# Séries numériques

## I - Notions et résultats de base

Définition : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

On appelle série de terme général $u_n$ et on noté $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

Notations:

* $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_N$ est appelée la somme partielle d'ordre $N$ de la série
* Si la série $\sum u_n$ converge, alors la limite de $(S_N)_N$ est appelée la somme de la série, et c'est noté $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
* Si la série $\sum_n u_n$ converge, alors

$$\forall n\in\mathbb{N},\ R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - S_n,$$

est appelé le reste d'ordre $n$ de la série $\sum u_n$

et on a $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exemples:

* série géométrique : $u_n = z^n$, $z\in\mathbb{C}$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} n+1, & \text{si } z=1 \\ \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}, & \text{si } z\neq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \sum z^K$ converge ssi $|z|<1$ et on a

$$\sum_{K=0}^{\infty} z^K = \frac{1}{1-z}$$

* Serie arithmetique : $u_n = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow S_n = \sum_{K=0}^{n} u_K = \sum_{K=0}^{n} K = \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

## II - Series absolument Convergente

### 1) Critère de Cauchy

Théorème : $\sum u_K$ converge ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q $\forall m \geq n \geq N_\varepsilon$

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{K=n+1}^{m} u_K \right| \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Critere de divergence : $\sum u_K$ diverge ssi $\exists \varepsilon > 0$ t.q $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists m \geq n \geq N$ tels que $|S_m - S_n| > \varepsilon$.

Exemple : serie harmonique :

La serie harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

En effet, $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Proposition : (Condition nécessaire de la convergence)

Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

En effet, $u_n = S_n - S_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\Rightarrow$ Condition de divergence : Par contraposé de la proposition si $u_n \not\longrightarrow 0$, alors $\sum u_n$ est divergente.

Exemple :

$\sum \sin(n)$ est divergente car $\sin(n) \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$

⟹ La condition necessaire est non suffisante :

$u_n \longrightarrow 0 \not\Longrightarrow \sum u_n$ converge.

⟹ C.E : la serie harmonique.

## 2) Convergence absolue (convergence inconditionnelle).

Définition : soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ on dit que la serie converge absolument si la serie $\sum |u_n|$ est convergente

Proposition : (Condition suffisante pour la convergence)
Toute série absolument convergente est convergente.

En effet, $\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |u_k|$

⟹ La condition suffisante n'est pas nécessaire

$$\sum u_n \text{ converge} \not\Longrightarrow \sum |u_n| \text{ converge.}$$

Lorsque $\sum u_n$ converge mais ne converge pas absolument, on dit qu'elle converge conditionnellement.

Contre-exemple :
La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, alors que $\sum \frac{1}{n}$ diverge

Exercice :
on considere la serie $S_n = \sum \frac{(-1)^n}{n}$, et $C_n = S_{2n+1}$ et $D_n = S_{2n}$

a/ Mq $C_n$ est croissante et $D_n$ est décroissante

b/ Mq $S_{2n} \geqslant S_{2n+1}$ et $S_{2n} - S_{2n+1} \longrightarrow 0$

c) Déduire que $C_n$ et $D_n$ sont adjacentes.

d) Déduire alors que $S_n$ est convergente.

## III. Etude de la convergence absolue des série

### 1) Convergence des série à termes positifs

Théorème : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. Alors, $\sum u_n$ converge ssi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et on a $S_n \leq \sum_0^{+\infty} u_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

En effet, toute croissante majorée est convergente et converge vers sa borne supérieure et toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

### 2) Critères de Comparaison :

Proposition : soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+$.

Supposons $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q $0 \leq u_n \leq v_n$, $\forall n \geq n_0$. Alors :

i/ $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge et $\sum_0^{+\infty} u_n \leq \sum_0^{+\infty} v_n$

ii/ $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge.

Proposition : soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$.

Supposons que $\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ t.q $0 \leq \alpha u_n \leq v_n \leq \beta u_n$ à partir de $n_0 \in \mathbb{N}$. Alors $(u_n)$ et $(v_n)$ sont de même nature.

Corollaire : soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$.

i/ Si $u_n = O(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$ alors :

$\sum v_n$ conv $\Rightarrow \sum u_n$ conv ii/ Si $u_n \sim v_n \Rightarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

## 3) Series de reference :

*a/ Règle d'Allembert : soit $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$.

Supposons : $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \quad u_n \neq 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in [0;+\infty]$.

Alors,

i/ $\ell < 1 \Rightarrow \sum u_n$ converge.

En effet, posons $r = \frac{\ell+1}{2} \Longrightarrow \lambda < K < 1$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < r$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \quad u_n < u_{n_0} \cdot r^{n-n_0}$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \quad u_n < \left(\frac{u_{n_0}}{r^{n_0}}\right) \cdot r^n$

$\Rightarrow u_n = O(r^n)$.

Or a $0 < r < 1 \Rightarrow \sum r^n$ Conv $\Rightarrow \sum u_n$ Conv

ii/ $\ell > 1 \Rightarrow \sum u_n$ diverge.

En effet, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 1 \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_1$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow \exists n_2 = \max(n_0, n_1) \mid \forall n \geq n_2$

$u_{n+1} > u_n \geq u_{n_2} > 0 \Rightarrow u_n \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow \sum u_n$ div

ii/ $\ell = 1 \Longrightarrow$ on ne peut rien conclure

- Pour la serie harmonique, on a $\frac{n}{n+1} = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$
- Pour la serie $\sum \frac{1}{n^2}$, on a $\frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ Conv.

Exemples

1- $u_n = \frac{z^n}{n!}$, avec $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{z^n} = \frac{z}{n+1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument, donc elle est convergente.

Définition : $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$z \longmapsto \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

2- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $0 < q < 1$. Posons $u_n = n^\alpha q^n$.

On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} q = \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha q \xrightarrow[n\to+\infty]{} q < 1$

En effet $\boxed{(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)}$

$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha q = q + \frac{\alpha q}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \longrightarrow q$

Conséquence : $n^\alpha q^n \longrightarrow 0$

$\Rightarrow$ • $q^n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $\forall |q| < 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Pour $q' = \frac{1}{q}$ • $n^\alpha = o\left(|q'|^n\right)$, $\forall |q'| > 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

En particulier, $n^\alpha = o\left(e^n\right)$.

3- $u_n = n!\, z^{(n^2)}$, $z \in \mathbb{C}$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!\; z^{(n^2+2n+1)}}{n!\; z^{n^2}} = (n+1)\, z^{2n+1}$

$\Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = (n+1)\left|z^{2n+1}\right| = |z| \cdot (n+1)\left(|z|^2\right)^n$

• 1er cas : $|z| < 1 \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \longrightarrow 0$

• $2^{eme}$ cas : $|z| \geq 1$ $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = +\infty > 1 \Rightarrow \sum u_n$ div

* b/ Règle de telescopage : soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Supposons que $u_n = V_{n+1} - V_n$.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = V_{n+1} - V_0.$$

$\Rightarrow$ $S_n$ Converge ssi $V_n$ Converge

Exemples :

1- $u_n = \frac{1}{n(n-1)}$.

Decomposition de $u_n \Rightarrow u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = V_{n-1} - V_n$

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n} (V_{k-1} - V_k)$$

$$= V_1 - V_n$$

$$= 1 - \frac{1}{n} \longrightarrow 1$$

$\Rightarrow \sum u_n$ est convergente

Consequence :

On a $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1)n}$, $\forall n \geq 2$.

$\Rightarrow \sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.

2- $u_n = \text{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Méthode 1 : $\boxed{\text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$

$\Rightarrow \text{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow \text{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

Or $\sum \frac{1}{n}$ div $\Rightarrow \sum \text{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ div.

Methode 2

$$U_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) - \log n$$

Posons $V_n = \log n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} (V_{k+1} - V_k)$

$$= V_{n+1} - V_1$$

$$= \log(n+1) \longrightarrow +\infty.$$

* c/ Comparaison à une serie de Reimann :

Theoreme : La serie $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$

En effet, pour $\alpha \neq 1$, posons $\beta = 1-\alpha$, alors

$$(1+n)^\beta - n^\beta \sim \frac{\beta}{n^\alpha}$$

Car

$$(1+n)^\beta - n^\beta = n^\beta\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta - 1\right]$$

$$= n^\beta\left[\cancel{1} + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \cancel{1}\right]$$

$$= \frac{\beta}{n^{1-\beta}} + o\left(\frac{1}{n^{1-\beta}}\right)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left((1+k)^\beta - k^\beta\right) = (1+n)^\beta - 1$$

$$= \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - 1$$

$\Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha}$ conv $\forall \alpha > 1$.

Consequences :

soit $(U_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Regle 1 : s'il existe $\alpha > 0$ tq $U_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ou $U_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$

alors $\sum U_n$ conv absolument

Regle 2 : Si $U_n \sim \frac{c}{n^\alpha}$, alors $\sum U_n$ et $\sum \frac{c}{n^\alpha}$ sont de même nature

* d/ Comparaison logarithmique

Théorème : soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$

Supposons, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \; u_n \neq 0$ et $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$.

Alors $u_n = O(\alpha_n)$.

Donc si $\sum \alpha_n$ converge, alors $\sum u_n$ conv absolument.

*e/ Produit de deux séries absolument convergentes.

Théorème : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux series absolument convergentes. Posons : $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. Alors $\sum w_n$ est absolument convergente et on a le produit de Cauchy suivant : $\sum_0^{\infty} w_n = \sum_0^{\infty} u_n \sum_0^{\infty} v_n$

*e/ Critère spécial des series alternées (CSSA)

Définition : soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$

On appelle serie alternée de terme $v_n$, toute serie de l'un des types suivants :

$$\sum (-1)^n v_n \text{ ou bien } \sum (-1)^{n+1} v_n$$

Théorème : soit $(v_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$.

On suppose que $(v_n)$ est decroissante et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Alors la serie $\sum u_n$, (avec $u_n = (-1)^n \varepsilon v_n$, où $\varepsilon \in \{-1,1\}$) est convergente. et on a $|R_n| \leq v_{n+1}$.