LES RACINES CARRÉES

14 octobre 2024

Table des matières

1) Notion de racine carrée

Activité

a , b et x sont des nombres réels positifs.

1. Compléter le tableau suivant :

x	0	1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	a
x^2	$\cdots$	$\cdots$	4	9	16	b

2. Quelle relation existe-t-il entre a et b ?
   Traduis cette égalité par une phrase.

Définition

Soit a un nombre positif.
La racine carrée de a noté $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carrée est a.

Conséquence

Soit a un nombre réel positif.

$\sqrt{a} = a$, $\left(\sqrt{a}\right) = a$ et $\sqrt{a} \geq 0$

Exemples

- $\sqrt{7^2} = 7$
- $\left(\sqrt{15}\right)^2 = 15$
- $\left(\sqrt{\dfrac{6}{13}}\right)^2 = \dfrac{6}{13}$
- $\sqrt{0} = 0$
- $\sqrt{1} = 1$
- $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$
- $\sqrt{\dfrac{36}{81}} = \sqrt{\dfrac{6^2}{9^2}} = \sqrt{\left(\dfrac{6}{9}\right)^2} = \dfrac{6}{9}$

2) Opérations sur les racines carrées

Activité

1.
   1. Calculer $\sqrt{9\times 4}$ et $\sqrt{9}\times\sqrt{4}$
   2. Que remarquez-vous ?
   3. Soient a et b deux nombres positifs
      Montrer que $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$
2.
   1. Calculer $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$ et $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$
   2. Que remarquez-vous ?
   3. Soient a et b deux nombres positifs avec $b\neq 0$
      Montrer que $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
3.
   1. Comparer $\sqrt{16+9}$ et $\sqrt{16}+\sqrt{9}$; $\sqrt{25-16}$ et $\sqrt{25}+\sqrt{16}$
   2. Que remarquez-vous ?

Propriété 1

Soient a et b deux nombres positifs, on a : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
Autrement dit : La racine carré d'un produit est égale au produit des racines carrées.

Exemples

- $\sqrt{8}\sqrt{2} = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$
- $\sqrt{5}\sqrt{0,45} = \sqrt{5 \times 0,45} = \sqrt{2,25} = 1,5$

Conséquence

Soient a et b deux nombres positifs, on a : $\sqrt{a^2 \times b} = a \times \sqrt{b}$

Exemples

- $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
- $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
- $\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

2.2) Racine carrée et quotient

Propriété 2

Soient a et b deux nombres positifs avec $b \neq 0$, on a :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Autrement dit : La racine carré d'un quotient est égale au quotient des racines carrées.

Exemples

- $\sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$
- $\frac{\sqrt{0,5}}{\sqrt{0,1}} = \sqrt{\frac{0,5}{0,1}} = \sqrt{\frac{0,5 \times 10}{0,1 \times 10}} = \sqrt{\frac{5}{1}} = \sqrt{5}$

3) Rendre rationnel le dénominateur d'un nombre réel

Activité 3

Soient a et b deux nombres positifs non nuls.

1. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$
2. Montrer que $\sqrt{a}+\sqrt{b} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} \quad (a \neq b)$

Propriété

Soit a un nombre positif non nul, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Exemples

On écrit sans utiliser le radical au dénominateur

- ▷ $$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$
- ▷ $$\frac{7}{2\sqrt{3}} = \frac{7 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{2 \times (\sqrt{3})^2} = \frac{7\sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{7\sqrt{3}}{6}$$

Propriété

Soient a et b deux nombres positifs avec $a \neq b$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$$

Exemple

▷ $$\frac{7}{1 - \sqrt{5}} = \frac{7(1 + \sqrt{5})}{(1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})} = \frac{7(1 + \sqrt{5})}{1^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{7(1 + \sqrt{5})}{1 - 5} = \frac{7(1 + \sqrt{5})}{-4}$$

4) L'équation $x^2 = a$

Propriété

Soit l'équation $x^2 = a$ où x est l'inconnue et a un nombre donné.

- Si $a = 0$, alors cette équation a une seule solution 0.
- Si $a > 0$, alors cette équation a deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a < 0$, alors cette équation n'a pas de solution.

Exemples

- Résolvons l'équation : $x^2 = 7$.
  Puisque $7 > 0$ alors cette équation admet deux solutions : $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$.
- Résolvons l'équation : $x^2 = -3$
  Puisque $-3 < 0$ alors cette équation n'admet pas de solutions.
- Résolvons l'équation : $x^2 = 0$
  Cette équation admet une seule solution 0.