Correction de l'exercice 1

2. Exprimons à l'aide des quantificateurs et des connecteurs logiques les assertions suivantes

   * $\exists! n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ n \leq m$
   * $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists! m \in \mathbb{Z},\ n + m = 10$
   * $\exists x \in \mathbb{R},\ x > x^2$
   * $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ x < n$
   * $\forall x \in \mathbb{Q},\ x^2 - 3 \neq 0$

Correction de l'exercice 2

— $(P_1) : \sqrt{4} = 2$ **et** $\sqrt{3} + \sqrt{7} > \sqrt{10}$

Valeur de vérité :

On a :

- "$\sqrt{4} = 2$" est vraie
- "$\sqrt{3} + \sqrt{7} > \sqrt{10}$" est vraie car :
  $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 = 3 + 2\sqrt{21} + 7 = 10 + 2\sqrt{21}$
  et $(\sqrt{10})^2 = 10$
  donc $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 > (\sqrt{10})^2$
  Comme les deux membres sont positifs, on a bien $\sqrt{3} + \sqrt{7} > \sqrt{10}$

Comme les deux propositions sont vraies, la conjonction est vraie. **Donc P_1 est vraie.**

Négation : $\overline{P_1}$: "$\sqrt{4} \neq 2$ ou $\sqrt{3} + \sqrt{7} \leq \sqrt{10}$"

— (P_2) : 23 est un nombre premier **ou** $\pi \in \mathbb{Q}$

Valeur de vérité :

On a :

- "23 est un nombre premier" est vraie
- "$\pi \in \mathbb{Q}$" est fausse

Comme l'une des deux propositions est vraie, la disjonction est vraie. **Donc P_2 est vraie.**

Négation : $\overline{P_2}$: "23 n'est pas un nombre premier et $\pi \notin \mathbb{Q}$"

— $(P_3) : \forall x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 1 = 0$

Valeur de vérité :

Par exemple, pour $x = 0$, on a $0^2 - 0 + 1 = 1 \neq 0$

La proposition n'est pas vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$. **Donc P_3 est fausse.**

Négation : $\overline{P_3}$: "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 1 \neq 0$"

— $(P_4) : \exists n \in \mathbb{N} : \sqrt{n} \in \mathbb{N}$

Valeur de vérité :

Pour $n = 4$, on a $\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{N}$ **Donc P_4 est vraie.**

Négation : $\overline{P_4}$: "$\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$"

— $(P_5) : \exists! x \in \mathbb{R} : x^2 = 1$

Valeur de vérité :

On a : L'équation $x^2 = 1$ a deux solutions réelles : $x = 1$ et $x = -1$

La proposition n'est pas vérifiée. **Donc P_5 est fausse.**

— $(P_7) : \forall x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2020$

Valeur de vérité :

Pour $x = 0$, on a $0 < 1$

Alors $1 \leq 0 \leq 2020$ est faux. **Donc P_7 est fausse.**

Négation : $\overline{P_7}$: "$\exists x \in \mathbb{R} : x < 1$ ou $x > 2020$"

— $(P_{11}) : (\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\, x = 2y$

Valeur de vérité :

Pour $x = 1$, il n'existe aucun $y \in \mathbb{N}$ tel que $1 = 2y$

La proposition n'est pas vérifiée pour tout $x \in \mathbb{N}$. **Donc P_{11} est fausse.**

Négation : $\overline{P_{11}}$: "$\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x \neq 2y$"

— $(P_{16}) : \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \dfrac{x + y}{2} = \dfrac{y - 10}{3} = \dfrac{z + 1}{2}$

Valeur de vérité :

Pour $x = 0, y = 0$ et $z = 0$:
$\dfrac{0 + 0}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$,
$\dfrac{0 - 10}{3} = \dfrac{-10}{3}$,
$\dfrac{0 + 1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Donc $0 \neq \dfrac{-10}{3} \neq \dfrac{1}{2}$. **Donc P_{16} est fausse.**

Négation :

$\overline{P_{16}}$: "$\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \dfrac{x + y}{2} \neq \dfrac{y - 10}{3}$ ou $\dfrac{y - 10}{3} \neq \dfrac{z + 1}{2}$"

— $(P_{17}) : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x - y + 3 = 0$

Valeur de vérité :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut prendre $y = x + 3$

Alors $x - (x + 3) + 3 = x - x - 3 + 3 = 0$

Donc pour chaque x, il existe bien un y qui vérifie l'équation. **Donc P_{17} est vraie.**

Négation : $\overline{P_{17}}$: "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x - y + 3 \neq 0$"

— $(P_{18}) : \forall a \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{Z} : 2a - b \in \mathbb{N}$

Valeur de vérité :

Pour tout $a \in \mathbb{N}$, on peut choisir $b = a \in \mathbb{Z}$

Alors $2a - a = a \in \mathbb{N}$

Donc pour chaque a, il existe bien un b qui vérifie la condition. **Donc P_{18} est vraie.**

Négation : $\overline{P_{18}}$: "$\exists a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{Z} : 2a - b \notin \mathbb{N}$"

— $(P_{19}) : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x < y$

Valeur de vérité :

Supposons qu'un tel x existe. Alors pour $y = x - 1 \in \mathbb{R}$, on aurait $x < x - 1$

Ce qui implique $0 < -1$, ce qui est impossible

Donc P_{19} est fausse.

Négation : $\overline{P_{19}}$: "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x \geq y$"

Correction de l'exercice 3

- $a \times b = 0 \iff a = 0$ **ou** $b = 0$
- $|a| + |b| = 0 \iff a = 0$ **et** $b = 0$
- $|a| = |b| \iff a = b$ **ou** $a = -b$
- $a^2 > 9 \iff a < -3$ **ou** $a > 3$

Correction de l'exercice 4

1. Trouver le lien entre les propositions du tableau. L'indiquer par un symbole logique dans la colonne du milieu. (symboles logique : $\Rightarrow$; $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$)

$x = 2$	$\Rightarrow$	$x^2 = 4$
$xy > 0$	$\Leftarrow$	$x > 0$ et $y > 0$
$\frac{1}{x} > 0$	$\Leftrightarrow$	$x > 0$
$\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$	$\Leftarrow$	$x > 2$
C'est le 1er janvier	$\Rightarrow$	Le lycée est fermé
$x = y$ (x et y sont des réels)	$\Rightarrow$	$\|x\| = \|y\|$
$\|x - 3\| \leq 5$	$\Leftrightarrow$	$x \in [-2; 8]$

2. Donner la négation de chacune des propositions suivantes sans déterminer la valeur de vérité :

- On a : P : $(\forall n \in \mathbb{N}) : x \neq 1 \implies x > 1$

  Donc : $\overline{P}$: $\exists n \in \mathbb{N} : x \neq 1$ **et** $x \leq 1$
- On a : Q : $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists \alpha > 0) : |x| < \alpha \implies \left|\dfrac{x-1}{x+1} - 1\right| < \alpha$

  Donc : $\overline{Q}$: $\exists x \in \mathbb{N}, \forall \alpha > 0 : |x| < \alpha$ **et** $\left|\dfrac{x-1}{x+1} - 1\right| \geq \alpha$
- On a : R : $\forall z \in \mathbb{R}, (z = 0 \Leftrightarrow z = 0)$

  Donc : $\overline{R}$: $\exists z \in]-\infty, +\infty[, (z = 0$ **et** $z \neq 0)$ **ou** $(z \neq 0$ **et** $z = 0)$
- On a : S : $\forall x \in \mathbb{R}^*, (x^2 + 2x = -1 \Leftrightarrow x = -1)$

  Donc : $\overline{S}$: $\exists x \in \mathbb{R}^*, (x^2 + 2x = -1$ **et** $x \neq -1)$ **ou** $(x^2 + 2x \neq -1$ **et** $x = -1)$

Correction de l'exercice 5

1. $P \iff \overline{\overline{P}}$

On a le tableau de vérité :

P	$\overline{P}$	$\overline{\overline{P}}$	$P \iff \overline{\overline{P}}$
V	F	V	V
F	V	F	V

La dernière colonne est toujours **V**, donc c'est une loi logique.

2. $P \Rightarrow Q \iff \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

On a le tableau de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$	$P \Rightarrow Q \iff \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

La dernière colonne est toujours **V**, donc c'est une loi logique.

3. $\overline{(P \Rightarrow Q)} \iff (P$ **et** $\overline{Q})$

On a le tableau de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{(P \Rightarrow Q)}$	$\overline{Q}$	$P \wedge \overline{Q}$	$\overline{(P \Rightarrow Q)} \iff (P \wedge \overline{Q})$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V

La dernière colonne est toujours **V**, donc c'est une loi logique.