

Chapitre : Continuité

Table des matières

1. Continuité en un point

Définition 1.1

La fonction f est continue en un point a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Remarque : La continuité en un point implique l'existence de la limite en ce point.

Exemple 1.1 : La fonction $f(x) = x^2$ est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.

Application 1.1 : Vérifier la continuité de $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, \infty)$.

2. Continuité sur un intervalle

Définition 2.1

f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I .

Théorème 2.1 Valeur intermédiaire

Si f est continue sur $[a, b]$, alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Exemple 2.1 : $f(x) = x^3$ vérifie le théorème des valeurs intermédiaires sur tout intervalle de \mathbb{R} .

Application 2.1 : Montrer que $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas continue en 0.

3. Opérations sur les fonctions continues

Propriété 3.1

Si f et g sont continues en a , alors :

$$f + g, \quad f - g, \quad f \times g, \quad \text{et } \frac{f}{g} \text{ (si } g(a) \neq 0)$$

sont continues en a .

Exemple 3.1 : $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sin x$ sont continues en tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi $f + g$ et $f \times g$ sont continues en tout x .

Application 3.1 : Vérifier la continuité de $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ sur son domaine.