3. Les suites de la forme $U_{n+1} = aU_n + b$

Définition 3.1

Soit a et b deux réels.
La suite définie par son premier terme U_0 et la relation $U_{n+1} = aU_n + b$ pour tout $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ est appelée une **suite récurrente**.

Exemple 3.1 : On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_{n+1} = 2U_n + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ U_0 = 2 \end{cases}$$

1. Calculer U_1 et U_2 et U_3.
2. On pose $V_n = U_n + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer V_1 et V_2 et V_3.
   (b) Calculer $\dfrac{V_{n+1}}{V_n}$ puis déduire la nature de la suite (V_n).
   (c) Exprimer (V_n) en fonction de n.
   (d) En déduire l'expression (U_n) en fonction de n.
3. Calculer les sommes suivantes :
$$S_1 = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_5$$
4. Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n).

Correction :

1. **Calcul de U_1, U_2 et U_3 :**
   — $U_1 = 2U_0 + 2 = 2(2) + 2 = 4 + 2 = 6$.
   — $U_2 = 2U_1 + 2 = 2(6) + 2 = 12 + 2 = 14$.
   — $U_3 = 2U_2 + 2 = 2(14) + 2 = 28 + 2 = 30$.
2. On pose $V_n = U_n + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   (a) **Calcul V_0, V_1 et V_2 :**
   — $V_0 = U_0 + 2 = 2 + 2 = 4$.
   — $V_1 = U_1 + 2 = 6 + 2 = 8$.
   — $V_2 = U_2 + 2 = 14 + 2 = 16$.
   — $V_3 = U_3 + 2 = 30 + 2 = 32$.

   (b) **Calcul $\dfrac{V_{n+1}}{V_n}$ et nature de (V_n) :**
$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} + 2 \\ &= (2U_n + 2) + 2 \\ &= 2U_n + 4 \end{aligned}$$
   Puisque $U_n = V_n - 2$, on remplace :
$$V_{n+1} = 2(V_n - 2) + 4 = 2V_n - 4 + 4 = 2V_n$$
   Donc, $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{2V_n}{V_n} = 2$. La suite (V_n) est une **suite géométrique** de raison $q = 2$ et de premier terme $V_0 = 4$.

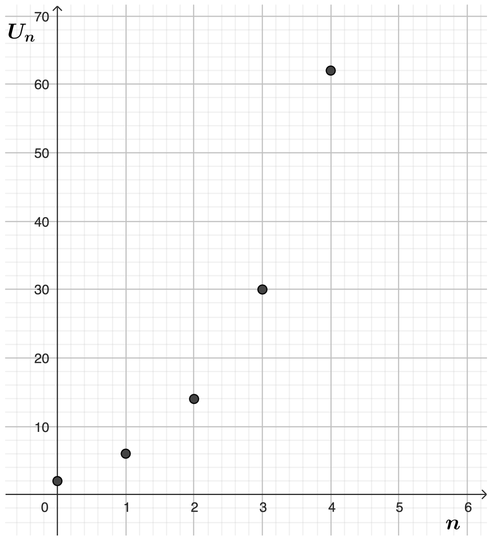
   (c) **Expression de (V_n) en fonction de n :** Comme (V_n) est géométrique, $V_n = V_0 \cdot q^n$:
$$V_n = 4 \cdot 2^n = 2^2 \cdot 2^n = 2^{n+2}$$

   (d) **Expression de (U_n) en fonction de n :** On a $U_n = V_n - 2$.
$$U_n = 4 \cdot 2^n - 2 = 2^{n+2} - 2$$

3. **Calcul de la somme :**

$$\begin{aligned} S_1 &= V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_5 \\ &= V_1 \times \frac{q^{5-1+1} - 1}{q-1} \\ &= V_1 \times \frac{2^5 - 1}{2-1} \\ &= 8 \times \frac{32-1}{1} \\ &= 8 \times 31 \\ &= 248 \end{aligned}$$

4. **Représentation graphique :** On place les points : $(0, U_0), (1, U_1), (2, U_2), (3, U_3), (4, U_4)$, avec : $U_0 = 2, U_1 = 6, U_2 = 14, U_3 = 30, U_4 = 62$.



Application 3.1 : On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{2}{3}U_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ U_0 = 10 \end{cases}$$

et la suite $V_n = U_n - 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer U_1 et U_2 et V_0 et V_1.
2. Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$.
3. Exprimer (V_n) puis (U_n) en fonction de n.
4. Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_5$$

Correction :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{2}{3}U_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ U_0 = 10 \end{cases}$$

et la suite $V_n = U_n - 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

1. **Calcul** U_1, U_2, V_0 **et** V_1 **:**
   — $U_1 = \dfrac{2}{3}U_0 + 1 = \dfrac{2}{3} \times 10 + 1 = \dfrac{20}{3} + \dfrac{3}{3} = \dfrac{23}{3}$.
   — $U_2 = \dfrac{2}{3}U_1 + 1 = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{23}{3} + 1 = \dfrac{46}{9} + \dfrac{9}{9} = \dfrac{55}{9}$.
   — $V_0 = U_0 - 3 = 10 - 3 = 7$.
   — $V_1 = U_1 - 3 = \dfrac{23}{3} - \dfrac{9}{3} = \dfrac{14}{3}$.

2. **Montre que** (V_n) **est géométrique :** Calculons V_{n+1} en fonction de V_n :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - 3 \\ &= \left(\frac{2}{3}U_n + 1\right) - 3 \\ &= \frac{2}{3}U_n - 2 \end{aligned}$$

Puisque $U_n = V_n + 3$, on remplace :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{2}{3}(V_n + 3) - 2 \\ &= \frac{2}{3}V_n + \frac{2}{3}(3) - 2 \\ &= \frac{2}{3}V_n + 2 - 2 \\ &= \frac{2}{3}V_n \end{aligned}$$

Puisque $V_{n+1} = \frac{2}{3}V_n$, la suite (V_n) est une **suite géométrique** de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $V_0 = 7$.

3. **Expression de** (V_n) **puis** (U_n) **en fonction de** n **:**
   — V_n : Suite géométrique, $V_n = V_0 \cdot q^n$.

$$V_n = 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

   — U_n : On a $U_n = V_n + 3$.

$$U_n = 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$$

4. **Calcul de la somme :**

$$\begin{aligned} S_1 &= V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 \\ &= \frac{14}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= \frac{14}{3} \times \frac{1 - \frac{32}{243}}{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{14}{3} \times \frac{\frac{211}{243}}{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{14}{3} \times \frac{211}{243} \times 3 \\ &= \frac{2954}{243} \end{aligned}$$