

Exercice 1

On considère dans le plan les points $A(6, 2)$, $B(5, -2)$ et $C(1, -1)$.

1. (a) Calculer AB , AC et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
 (b) Calculer $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
 (c) Déduire la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
2. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et déduire que ABC est un triangle rectangle et isocèle.

Exercice 2

Soit ABC un triangle dans le plan et soit $G = \text{Bary}\{(A, 3); (B, -2); (C, 3)\}$.

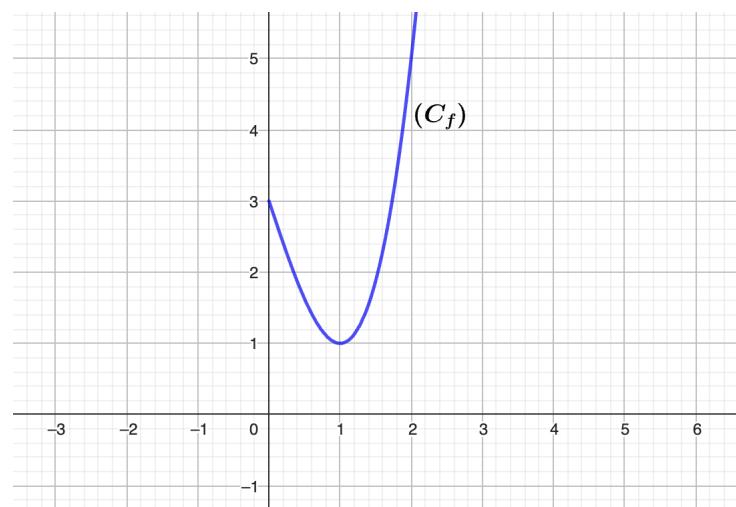
1. (a) Construire le point I tel que $I = \text{Bary}\{(A, 3); (C, 3)\}$.
 (b) Montrer que $G = \text{Bary}\{(B, -1); (I, 3)\}$.
 (c) Construire le point G .
2. Soit J un point du plan tel que $\overrightarrow{AJ} = -2\overrightarrow{AB}$.
 (a) Montrer que $J = \text{Bary}\{(A, 3); (B, -2)\}$.
 (b) Montrer que les droites (CJ) et (BI) se coupent en G .
3. On suppose que $A(1, 1)$, $B(-1, 2)$ et $C(1, -1)$. Déterminer les coordonnées du point G .
4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que :

$$\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = 4\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\|$$

5. On pose $\overrightarrow{U} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{V} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$.
 (a) Montrer que $\overrightarrow{U} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{V} = 4\overrightarrow{MG}$.
 (b) Déterminer l'ensemble des points M tel que \overrightarrow{U} et \overrightarrow{V} soient colinéaires.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^3 - 3x + 3$ et dont la courbe \mathcal{C}_f est représentée sur la figure ci-dessous :



1. Donner le tableau de variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$.
2. Déterminer graphiquement $f([0, 1])$ et $f([1, +\infty[)$.
3. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$.
 Déterminer D_g le domaine de définition de la fonction g et dresser son tableau de variations.

4. (a) Montrer graphiquement que $\forall x \in [0, +\infty[; f(x) \neq -1$ et déduire que le domaine de définition de la fonction $g \circ f$ est $D_{g \circ f} = [0, +\infty[.$
- (b) Déterminer $(g \circ f)(x)$ pour tout x appartenant à $[0, +\infty[.$
- (c) Étudier les variations de la fonction $g \circ f$ sur $[0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
- (d) Déduire que $\forall x \in [0, +\infty[; \frac{x^3 - 3x + 5}{x^3 - 3x + 4} \leq \frac{3}{2}.$