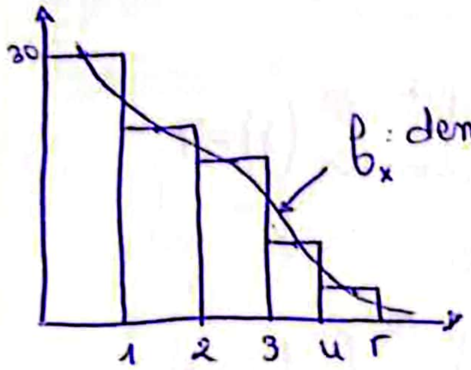
Variable aléatoire continues

1. Exemple :

une expérience consiste à mesurer X : la durée de vie d'une batterie.

La durée de vie de 50 batteries (en centaines d'heures)

2.132 ; 0.257 ; 3.125 ; 6.913 ; 1.231 ; 6.543 ....



L'histogramme peut être approximé par f

2. fonction densité et fonction de répartition :

une f^{ct} $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite densité (ou loi) de probabilité d'une va continue X si

- $f_X(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)dx = 1.$

$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_x(x)\,dx$

$\mathbb{P}(X = a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

exemple :

$\mathbb{P}(1{,}5 \leq X \leq 2{,}5) = \int_{1,5}^{2,5} f_x(x)dx$

$\mathbb{P}(X = 1{,}2543) = 0.$

Exercice :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Calculer la probabilité que la durée de vie est entre 100 et 200.

$\mathbb{P}(100 \leq X \leq 200) = \int_{100}^{200} f_x(x)dx$

$= \int_{100}^{200} \frac{1}{2}e^{-x/2}\,dx.$

$= \left[-e^{-x/2}\right]_{100}^{200}$

$= -e^{-\frac{200}{2}} + e^{-\frac{100}{2}} = -e^{-100} + e^{-50}$

2) Calculer la probabilité que la durée dépasse 200 heures

$P(X \geq 200) = \int_{200}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\,dx$

$= \left[-e^{-\frac{x}{2}}\right]_{200}^{+\infty}$

$= 0 - (e^{-\frac{100}{2}})$

$= e^{-100}.$

$\int u'(x)e^{u(x)}dx = e^{u(x)} + c^{st}.$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c^{st}$

Definition:

La f^{ct} de repartition d'une va continue.

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

Propriétés:

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X'(x) = f_X(x)$.
- $\forall x \leq y$; $F_X(x) \leq F_X(y)$
- $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx = F_X(b) - F_X(a)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

exercice:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) $f_X(x)$ est-elle densité de probabilité

+) $f_X(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ vérifié

+) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) = 1$?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{f_X(x)}_{=0}\,dx + \int_0^1 \underbrace{f_X(x)}_{3x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \underbrace{f_X(x)}_{=0}\,dx$$

$$= 0 + [x^3]_0^1 + 0$$

$$= 1$$

$\Rightarrow f_X$ est une f^{ct} densité.

2) La fonction de répartition $F_X(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

soit $x < 0$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = 0.$$

si $0 \leq x \leq 1$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f_X(t)\,dt}_{0} + \int_0^x f_X(t)\,dt$$

$$= \int_0^x 3t^2\,dt$$

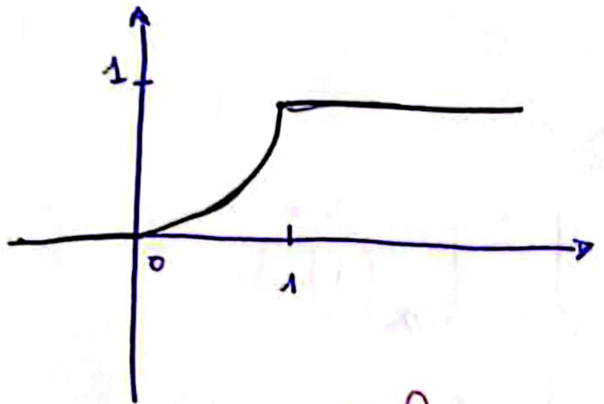
$$= [t^3]_0^x = x^3$$

si $x > 1$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \underbrace{f_X(t)}_{=0}\,dt}_{=1} + \int_0^1 \underbrace{f_X(t)\,dt}_{=1} + \int_1^x \underbrace{f_X(t)}_{=0}\,dt$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ x^3 & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$



3. Espérance et Variance.

L'esperance et la variance d'une va continue X sont données par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

· La formule de Transfort

Soit g une fonction

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx$$

<u>en particulier</u> :

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx.$$

exercice :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(u)\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x \underbrace{f_X}_{=0}(u)\, du + \int_0^1 x f_X(u)\, du$$

$$+ \int_1^{+\infty} x f_X(u)\, du$$

$$\int_0^1 3x^3\, dx = \left[\frac{3x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

$$= \frac{3}{5} - \frac{9}{16}$$

Proprietés :

$$E(aX+b) = a\,\mathbb{E}(X) + b$$

$$Var(aX+b) = a^2 Var(X).$$

4. Les lois continues usuelles

a. Loi uniforme.

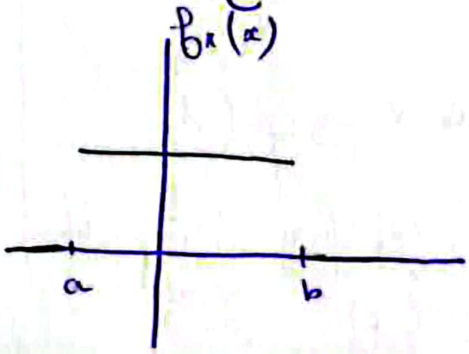
On dit que X suit la loi uniforme sur $[a,b]$

$$f_X(x) \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 0 & sinon \end{cases}$$

on écrit $X \sim \mathcal{U}([a,b])$

La fonction de repartition de $X \sim U([a,b])$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 1 & si\ x > b \end{cases}$$



$E(X) = \frac{a+b}{2}$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$$
$$= \int_a^b x \frac{1}{b-a}\,dx$$
$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$$
$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)$$
$$= \frac{a+b}{2}.$$

$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

b- Loi exponentielle : duréedevie

On modélise avec la loi exponentielle les durées de vie

On dit que X suit une loi e de paramètre λ si

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On écrit. $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

Calculons la fonction de répartition de $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

si $x < 0$.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$
$$= 0$$

si $x \geq 0$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{0} f_X(t)\,dt + \int_0^x f_X(t)\,dt$$
$$= 0 + \int_0^x f_X(t)\,dt$$
$$= \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt$$
$$= \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x$$
$$= -e^{-\lambda x} + 1$$
$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

Rappel

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

$\forall x \in \mathbb{R}$

finalement

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$

excercice :

Soit T la durée d'appels téléphonique qui suit la loi exp de moyenne 5.

T suit $\mathcal{E}\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}$.

•) Probabilité que la durée est entre 8 et 12

$P(8 \leq T \leq 12)$

$= F_T(12) - F_T(8)$

$= 1 - e^{-\frac{12}{5}} - \left(1 - e^{-\frac{8}{5}}\right)$

$= e^{-\frac{8}{5}} - e^{-\frac{12}{5}}$.

X va C :

• $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx = F_X(b) - F_X(a)$

• $P(X \leq a) = F_X(a)$

• $P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(a)$

•) Probabilité que la durée est inférieur à 8.

$P(T \leq 8) = 1 - e^{-\frac{8}{5}}$

•) Probabilité que la durée est supérieur à 12

$P(T \geq 12) = 1 - P(T \leq 12)$

$= 1 - F_T(12)$

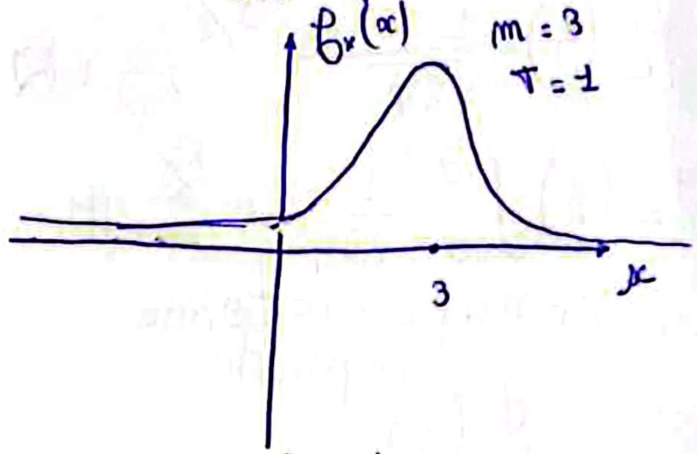
$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{12}{5}}\right)$

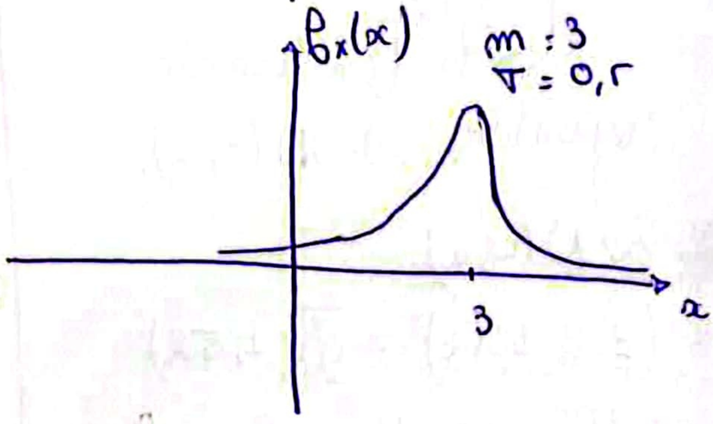
$= e^{-\frac{12}{5}}$

c. Loi normale !!!

On dit que X suit la loi normal de paramètre m et σ si

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$; $x \in \mathbb{R}$



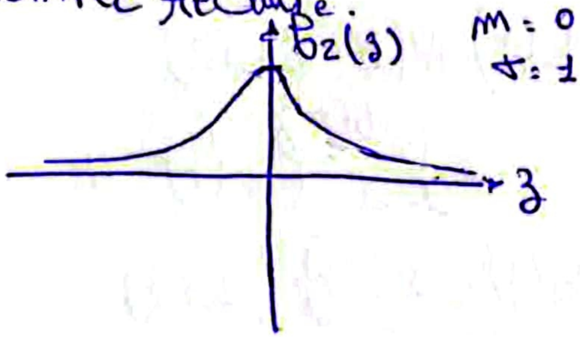


on écrit $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$

$E(X) = m$; $Var(X) = \sigma^2$

Dans le cas particulier où $m = 0$, $\sigma = 1$ $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

on dit que Z est loi normal centrée réduite.



Soit $X \sim N(m, \sigma)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

pas de forme F_X

Soit $Z \sim N(0,1)$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad ; z \in \mathbb{R}.$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

on n'a pas une forme explicite.

$= \Phi(z)$

↳ la fonction de répartition de $N(0,1)$

$Z \sim N(0,1)$

$P(Z \leq 1.52) = \Phi(1,52)$

Tableau de loi Normale centrée réduite

$P(Z \leq -1,52) = \Phi(-1,52) = ?$

$P(Z \leq 1,52) = \Phi(1,52)$

$$= \int_{-\infty}^{1,52} f_Z(t)\, dt$$

$\Phi(-1,52) = P(Z \leq -1,52)$

$$= \int_{-\infty}^{-1,52} f_Z(t)\, dt$$

$\Phi(-1,52) = 1 - \Phi(1,52)$

Proposition

$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

Soit $X \sim N(m = 3, \sigma = 2)$

$P(X \leq 5) \neq \Phi(5)$

Proposition : $E(X)$ $\sqrt{var(X)}$

Si $X \sim N(m, \sigma)$

alors

$$\frac{X - m}{\sigma} \sim N(0,1).$$

exemple :

Soit $X \sim N(m = 3, \sigma = 2)$

$$P(X \leq 5) = P\left(\frac{X-3}{2} \leq \frac{5-3}{2}\right)$$

$$= P\left(\frac{X-3}{2} \leq 1\right)$$

$$= P(\underbrace{Z}_{\sim N(0,1)} \leq 1)$$

$$= \Phi(1,00) = 0,8413.$$

exercice :

Soit $Z \sim N(0,1)$

$$P(Z \leq -1,52) = 1 - \Phi(Z \leq 1,52)$$

$$= 1 - 0,9357.$$

$P(-1,52 \leq Z \leq 1,52)$

$$= \Phi(1,52) - \Phi(-1,52)$$

$$= 2\Phi(1,52) - 1 = 2 \times 0,9357 - 1 = \ldots$$

Rq :

$Z \sim N(0,1)$; $P(-a \leq Z \leq a)$

$= 2\Phi(a) - 1$.

z_0 ? tq $\Phi(z_0) = 0{,}99\,01$

$z_0 = \Phi^{-1}(0{,}99) = 2{,}33$

Lecture inverse de Tab