Exercice 1

On considère dans le plan les points $A(6,2)$, $B(5,-2)$ et $C(1,-1)$.

1. (a) Calculer AB, AC et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
   (b) Calculer $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ et $\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
   (c) Déduire la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$.
2. Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ et déduire que ABC est un triangle rectangle et isocèle.

Exercice 2

Soit ABC un triangle dans le plan et soit $G=$ Bary$\{(A,3);(B,-2);(C,3)\}$.

1. (a) Construire le point I tel que $I=$ Bary$\{(A,3);(C,3)\}$.
   (b) Montrer que $G=$ Bary$\{(B,-1);(I,3)\}$.
   (c) Construire le point G.
2. Soit J un point du plan tel que $\overrightarrow{AJ}=-2\overrightarrow{AB}$.
   (a) Montrer que $J=$ Bary$\{(A,3);(B,-2)\}$.
   (b) Montrer que les droites (CJ) et (BI) se coupent en G.
3. On suppose que $A(1,1)$, $B(-1,2)$ et $C(1,-1)$. Déterminer les coordonnées du point G.
4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que :

$$\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\|=4\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\|$$

5. On pose $\overrightarrow{U}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{V}=3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$.
   (a) Montrer que $\overrightarrow{U}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{V}=4\overrightarrow{MG}$.
   (b) Déterminer l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ soient colinéaires.

Correction de l'exercice 2

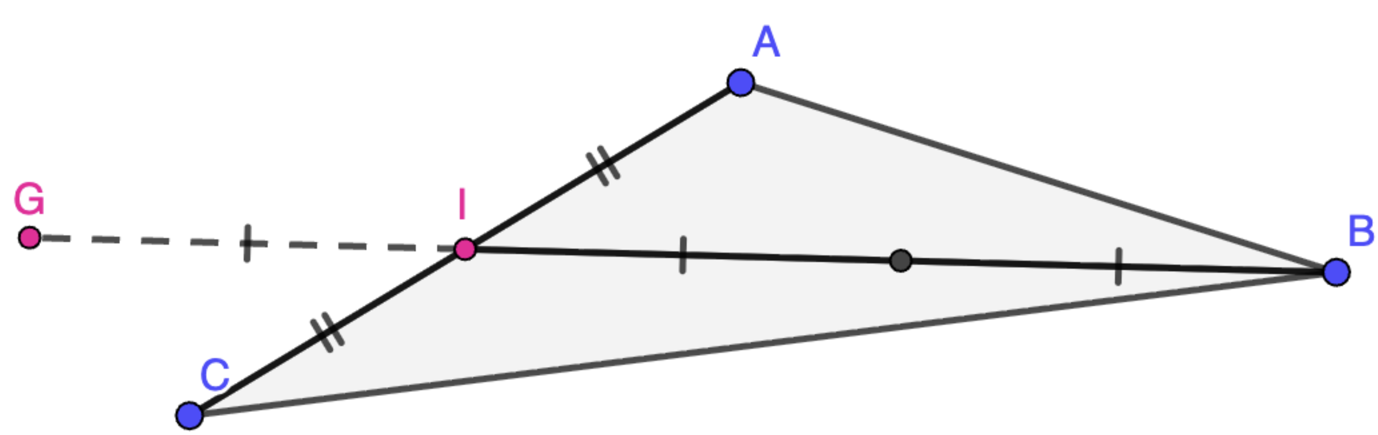
1. (a) $I=$ Bary$\{(A,3);(C,3)\}$. Comme les coefficients sont égaux, I est le milieu du segment $[AC]$.
   D'où la construction de I : (Voir la figure ci-dessous)
   (b) Puisque $\begin{cases} I=\text{Bary}\{(A,3);(C,3)\} \\ G=\text{Bary}\{(A,3);(B,-2);(C,3)\}\end{cases}$ Alors d'après la propriété d'associativité,

$$G=\text{Bary}\{(I,6);(B,-2)\}$$

   En divisant tous les coefficients par 2,

$$G=\text{Bary}\{(I,3);(B,-1)\}$$

   (c) On a $G=$ Bary$\{(I,3);(B,-1)\}$, donc $\overrightarrow{IG}=\dfrac{-1}{3-1}\overrightarrow{IB}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{IB}$.
   D'où la construction de G :



2. (a)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AJ} = -2\overrightarrow{AB} &\iff \overrightarrow{AJ} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}\\ &\iff \overrightarrow{AJ} + 2(\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JB}) = \vec{0} \quad \text{(Relation de Chasles)}\\ &\iff 3\overrightarrow{AJ} + 2\overrightarrow{JB} = \vec{0}\\ &\iff -3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} = \vec{0}\\ &\iff 3\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JB} = \vec{0}\end{aligned}$$

Donc $J = \text{Bary}\{(A,3);(B,-2)\}$.

(b) Pour montrer que (CJ) et (BI) se coupent en G, il suffit de montrer que :

$$\begin{cases} G \in (CJ) \\ G \in (BI) \end{cases}$$

— Puisque $\begin{cases} G = \text{Bary}\{(A,3);(B,-2);(C,3)\} \\ J = \text{Bary}\{(A,3);(B,-2)\} \end{cases}$

Alors d'après la propriété d'associativité du barycentre :

$$G = \text{Bary}\{(J,1);(C,3)\}$$

donc $G \in (CJ)$. ①

— D'après la question 1.b), $G = \text{Bary}\{(B,-1);(I,3)\}$,
donc $G \in (BI)$. ②

D'après ① et ②, les droites (CJ) et (BI) se coupent en G.

3. Les coordonnées de $G(x_G, y_G)$ sont : $x_G = \dfrac{3x_A - 2x_B + 3x_C}{4} = \dfrac{3(1) - 2(-1) + 3(1)}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$. $y_G = \dfrac{3y_A - 2y_B + 3y_C}{4} = \dfrac{3(1) - 2(2) + 3(-1)}{4} = \dfrac{-4}{4} = -1$. D'où $G(2,-1)$.

4. On a : $G = \text{Bary}\{(A,3),(B,-2),(C,3)\}$ et $J = \text{Bary}\{(A,3),(B,-2)\}$. D'après la propriété caractéristique :

$$\forall M \in \mathcal{P} : 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG} \quad \text{et} \quad 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = 1\overrightarrow{MJ}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = 4\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\| &\iff \|4\overrightarrow{MG}\| = 4\|1\overrightarrow{MJ}\|\\ &\iff 4MG = 4MJ\\ &\iff MG = MJ\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points M est la médiatrice du segment $[GJ]$.

5. On pose

$$\vec{U} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \quad \text{et} \quad \vec{V} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}.$$

(a) Montrons que

$$\vec{U} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \vec{V} = 4\overrightarrow{MG}.$$

$$\begin{aligned}\vec{U} &= 2\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})\\ &= 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AC}\\ &= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\vec{U} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}.$$

Par ailleurs, comme

$$G = \text{Bary}\{(A,3),(B,-2),(C,3)\},$$

la propriété caractéristique du barycentre donne :

$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = (3-2+3)\overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MG}.$$

Donc

$$\boxed{\overrightarrow{V} = 4\overrightarrow{MG}}.$$

(b) **Détermination de l'ensemble des points** M Les vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires si et seulement si

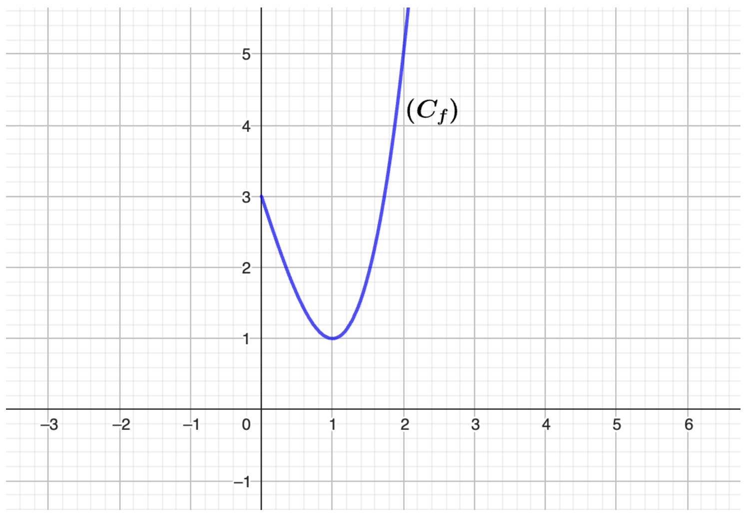
$$\overrightarrow{MG} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{U}.$$

Comme $\overrightarrow{U}$ est un vecteur constant, l'ensemble des points M est la **droite passant par** G **et de vecteur directeur**

$$\overrightarrow{U} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^3 - 3x + 3$ et dont la courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée sur la figure ci-dessous :



1. Donner le tableau de variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$.
2. Déterminer graphiquement $f([0,1])$ et $f([1, +\infty[)$.
3. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$.
   Déterminer D_g le domaine de définition de la fonction g et dresser son tableau de variations.
4. (a) Montrer graphiquement que $\forall x \in [0, +\infty[\ ;\ f(x) \neq -1$ et déduire que le domaine de définition de la fonction $g \circ f$ est $D_{g\circ f} = [0, +\infty[$.
   (b) Déterminer $(g \circ f)(x)$ pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$.
   (c) Étudier les variations de la fonction $g \circ f$ sur $[0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
   (d) Déduire que $\forall x \in [0, +\infty[\ ;\ \dfrac{x^3 - 3x + 5}{x^3 - 3x + 4} \leq \dfrac{3}{2}$.

Correction de l'exercice 3

1. Tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
f(x)	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Graphiquement : $f([0,1]) = [1,3]$ et $f([1,+\infty[) = [1,+\infty[$.
3. $D_g = \{x \in \mathbb{R} / \ x+1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / \ x \neq -1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

   Le déterminant de g est $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \times 1) - (2 \times 1) = -1$. Comme $\Delta < 0$, donc :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g(x)		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

4. Graphiquement, le minimum de f est 1, donc $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) \geq 1$. Par conséquent, $f(x) \neq -1$.
   Détermination de $D_{g \circ f}$: On sait que :

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

   On a $x \in D_f$, donc $x \in [0,+\infty[$.
   De plus, $f(x) \in D_g$, donc $f(x) \neq -1$.
   D'où : $D_{g \circ f} = [0,+\infty[$.
5. Pour tout $x \in [0,+\infty[$:

$$(g \circ f)(x) = \frac{f(x)+2}{f(x)+1} = \frac{(x^3-3x+3)+2}{(x^3-3x+3)+1} = \frac{x^3-3x+5}{x^3-3x+4}$$

6. Tableau de variations de $g \circ f$:
   f est décroissante sur $[0,1]$ et $f([0,1]) = [1,3]$. Comme g est décroissante sur $[1,3]$, alors $g \circ f$ est croissante sur $[0,1]$.
   f est croissante sur $[1,+\infty[$ et $f([1,+\infty[) = [1,+\infty[$. Comme g est décroissante sur $[1,+\infty[$, alors $g \circ f$ est décroissante sur $[1,+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
gof(x)		$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	

7. D'après le tableau de variations de la fonction $g \circ f$ sur $[0,+\infty[$, la fonction $g \circ f$ admet une valeur maximale atteinte pour $x = 1$:

$$(g \circ f)(1) = \frac{3}{2}.$$

   Par conséquent,

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad (g \circ f)(x) \leq \frac{3}{2}.$$

   Or,

$$(g \circ f)(x) = \frac{x^3-3x+5}{x^3-3x+4}.$$

   Donc,

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad \frac{x^3-3x+5}{x^3-3x+4} \leq \frac{3}{2}.$$