}f(x) - 3 &= \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} - 3 \\&= \frac{2x^2 + 3 - 3(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \\&= \frac{-x^2}{x^2 + 1}\end{aligned}$$

Or, $-x^2 \leq 0$ et $x^2 + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, $f(x) - 3 \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, f est majorée par 3 sur \mathbb{R} .

- (b) Pour que 3 soit une valeur maximale, il faut qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 3$.

Donc,

$$\begin{aligned}f(x_0) &= 3 \\ \frac{2x_0^2 + 3}{x_0^2 + 1} &= 3 \\ 2x_0^2 + 3 &= 3(x_0^2 + 1) \\ 2x_0^2 + 3 &= 3x_0^2 + 3 \\ -x_0^2 &= 0 \\ x_0 &= 0\end{aligned}$$

Donc, $f(0) = 3$

Puisque : $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) \leq 3$ et $f(0) = 3$

Donc, 3 est une valeur maximale de f .

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) - 2 &= \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} - 2 \\ &= \frac{2x^2 + 3 - 2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Or, $1 > 0$ et $x^2 + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, $f(x) - 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, f est minorée par 2 sur \mathbb{R} .

(b) On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 2$.

Donc, il n'existe pas de réel x_0 tel que $f(x_0) = 2$

Donc, 2 n'est pas une valeur minimale de f .

Correction de l'exercice 4

1. Soit $x \in \mathbb{R}$

On a : $x^2 + 2x + 2 = 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \\ &= 4 - 8 \\ &= -4 < 0 \end{aligned}$$

Et comme : $a = 1 > 0$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 2x + 2 > 0$.

2. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x + 2 \neq 0\}$

Or, d'après la question précédente, $x^2 + 2x + 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, $D_f = \mathbb{R}$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) - 1 &= \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x + 2} - 1 \\ &= \frac{2x^2 + 4x + 3 - (x^2 + 2x + 2)}{x^2 + 2x + 2} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} \\ &= \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x + 2} \end{aligned}$$

Or, $(x+1)^2 \geq 0$ et d'après la question 1, $x^2 + 2x + 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, $f(x) - 1 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, f est minorée par 1 sur \mathbb{R} .

(b) Pour que 1 soit une valeur minimale, il faut qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 1$.

Donc,

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 1 \\ \frac{2x_0^2 + 4x_0 + 3}{x_0^2 + 2x_0 + 2} &= 1 \\ 2x_0^2 + 4x_0 + 3 &= x_0^2 + 2x_0 + 2 \\ x_0^2 + 2x_0 + 1 &= 0 \\ (x_0 + 1)^2 &= 0 \\ x_0 &= -1 \end{aligned}$$

Donc, $f(-1) = 1$

Puisque : $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) \geq 1$ et $f(-1) = 1$

Donc, 1 est une valeur minimale de f .

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) - 2 &= \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x + 2} - 2 \\ &= \frac{2x^2 + 4x + 3 - 2(x^2 + 2x + 2)}{x^2 + 2x + 2} \\ &= \frac{-x^2 - 1}{x^2 + 2x + 2} \end{aligned}$$

Or, $-x^2 - 1 < 0$ et d'après la question 1, $x^2 + 2x + 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, $f(x) - 2 < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, f est majorée par 2 sur \mathbb{R} .

(b) On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 2$.

Donc, il n'existe pas de réel x_0 tel que $f(x_0) = 2$

Donc, 2 n'est pas une valeur maximale de f .

Correction de l'exercice 5

$$* g(x) = -2x^2 - 4x - 2$$

Éléments caractéristiques :

- Domaine de définition : $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$
- Nature de la courbe : La courbe représentative \mathcal{C}_g est une parabole ouverte vers le bas.
- Sommet $S(x_S, y_S)$:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(-2)} = -1.$$

$$y_S = g(-1) = -2(-1)^2 - 4(-1) - 2 = 0.$$

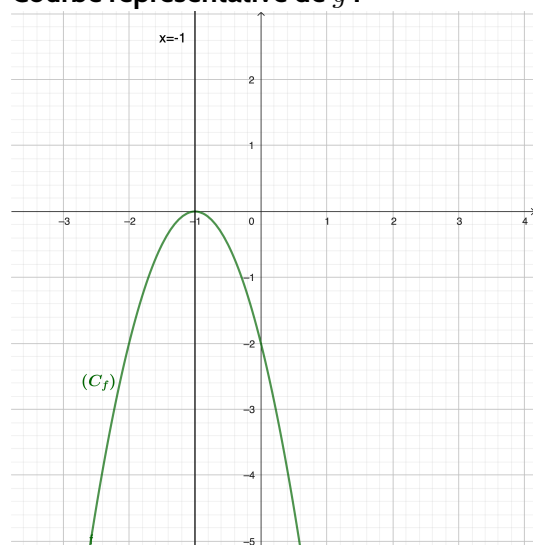
Le Sommet est $S(-1, 0)$.
- Axe de symétrie : la droite d'équation $y = -1$

Tableau de variation de g :

On a : $a = -2 < 0$, donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f(x)		0	

Courbe représentative de g :



$$* h(x) = \frac{x-2}{3x+1}$$

Éléments caractéristiques :

- Domaine de définition : $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$
- Nature de la courbe : La courbe représentative \mathcal{C}_h est une hyperbole.
- Asymptote Verticale : la droite d'équation $x = \frac{-d}{c} = -\frac{1}{3}$
- Asymptote horizontale : la droite d'équation $y = \frac{a}{c} = \frac{1}{3}$
- Centre de symétrie $\Omega : \Omega \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Tableau de variation de g :

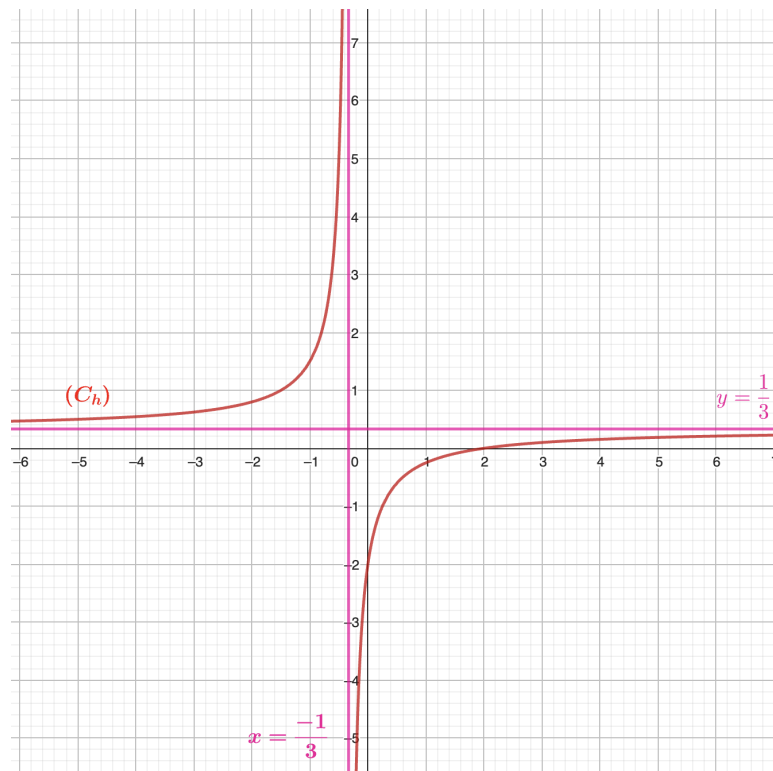
On a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 3 \times (-2) = 1 + 6 = 7 > 0$$

Donc :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
f(x)			

Courbe représentative de h :



Correction de l'exercice 6

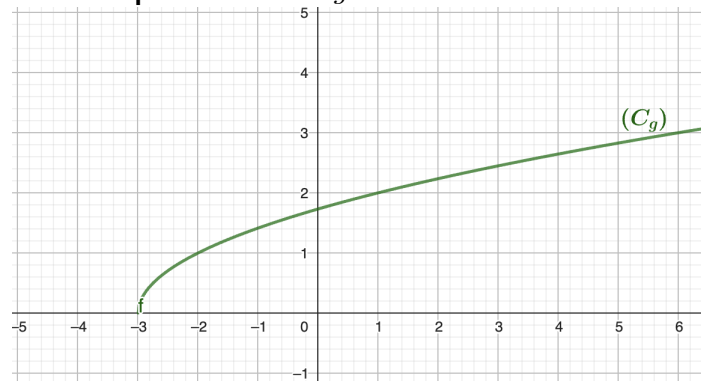
$$\bullet g(x) = \sqrt{x+3}$$

$$\text{On a : } \mathcal{D}_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x+3 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\} = [-3, +\infty[.$$

Tableau de variations de g :

x	-3	$+\infty$
f(x)	0	$+\infty$

Courbe représentative de g :



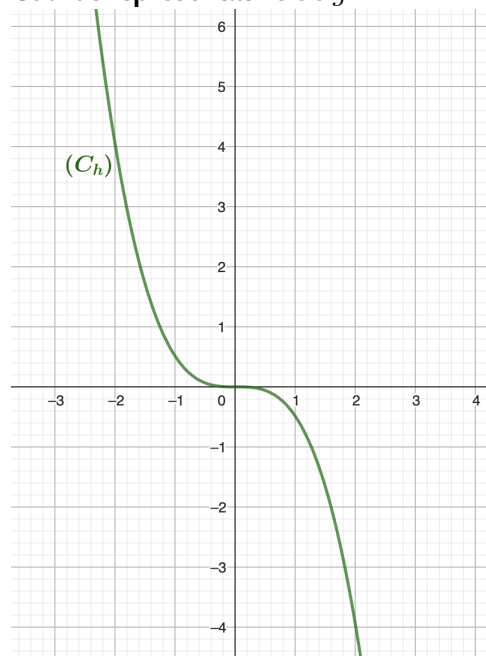
$$\bullet h(x) = -\frac{1}{2}x^3$$

$$\text{On a : } \mathcal{D}_h = \mathbb{R}$$

Tableau de variations de g : Puisque $a = -\frac{1}{2} < 0$, donc :

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $-\infty$

Courbe représentative de g :



— Si $a, b \in [3, +\infty)$, alors $ab \geq 9$, donc $ab - 9 \geq 0$, ainsi f est **croissante** sur $[3, +\infty)$.

4. Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$f(x)$	\nearrow	-2	\searrow	2	\nearrow

Ainsi :

- Sur $]0, +\infty[$, f admet un **minimum** en $x = 3$
- Par imparité, sur $] -\infty, 0[$, f admet un **maximum** en $x = -3$:
- Sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, f n'admet ni **maximum** ni **minimum** global.

Correction de l'exercice 7

Correction de l'exercice 8

1. Déterminons D_f :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$$

Étudions la parité de f :

$$- \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad -x \in \mathbb{R}^*$$

$$- \forall x \in \mathbb{R}^*,$$

$$f(-x) = \frac{(-x)}{3} + \frac{3}{(-x)} = -\frac{x}{3} - \frac{3}{x} = -\left(\frac{x}{3} + \frac{3}{x}\right) = -f(x) \text{ Donc, } f \text{ est impaire.}$$

2. Pour $a > 0$, $b > 0$ et $a \neq b$:

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{\frac{a}{3} + \frac{3}{a} - \frac{b}{3} - \frac{3}{b}}{a - b} = \frac{a - b}{a - b} \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{ab}\right) = \frac{ab - 9}{3ab}.$$

3. Variations sur $]0; 3]$ et $[3; +\infty[$.

On a pour $a > 0$, $b > 0$:

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{ab - 9}{3ab}.$$

- Si $a, b \in]0, 3]$, alors $ab \leq 9$, donc $ab - 9 \leq 0$, ainsi f est **décroissante** sur $]0, 3]$.