On note $P(Y_n = j) = p_j, j = 0,1,2,\cdots$
$(X_n, n = 0,1,\cdots)$ est une chaîne de Markov.
Les probabilités de transition sont :

$$\begin{cases} p_{0j} = & P(X_{n+1} = j/X_n = 0) = P(Y_n = j) = p_j, & j = 0,1,\cdots \\ p_{ij} = & P(X_n - 1 + Y_n = j/X_n = i) = P(Y_n = j+1-i/X_n = i) = p_{j+1-i}, & j \geq i-1, i \geq 1 \\ p_{ij} = & 0, & j < i-1, i \geq 1 \end{cases}$$

2. On considère un magasin qui approvisionne un certain bien pour faire face à une demande hebdomadaire suivant la loi $P(demande = j) = a_j, j \geq 0$. La politique de réapprovisionnement est décrite par deux seuils critiques $(s,S), s < S$. Au début de chaque semaine, le niveau de stock est observé. Si le niveau est inférieur à s le magasin fait une commande pour ramener immédiatement le niveau de stock au seuil S. Si le niveau est supérieur ou égal à s, le magasin ne fait pas de commande. Alors si le stock est x, la commande sera 0 si $x \geq s$ et S-x si $x < s$.
Soit ξ_n la demande pour la n-ème semaine. Soit X_n le niveau de stock à la fin de la n-ème semaine. On a alors $X_{n+1} = max(X_n - \xi_{n+1}, 0)$ si $X_n \geq s$ et $X_{n+1} = max(S - \xi_{n+1}, 0)$ si $Xn < s$. Donc $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov dont les probabilités de transition sont :

$$p_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=i}^{\infty} a_k & j = 0, i \geq s \\ a_{i-j} & 0 < j \leq i, i \geq s \\ \sum_{k=S}^{\infty} a_k & j = 0, i < s \\ a_{S-j} & 0 < j \leq S, i < s \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

3. Une unité de production comprend deux machines automatiques qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Chaque machine a la fiabilité p au cours d'une journée, ce qui signifie que sa probabilité de tomber en panne pendant cette période est 1-p. Dans ce cas, elle sera réparée pendant la nuit et se retrouvera en état de marche le lendemain. Une seule machine peut être réparée à la fois.
Soit X_n le nombre de machines en panne au début de la journée n. $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov dont l'espace des états est $S = \{0,1\}$. Les probabilités de transition sont :

$$\begin{cases} p_{00} = & pp + p(1-p) + (1-p)p & = p(2-p) \\ p_{01} = & (1-p)(1-p) & = (1-p)^2 \\ p_{10} = & p & \\ p_{11} = & (1-p) & \end{cases}$$

1.2 PROBABILITÉS D'ÉTAT

La proposition suivante montre qu'une chaîne de Markov est complètement déterminée si sa matrice de transition P et une distribution de probabilités de l'état initial X_0 sont connues.