Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Pr. Khalid RAHHALI

Modélisation et Évaluation de Performances des Systèmes

Polycopié de Cours

Master Informatique & Télécommunications
MIT3

2024-2025

FACULTÉ DES SCIENCES – RABAT

www.fsr.ac.ma

Année universitaire : 2024 - 2025

Table des matières

1. Chaînes de Markov

1.1 DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS

Soit une suite de variables aléatoires $(X_n, n = 0, 1, \cdots)$ à valeur dans un ensemble $S = \{1, 2, \cdots\}$.
On dit que $(X_n, n \geq 0)$ est une *chaîne de Markov* si :

$$\forall i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}, i, j \in S, \forall n \geq 0,$$
$$P(X_{n+1} = j / X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j / X_n = i).$$

L'ensemble S est appelé *espace des états*.
La variable aléatoire X_n représente *l'état du système* à l'instant n.
Si $P(X_{n+1} = j / X_n = i)$ ne dépend pas de n, on dit qu'on a une chaîne de Markov *homogène*.
Dans la suite on ne considère que des chaînes de Markov homogènes.
On notera alors $p_{ij} = P(X_{n+1} = j / X_n = i)$.
p_{ij} est appelé la *probabilité de transition* de l'état i vers l'état j.
La matrice notée par $P = [p_{ij}]$ est appelée *matrice de transition*.
Notons que P vérifie la propriété suivante :

$$\forall i, j \in S, p_{ij} \geq 0 \text{ et } \forall i \in S, \sum_{j \in S} p_{ij} = 1.$$

Exemples

1. Des clients arrivent à un centre de service. Les clients sont servis un par un, par un seul serveur. Si un client arrive et trouve le serveur occupé, il fait la queue. Soit Y_n le nombre de clients qui arrivent pendant le service du (n+1)-ème client. Dans de nombreuses applications les Y_n sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées.
   Soit X_n le nombre de clients faisant la queue juste après le service du n-ème client. On a alors,

$$X_{n+1} = X_n - 1 + Y_n \text{ si } X_n > 0 \text{ et } X_{n+1} = Y_n \text{ si } X_n = 0$$

On note $P(Y_n = j) = p_j, j = 0, 1, 2, \cdots$
$(X_n, n = 0, 1, \cdots)$ est une chaîne de Markov.
Les probabilités de transition sont :

$$\begin{cases} p_{0j} = & P(X_{n+1} = j/X_n = 0) = P(Y_n = j) = p_j, & j = 0, 1, \cdots \\ p_{ij} = & P(X_n - 1 + Y_n = j/X_n = i) = P(Y_n = j + 1 - i/X_n = i) = p_{j+1-i}, & j \geq i-1, i \geq 1 \\ p_{ij} = & 0, & j < i-1, i \geq 1 \end{cases}$$

2. On considère un magasin qui approvisionne un certain bien pour faire face à une demande hebdomadaire suivant la loi $P(demande = j) = a_j, j \geq 0$. La politique de réapprovisionnement est décrite par deux seuils critiques $(s, S), s < S$. Au début de chaque semaine, le niveau de stock est observé. Si le niveau est inférieur à s le magasin fait une commande pour ramener immédiatement le niveau de stock au seuil S. Si le niveau est supérieur ou égal à s, le magasin ne fait pas de commande. Alors si le stock est x, la commande sera 0 si $x \geq s$ et S-x si $x < s$.
   Soit ξ_n la demande pour la n-ème semaine. Soit X_n le niveau de stock à la fin de la n-ème semaine. On a alors $X_{n+1} = max(X_n - \xi_{n+1}, 0)$ si $X_n \geq s$ et $X_{n+1} = max(S - \xi_{n+1}, 0)$ si $Xn < s$. Donc $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov dont les probabilités de transition sont :

$$p_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=i}^{\infty} a_k & j = 0, i \geq s \\ a_{i-j} & 0 < j \leq i, i \geq s \\ \sum_{k=S}^{\infty} a_k & j = 0, i < s \\ a_{S-j} & 0 < j \leq S, i < s \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

3. Une unité de production comprend deux machines automatiques qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Chaque machine a la fiabilité p au cours d'une journée, ce qui signifie que sa probabilité de tomber en panne pendant cette période est 1-p. Dans ce cas, elle sera réparée pendant la nuit et se retrouvera en état de marche le lendemain. Une seule machine peut être réparée à la fois.
   Soit X_n le nombre de machines en panne au début de la journée n. $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov dont l'espace des états est $S = \{0, 1\}$. Les probabilités de transition sont :

$$\begin{cases} p_{00} = & pp + p(1-p) + (1-p)p & = p(2-p) \\ p_{01} = & (1-p)(1-p) & = (1-p)^2 \\ p_{10} = & p \\ p_{11} = & (1-p) \end{cases}$$

1.2 PROBABILITÉS D'ÉTAT

La proposition suivante montre qu'une chaîne de Markov est complètement déterminée si sa matrice de transition P et une distribution de probabilités de l'état initial X_0 sont connues.

Proposition 1.2.1
$\forall i_0, i_1, \cdots, i_n \in S, P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0) p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) &= P(X_n = i_n / X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= p_{i_{n-1} i_n} P(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= p_{i_{n-1} i_n} p_{i_{n-2} i_{n-1}} P(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-2} = i_{n-2}) \\ &\vdots \\ &= p_{i_{n-1} i_n} p_{i_{n-2} i_{n-1}} \cdots p_{i_0 i_1} P(X_0 = i_0). \end{aligned}$$

Introduisons la notation pour designer la probabilité de passer de l'état i à l'état j en exactement n transitions, c'est-à-dire :
$P_{ij}^{(n)} = P(X_{n+m} = j / X_m = i)$ (ne dépend pas de m). ■

Proposition 1.2.2 (équation de Chapman-Kolmogorov)
$\forall m, n \in N, P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(n+m)} = P(X_{n+m} = j / X_0 = i) &= \sum_{k \in S} P(X_{n+m} = j, X_m = k / X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} P(X_{n+m} = j / X_m = k, X_0 = i) P(X_m = k / X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} P(X_{n+m} = j / X_m = k) P(X_m = k / X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}. \end{aligned}$$

■

R Si on désigne par $P^{(n)}$ la matrice $[P_{ij}^{(n)}]$, alors l'équation de Chapman-Kolmogorov devient :

$$P^{(m+n)} = P^{(m)} P^{(n)}, \forall m, n \in N.$$

Comme $P^{(1)}$ n'est autre que la matrice de transition P, il en résulte que :

$$P^{(n)} = P^{(1)} P^{(n-1)} = P P^{(n-1)} = P P P^{(n-2)} = \cdots = P^n.$$

Alors le calcul de $P^{(n)}$ se ramène à celui de P^n.

On considère les probabilités d'état :

$$\pi_k(n) := P(X_n = k), n = 0, 1, \cdots, k \in S.$$

On a

$$\pi_k(n) := P(X_n = k) = \sum_{j \in S} P(X_n = k / X_0 = j) P(X_0 = j) = \sum_{j \in S} P_{jk}^{(n)} \pi_j(0)$$

Alors
$$\pi_k(n) = \sum_{j\in S} \pi_j(0) P_{jk}^{(n)} \text{ pour tout } k \in S.$$
En notation matricielle :
$$\pi(n) = \pi(0)P^{(n)},$$
où $\pi(0)$ étant la distribution de l'état initial.
On a aussi :
$$\pi(n+1) = \pi(n)P.$$

Exemple

Dans l'exemple 1.3, calculer la probabilité pour qu'aucune machine ne soit en panne au début de la 3 ème journée sachant que les deux machines se trouvent initialement en état de fonctionnement.

On a
$$\pi(0) = (1,0), \pi(1) = (1,0)\begin{bmatrix} p(2-p) & (1-p)^2 \\ p & (1-p) \end{bmatrix} = (p(2-p),(1-p)^2),$$
$$\pi(2) = (p(2-p),(1-p)^2)\begin{bmatrix} p(2-p) & (1-p)^2 \\ p & (1-p) \end{bmatrix}.$$

1.3 CLASSIFICATION DES ÉTATS

On dit que l'état j est accessible à partir de l'état i si il existe $n > 0$ tel que $P_{ij}^{(n)} > 0$.
On dit que les deux états i et j communiquent si j est accessible à partir de i et i est accessible à partir de j ; c'est-à-dire :
$$\exists n > 0, \exists m > 0 : P_{ij}^{(n)} > 0 \text{ et } P_{ji}^{(m)} > 0.$$
On dit que les états d'une partie E de l'espace des états S communiquent si les deux états de toute paire de E communiquent.
Sur l'espace des états S ; on définit la relation $\mathfrak{R}$ par :
$$\forall i, j \in S, i\mathfrak{R}j \Leftrightarrow i = j \text{ ou } i \text{ et } j \text{ communiquent}$$

Proposition 1.3.1 La relation $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.

Démonstration. La réflexivité et la symétrie découlent immédiatement de la définition de $\mathfrak{R}$.
Montrons la transitivité. Soient i, j, k S tels que $i\mathfrak{R}j$ et $j\mathfrak{R}k$. Alors
$$\exists n > 0, \exists m > 0 : P_{ij}^{(n)} > 0 \text{ et } P_{jk}^{(m)} > 0.$$
Or d'après l'équation de Chapman-Kolmogorov,
$$P_{ik}^{(m+n)} = \sum_{l\in S} P_{il}^{(m)} P_{lk}^{(n)} \geq P_{ij}^{(m)} P_{jk}^{(n)} > 0.$$
Donc k est accessible à partir de i.
De la même manière, on montre que i est accessible à partir de k.

■

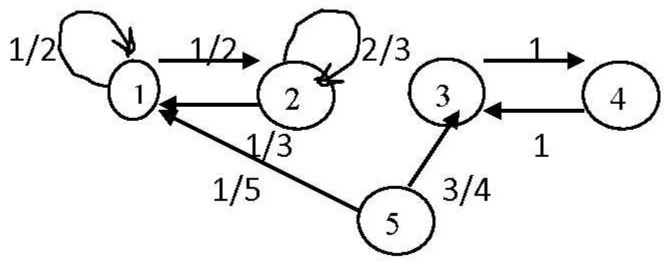
R On peut donc partager l'espace des états en classes d'équivalence c'est-à-dire en classes disjointes d'états : $E_1, E_2, \cdots$.
Une chaîne de Markov est dite irréductible si elle admet une seule classe d'équivalence.

Exemples

1. On considère la chaîne de Markov définie par la matrice de transition :

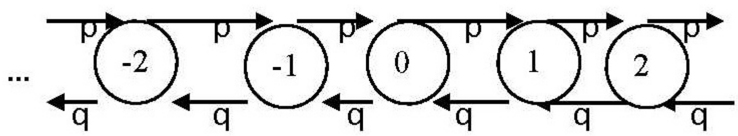
$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Graphe des transitions :



   Trois classes : $E_1 = \{1,2\}, E_2 = \{3,4\}, E_3 = \{5\}$.

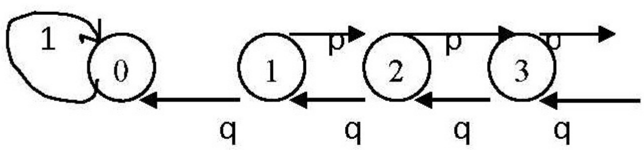
2. On considère la chaîne de Markov définie par :



$$p \neq 0, q \neq 0, p+q = 1$$

   C'est une chaîne de Markov irréductible.

3. On considère la chaîne de Markov définie par :



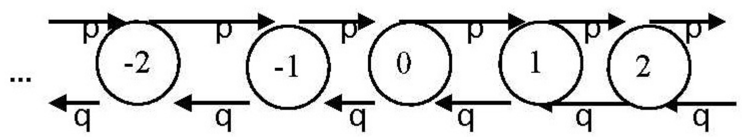
$$p \neq 0, q \neq 0, p+q = 1$$

   Deux classes : $E_1 = \{0\}$ et $E_2 = \{1, 2, \cdots\}$

Définissons $f_{ij}^{(k)} = P(X_k = j, X_l \neq j, 1 \leq l \leq k-1 / X_0 = i)$.
$f_{ij}^{(k)}$ est la probabilité pour que, le processus étant initialement dans l'état i, soit pour la première fois dans l'état j au bout de k transitions.
Introduisons le nombre $f_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}$, qui est la probabilité pour que le processus partant de i, atteigne j en un nombre fini de transitions.
On dit qu'un état i est récurrent si $f_{ii} = 1$, c'est-à-dire partant de i, le processus repassera à coup sur par i au cours de son évolution.
Un état i qui n'est pas récurrent est appelé transitoire, c'est-à-dire $f_{ii} < 1$, ce qui signifie que partant de i, le processus peut de ne pas repasser par i.
Les états récurrents peuvent être classés selon que le temps moyen de retour $\mu_i = \sum_{k=1}^{\infty} k f_{ii}^{(k)}$ est fini ou infini. On dit qu'un état récurrent i est non nul si $\mu_i < \infty$, il est dit nul si $\mu_i = \infty$.

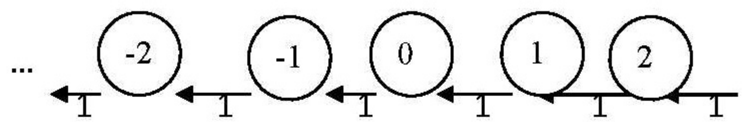
Proposition 1.3.2 i est récurrent $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = \infty$.

Exemple On considère la chaîne de Markov définie par :



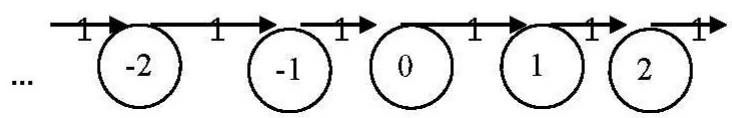
$$p \neq 0, q \neq 0, p+q = 1$$

— Si $p = 0$, la chaîne de Markov se réduit à :



Dans ce cas tous les états sont transitoires car $\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = 0$ pour tout i.

— Si $p = 1$, la chaîne de Markov se réduit à :



Dans ce cas tous les états sont transitoires car $\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = 0$ pour tout i.

— Maintenant, supposons que $0 < p < 1$.
Dans ce cas tous les états communiquent. La chaîne de Markov admet alors une seule classe.
Notons que pour tout i, $p_{ii}^{(n)} > 0 \Leftrightarrow$ n est un multiple de 2.
Pour tout i, $p_{ii}^{(2n)} = C_{2n}^{n}(pq)^n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}(pq)^n$.
D'après la formule de Stirling ($n! \approx \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$), on a :

$$p_{ii}^{(2n)} \approx \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}}{(2\pi n)(n)^{2n}e^{-2n})}(pq)^n = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} := U_n.$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 4pq\sqrt{\frac{n}{n+1}} \to 4pq$$

$$\begin{aligned} 4pq = 4p(1-p) = -4p^2+4p < 1 &\Leftrightarrow -4p^2+4p-1 < 0 \\ &\Leftrightarrow -(2p-1)^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow 2p-1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow p \neq \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Si $p \neq \frac{1}{2}$ alors $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$. Dans ce cas tous les états sont transitoires.
Si $p = \frac{1}{2}$ alors $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ ($p_{ii}^{(n)} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$).
Dans ce cas tous les états sont récurrents.

Proposition 1.3.3 Si i et j communiquent, et i est un état récurrent, alors j est un état récurrent.

Démonstration. $\exists m,n > 0 : p_{ij}^{(n)} > 0$ et $p_{ji}^{(m)} > 0$.
Alors, $p_{jj}^{(m+s+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(s)} p_{ij}^{(n)}$ et $\sum_{s=1}^{\infty} p_{jj}^{(m+s+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} \sum_{s=1}^{\infty} p_{ii}^{(s)} = \infty$.
Donc $\sum_{s=1}^{\infty} p_{jj}^{(s)} = \infty$ et j est récurrent. ■

R Une conséquence immédiate de la proposition 1.3.3 est que tous les états d'une même classe sont soit tous récurrents soit tous transitoires. Cette remarque est valable aussi pour les états récurrents non nuls et les états récurrents nuls.

Proposition 1.3.4 Si j est un état récurrent et i un état quelconque communiquant avec j, alors $f_{ij} = 1$.

Démonstration. Supposons que $1 - f_{ij} = \alpha > 0$. $1 - f_{ij}$ est la probabilité pour que le processus partant de i ne passe pas par j. Partant de j, le processus peut atteindre i avec une probabilité non nulle car j communique avec i, et ne jamais revenir à j avec une probabilité $\alpha > 0$. C'est une contradiction car j est récurrent. ■

Proposition 1.3.5 Si j est un état transitoire, alors pour tout état i, $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \dfrac{f_{ij}}{1-f_{jj}}$.

R Soit j un état transitoire. Alors pour tout état i : $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ (car la série $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ converge).

Soit N_{ij} le nombre de visites en j sachant que le processus parte de i.

Proposition 1.3.6 $P(N_{ij}=k) = \begin{cases} 1-f_{ij} & k=0 \\ f_{ij}f_{jj}^{k-1}(1-f_{jj}) & k\geq 1 \end{cases}$

Soit $n_{ij} = E(N_{ij})$ le nombre moyen de visites en j sachant que le processus parte de i.

Proposition 1.3.7 $n_{ij} = \dfrac{f_{ij}}{1-f_{jj}}, \forall i,j.$

Démonstration.

$$n_{ij} = E(N_{ij}) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(N_{ij}=k) = \sum_{k=1}^{\infty} kf_{ij}f_{jj}^{k-1}(1-f_{jj}) = f_{ij}(1-f_{jj})\sum_{k=1}^{\infty} kf_{jj}^{k-1}$$

$= f_{ij}(1-f_{jj})(\sum_{k=1}^{\infty} f_{jj}^{k})' = f_{ij}(1-f_{jj})\dfrac{1}{(1-f_{jj})^2} = \dfrac{f_{ij}}{1-f_{jj}}$ (si j est transitoire et f_{jj}<1)
Si j est récurrent $n_{ij} = \infty$ si $f_{ij} \neq 0$ 0 et $n_{ij} = 0$ si $f_{ij} = 0$.
Puisque j est récurrent, on a :

$$P(N_{ij}=k) = \begin{cases} 1-f_{ij} & k=0 \\ f_{ij} & k=\infty \end{cases}$$

■

Proposition 1.3.8 Soit T l'ensemble des états transitoires. Soit j un état récurrent de la classe E_k, alors les probabilités f_{ij}, $i \in T$ vérifient :

$$f_{ij} = \sum_{t\in T} p_{it}f_{tj} + \sum_{s\in E_k} p_{is}, i \in T$$

Démonstration. Soit A l'événement « le processus passe par l'état j ».
Alors,

$$f_{ij} = P(A/X_0 = i) = \sum_{t\in S} P(A/X_0 = i, X_1 = t)P(X_1 = t/X_0 = i)$$

$$= \sum_{t\in S} f_{tj}p_{it} = \sum_{t\in T} f_{tj}p_{it} + \sum_{t\in E_k} f_{tj}p_{it} + \sum_{t\notin T t\notin E_k} f_{tj}p_{it} = \sum_{t\in T} f_{tj}p_{it} + \sum_{t\in E_k} p_{it}$$

car $f_{tj} = 1$ si $t \in E_k$ et $f_{tj} = 0$ si $t \notin T$ et $t \notin E_k$ (t ne va pas sortir de sa classe).

■

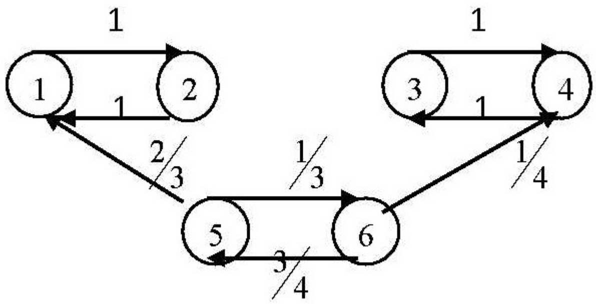
Proposition 1.3.9 Si l'espace des états est fini, alors la matrice $I-Q$ est inversible, où $Q=\left[p_{ij}\right]_{i,j\in T}$.

Démonstration. Soit y tel que $(I-Q)y=0$.
Alors $y=Qy$ et par suite $y=Q^n y$ pour tout $n\geq 0$.
Donc $y=(\lim_{n\to\infty}Q^n)y=0$. ∎

Corollaire 1.3.10 Le système $y_i=\sum_{t\in T}p_{it}y_t+\sum_{s\in E_k}p_{is}, i\in T$ admet une solution unique $y_i=f_{ij}$, où j est un état arbitraire de E_k.

Démonstration. Le système est de la forme :
$(I-Q)y=b$ où $y=(y_i)_{i\in T}$ et $b=(\sum_{s\in E_k}p_{is})_{i\in T}$.
D'après Proposition 9, le système admet une solution unique car $I-Q$ est inversible.
D'après Proposition 8, on a l'unicité. ∎

Exemple



La matrice de transition est :

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}.$$

On a $Q=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}, I-Q=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}, [I-Q]^{-1}=\frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{9} \\ 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix},$

$$\begin{bmatrix} f_{51} \\ f_{61} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_{52} \\ f_{62} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{9} \\ 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{8}{9} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} f_{53} \\ f_{63} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_{55} \\ f_{64} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{9} \\ 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

Le calcul de f_{ij} , $i, j \in T$ se fait par la définition $f_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}$.
Finalement on a

$$[f_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{8}{9} & \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

et

$$[n_{ij}] = \begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & \infty & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Combien de temps faudra-t-il pour que le processus soit absorbé par une classe récurrente ?

$$n_i = 1 + \sum_{j \in T} n_{ij}, i \in T$$

$$n_5 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{16}{9}$$

$$n_6 = 1 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Autre formule
Soit N_i le nombre de transitions jusqu'à l'absorption en partant de l'état i.
Soit A_k l'événement « le processus passe de i à k en une seule transition ».
Alors,

$$\begin{aligned} E(N_i) &= \sum_{k \in S} E(N_i / A_k) P(A_k) = \sum_{k \in S} (E(N_k) + 1) p_{ik} \\ &= \sum_{k \in S} E(N_k) p_{ik} + \sum_{k \in S} p_{ik} = \sum_{k \in T} E(N_k) p_{ik} + 1 \end{aligned}$$

car $E(N_k) = 0$ pour $k \notin T$.
Donc,

$$n_i = 1 + \sum_{k \in T} p_{ik} n_k, i \in T$$

ou

$$(I - Q)n = e, n = (I - Q)^{-1} e, \text{ où } e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

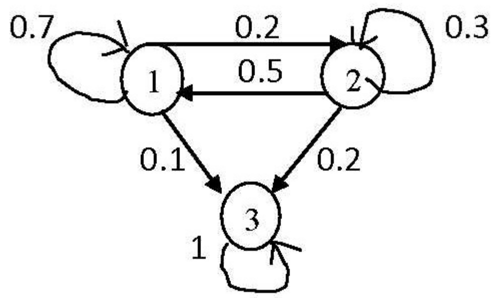
Exemple
Une certaine pièce d'équipement électronique peut se trouver dans 3 états :

1. bonne condition
2. condition marginale
3. défaillance

A la fin de chaque jour de service, l'état de la pièce est enregistré, la matrice de transition ainsi obtenue est :

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculer la durée de vie moyenne d'une pièce se trouvant initialement en bonne condition.
Le graphe des transitions est :



$$\begin{cases} n_1 & = & 1 + 0.7 n_1 + 0.2 n_2 \\ n_2 & = & 1 + 0.5 n_1 + 0.3 n_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_1 & = & \mathbf{\frac{90}{11}} \\ n_2 & = & \mathbf{\frac{80}{11}} \end{cases}$$

Le nombre $d(i) = pgcd\{n \in N / p_{ii}^{(n)} > o\}$ est appelé la *période* de l'état i.
Si $d(i) = 1$, l'état i est appelé *apériodique*.
Notons que si n est différent d'un multiple de d(i), alors $p_{ii}^{(n)} = 0$, c'est-à-dire que l'état i ne peut se reproduire qu'au bout d'un nombre de transitions multiple de d(i).

Proposition 1.3.11 Si i et j communiquent, alors $d(i) = d(j)$.

Démonstration. Comme i et j communiquent, alors : $\exists m, n > 0, p_{ij}^{(m)} > 0$ et $p_{ji}^{(n)} > 0$.
Supposons que $p_{ii}^{(k)} > 0$. Alors $p_{jj}^{(n+k+m)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(m)} > 0$ et de même $p_{jj}^{(n+2k+m)} > 0$ car $p_{ii}^{(2k)} \geq p_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(k)} > 0$. Donc $d(j)/n+k+m$ et $d(j)/n+2k+m$,
d'où $d(j)/(n+2k+m)-(n+k+m) = k$.
On vient de montrer que $d(j)/k$ pour tout k vérifiant $p_{ii}^{(k)} > 0$.
Donc d'après la définition de d(i), $d(j)/d(i)$.
En échangeant i et j, on trouve $d(i)/d(j)$. Donc $d(i) = d(j)$.

■

Théorème 1.3.12 **(fondamental)**

1. Si j est un état transitoire, alors pour tout i :

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$$

.

2. Si j est un état récurrent et apériodique, alors pour tout i :

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}$$

.

3. Si j est un état récurrent de période $d(j) = d$, alors pour tout i :

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+a)} = \sum_{r=0}^{\infty} f_{ij}^{(rd+a)} \frac{d}{\mu_j} \qquad a = 0, 1, \cdots, d-1 \quad (f_{ij}^{(0)} := 0)$$

.

1.4 DISTRIBUTION STATIONNAIRE

On appelle distribution stationnaire tout vecteur $(x_i, i \in S)$ satisfaisant les propriétés suivantes :

1. $x_i \geq 0, \quad \forall i \in S$
2. $\sum_{i\in S} x_i = 1$
3. $x_j = \sum_{i\in S} x_i p_{ij} \quad \forall j \in S$

Lemme 1.4.1 Soit $(x_i, i \in S)$ une distribution stationnaire.
Alors, pour tout $n \in N, j \in S : x_j = \sum_{i\in S} x_i p_{ij}^{(n)}$.

Démonstration. (par récurrence sur n)
n=1, c'est (c).
Supposons que $x_j = \sum_{i\in S} x_i p_{ij}^{(n)}, \forall j \in S$.

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{i\in S} x_i p_{ij}^{(n+1)} &= \textstyle\sum_{i\in S} x_i \sum_{k\in S} p_{ik} p_{kj}^{(n)} && \text{(Chapman-Kolmogorov)} \\ &= \textstyle\sum_{k\in S} p_{kj}^{(n)} \sum_{i\in S} x_i p_{ik} &&= \textstyle\sum_{k\in S} p_{kj}^{(n)} x_k = x_j\end{aligned}$$

■

R Dans la démonstration du lemme 1.4.1, on a utilisé que les hypothèses 1. et 3.

Théorème 1.4.2 Si $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ existe pour tout $i, j \in S$, et indépendante de i, alors :

1. $\sum_{j\in S} \pi_j \leq 1$ et $\sum_{i\in S} \pi_i p_{ij} = \pi_j$
2. ou bien $\pi_j = 0 \; \forall j \in S$, ou bien $\sum_{i\in S} \pi_i = 1$
3. Si $\pi_j = 0 \; \forall j \in S$, alors il n'existe pas de distribution stationnaire.
   Si $\sum_{i\in S} \pi_i = 1$, alors $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots)$ est l'unique distribution stationnaire.

Démonstration. 1) D'après le lemme de Fatou,

$$\sum_{j\in S}\pi_j = \sum_{j\in S}\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \le \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in S} p_{ij}^{(n)} = 1$$

et

$$\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij} = \sum_{i\in S}\lim_{n\to\infty} p_{ki}^{(n)} p_{ij} \le \lim_{n\to\infty}\sum_{i\in S} p_{ki}^{(n)} p_{ij} = \lim_{n\to\infty} p_{kj}^{(n+1)} = \pi_j$$

Alors pour tout $j\in S$, $\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij} \le \pi_j$.
Supposons $\exists l \in S : \sum_{i\in S}\pi_i p_{il} < \pi_j$.
Alors,

$$\sum_{j\in S}\pi_j > \sum_{j\in S}\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij} = \sum_{i\in S}\pi_i\sum_{j\in S} p_{ij} = \sum_{i\in S}\pi_i$$

C'est une contradiction, donc $\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij} = \pi_j, \forall j\in S$.
2) D'après 1) et remarque, on a :

$$\forall n\in N, \forall j\in S : \sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)} = \pi_j.$$

Alors, $\pi_j = \lim_{n\to\infty}\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in S}\pi_i \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ (Théorème de la convergence dominée).
D'où : $\pi_j = (\sum_{i\in S}\pi_i)\pi_j$, c'est-à-dire, $\pi_j(1-\sum_{i\in S}\pi_i) = 0$ pour tout $j\in S$.
3) Soit $(q_1, q_2, \cdots)$ une distribution stationnaire.
Comme $\sum_{i\in S} q_i p_{ij}^{(n)} = q_j$, alors $\sum_{i\in S} q_i \pi_j = q_j$ et $\pi_j = q_j$.

■

Théorème 1.4.3 Si une chaîne de Markov est irréductible et apériodique, et admet une distribution stationnaire $(\pi_j, j\in S)$,
alors $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \forall i,j\in S$.

Démonstration. π est une distribution stationnaire,
alors $\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \forall j\in S, \forall n\in N$.
Si tous les états sont transitoires, alors

$$\forall j\in, \pi_j = \lim_{n\to\infty}\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in S}\pi_i \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

Alors $\sum_{i\in S}\pi_j = 0$, c'est une contradiction. Donc, tous les états sont récurrents.
Soit $j\in S$, j est récurrent et apériodique, alors
$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \dfrac{f_{ij}}{\mu_j} = \dfrac{1}{\mu_j}$ indépendante de i.
Or $\pi_j = \lim_{n\to\infty}\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in S}\pi_i \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in S}\pi_i \dfrac{1}{\mu_j} = \dfrac{1}{\mu_j}$. . ■

R Théorème 1.4.2 reste vrai si on remplace la condition « irréductible apériodique » par la condition « l'espace des états est composé par une classe récurrente apériodique et des états transitoires »

Théorème 1.4.4 Une chaine de Markov admet une distribution stationnaire unique si et seulement si elle admet une seule classe récurrente non nulle.

1.5 CHAÎNES DE MARKOV FINIES

On suppose que l'espace des états S est fini.

Proposition 1.5.1 Il existe au moins un état récurrent.

Démonstration. $\forall j \in S, \forall n \in N : \sum_{i \in S} p_{ij}^{(n)} = 1$.
Si $\forall j \in S$, j est transitoire, alors $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.
Dans ce cas : $1 = \lim_{n \to \infty} \sum_{i \in S} p_{ij}^{(n)} = \sum_{i \in S} \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$. ■

Proposition 1.5.2 Toute classe récurrente est récurrente non nulle.

Démonstration. Soit C une classe récurrente.
$\forall i \in S, \forall n \in N : \sum_{j \in C} p_{ij}^{(n)} = 1$. Si pour tout $j \in C$, j est récurrent nul, alors : $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$, ce qui est absurde.

■

R Si $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \forall i, j \in S$,
alors $\pi = (\pi_j, j \in S)$ est la solution unique du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \pi & = & \pi P \\ \sum_{i \in S} \pi_i & = & 1 \end{array} \right.$$

.

Théorème 1.5.3 Si la valeur propre 1 de P est simple et si toute autre valeur propre de P est de module strictement inférieur à 1, alors : $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0 \quad \forall i, j \in S$.

Théorème 1.5.4 Si P est telle qu'une au moins de ses puissances n'a que des termes strictement positifs, alors : $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0 \quad \forall i, j \in S$.

1.6 APPLICATION : TRANSMISSION AVEC ERREUR

On considère un flux infini de paquets qui arrive à un noeud d'un réseau de télécommunication. Pour simplifier, on suppose que les paquets arrivent au noeud dans les intervalles de temps $(n,n+1)$, c'est-à-dire que l'on suppose qu'ils n'arrivent pas aux instants $1,2,\cdots,n,n+1,\cdots$
A son arrivée dans le routeur, un paquet est stocké dans une mémoire tampon en attendant d'être émis vers le routeur suivant. On suppose que ce tampon est de taille infinie, ce qui revient à supposer qu'un paquet n'est jamais perdu faute de place dans le routeur.
Soit $A(n) \in \{0,1\}$ le nombre de paquets qui arrivent dans l'intervalle de temps $(n,n+1)$ (au plus un paquet arrive par unité de temps).
On suppose qu'il faut exactement 1 unité de temps pour transmettre un paquet vers le routeur suivant. Les transmissions commencent aux instants $n = 0,1,2,\cdots$ (à condition, bien sur que le routeur contienne au moins un paquet en attente). Si plusieurs paquets sont en attente de transmission à l'instant n, alors le paquet transmis dans $[n,n+1)$ est choisi au hasard. Sous ces hypothèses et conventions, un paquet arrivant dans un routeur vide dans l'intervalle $(n,n+1)$ verra son dernier bit émis à l'instant n+2.
Nous supposons que des erreurs de transmission peuvent se produire. Plus précisément, avec probabilité $1-p(0<p<1)$ un paquet transmis dans l'intervalle de temps $[n,n+1)$ est transmis en erreur et devra donc être retransmis.
On suppose que pour chaque n, A(n) est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre a, $0<a<1$. On suppose également que les variables aléatoires $\{A(n),n \geq 0\}$ sont mutuellement indépendantes. Enfin, on suppose que les erreurs de transmission ne dépendent pas du processus d'arrivée des requêtes.
Soit $X(n)$ le nombre de paquets dans le routeur à l'instant n.
Notre premier objectif est de calculer pour tout $i \geq 0$, $p(i) = \lim_{n\to\infty} P(X(n))$, quand cette limite existe.
Avec ce qui précède, il est facile de voir que le système est régi par les équations d'évolution suivantes :

$$X(n+1) = \begin{cases} \text{A(n)} & \text{X(n)=0} \\ \text{X(n)+A(n)-D(n)} & \text{X(n)>0} \end{cases}$$

pour tout $n \in N$, où $D(n) \in \{0,1\}$ est une variable aléatoire qui donne le nombre de transmissions avec succès dans l'intervalle de temps $[n,n+1)$.
Nous supposons que X(0) est indépendant des variables aléatoires $\{A(i),D(i),i \in N\}$.
D'après la définition du modèle on sait que $\{D(n),n \in N\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $1-p$. De plus, $D(m)$ est indépendant de $A(n)$ pour tout $m,n \geq 0$.
En particulier, les variables aléatoires $A(n)$ et $D(n)$ étant indépendantes des variables aléatoires $\{A(i),D(i),0 \leq i \leq n-1\}$, on peut déduire des équations d'évolution ci-dessus que $\{X(n),n \in N\}$ est une de Markov.
Nous allons montrer ce résultat de façon rigoureuse.
Plus précisément, nous allons montrer que $\{X(n),n \in N\}$ est une chaîne de Markov homogène.
Récapitulons tout d'abord les hypothèses d'indépendance que nous avons introduites :

- les variables aléatoires $A(m)$ et $D(n)$ sont indépendantes pour tout $m,n \in N$;
- $X(0)$ est indépendant des variables aléatoires $\{A(i),D(i),i \in N\}$.

Pour $i = 0$ et pour des entiers $i_0, \cdots, i_{n-1} \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ arbitraires, nous avons :

$$P(X(n+1) = j/X(0) = i_0, , X(n-1)i_{n-1}, X(n) = i)$$
$$= P(A(n) - D(n) = j - i/X(0) = i_0, , X(n-1)i_{n-1}, X(n) = i)$$
$$= P(A(n) - D(n) = j - i)$$

En effet, on voit d'après les équations l'évolution que les variables aléatoires $\{X(0), \cdots, X(n)\}$ s'expriment uniquement en fonction de : $\{X(0), A(0), \cdots A(n-1), D(0), \cdots, D(n-1)\}$.
D'après les hypothèses d'indépendance, $P(X(n+1) = j/X(0) = i_0, , X(n-1)i_{n-1}, X(n) = i)$ ne dépend que de j lorsque $i = 0$.
Regardons maintenant le cas $i \geq 1$. Nous avons

$$P(X(n+1) = j/X(0) = i_0, , X(n-1)i_{n-1}, X(n) = i)$$
$$= P(A(n) - D(n) = j - i/X(0) = i_0, , X(n-1)i_{n-1}, X(n) = i)$$
$$= P(A(n) - D(n) = j - i)$$

On remarque que $P(X(n+1) = j/X(0) = i_0, , X(n-1)i_{n-1}, X(n) = i)$ ne dépend que de i et de j lorsque $i \geq 1$.
Nous venons donc de montrer que pour des entiers arbitraires $i, i_0, \cdots, i_{n-1}, j$ et pour n arbitraire, $P(X(n+1) = j/X(0) = i_0, , X(n-1)i_{n-1}, X(n) = i)$ ne dépend que de i et de j (et pas de $i_0, \cdots, i_{n-1}$ et de n). Ceci prouve donc que $\{X(n), n \in N\}$ est une chaîne de Markov homogène.
Calculons la matrice de transition de transition de cette chaîne de Markov homogène.
D'après ce qui précède, nous savons donc que $P(0, j) = P(A(n) = j)$ et $P(i, j) = P(A(n) - D(n) = j - i)$ pour $i \geq 1$. Calculons ces quantités.
Puisque A(n) et D(n) sont à valeurs dans $\{0, 1\}$, nous avons que $P(A(n) - D(n) = j - i)$ dans (1) est égal à 0 quand $|j - i| \geq 2$. D'autre part, par application de la formule de Bayes et en utilisant les hypothèses d'indépendance ainsi que les hypothèses sur les lois (Bernoulli) des variables aléatoires A(n) et D(n), nous voyons que $P(A(n) - D(n) = j - i)$ est égal à $(1-a)p$ quand $j = i - 1$, à $ap + (1-a)(1-p)$ quand $i = j$, et à $(1-p)a$ quand $j = i + 1$.

En résumé la matrice de transition est donnée par :

$$\begin{cases} P(0,0) & = & 1-a & \\ P(0,1) & = & a & \\ P(0,j) & = & 0 & j \geq 2 \\ P(i,i-1) & = & (1-a)p & i \geq 1 \\ P(i,i) & = & ap + (1-a)(1-p) & i \geq 1 \\ P(i,i+1) & = & (1-p)a & i \geq 1 \\ P(i,j) & = & 0 & i \geq 1, j \notin \{i-1, i+1\} \end{cases}$$

La chaîne de Markov $\{X(n), n \geq 0\}$ est irréductible et apériodique.
Calculons la distribution stationnaire $\pi = (\pi(1), \pi(2), \cdots)$. Alors, nous avons :

$$\begin{cases} \pi(0) & = & \pi(0)(1-a) + \pi(1)(1-a)p \\ \pi(1) & = & \pi(0)a + \pi(1)(ap + (1-a)(1-p) + \pi(2)(1-a)p \\ & \vdots & \\ \pi(j) & = & \pi(j-1)a(1-p) + \pi(j)(ap + (1-a)(1-p) + \pi(j+1)(1-a)p \text{ , si } j \geq 2 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \pi(1) & = & \dfrac{a}{p(1-a)}\pi(0) \\ & \vdots & \\ \pi(j) & = & \dfrac{1}{1-p}(\dfrac{a(1-p)}{p(1-a)})^j\pi(0) \text{ , si } j \geq 2 \end{cases}$$

En utilisant $\sum_{j=0}^{\infty} \pi(j) = 1$, on trouve :

$$\pi(0)[1+\frac{a}{p(1-a)}\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{a(1-p)}{p(1-a)})^j] = 1$$

La série géométrique converge si et seulement si $\dfrac{a(1-p)}{p(1-a)} < 1$, c'est-à-dire $a < p$.
Si c'est le cas, alors on trouve que :

$$\begin{cases} \pi(0) & = & \dfrac{p-a}{p} \\ \pi(1) & = & \dfrac{a(p-a)}{p^2(1-a)} \\ & \vdots & \\ \pi(j) & = & \dfrac{p-a}{p(1-p)}(\dfrac{a(1-p)}{p(1-a)})^j \text{ , si } j \geq 2 \end{cases}$$

Calculons le débit du système T, c'est-à-dire le nombre moyen de transmission avec succès par unité de temps :

$$T = p(1-\pi(0)) = a.$$

(un paquet est transmis avec succès (avec probabilité p) seulement quand le système est non vide)

Soit Q le nombre de paquets en attente de transmission. Calculons $P(Q \leq k)$.

$$P(Q \leq k) = \sum_{j=0}^{k}\pi(j) = 1 - \frac{a}{p}(\frac{a(1-p)}{p(1-a)})^k.$$

Calculons le débit maximal d'entrée pour que $P(Q > k) < \beta$.
Il faut alors chercher la plus grande valeur de a telle que $0 \leq a < p$ et

$$\frac{a}{p}(\frac{a(1-p)}{p(1-a)})^k < \beta.$$

1.7 EXERCICES

■ **Exercice 1.1** On considère la chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$ définie par la matrice de transition :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j/X_0 = i)$ existe et calculer sa valeur pour tout i,j.

■ **Exercice 1.2** On considère la chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$ définie par la matrice de transition :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Dessiner le graphe des transitions correspondant.
2. Calculer les valeurs propres de P.
3. Étudier $\lim_{n\to\infty} P(X_n = i/X_0 = i)$ pour tout .
4. Calculer la distribution stationnaire de ce processus.

■ **Exercice 1.3** On considère la chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$ définie par la matrice de transition :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

1. Trouver tous les états récurrents et calculer leurs périodes.
2. Partant de l'état 5, calculer la probabilité pour que le processus atteigne l'état 1.
3. Montrer que $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1/X_0 = 5)$ existe et calculer sa valeur.
4. Supposons que le processus se trouve actuellement dans l'état 5. Sachant que chaque fois que le processus passe par l'état 5 (respectivement l'état 6) un coût C (respectivement 2C) doit être payé. Calculer le coût moyen en fonction de C.

■ **Exercice 1.4** Ali possède 1Dh et a besoin de 5Dh. Pour acquérir le montant manquant, il participe au jeu de hasard suivant. A chaque coup, la somme jouée sera doublée en cas de gain et perdue sinon. Chaque fois sa mise est telle qu'il se rapproche le plus possible de la somme de 5Dh sans toutefois la dépasser. Le nombre de coups n'est pas limité. Quelle est la probabilité de gagner ces 5Dh et quel est le nombre moyen de coups nécessaires ? (On suppose qu'il s'agit d'un jeu équitable).

■ **Exercice 1.5** A- On suppose que le fait qu'il pleuve demain ou non dépend seulement du fait qu'il pleuve ou non aujourd'hui. On suppose que si il pleut aujourd'hui, il pleuvra demain avec une probabilité $1-\alpha$, et s'il ne pleut pas aujourd'hui, il pleuvra demain avec une probabilité β. On représente le temps qu'il fait par 0 quand il pleut et 1 quand il ne pleut pas. Ceci définit un processus X_n état du temps au jour n.

1. Écrire la matrice de transition P.

2. Calculer la probabilité qu'il pleuve dans quatre jours sachant qu'il pleut aujourd'hui.
3. Calculer la probabilité qu'il pleuve quatre jours de suite sachant qu'il pleut aujourd'hui.
4. Montrer qu'il existe une distribution stationnaire π, la calculer en fonction de α et β.
5. Convergence ?

B- On suppose maintenant que le fait qu'il pleuve ou non demain dépend aussi du temps qu'il a fait hier. S'il a plu hier et aujourd'hui, il pleuvra demain avec une probabilité $1-\alpha$ S'il a plu aujourd'hui et pas hier, il pleuvra demain avec une probabilité $1-\lambda$ S'il a plu hier et pas aujourd'hui, il pleuvra demain avec une probabilité β S'il n'a plu ni hier ni aujourd'hui, il pleuvra demain avec une probabilité δ

1. Si l'on considère le processus défini à la question 1), montrer que ce processus n'est plus une chaîne de Markov (sauf conditions particulières sur α, β, λ et δ).
2. On définit alors le processus Y_n ainsi :
   — $Y_n = 0$ s'il pleut au jour n et au jour $n-1$.
   — $Y_n = 1$ s'il pleut au jour n et pas au jour $n-1$.
   — $Y_n = 2$ s'il pleut au jour $n-1$ et pas au jour n.
   — $Y_n = 3$ s'il ne pleut ni au jour n ni au jour $n-1$.

   Écrire la matrice de transition
3. Sachant qu'il a plu lundi et mardi, calculer la probabilité qu'il pleuve jeudi.
4. Sachant qu'il n'a plu ni samedi ni dimanche, calculer la probabilité qu'il pleuve mardi. Déterminer la probabilité stationnaire et la proportion de jours où il pleut, observée sur un temps assez long, en supposant que $\alpha, \beta, \lambda, \delta \in [0,1]$.

■ **Exercice 1.6** Une compagnie d'assurance utilise le système bonus-malus suivant pour La RC automobile : au début de chaque année t, chaque assuré se voit attribuer une classe de bonus $X_t \in \{1,2,3\}$ d'après le nombre de sinistres S_{t-1} qu'il a causé durant l'année $t-1$ et d'après la classe X_{t-1} qu'il occupait cette année-là :

$$X_t = \begin{cases} max(1, X_{t-1}-1) & S_{t-1} = 0 \\ min(3, X_{t-1}+S_{t-1}) & S_{t-1} > 0 \end{cases}$$

Les variables aléatoires $S_t, t \geq 0$ sont supposées indépendantes et suivent la même loi : $P(S_t = 0) = 0.8$, $P(S_t = 1) = 0.1$, $P(S_t \geq 2) = 0.1$.

1. Trouver la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_t, t \geq 0)$.
2. Chaque assuré verse à l'assureur une prime dont le montant s'élève à X_t fois une prime de base K. Sachant que la compagnie compte un million d'assurés et qu'elle évalue ses dépenses à un milliard de dirhams, calculer une estimation de la prime de base K sensée permettre d'équilibrer son budget.

2. Processus de Markov

Une famille de variables aléatoires $X_t, t \geq 0$ dont l'espace des états S est soit fini, soit infini dénombrable est appelé processus de Markov si :

$$\forall n \in N, \forall 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n < t, \forall i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}, i_n, j \in S,$$

$$P(X_t = j / X_{t_0} = i_0, X_{t_1} = i_1, \cdots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, X_{t_n} = i_n) = P(X_t = j / X_{t_n} = i_n)$$

Le futur $X_t = j$ ne dépend pas du passé $X_{t_0} = i_0, X_{t_1} = i_1, \cdots, X_{t_{n-1}}$ si on connaît le présent $X_{t_n} = i_n$.

2.1 PROBABILITÉ DE TRANSITION

Les probabilités de transition sont :

$$p_{ij}(s,t) = p(X_t = j / X_s = i), t \geq s \geq 0.$$

On a :
- $\sum_{j \in S} p_{ij}(s,t) = 1, \forall i \in S, \forall t \geq s \geq 0$
- $p_{ij}(s,t) \in [0,1], \forall i, j \in S, \forall t \geq s \geq 0$
- $p_{ij}(s,s) = \delta_{ij}, \forall i, j \in S, \forall s \geq 0$

Les équations de Chapman-Kolmogorov s'écrivent comme suit :

$$p_{ij}(s,t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s,u) p_{kj}(u,t), \forall u \in [s,t]$$

Démonstration. $p_{ij}(s,t) = P(X_t = j / X_s = i) = \sum_{k \in S} P(X_t = j, X_u = k / X_s = i)$
$= \sum_{k \in S} P(X_t = j / X_u = k) P(X_u = k / X_s = i) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s,u) p_{kj}(u,t)$

■

2.2 TAUX DE TRANSITION

Soient $i \neq j \in S$, le *taux de transition* de i vers j à l'instant t est défini par :

$$\mu_{ij}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(t,t+h)}{h}.$$

Notons que

$$\mu_{ij}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(t,t+h) - p_{ij}(t,t)}{h} = \frac{\partial}{\partial h} p_{ij}(t,t+h)|_{h=0}.$$

On a :

$$\mathbf{p_{ij}(t,t+\triangle t) = \mu_{ij}(t)\triangle t + o(\triangle t), \forall i \neq j \in S, \forall \triangle t} \text{ petit}$$

Le taux de sortie de l'état $i \in S$ à l'instant t est défini par :

$$\mu_i(t) = \sum_{j \neq i} \mu_{ij}(t).$$

Notons que :

$$\mu_i(t) = \sum_{j \neq i} \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(t,t+h)}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{j \neq i} \frac{p_{ij}(t,t+h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - p_{ii}(t,t+h)}{h}$$

$$= -\lim_{h \to 0} \frac{p_{ii}(t,t+h) - p_{ii}(t,t)}{h} = -\frac{\partial}{\partial h} p_{ii}(t,t+h)|_{h=0}.$$

On a alors :

$$\mathbf{p_{ii}(t,t+\triangle t) = 1 - \mu_i(t)\triangle t + o(\triangle t), \forall i \in S, \forall \triangle t} \text{ petit}$$

2.3 ÉQUATIONS DE KOLMOGOROV

D'après les équations de Chapman-Kolmogorov, on a :

$$p_{ij}(s,t+\triangle t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s,t) p_{kj}(t,t+\triangle t) = p_{ij}(s,t) p_{jj}(t,t+\triangle t) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(s,t) p_{kj}(t,t+\triangle t)$$

$$\frac{p_{ij}(s,t+\triangle t) - p_{ij}(s,t)}{\triangle t} = -\frac{1 - p_{jj}(t,t+\triangle t)}{\triangle t} p_{ij}(s,t) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(s,t) \frac{p_{kj}(t,t+\triangle t)}{\triangle t}.$$

$\triangle t \to 0$:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \mathbf{p_{ij}(s,t) = -\mu_j(t) p_{ij}(s,t) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(s,t) \mu_{kj}(t)}.$$

Ce sont les **équations prospectives de Kolmogorov**.
Interprétation : La variation de $p_{ij}(s,t)$ se subdivise en :

— soit le processus est en j et ne doit pas le quitter ($-\mu_j$)

— soit il est en k et doit le quitter instantanément pour gagner j ($\mu_{kj}(t)$)

De même, on peut obtenir les **équations rétrospectives de Kolmogorov**.
Il suffit d'écrire :

$$p_{ij}(s-\triangle s,t)=\sum_{k\in S}p_{ik}(s-\triangle s,s)p_{kj}(s,t)=p_{ii}(s-\triangle s,s)p_{ij}(s,t)+\sum_{k\neq j}p_{ik}(s-\triangle s,s)p_{kj}(s,t)$$

D'où.

$$\frac{p_{ij}(s-\triangle s,t)-p_{ij}(s,t)}{-\triangle s}=-\frac{1-p_{ii}(s-\triangle s,s)}{-\triangle s}p_{ij}(s,t)+\sum_{k\neq j}p_{ik}(s,t)\frac{p_{kj}(s-\triangle s,s)}{-\triangle s}.$$

$\triangle s\to 0$:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}}\mathbf{p_{ij}}(\mathbf{s},\mathbf{t})=\mu_{\mathbf{i}}(\mathbf{s})\mathbf{p_{ij}}(\mathbf{s},\mathbf{t})-\sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{j}}\mu_{\mathbf{ik}}(\mathbf{s})\mathbf{p_{kj}}(\mathbf{s},\mathbf{t}).$$

$$(\lim_{\triangle s\to 0}\frac{p_{ii}(s-\triangle s,s)-1}{-\triangle s}=\lim_{\triangle s\to 0}\frac{p_{ii}(s',s'+\triangle s)-1}{-\triangle s}=\mu_i(s),(s'=s-\triangle s)).$$

2.4 PROCESSUS DE MARKOV HOMOGÈNE

On dit qu'un processus de Markov $X_t,t\geq 0$ est *homogène* si :

$$P(X_t=j/X_s=i)=p_{ij}(t-s),\forall i,j\in S,t\geq s\geq 0.$$

Les probabilités de transition ne dépendent que de la durée $t-s$ et non pas de sa position temporelle.
On a :

$$p_{ij}(s,t)=p_{ij}(t-s)=p_{ij}(0,t-s).$$

Dans ce cas :

$$\mu_{ij}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(t,t+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(h)}{h}=\mu_{ij}\text{ ne dépend pas de t.}$$

De même :

$$\mu_i(t)=\sum_{j\neq i}\mu_{ij}(t)=\sum_{j\neq i}\mu_{ij}=\mu_i\text{ ne dépend pas de t.}$$

On a aussi :

$$\begin{cases} p_{ij}(\triangle t)= & \mu_{ij}\triangle t+o(\triangle t) & \forall i\neq j\in S,\forall\triangle t\text{ petit}\\ p_{ii}(\triangle t)= & 1-\mu_i\triangle t+o(\triangle t) & \forall i\in S,\forall\triangle t\text{ petit}\end{cases}$$

Les équations de Kolmogorov deviennent :

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(0,t) = -\mu_j p_{ij}(0,t) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(0,t)\mu_{kj}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(t) = \underset{\text{flux sortant de j}}{-\mu_j p_{ij}(t)} + \underset{\text{flux entrant à j}}{\textstyle\sum_{k \neq j} p_{ik}(t)\mu_{kj}}$$

Si l'état initial i est fixé, on notera $p_j(t) = p_{ij}(t)$. Alors,

$$p'_j(t) = -\mu_j p_j(t) + \sum_{k \neq j} p_k(t)\mu_{kj}.$$

Régime stationnaire :

$$\lim_{t\to\infty} p_j(t) = p_j \text{ et } \lim_{t\to\infty} p'_j(t) = 0.$$

$$(t \to \infty) : \sum_{k \neq j} p_k \mu_{kj} = \mu_j p_j, \forall j \text{ ou } \sum_{k \neq j} p_k \mu_{kj} = p_j \sum_{k \neq j} \mu_{jk}, \forall j$$

(Ce sont les équations de balance)

On a :

$$\sum_{k \neq j} p_k \mu_{kj} - p_j \mu_j = 0, \forall j \Leftrightarrow \sum_{k \neq j} p_k \mu_{kj} = 0, \forall j \text{ où } \mu_{jj} := -\mu_j$$

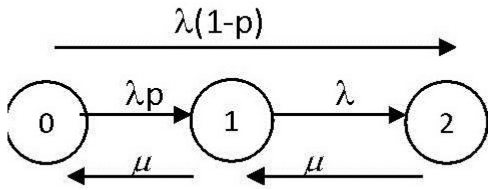
$$\Leftrightarrow pQ = 0 \text{ où } p = (p_i) \text{ et } Q = [\mu_{ij}]$$

La matrice Q est appelée le générateur du processus.

Exemple

On considère une station de compilation dont la capacité d'accueil est de 2 programmes. Les programmes arrivent soit seuls, soit par groupes de 2, les probabilités correspondantes étant p et 1-p. Le taux moyen des arrivées des programmes est λ par unité de temps. Le taux moyen de compilation est μ par unité de temps.

Ce phénomène peut être décrit par un processus de Markov défini par :



Équations de balance :

$$\begin{cases} p_1\mu & = & p_0(\lambda p + \lambda(1-p)) \\ p_2\mu + p_0\lambda p & = & p_1(\lambda+\mu) \\ p_0\lambda(1-p) + p_1\lambda & = & p_2\mu \\ p_0 + p_1 + p_2 & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1\mu & = & p_0\lambda \\ p_2\mu + p_0\lambda p & = & p_1(\lambda+\mu) \\ p_0 + p_1 + p_2 & = & 1 \end{cases}$$

Soit $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, alors :

$$\begin{cases} p_0 & = & [1 + 2\rho + \rho^2 - p\rho]^{-1} \\ p_1 & = & \rho p_0 \\ p_2 & = & \rho(\rho + 1 - p)p_0 \end{cases}$$

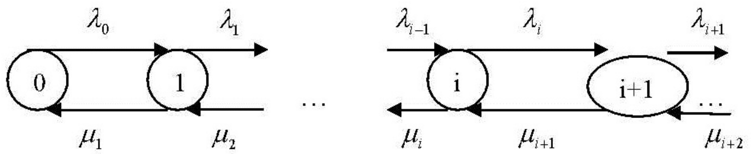
Théorème 2.4.1 Si $(X_t, t \geq 0)$ est irréductible et si le système $\pi Q = 0$ admet une solution strictement positive telle que $\sum_{i \in S} \pi(i) = 1$ alors $\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = \pi_j$ indépendamment de l'état initial .

2.5 PROCESSUS DE NAISSANCE ET DE MORT

Un processus de naissance et de mort est un processus de Markov homogène $(X_t, t \geq 0)$ tel que si $p_{ij}(t) = p(X_{t+s} = j / X_s = i)$ alors,

$$\begin{cases} p_{ii+1}(\triangle t) & = & \lambda_i \triangle t + o(\triangle t) & i \geq 0 \\ p_{ii-1}(\triangle t) & = & \mu_i \triangle t + o(\triangle t) & i \geq 1 \\ p_{ii}(\triangle t) & = & 1 - (\lambda_i + \mu_i)\triangle t + o(\triangle t) & i \geq 0 \end{cases}$$

Les paramètres λ_i et μ_i sont appelés respectivement les *taux de naissance et de mort*.



Les équations de Kolmogorov sont :

$$\begin{cases} p_i'(t) & = & -(\lambda_i + \mu_i)p_i(t) + \lambda_{i-1}p_{i-1}(t) + \mu_{i+1}p_{i+1}(t), i \geq 1 \\ p_0'(t) & = & -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \end{cases}$$

Régime stationnaire (équations de balance) :

$$\begin{cases} \lambda_0 p_0 & = & \mu_1 p_1 \\ (\lambda_i + \mu_i)p_i & = & \lambda_{i-1}p_{i-1} + \mu_{i+1}p_{i+1}, i \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0 p_0 & = & \mu_1 p_1 \\ (\lambda_1 + \mu_1)p_i & = & \lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 \\ & \vdots & \\ (\lambda_{i-1} + \mu_{i-1})p_i & = & \lambda_{i-2}p_{i-2} + \mu_i p_i \\ (\lambda_i + \mu_i)p_i & = & \lambda_{i-1}p_{i-1} + \mu_{i+1}p_{i+1} \end{cases}$$

En sommant, on aura :

$$\lambda_i p_i = \mu_{i+1}p_{i+1}, i \geq 0.$$

Alors

$$p_{i+1} = \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} p_i \text{ et } p_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} p_0, i \geq 1.$$

Puisque $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$,

on a, $p_0 = [1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \cdots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} + \cdots]^{-1}$

Applications :
On considère une file d'attente dans laquelle des clients arrivent pour être servis. Le temps écoulé entre deux arrivées et la durée de service d'un client donné sont gouvernés par des lois probabilistes. La longueur de la file d'attente à un instant donné t est représentée par $X(t)$. Le taux de naissance λ_i représente le taux des arrivées. Le taux de mort μ_i représente la durée de service.
Dans ce cas les probabilités d'état sont :

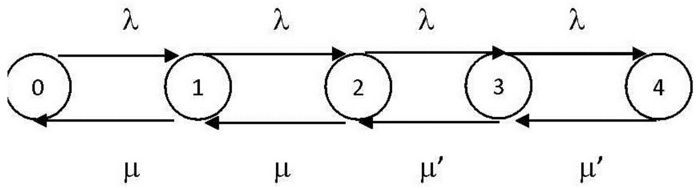
$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}p_0, & i \geq 1 \\ p_0 = [1+\dfrac{\lambda_0}{\mu_1}+\dfrac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}+\cdots+\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}+\cdots]^{-1} & \end{cases}$$

1. Cas d'un poste de service unique
   $\lambda_n = \lambda$
   $\mu_n = \mu$
   $p_0 = [1+\frac{\lambda}{\mu}+(\frac{\lambda}{\mu})^2+\cdots]^{-1} = 1-\frac{\lambda}{\mu}$ si $\frac{\lambda}{\mu} < 1$
   $p_i = (\frac{\lambda}{\mu})^i(1-\frac{\lambda}{\mu})$
   Le nombre moyen de clients dans le système est :

$$\begin{aligned} \overline{L} &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} i p_i = \sum_{i=0}^{\infty} i(\frac{\lambda}{\mu})^i(1-\frac{\lambda}{\mu}) = (\frac{\lambda}{\mu})(1-\frac{\lambda}{\mu})\sum_{i=0}^{\infty} i(\frac{\lambda}{\mu})^{i-1} \\ &= (\frac{\lambda}{\mu})(1-\frac{\lambda}{\mu})\textstyle\sum_{i=0}^{\infty}[(\frac{\lambda}{\mu})^i]' = (\frac{\lambda}{\mu})(1-\frac{\lambda}{\mu})[\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{\lambda}{\mu})^i]' \\ &= (\frac{\lambda}{\mu})(1-\frac{\lambda}{\mu})[\frac{1}{(1-\frac{\lambda}{\mu})}]' = (\frac{\lambda}{\mu})(1-\frac{\lambda}{\mu})\frac{1}{(1-\frac{\lambda}{\mu})^2} \\ &= \frac{(\frac{\lambda}{\mu})}{(1-\frac{\lambda}{\mu})} \\ &= \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \end{aligned}$$

2. Cas de plusieurs postes de service :
   Soit s le nombre de postes de service.
   $\lambda_n = \lambda$
   $\mu_n = n\mu$ si $n \leq s$ et $\mu_n = s\mu$ si $n > s$
3. Cas de capacité limitée :
   Soit N la capacité du système.
   $\lambda_n = \lambda$ si $n < N$ et $\lambda_n = 0$ si $n \geq N$
   $\mu_n = \mu$

Exemple : Le flux de clients arrivant à un guichet est de 40 personnes par heure. En présence d'au plus 2 clients, un seul employé répond aux demandes, le temps de service pour chaque client étant distribué selon une loi exponentielle de moyenne 2 minutes. Cependant, s'il se présente au moins 3 clients, un assistant est adjoint à l'employé, ce qui réduit le temps moyen de service à 1 minute. En admettant que la capacité du système est de 4 clients, quel est le pourcentage de temps pendant lequel les 2 serveurs sont libres, et quel est le pourcentage de clients refusés ? Calculer le nombre moyen de clients dans le système.



1 unité de temps=1h
$\lambda_n = \lambda$ si $n < 4$ et $\lambda_n = 0$ si $n \geq 4$
$\mu_n = \mu$ si $n \leq 2$ et $\mu_n = \mu'$ si $n > 2$
$p_0 = [1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + \frac{\lambda^3}{\mu^2\mu'} + \frac{\lambda^4}{\mu^2\mu'^2}]^{-1} = \frac{81}{493} \simeq 16,4\%$
$p_4 = \frac{\lambda^4}{\mu^2\mu'^2} p_0 = \frac{64}{493} \simeq 13\%$
$\overline{L} = \sum_{i=1}^{4} i p_i = \frac{1340}{493} \simeq 2,72$

2.6 PROCESSUS DE POISSON

Un processus de naissance et de mort $(X_t, t \geq 0)$ est dit un processus de Poisson si :

$$\begin{cases} p_{ii+1}(\triangle t) & = & \lambda \triangle t + o(\triangle t) & i \geq 0 \\ p_{ii}(\triangle t) & = & 1 - \lambda \triangle t + o(\triangle t) & i \geq 0 \end{cases}$$

λ est appelé paramètre ou intensité du processus.
Dans ce cas $(X_t, t \geq 0)$ peut être considéré comme un processus de comptage, c'est-à-dire X_t représente le nombre d'événements se produisant dans l'intervalle de temps [0,t].
Soit $p_i(t) = P(X_t = i / X_0 = 0)$. On cherche à calculer $p_i(t)$.
Les équations de Kolmogorov pour les processus de naissance et de mort donnent :

$$\begin{cases} p_i'(t) & = & -\lambda p_i(t) + \lambda p_{i-1}(t), i \geq 1 \\ p_0'(t) & = & -\lambda p_0(t) \end{cases}$$

Soit $f(z,t)$ la fonction génératrice associée à la distribution de probabilité $\{p_0(t), p_1(t), \cdots\}$: $f(z,t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) z^i$.
En multipliant la nième équation de Kolmogorov par z^i et en sommant sur i on trouve :

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i'(t) z^i = -\lambda \sum_{i=1}^{\infty} p_i(t) z^i + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} p_{i-1}(t) z^i.$$

En utilisant la condition initiale, on trouve :

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i'(t) z^i = -\lambda \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) z^i + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} p_{i-1}(t) z^i.$$

Alors,

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i'(t)z^i = -\lambda \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t)z^i + \lambda z \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t)z^i.$$

D'où,

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -\lambda f(z,t) + \lambda z f(z,t) = \lambda(z-1)f(z,t).$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$f(z,t) = c(z)e^{\lambda(z-1)t}$$

Or, $f(z,0) = p_0(0) = 1 = c(z)$
Donc,

$$f(z,t) = e^{\lambda(z-1)t} = e^{-\lambda t}e^{\lambda zt} = e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda zt)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!}z^i = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t)z^i$$

Finalement :

$$p_i(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!}, \forall i \geq 0, \forall t \geq 0.$$

Soit $T_n, n \geq 1$, la durée séparant le $(n-1)^{ime}$ et le n^{ime} événement.

Théorème 2.6.1 Les variables aléatoires $T_n, n \geq 1$, sont indépendantes et suivent la loi exponentielle de paramètre λ : $P(T_n > t) = e^{-\lambda t}, t > 0, n \geq 1$.

Démonstration. (idée)
$P(T_1 > t) = P(\text{aucun événement dans } [0,t]) = P(X_t = 0) = e^{-\lambda t}$,
$P(T_2 > t, T_1 > u) = \int_u^{\infty} P(T_2 > t / T_1 > u)\lambda e^{-\lambda s} ds =$
$\int_u^{\infty} P(\text{aucun événement dans } [s, s+t]/T_1 > u)\lambda e^{-\lambda s} ds \overbrace{=}^{indp.}$
$\int_u^{\infty} P(\text{aucun événement dans } [s, s+t])\lambda e^{-\lambda s} ds = e^{-\lambda t}e^{-\lambda u} = \cdots$ ∎

Proposition 2.6.2 Le n^{ime} instant d'arrivée I_n suit la loi gamma de paramètres n et λ : sa densité est : $f_n(t) = \lambda e^{\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, t \geq 0$.

Démonstration. $I_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$

$$P(I_n > t) = P(X_t < n) = \sum_{i=0}^{n-1} P(X_t = i) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!}.$$

Dérivons :

$$-f_n'(t) = -\lambda\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!} + \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda)^i(t)^{i-1}}{(i-1)!} = -\lambda e^{\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

∎

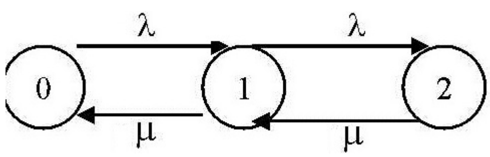
Théorème 2.6.3 Si $T_n, n \geq 1$ sont des variables aléatoires indépendantes et suivent la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors le processus de comptage associé est un processus de poison de paramètre λ.

Application
On considère le système d'attente tel que les arrivées se font selon un processus de poisson de paramètre λ_i où i est le nombre de clients dans le système, et la durée de service suit une loi exponentielle de paramètre μ_i. On suppose que la capacité d'attente est illimitée et il y'a une seule station de service. Soit X_t le nombre de clients dans le système à l'instant t.
Soit $p_{ij}(t) = P(X_t = j/X_0 = i)$.
On a alors :

$$\begin{cases} p_{ii+1}(\triangle t) & = & \lambda_i \triangle t(1-\mu_i \triangle t) + o(\triangle t) & = & \lambda_i \triangle t + o(\triangle t) \\ p_{ii-1}(\triangle t) & = & (1-\lambda_i \triangle t)\mu_i \triangle t + o(\triangle t) & = & \mu_i \triangle t + o(\triangle t) \\ p_{ii}(\triangle t) & = & \lambda_i \triangle t \mu_i \triangle t + (1-\lambda_i \triangle t)(1-\mu_i \triangle t) + o(\triangle t) & = & 1-(\lambda_i+\mu_i)\triangle t + o(\triangle t) \end{cases}$$

Alors : $X_t, t \geq 0$ est un processus de naissance et de mort.
Exemples

1. Dans un cabinet médical, l'arrivée des patients peut être décrite par un processus de poisson de paramètre $\lambda = 4$ patients par heure. La durée de traitement suit une loi exponentielle de moyenne 12 minutes. Si l'on admet de plus que la salle d'attente ne contient qu'une seule place, quelle est la probabilité qu'une personne qui arrive puisse être traitée ?
   Le nombre de patients se trouvant dans le cabinet forme un processus de naissance et de mort dont on veut connaître le régime stationnaire.
   $\lambda = 4$
   $\frac{1}{\mu} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} \Rightarrow \mu = 5$
   $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda = 4, \lambda_i = 0,$ pour $i \geq 2$
   $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 5, \mu_i = 0,$ pour $i \geq 3$



   Équation de Balance

$$\begin{cases} p_1\mu & = & p_0\lambda \\ p_2\mu + p_0\lambda & = & p_1(\lambda+\mu) \\ p_0+p_1+p_2 & = & 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

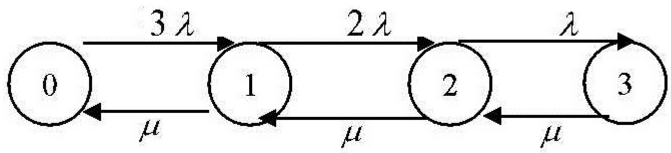
$$\begin{cases} p_0 & = & [1+\frac{\lambda}{\mu}+(\frac{\lambda}{\mu})^2]^{-1} \\ p_1 & = & \frac{\lambda}{\mu}p_0 \\ p_2 & = & (\frac{\lambda}{\mu})^2 p_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_0 &= 0.41 \\ p_1 &= 0.33 \\ p_2 &= 0.26 \end{cases}$$

La probabilité qu'une personne qui arrive puisse être traitée est :

$$\mathbf{p_0 + p_1 = 0.74}$$

2. Un atelier comprend n=3 machines automatiques qui sont entretenues par un opérateur. Pour chaque machine, la durée de bon fonctionnement est une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ. L'opérateur ne peut réparer qu'une machine à la fois, le temps de réparation suit une distribution exponentielle de paramètre μ. Calculer pour $\lambda = \frac{\mu}{3}$, la probabilité que l'opérateur ne soit pas occupé et le nombre moyen de machines qui fonctionnent.
Le nombre de machines en panne $X_t, t \geq 0$ est un processus de naissance et de mort dont le graphe de transition est donné par :



$$\begin{cases} p_0 &= [1+\frac{3\lambda}{\mu}+\frac{6(\lambda)^2}{\mu^2}+\frac{6(\lambda)^3}{\mu^3}]^{-1} = [1+1+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}]^{-1} = \frac{9}{26} \\ p_1 &= \frac{3\lambda}{\mu}p_0 = \frac{9}{26} \\ p_2 &= \frac{6(\lambda)^2}{\mu^2}p_0 = \frac{6}{26} \\ p_3 &= \frac{6(\lambda)^3}{\mu^3}p_0 = \frac{2}{26} \end{cases}$$

Le nombre moyen de machines qui fonctionnent est :

$$\mathbf{3-(\frac{9}{26}+\frac{12}{26}+\frac{6}{26}) = 3-\frac{27}{26} = \frac{51}{26} \simeq 1.96}$$

2.7 EXERCICES

Exercice 2.1 On considère un processus de Markov homogène $(X_t, t \geq 0)$ à deux états i=1, 2. Les taux de transition sont donnés par la matrice :

$$Q = [\mu_{ij}] = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Supposons que l'état initial est $X_0 = 1$. Soit $p_i(t) = P(X_t = i / X_0 = 1)$.

1. Écrire les équations de Kolmogorov correspondantes.
2. Dans le cas du régime stationnaire, écrire les équations de balance, et calculer les probabilités d'état.
3. Calculer $p_1(t)$ et $p_2(t)$ pour tout $t \geq 0$.

Exercice 2.2 Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus de Markov homogène dont l'espace des états est $S = \{0, 1\}$ et de générateur :

$$Q = [\mu_{ij}] = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}, \lambda, \mu \geq 0$$

On définit, pour tout $t \geq 0$, le vecteur :

$$p(t) = (p_0(t), p_1(t)) = (P(X(t) = 0), P(X(t) = 1)).$$

1. Diagonaliser la matrice Q.
2. Calculer e^{Qt} en fonction de λ, μ, t.
3. Donner les expressions de $p_0(t)$ et $p_1(t)$.
4. Spécifier les conditions sous lesquelles le régime stationnaire est atteint et calculer les probabilités d'état.

Exercice 2.3 Considérons un signal lumineux composé de deux ampoules, l'une verte et l'autre rouge. Ces ampoules ont une durée de vie limitée et se cassent régulièrement ce qui entraîne leur remplacement. Malheureusement celui-ci n'est pas instantané et le signal ne fonctionne plus correctement pendant ce délai de remplacement. La défaillance de l'ampoule verte n'est cependant pas considérée comme vraiment dangereuse contrairement à celle de l'ampoule rouge qui correspond à un état de panne du signal. Si on suppose que les ampoules ont une durée de vie distribuée selon une loi exponentielle de paramètre λ et que le temps s'écoulant avant le remplacement d'une ou plusieurs ampoules cassées est distribué selon une loi exponentielle de paramètre μ, déterminer :

1. les états du système ;
2. le graphe de transitions et la matrice d'intensité du processus ;
3. la distribution invariante et la probabilité de panne du signal.

Exercice 2.4 Dans un organisme 3 personnes partagent 3 lignes téléphoniques. On suppose que chaque personne fait des appels suivant un processus de Poisson de taux $\lambda = 2$, et la durée d'une communication suit une loi exponentielle de paramètre $\mu = 1$. On suppose que les 3 processus de Poisson sont mutuellement indépendants, et les durées de communication sont mutuellement indépendantes et sont indépendantes des processus de Poisson. Soit X_t le nombre de lignes occupées à l'instant t. On montre que $(X_t, t \geq 0)$ est un processus de Markov homogène.

1. Déterminer le graphe et les taux de transition du processus $(X_t, t \geq 0)$.

2. Calculer les probabilités d'état lorsque le processus atteint le régime stationnaire.
3. Montrer que $\lim_{n\to\infty} P(X_n = i)$ existe et calculer sa valeur pour chaque état i du processus.
4. Calculer le nombre moyen de lignes occupées dans le cas du régime stationnaire.

■ **Exercice 2.5** L'évolution de la taille d'une population est décrite par un processus de naissance et de mort $(X_t, t \geq 0)$ dans lequel les taux de naissance et de mort sont respectivement $\lambda_i = ai^2 + bi + c$ et $\mu_i = ai^2 + di$ où $a, b, c, d \in R$, et $i = 0, 1, 2, \cdots$.
Supposons que la taille initiale est connue : $X_0 = N$, et soit $p_i(t)$ la probabilité pour que le processus soit dans l'état i à l'instant t : $p_i(t) = P(X_t = i/X_0 = N)$.

1. Écrire les équations de Kolmogorov que doivent vérifier les probabilités $p_i(t), i = 0, 1, \cdots$.
2. Soit M(t) le nombre moyen de la population à l'instant t. Montrer que M(t) vérifie l'équation différentielle : $M'(t) = c + (b-d)M(t)$.
3. En déduire l'expression de M(t).