

## Question 14 : HALTING-CELLULAR-AUTOMATON est-il décidable ?

### Problème :

On considère un automate cellulaire, c'est-à-dire un système dans lequel chaque cellule change d'état en fonction de ses voisines selon une règle précise. On nous donne une configuration initiale (un mot) et un état cible  $s$ . La question est : est-ce qu'à un moment donné, au cours de son évolution, une cellule va prendre cet état  $s$ .

### Pourquoi on pourrait croire que c'est décidable ?

Comme les automates cellulaires sont des systèmes bien définis avec des règles simples et locales, on pourrait penser qu'il est possible d'écrire un programme qui simule leur comportement pas à pas et détecte si l'état  $s$  apparaît. Mais il faut considérer que certains automates cellulaires peuvent évoluer de manière infinie et complexe, et simuler leur comportement à l'infini n'est pas faisable.

### Lien avec le problème de l'arrêt

Il est connu que certains automates cellulaires peuvent simuler des machines de Turing. Cela veut dire qu'on peut construire un automate cellulaire  $A$  qui reproduit exactement le comportement d'une machine de Turing  $M$  sur une entrée donnée.

Si on fait en sorte que l'automate cellulaire passe dans un état  $s$  spécial uniquement quand la machine de Turing qu'il simule s'arrête, alors décider si l'automate atteint  $s$  revient à décider si  $M$  s'arrête. Or, le problème de l'arrêt est indécidable. Donc HALTING-CELLULAR-AUTOMATON est aussi indécidable.

### Conclusion

Un automate cellulaire peut sembler simple, mais il peut simuler des calculs très puissants, comme ceux d'une machine de Turing.

Dans ce contexte, savoir s'il atteindra un certain état revient parfois à savoir si une machine de Turing s'arrête une question connue pour être indécidable.

C'est pourquoi le problème HALTING-CELLULAR-AUTOMATON ne peut pas être résolu de façon générale.