

# *Fortgeschrittenenpraktikum*

## Optische Fouriertransformation

Vivien Slezione<sup>\*</sup>

Regina Schauer<sup>†</sup>

René Vollmer<sup>‡</sup>

Betreut durch

Kai Morgener<sup>§</sup>

August 2015

### [Zusammenfassung]

Die Fourier-Analytik und insbesondere die Fouriertransformation sind auf vielen modernen Anwendungen kaum noch weg zu denken. Sie ist essentieller Bestandteil vieler Bildverarbeitungsalgorithmen [1] und -kompressionsverfahren wie JPEG [2], sie wird genutzt um Bildinformationen Computeralgorithmen zugänglich zu machen [3] und in vielen anderen Bereichen der Signalverarbeitung. Weitere Anwendungen liefert das Schlierenverfahren, z.B. in der Luftfahrt oder bei der Motorenentwicklung, da mit diesem Gas- und Flüssigkeitsströmungen sichtbar gemacht werden können.

In diesem Versuch wird mit einfachen optischen Mitteln eine Fouriertransformation an Bildern durchgeführt, die Fouriertransformierte manipuliert und rücktransformiert werden. Dabei wird dem Leser ein intuitives Verständnis für die Funktionsweise und Bedeutung von Fouriertransformationen vermittelt.

---

<sup>\*</sup>vivi.s@arcor.de

<sup>†</sup>regina.schauer@web.de

<sup>‡</sup>rene.vollmer@studium.uni-hamburg.de

<sup>§</sup>kmorgene@physnet.uni-hamburg.de

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Mathematische Grundlagen . . . . .	1
1.2	Optik . . . . .	2
1.3	Filter . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Aufbau und Justage des Experiments</b>	<b>5</b>
2.1	Einkopplung . . . . .	5
2.2	Lichtsensord . . . . .	7
2.3	4f-Aufbau . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Experimentelle Durchführung und Auswertung</b>	<b>12</b>
3.1	Untersuchungen an Gittern . . . . .	12
3.2	Erzeugung von Beugungsbildern von Punkten . . . . .	14
3.3	Erzeugung von Beugungsbildern von Buchstaben und Zahlen . . . . .	16
3.4	Manipulation der Fourierebene mit Filterdias . . . . .	17
3.5	Beugungsbild und Manipulation des Fourierhauses . . . . .	18
3.6	Optische Filterung durch Hochpass-, Tiefpass- und Breitbandfilter . . . . .	19
3.7	Schlierenverfahren . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Fazit</b>	<b>23</b>
	<b>Literatur</b>	<b>A</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>B</b>

# 1 Theoretische Grundlagen

## 1.1 Mathematische Grundlagen

Die kontinuierliche Fourier-Transformation (kurz FT) ist definiert als

$$G(s) = F\{g(x)\} := \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot e^{-2\pi i x s} dx \quad (1)$$

wobei  $g(x) \in L^1(\mathbb{R})$  eine absolut integrable, außer an endlich vielen Stellen stetige Funktion in einer Variable ist. Die transformierte dieser Funktion wird häufig mit dem gleichen Buchstaben wie die nicht transformierte, jedoch groß geschrieben bezeichnet.

Die Rücktransformation (auch *inverse Fourier-Transformation*, kurz iFT) ist definiert als

$$g(x) = F^{-1}\{G(s)\} := \int_{-\infty}^{+\infty} G(s) \cdot e^{+2\pi i x s} ds \quad (2)$$

Anschaulich entspricht eine FT einer Zerlegung einer Funktion in periodische Funktionen einer bestimmten Wellenlänge und Amplitude. Die transformierte Funktion bildet anschließend die Amplituden gegen die Frequenz ab. So würde eine einfache periodische Sinus-Funktion unter FT zu einer delta-Verteilung.

Diese beiden Abbildungen besitzt einige besondere Eigenschaften, die sie für die Informationsverarbeitung interessant machen. Die wichtigsten sollen hier kurz skizziert werden:

### 1. Zweifache Anwendung

$$F\{F\{g(x)\}\} = F\{G(s)\} = g(-x) \quad (3)$$

*Beweisskizze:* Vorzeichenumkehr  $x \rightarrow -x$  in 2 entspricht der FT von  $G(s)$  und  $F\{G(s)\} = F\{F\{F^{-1}\{G(s)\}\}\} = F\{F\{g(x)\}\}$ .

### 2. Linearität

$$F\{a \cdot g(x) + b \cdot h(x)\} = a \cdot F\{g(x)\} + b \cdot F\{h(x)\} \quad (4)$$

*Beweisskizze:* Dank der Eigenschaften von  $g(x)$  kann das Integral der Fourier-Transformation in Teilintegrale geteilt und lineare Faktoren heraus gezogen werden.

### 3. Ähnlichkeit

$$F\{g(a \cdot x)\} = 1/a \cdot F\{g(x/a)\} = 1/a \cdot G(s/a) \quad (5)$$

*Beweisskizze:* Substitution von  $y = a \cdot x$  als Integrationsvariable.

### 4. Verschiebung

$$F\{g(x - a)\} = e^{-2\pi i s a} \cdot F\{g(x)\} = e^{-2\pi i s a} \cdot G(s) \quad (6)$$

*Beweisskizze:* Variablensubstitution  $x - a \rightarrow x$ .

## 5. Faltung

$$F \{g(x) \circ h(x)\} = F \{g(x)\} \cdot F \{h(x)\} = G(x) \cdot H(x) \quad (7)$$

Mit der Definition der Faltung als

$$g(x) \circ h(x) := \int g(x) \cdot h(x - a) da \quad (8)$$

*Beweisskizze:* Nutze  $F \left\{ \int g(a) \circ h(x - a) da \right\} = \int g(a) \cdot F \{h(x)\} da$  und anschließen-  
des Vertauschen der Integrationen über  $a$  und  $x$  aus Faltung und FT.

Einige dieser Eigenschaften können direkt im Versuch gesehen werden, siehe Abschnitt 3.

## 1.2 Optik

Die geometrische Optik ist der Teilbereich der Optik, wo Lichtwellen durch idealisierte Strahlen angenähert werden um den Weg des Lichtes zu (re)konstruieren. Sämtliche Schlussfolgerungen basieren auf diesen vier Axiomen:

1. Axiom: In homogenem Material verlaufen Lichtstrahlen gerade.
2. Axiom: An der Grenze zwischen zwei homogenen und isotropen Materialien wird das Licht nach dem Reflexionsgesetz reflektiert und nach dem Brechungsgesetz gebrochen.
3. Axiom: Zeit- bzw. Strahlenumkehr, die Richtung eines Lichtstrahles ist belanglos.
4. Axiom: Die Lichtstrahlen beeinflussen sich nicht gegenseitig.

Durch die spezielle Geometrische Form von Sammellinsen ergibt sich ein Brechungswinkel in Abhängigkeit vom Abstand zum Mittelpunkt, der effektiv Strahlen bündeln oder kollimieren kann. Die Brennweite  $f$  gibt den Abstand an, in dem sich eine punktförmige Lichtquelle befinden muss, um von der Linse kollimiert zu werden. Gleichzeitig ist sie auch die Entfernung in der ein kollimierter Strahl hinter einer Linse gebündelt wird (siehe auch drittes Axiom).

Neben den Effekten der geometrischen Optik gibt es noch Effekte, die sich nicht durch dieses einfache Modell beschreiben lassen. Hierzu zählt die Streuung. Diese kann nach dem Huygensssches Prinzip[4] beschrieben und mittels der Beschreibung durch die Fraunhoferbeugung[5][6, Kap. 2] vereinfacht werden. Die wesentliche Erkenntnis hieraus ist, dass ein Lichtstrahl der durch ein Objekt mit einem oder mehreren Spalten, deren Öffnungsbreite in der Größenordnung der Wellenlänge liegt, läuft gestreut, das heißt aufgeweitet, wird. Dieser Strahl wird anschließend auf Grund von Laufzeitunterschieden mit sich selber interferieren. Dabei ist das auf einem, in einem zur Spaltweite großem Abstand befindlichen, Schirm entstehende Muster von der Spaltweite und -anzahl abhängig. Dabei gilt: Je feiner das Spaltmuster, desto größer ist der Abstand zwischen den Interferenzmaxima.

Effektiv wird das Licht also in Teilstrahlen aufgeteilt, deren Winkel abhängig von der Amplitudenstruktur des Objektes ist. Je weiter man sich nun von dem Objekt entfernt, desto größer wird das Verhältnis zwischen Winkel- und räumlichen Informationen. In der Unendlichkeit gibt der Ort eines Maximums nur noch Informationen über die Größenordnung der Struktur, nicht mehr über dessen Position. Dies entspricht dem anschaulichen Bild der FT.

Es kann nun gezeigt werden, dass die besondere Beschaffenheit einer Sammellinse, die sich genau in Brennweite zu dem Objekt und einem Schirm befindet, dafür sorgt, dass dieser Zustand nicht erst in der Unendlichkeit, sondern auf dem Schirm auftritt. Dies ist in Abbildung 1 am Beispiel eines einfachen Spaltes illustriert. Eine weitere Linse kann das Bild zurück transformieren und man erhält eine Abbildung des Objektes. Dies entspricht der iFT.

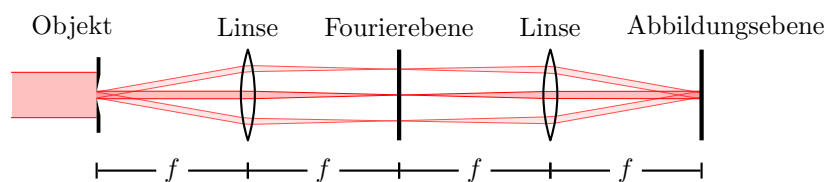


Abbildung 1: Ein kollimierter Laserstrahl von links trifft auf ein Objekt (hier einen Spalt) und wird gestreut. Hier sind beispielhaft drei Strahlenverläufe eingezeichnet. Diese könnten als 1., 0. und -1. Intensitätsmaximum der Streuung interpretiert werden. Man erkennt, dass durch das Objekt die Intensitätsverteilung in der Fourierebene beeinflusst wird. Eine zweite Linse transformiert diese wieder zurück und erzeugt so eine Abbildung des Objektes.

Eine mathematische Herleitung dieser, hier nur anschaulich erläuterten Effekte, ist beispielsweise im Begleitheft zu diesen Versuchen oder in [6, Kap. 2.3] zu finden.

### 1.3 Filter

Das mit Hilfe der Linse transformierte Bild in der Fourierebene enthält räumlich die Bildfrequenzinformationen. Wenn nun Teile dieses Bildes hervorgehoben oder ausgelöscht werden, können ebenfalls die Frequenzinformationen des rücktransformierten Bildes manipuliert werden. Dies wird insbesondere in der Bildbearbeitung sehr viel genutzt. So können beispielsweise periodische Streifen aus Bildübertragungsfehlern einer Raumsonde entfernt werden, Vergleich Abbildung 2.

Dabei werden verschiedene Filtertypen unterschieden: Ein Hochpassfilter entfernt Frequenzen unterhalb einer Grenze und lässt darüber liegende hindurch. Ein Tiefpassfilter tut genau das entgegengesetzte und entfernt Frequenzen oberhalb einer gewissen Grenze. Ein Bandfilter ist im wesentlichen eine Kombination aus Hoch- und Tiefpassfilter und lässt nur Frequenzen eines bestimmten Frequenzbereiches hindurch. Jedoch können auch andere Räumliche Filter sinnvoll sein: Für das vorgestellte Bild in Abbildung 2 beispielsweise wurde gezielt der Bereich beziehungsweise die Bereiche entfernt, der die horizontale periodische Information (die Streifen) enthält beziehungsweise enthalten. Diese Filter können dank der

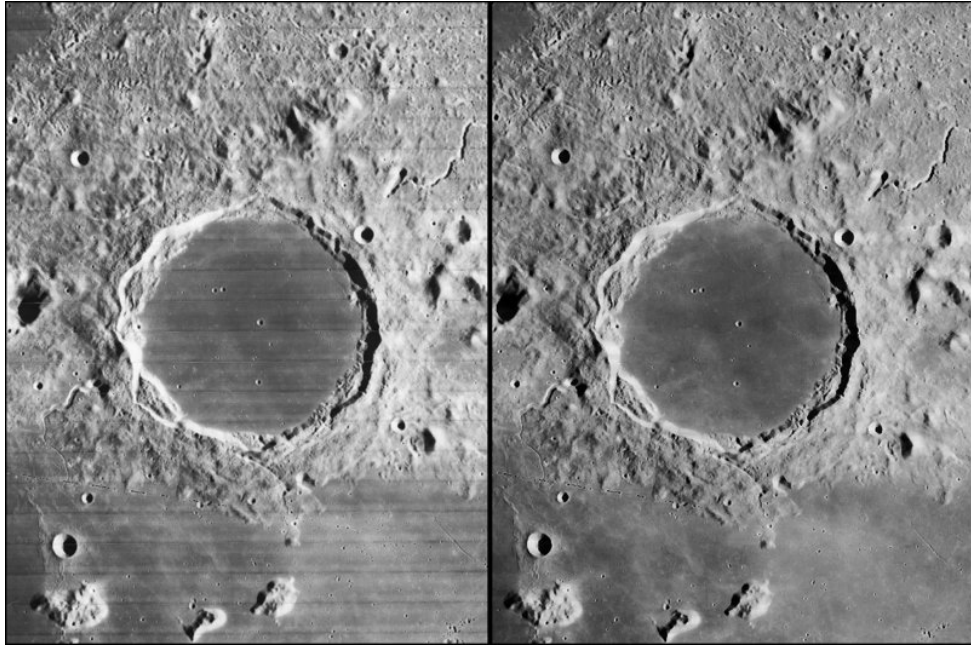


Abbildung 2: Bild der *Lunar Orbiter* Mission (links) und ein mittels einer Manipulation des Fourierbildes erzeugtes verbessertes Bild (rechts) [7].

Darstellung der Frequenzinformation in der Fourierebene im Versuch räumlich realisiert werden.

## 2 Aufbau und Justage des Experiments

Der Aufbau des Versuches für die optische Fouriertransformation bestand aus drei Teilen: Zunächst wurde die Einkopplung des Laserstrahls im Faserkopplungsaufbau optimiert und die Effizienz dieser gemessen. Anschließend wurde die Tauglichkeit einer Photodiode zur Messung der Lichtleistung und somit der Einkoppeleffizienz untersucht. Abschließend wurde hinter dem Auskoppler der für die Erzeugung, Aufnahme und Manipulation der Fourierspektren sowie die Rücktransformation benötigte 4f-Aufbau aufgebaut und optimiert.

### 2.1 Einkopplung

In diesem Abschnitt wurde die recht zeitaufwändige Justage der Lasereinheit durchgeführt, mit dem Ziel, den Laserstrahl in eine Glasfaser einzukoppeln. Der Vorteil einer Faser ist, dass der anschließende Aufbau zur Durchführung der Fouriermessungen an beliebig anderer Stelle im Labor errichtet werden kann. Der Faserkopplungsaufbau (siehe Abbildung 3) befand sich in bereits aufgebautem Zustand auf einer eigenen Platte und wurde lediglich optimiert. Für die Durchführung des Versuchs wurde ein temperaturgesteuerter cw-Diodenlaser <sup>1</sup> mit einer Wellenlänge von 660 nm.

Zur Regulierung der Intensität wurde die Eigenschaft der Polarisierung des Lichts ausgenutzt, welche anschaulich als *Schwingungsebene* einer Lichtwelle beschrieben werden kann. Der Laserstrahl durchläuft eine  $\lambda/2$ -Platte; dabei handelt es sich um eine doppelbrechende Platte, welche den beiden entstehenden Teilwellen einen Gangunterschied erteilt, der gleich der Hälfte der Bezugswellenlänge  $\lambda$  ist. In Diagonalstellung wird die Polarisierung des Lichts gedreht. Letzterer Effekt wurde hier genutzt, da so in Kombination mit dem Strahlteiler hinter der  $\lambda/2$ -Platte die Menge des anschließend verwendeten Lichts wie folgt reguliert werden konnte. Der Strahlteiler ist für eine der beiden Polarisierungsebenen durchlässig, für die Andere reflektierend. Durch Drehung der  $\lambda/2$ -Platte wurde die Polarisierung des Lichts beeinflusst. So konnte beeinflusst werden, wie hoch der Anteil des Lichts mit der Polarisierung ist, welche durch den Strahlteiler zur Glasfaser gelenkt wurde. Auch direkt vor der Fasereinkopplung spielt die Polarisierung eine Rolle, da die lichtleitende Faser für eine bestimmte Polarisierung die höchste Effizienz aufweist. Aus diesem Grund befindet sich im Aufbau eine weitere  $\lambda/2$ -Platte unmittelbar vor der Fasereinkopplung.

Mit der Glasfaser wird das Licht anschließend zum eigentlichen Experiment geleitet. Dabei wird ausgenutzt, dass Licht, welches auf einen Brechzahlssprung trifft, total reflektiert wird, wenn es unter einem sehr kleinen Winkel auftrifft. Aus diesem Grund müssen die Lichtstrahlen unter möglichst geringem Winkel in die Glasfaser eintreten. So muss für die Einkopplung also sowohl die sehr dünne Faser getroffen werden, als auch der Eintrittswinkel möglichst genau angepasst werden.

Als Hilfestellung für diese Einkopplung des Lichts in die Faser wurde ein Laserpointer an dem noch freien Ende der Faser angebracht und vor dem Einkoppler mit Hilfe der Spiegel eine optimale Überlagerung der beiden Signale eingestellt. So wurde das Axiom der

---

<sup>1</sup>Modell LD: *Mitsubishi ML101J27* mit einer maximalen Ausgangsleistung von 35 mW verwendet. Betrieben wurde der Laser mit 90,3 mA bei 18°C.

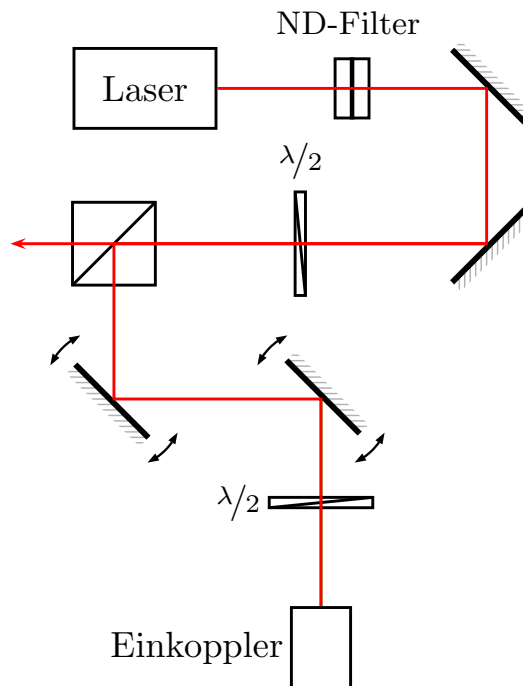


Abbildung 3: Schematischer Strahlungsaufbau zwischen Laser und Fasereinkopplung. Nach dem Verlassen des Lasers wird die Lichtintensität aus Sicherheitsgründen mit Hilfe eines ND-Filters reduziert. Mit Hilfe der darauf folgenden Spiegel wurde der Strahlenverlauf feinjustiert. Der Strahlteiler dient dazu, dass je zwei Versuchsaufbauten Licht erhalten. Mit Hilfe der sich davor befindlichen  $\lambda/2$ -Platte die Intensität des Laserstrahls so eingestellt werden, dass beide Versuchsaufbauten ausreichend Lichtleistung erhalten. Der zweite Strahl nach dem Strahlteiler wird nicht weiter betrachtet.

Strahlenumkehr der geometrischen Optik genutzt, um den Laserstrahl unter dem korrekten Winkel und Ort einzukoppeln. Dies gelingt recht schnell, da jedoch sowohl die Faser als auch der Laserstrahl eine räumliche Ausdehnung haben, erhält man anfangs häufig sehr geringe Intensitäten. Deswegen wurde der Laserpointer entfernt und die Intensität per Auge beobachtet und verbessert. Da aufgrund der relativ hohen Lichtintensitätsdichten die Intensitätsschwankungen nur schwer zu erkennen sind, wurde anschließend die Intensität des aus der Faser austretenden Lichtes mit einem Powermeter gemessen, um dessen Leistung anhand der Feinjustierung über die Spiegel weiter zu optimieren. Das Powermeter, welches an ein Oszilloskop angeschlossen wurde, konnte auch schnelle Änderungen der gemessenen Lichtleistung besser sichtbar machen.

Der Winkel, unter welchem der Laserstrahl auf den Einkoppler traf, wurde mittels des sogenannten *Walkens* optimiert. Hierbei wird an den beiden letzten Spiegeln vor dem Einkoppler gleichzeitig an den Schrauben jeweils einer Achse, beispielsweise der Vertikalen, entgegengesetzt gedreht. Bei dieser Technik wird der Strahl über den ersten Spiegel beispielsweise nach oben gelenkt und über den Zweiten nach unten. Die Position des Eintreffenden Lichtstrahls bleibt also erhalten, während der Einfallswinkel variiert



werden kann. So lässt sich letztlich der Strahl genau in die Faser einkoppeln.

Nachdem hierfür ein Optimum auf dem Oszilloskop möglichst genau eingestellt wurde, wurde die Faser unter Beobachtung des Signals auf dem Oszilloskop verbogen und mit Hilfe eines Heißluftföhns erhitzt und gleichzeitig die  $\lambda/2$ -Platte vor der Einkopplung in ihrer Halterung gedreht. Steht die  $\lambda/2$ -Platte optimal, so ist die Polarisierung erreicht, für welche die Glasfaser die höchste Transmission aufweist. Dies zeigt sich daran, dass das beobachtbare Signal auf dem Oszilloskop unter Verbiegen und Erhitzen die geringsten Schwankungen aufweist.

Bei dem hier gefundenen Optimum der Fasereinkopplung wurde mit einem Powermeter vor der Einkopplung eine Spannung von 420 mV gemessen und hinter der Auskopplung eine Spannung von 244 mV. Dies entspricht einer Effizienz von 42%.

## 2.2 Lichtsensor

Zur Optimierung der Einkopplungsleistung wurde ein Powermeter benutzt. Dieses wurde an ein digitales Oszilloskop angeschlossen, um schnelle Änderungen zu visualisieren und so den Optimierungsvorgang, insbesondere das *Walken*, zu erleichtern. Da diese Powermeter mit recht hohen Anschaffungskosten einher gehen, wurde in diesem Versuchsteil versucht, eine Leistungsmessung des Laserlichtes mit Hilfe einer Photodiode aufzunehmen.

Die verwendete Photodiode<sup>2</sup> produziert laut Datenblatt einen Strom von 0,18-0,21 mA pro Milliwatt eingestrahelter Lichtleistung bei 436 nm Wellenlänge. Da Strom nicht direkt gemessen werden kann, wird ein Widerstand parallel geschaltet und der Spannungsabfall über diesen nach  $U = R \cdot I$  mit einem Oszilloskop gemessen. Wenn man für 1 mW Lichtleistung einen Spannungsabfall von 100 mV erreichen möchte, würde man einen  $U/I = 100 \text{ mV} / 0,2 \text{ mA} = 500 \Omega$  Widerstand verwenden. Da dies jedoch ein sehr kleiner Messbereich ist, wurden 4 V pro Milliwatt angesetzt und entsprechend ein  $20 \text{ k}\Omega$  Widerstand verwendet.

Bei sehr schwachem Lichteinfall (Deckenlampe, Fenster aus der Ferne, ...) konnte auf dem Oszilloskop eine Schwankung in der Spannung festgestellt werden. Bei hohen Lichtleistungen fielen diese Schwankungen sehr klein aus. Für andere Widerstandswerte, z.B. 10 oder  $100 \text{ k}\Omega$ , erhielt man nahezu identische Werte um 440 mV. Da dies in etwa der Bandlücke eines PN-Überganges entspricht, liegt die Vermutung nahe, dass dies eine Sättigungserscheinung war.

Daher wurde der Aufbau mit kleineren Widerstandswerten von 500 und  $1000 \Omega$  getestet. Die gemessenen Spannungen sowie die dazu vom Powermeter abgelesenen Werte für die Lichtleistung sind in Abbildung 4 aufgetragen.

Es ist für  $1 \text{ k}\Omega$  eine Sättigung ab etwa 0,9 mW erkennbar, die Variante mit  $500 \Omega$  weist im gesamten Messbereich ein lineares Verhalten auf. Die Fehlerbalken in der x-Achse wurden zu 0,01 mW gewählt, da das verwendete Powermeter nur zwei Nachkommastellen anzeigte. Der Fehler in der y-Achse wurde auf etwa 5% gewählt.

---

<sup>2</sup>Modell OSD15-5T von CENTRONIC[8]

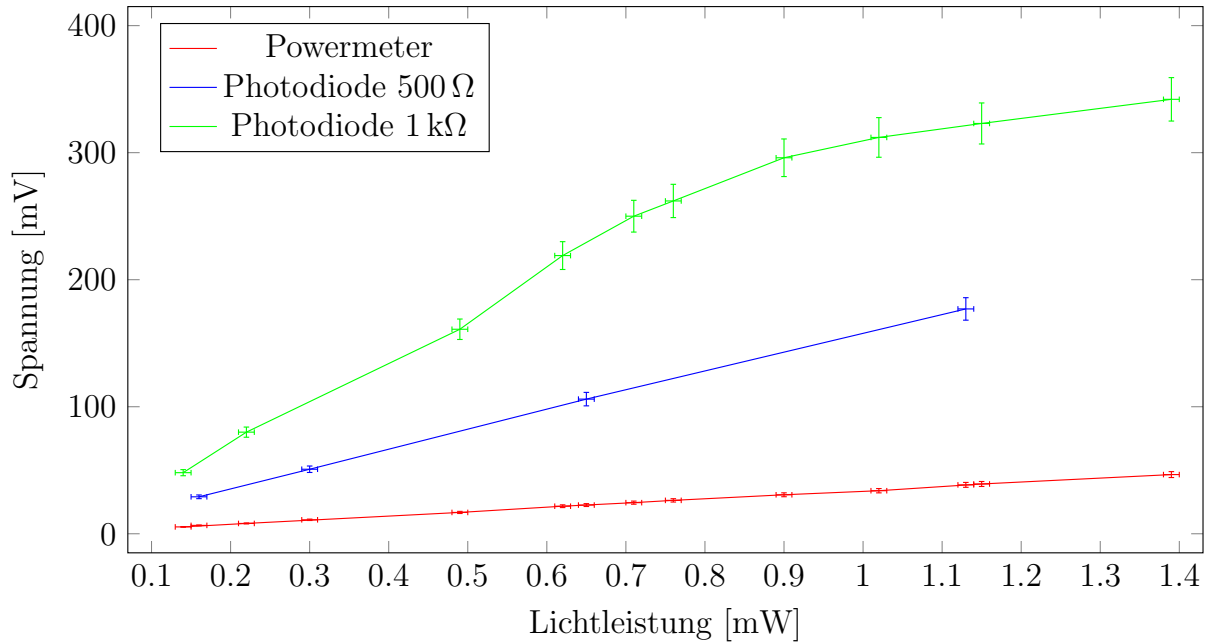


Abbildung 4: Spannungen gemessen über je einen zu einer Photodiode parallel geschalteten Widerstand mit 500 und 1000  $\Omega$ . Zusätzlich ist der Verlauf der Spannung eines Powermeters aufgetragen.

## Auswertung

Um aus dem Spannungsabfall über den zu der Photodiode parallel geschalteten Widerstand eine Lichtleistung bestimmen zu können ist ein lineares Verhalten von Vorteil. So kann direkt aus der Spannung mittels eines Faktors die Leistung berechnet werden. Mit einem Widerstand von 1 k $\Omega$  ist ein lineares Verhalten nur im Bereich bis etwa 0,7 mW zu beobachten. Darüber hinaus sättigt die Spannung. Vermutlich ließe sich mit einer Wertetabelle (erstellt mit Hilfe des kommerziellen Powermeters) auch weit über diesen Bereich hinaus sinnvoll die Lichtleistung berechnen.

Für den 500  $\Omega$  Widerstand ist bis zur maximal vermessenen Lichtleistung  $P_L$  von etwa 1,1 mW keine Sättigung festzustellen (vgl. Abb. 4). Für den vorgesehen Verwendungszweck empfiehlt sich daher die Verwendung eines Widerstandswertes in der Nähe von 500  $\Omega$ . Mit Hilfe der Software *QtiPlot* wurde eine Lineare Regression mit der Formel  $U = a \cdot P_L + b$  über die aufgenommenen Datenpunkte ausgeführt. Daraus ergeben sich die Werte  $b = (5,2346 \pm 1,1515) \text{ mV}$  und  $a = 152,6614 \pm 1,7095) \text{ V/W}$ . Die Standardabweichung liegt bei 1,28.

Das beobachtete Verhalten lässt sich sehr gut erklären, indem man einen PN-Übergang in der Photodiode mit einer Bandlücke von etwa 500 mV annimmt. Für eine feste Frequenz kann die Lichtleistung direkt in die Anzahl der Photonen  $N_{Ph}$  umgerechnet werden:  $N_{Ph} = P_L / E_{Ph}$ , wobei  $E_{Ph} = \hbar \omega_{Ph}$  die Energie pro Photon ist. Jedes dieser Photonen treibt mit einer Wahrscheinlichkeit, entsprechend der Quanteneffizienz des Überganges für die Frequenz der Photonen  $\omega_{Ph}$ , genau einen elektronischen Übergang. So führt eine bestimmte Leistung zu einer bestimmten Anzahl angeregter Elektronen. Dies entspricht bei kompletter Besetzungsinversion der Zustände einem konstantem Strom und somit Spannungsabfall

über den Widerstand. Sobald dieser Widerstand jedoch so groß gewählt wird, dass der Spannungsabfall in etwa dem Bandlückenpotential entspricht, wird die Besetzungsinversion aufgehoben. Dadurch sinkt die Quanteneffizienz und folglich der Stromfluss. Folglich sinkt die abgefallene Spannung über den Widerstand. Dies erklärt das lineare Verhalten bei kleinen Widerständen beziehungsweise Lichtleistungen und das Sättigungsverhalten ab etwa 250 mV.

## 2.3 4f-Aufbau

Im letzten Versuchsteil wurde der Laserstrahl am anderen Ende der Glasfaser ausgekoppelt und auf einen optischen Pfad gesandt, um Abbildungen von Objekten und deren Fourierspektren, sowie die Veränderung der Abbildung bei Manipulation des Fourierspektrums zu beobachten. Hierfür wurde hinter dem Faserauskoppler der Aufbau aus Abbildung 5 realisiert.

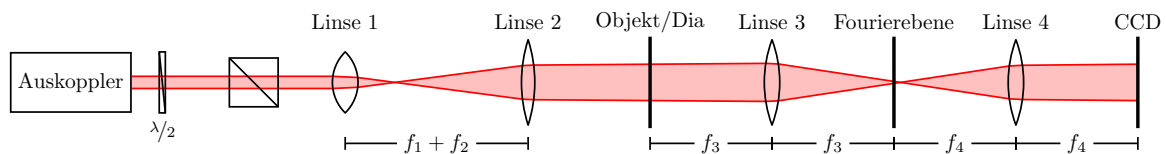


Abbildung 5: Schematische Skizze des 4f-Aufbaus. Der Laserstrahl passiert nach Verlassen des Auskopplers eine  $\lambda/2$ -Platte und anschließend einen Strahlteiler. Der zweite Teil des Strahls, welcher vom Strahlteiler abgelenkt wird, trifft auf eine Strahlblockierung und wird nicht weiter verwendet. Zwischen Linse 2 und 3 befindet sich die Halterung für das Objekt/Dia, in der Fourierebene wird entweder eine zweite Kamera oder ein Filter positioniert. Die CCD Kamera am Ende des Strahlengangs befindet sich in der Abbildungsebene des Aufbaus.

In diesem sogenannten 4f-Aufbau passierte der Laserstrahl nach der Reflektion am ersten Spiegel eine  $\lambda/2$ -Platte und dahinter einen Strahlteiler. Mit Hilfe des Strahlteilers wurde eine eindeutige Polarisierung sicher gestellt, während mit dem Plättchen die Lichtmenge der durchlässigen Polarisierung eingestellt werden konnte.

Um die abzubildenden Objekte vollständig ausleuchten zu können, wurde der Laserstrahl in diesem Aufbau mit Hilfe der ersten beiden Linsen aufgeweitet und wieder kollimiert. Im Brennpunkt der dritten Linse befand sich ein Objektträger in der Gegenstandsebene. In diesem wurden die abzubildenden Objekte angebracht. Die Fourierebene befindet sich im Brennpunkt der Linsen 3 und 4. Nach der vierten Linse wird der Strahl erneut kollimiert und trifft auf die CCD Kamera, Kamera 1. Hier wird das Objekt möglichst originalgetreu abgebildet. Um Aufnahmen der Fourierspektren zu erhalten, wurde bei Bedarf eine zweite Kamera, Kamera 2, in der Fourierebene montiert.

Verwendet wurden hierbei Linsen der Brennweiten wie folgt: Linse 1 mit  $f_1 = 20$  mm, Linse 2 mit  $f_2 = 200$  mm, Linse 3 und 4 mit  $f_3 = f_4 = 100$  mm. Direkt hinter der Auskopplung wurde zusätzlich ein Spiegel, optimiert für Wellenlängen von 400-700 nm, in

den 4f-Aufbau aufgenommen, um den Verlauf des Laserstrahls im optischen Pfad besser feinjustieren zu können. Leider wurde die Strahlqualität durch diesen stark beeinträchtigt, so dass zusätzlich ein Pinhole zwischen Linse 1 und 2 notwendig war, um eine gaußähnliche Strahlmode zu erhalten.

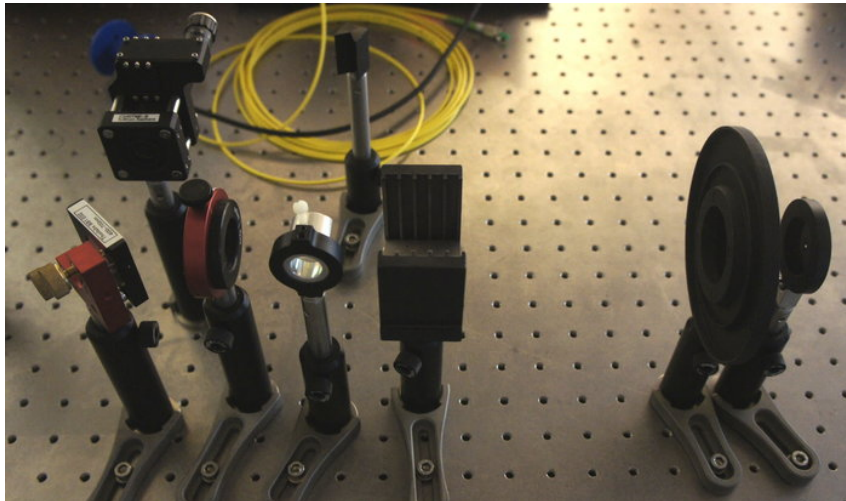


Abbildung 6: Vorderer Teil des realisierten 4f-Aufbaus. **Hintere Reihe, von links nach rechts:** Faserauskoppler; Strahlblockade für den im Strahlteiler reflektierten Anteil. **Vordere Reihe, von links nach rechts:** zusätzlich eingebauter Spiegel;  $\lambda/2$ -Platte; Strahlteiler; Diahalter; Linse 1; Pinhole, welches am rechten Bildrand hinter Linse 1 zu sehen ist.

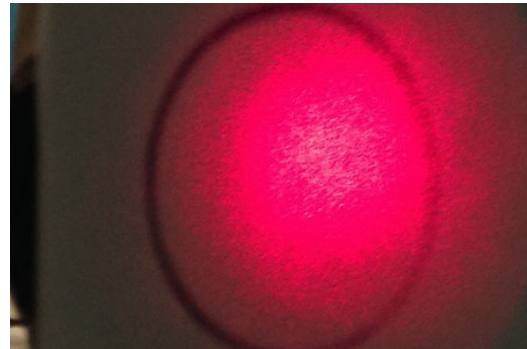
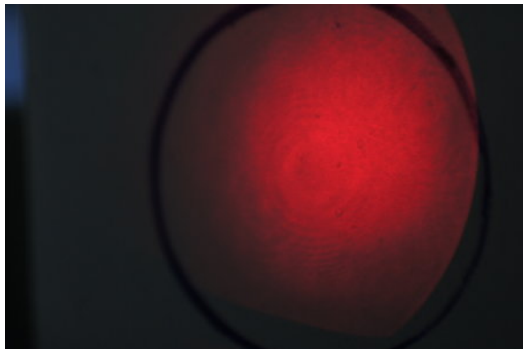


Abbildung 7: **Links:** Mode des Laserstrahls am Ende des optischen Pfades vor Einbau des Pinholes.

**Rechts:** Mode des Laserstrahls am Ende des optischen Pfades nach Einbau des Pinholes.

Als Hilfsmittel bei der Justage des 4f-Aufbaus wurde hier eine Iris verwendet. Mit dieser konnte beispielsweise die Kollimierung des Laserstrahls hinter Linse 2 überprüft werden, indem die Öffnung der Iris auf die Strahlbreite eingestellt wurde und anschließend entlang des optischen Pfades verschoben wurde. Dabei konnte überprüft werden, ob die Breite des Laserstrahls konstant blieb. Die Justage der Linse konnte somit verbessert werden. Außerdem ließ sich mit Hilfe der Iris über die gleiche Vorgehensweise die Höhe

des Strahls entlang des gesamten 4f-Aufbaus kontrollieren und diese dann mit Hilfe der Technik des Walkens optimieren.

### 3 Experimentelle Durchführung und Auswertung

In diesem Teil sollen Bildinformationen eines Objektes fouriertransformiert, die Transformierte aufgenommen, mit Hilfe verschiedener Filter manipuliert und anschließend rücktransformiert werden. Hierfür werden Objekte, wie z.B. Dias in die Objektebene eingebracht. In der Fourierebene können Filter oder eine Kamera montiert werden, um die Fouriertransformierte manipulieren oder aufnehmen zu können. Eine Kamera dient zur Aufnahme der Rücktransformierten.

Die fünf verwendeten Objektdias werden als *Objekte 1 bis 5* (siehe Abbildung 8) bezeichnet. Objekt 1-4 enthalten mehrere Motive, die einzeln untersucht werden.

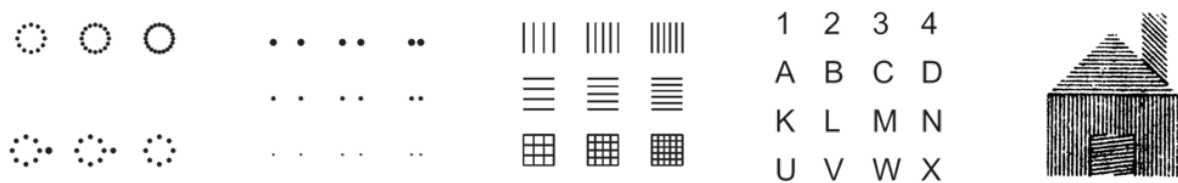


Abbildung 8: Darstellung der zur Messung verwendeten Dias. Im Text werden diese Objektdias mit Objekt 1 bis 5, von links nach rechts, bezeichnet.

Anhand der Dias wurden zunächst sowohl Kamera 1, als auch Kamera 2 nachjustiert, bis ein möglichst scharfes Bild auf dem über das Programm *uc480 Viewer-DCC1545M-ID* angeschlossenen Bildschirm zu erkennen war.

#### 3.1 Untersuchungen an Gittern

In diesem Abschnitt werden verschiedene Gitter des Objektes 3 untersucht. Dazu wurde das entsprechende Dia in der Objektebene montiert. Das gewünschte Motiv auf der Schablone wurde möglichst mittig in dem Strahl montiert. Mit einer Papierschablone wurde verhindert, das Motive beleuchtet werden, die gerade nicht untersucht wurden, da dies eine Überlagerung mehrerer Fourierspektren zur Folge hätte (vgl. Abb. 10 b und c) und das Untersuchen eines einzelnen Spektrums unmöglich machen würde. Für jedes der neun Motive wurde je ein Bild in der Fourierebene sowie in der Abbildungsebene aufgenommen. Beim Einschieben der Objekte ließ sich feststellen, dass die Bewegungsrichtung der Abbildung entgegengesetzt zu der des echten Motivs ist. Ebenso sieht man bei asymmetrischen Objekten, dass diese „auf dem Kopf stehen“.

Für eines der Gittermotive aus der ersten Reihe sind diese Aufnahmen in Abbildung 9 abgebildet. In der Fourierebene ist eine Reihe von Punkten zu sehen. Die Motive der zweiten Reihe ergeben in beiden Ebenen jeweils das gleiche Bild, jedoch um 90° gedreht. Je dichter die Gitterlinien beieinander liegen, desto weiter liegen die Punkte in der Fourierebene auseinander.

Die Abbildung eines Motivs der letzten Reihe (Kreuzgitter) ist in Abbildung 10 a abgebildet, b zeigt das Bild in der Fourierebene (*Fourierspektrum*). Zusätzlich zeigt die Abbildung 10c das Fourierspektrum, wenn mehrere Motive gleichzeitig beleuchtet werden. Die Kreuzgitter erzeugen in der Fourierebene zwei senkrechte Punktreihen, wobei der Punktabstand mit zunehmenden Gitterlinienabstand abnimmt.

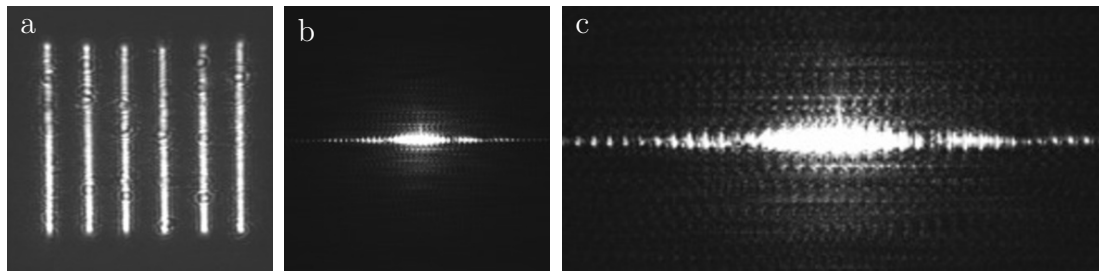


Abbildung 9: Vertikales Gitter (a) und das dazugehörige Beugungsbild (b), welches das Fourierspektrum darstellt. Das Fourierspektrum weist erneut Beugungsbilder als eine Unterstruktur auf (c).

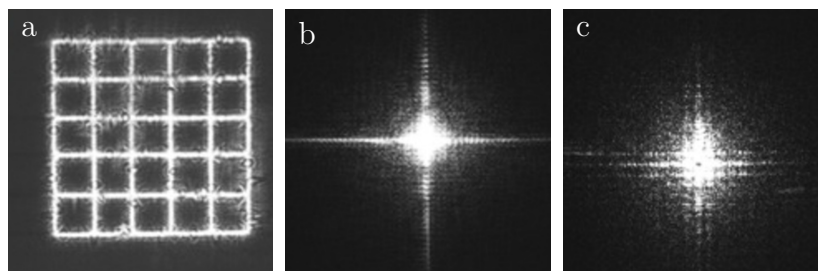


Abbildung 10: Kreuzgitter (a) und das dazugehörige Beugungsbild (b), das das Fourierspektrum darstellt. Eine Überlagerung von mehreren Fourierspektren (c).

## Auswertung

Das Zustandekommen und Aussehen einer Abbildung kann durch die aus der zweifachen Anwendung der FT (s. Abschnitt 1.1) erklärt werden: Die Abbildung wird *gespiegelt* dargestellt, die Bewegungen erscheinen umgekehrt auf dem Schirm. Da das Licht im vertikalen Gitter nur in der vertikalen Richtung gebeugt wird, bilden sich die Intensitätsschwankungen in der Fourierebene ausschließlich in horizontaler Richtung aus. Somit wurde dort eine senkrecht zum Gitter stehende Reihe aus Interferenzmaxima und -minima beobachtet, vgl. Abbildung 9. Das Drehen des Motivs sorgt ebenfalls für ein gedrehtes Bild in der Fourierebene. Dies ist direkt aus der Beugungstheorie an Gittern ersichtlich. Die Änderungen des Spektrums, welche unter Variation des Spaltabstandes zu beobachten waren, lassen sich mit der mathematischen Eigenschaft der Ähnlichkeit der FT erklären (s. Abschnitt 1.1). Allerdings folgt auch dies direkt aus der Beugungstheorie an Gittern, beziehungsweise Mehrfachspalten.

Bei einem Kreuzgitter findet die Beugung in horizontaler und vertikaler Richtung statt, welches einer Kreuzform in der Fourierebene entspricht. Das Motiv entspricht also einer Überlagerung zweier um  $90^\circ$  gedrehten Gitter. Nach der mathematischen Eigenschaft der Linearität der FT (s. Abschnitt 1.1) folgt somit auch die Überlagerung der entsprechenden Spektren. Dies war sehr gut zu beobachten.

Wenn mehrere Motive beleuchtet wurden, ergab sich in der Fourierebene die in Abbildung 10 c dargestellte kreuzförmige Anordnung. Diese zeigt nicht ein einzelnes Kreuz, sondern mehrere Kreuze in bestimmtem Abstand zueinander. Das Auftreten mehrerer Kreuze lässt sich analog mit der Linearitätseigenschaft der FT erklären.



Sowohl beim vertikalen Gitter als auch bei dem Kreuzgitter ist in der Fourierebene im Zentrum der Beugungsbilder eine maximale Intensität zu erkennen. Dieses Maximum entsteht durch das Kreuzen der mittleren horizontalen oder im Fall des Kreuzgitters der vertikalen und horizontalen Beugungsbilder. Dabei ist bei jedem weiteren Kreuzpunkt erneut eine erhöhte Intensität zu erkennen, die nach außen hin abnimmt. Diese lässt sich ebenfalls bei einem Doppelspalt beobachten, wobei das Intensitätsmaximum nullter Ordnung am stärksten ist und die Maxima höherer Ordnungen immer schwächer werden ( $\sin(x)/x$ ). Dabei nimmt die Intensität im Zentrum mit zunehmend kleiner werdender Gitterkonstante zu. Weiterhin wiesen alle Intensitätsmaxima eine Unterstruktur auf. Diese Unterstrukturen entstehen durch die Interferenz der Haupt- und Nebenmaxima aller Spalte des Gitters. Somit entsteht im Gegensatz zum Doppelspalt das Beugungsbild eines Gitters aus Vielfachinterferenzen. Diese Eigenschaft entspricht der mathematisch geforderten Linearität, denn das Beugungsbild eines Gitters kann somit durch das Aufsummieren der einzelnen Beugungsbilder des Einzelspalt es erzeugt werden (siehe Abschnitt 1.1).

### 3.2 Erzeugung von Beugungsbildern von Punkten

In diesem Abschnitt werden verschiedene Punktpaare des Objektes 2 untersucht. Das entsprechende Dia wurde hierzu analog zum vorangegangenen Abschnitt in der Objektebene montiert und das gewünschte Motiv entsprechend ausgeleuchtet. Die Abbildungen 11 und 12 zeigen die hierzu aufgenommenen Bilder der Abbildungs- sowie der zugehörigen Fourierebene.

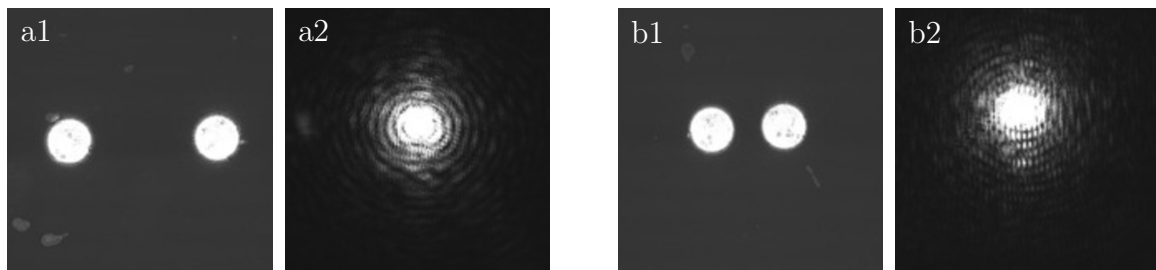


Abbildung 11: Punktpaare mit unterschiedlichen Abständen zueinander (a1, b1) und die dazugehörigen Beugungsbilder in der Fourierebene (a2, b2).

Dabei scheinen sich die Beugungsbilder der Fourierebene aus zwei sich überlagernden, jeweils von einem gemeinsamen Mittelpunkt ausgehenden Mengen von Kreisringen, zusammzusetzen. Die beiden Kreisringmittelpunkte liegen dabei in der gleichen Ebene wie das Punktpaar auf dem entsprechenden Dia. Durch die Überlagerung der beiden Kreisringgruppen entsteht im Beugungsbild ein oval wirkendes Interferenzbild. Wie sich dieses Oval mit zunehmendem Abstand der beiden Punkte auf dem Dia zueinander verändert, ist aufgrund der eher schlechten Auflösung der hierzu aufgenommenen Bilder nur schwer auszumachen (vgl. Abbildung 12).

#### Auswertung

Bei der optischen Fouriertransformation gilt für Punkte, wie bereits für Gitter erläutert, die Linearität, sodass sich das erzeugte Beugungsbild in der Fourierebene aus der Summe



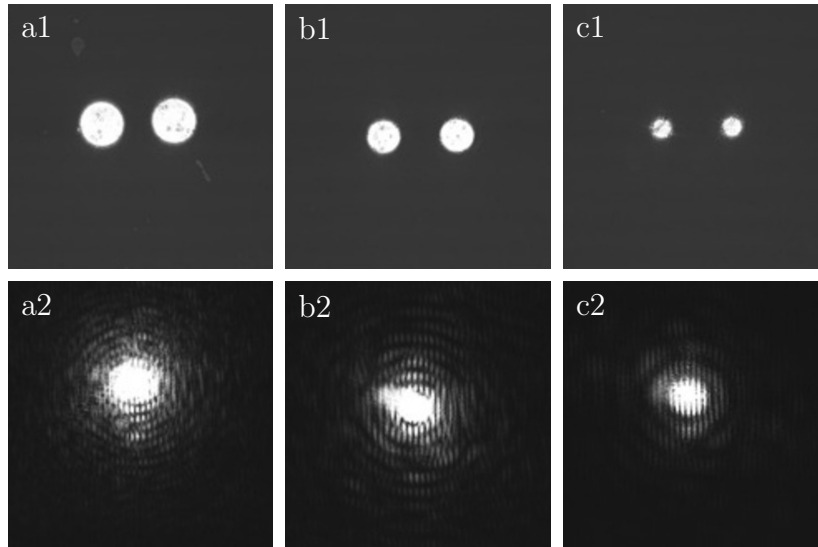


Abbildung 12: Punktpaare mit gleichen Abständen und unterschiedlicher Größe (a1, b1, c1) und die dazugehörigen Beugungsbilder in der Fourierebene (a2, b2, c2).

der Beugungsbilder der einzelnen Punkte ergibt. Das Beugungsbild eines Punktes besteht aus konzentrischen Ringen, dessen Breite und Intensität nach außen abnehmen. Durch das Verschiebungstheorem der Fouriertransformation ist gegeben, dass sich das Beugungsbild der beiden Punkte an derselben Position befindet, trotz der unterschiedlichen Positionen der Punkte. Bei zwei Punkten ergibt sich somit eine Vielfachinterferenz analog zum Gitter, welches ebenfalls durch Unterstrukturen in den konzentrischen Ringen erkennbar wird (Abb. 11 b, d). Mit zunehmendem Abstand zwischen den Punkten werden die Unterstrukturen feiner. Dies entspricht dem Ähnlichkeitstheorem (siehe Abschnitt 5), sodass sich die Beugungsmaxima mit zunehmendem Abstand der Punkte annähern, bzw. die Abstände zwischen den Maxima kleiner werden. Für ein Gitter bedeutet dieses, je größer die Gitterkonstante, d.h. je größer der Abstand zwischen den Spalten, desto kleiner wird der Abstand zwischen den einzelnen Maxima und Minima.

Beim geringsten Abstand sind im Beugungsbild neben den konzentrischen Formen auch vertikale Gitter zu erkennen (Abb. 11 b2). Diese Gitterform stellen die bereits erwähnten Unterstrukturen der Beugungsbilder dar. Zwei Punkte ergeben in der Fourierebene als Unterstruktur eine Linienstruktur senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Punkte. Diese ergeben sich somit ebenfalls bei zwei Punkten mit höherem Abstand, sind aber wegen des kleinen Abstands zwischen den Spalten des vertikalen Gitters in der Fourierebene schlecht zu erkennen, da sich die Fouriertransformierte reziprok verhält (Ähnlichkeitstheorem). Bei kleinerem Abstand zwischen den Punkten vergrößert sich der Abstand der Spalte im vertikalen Gitter und wird dadurch erkennbar. Diese Unterstrukturen sind bei gleichbleibendem Abstand und kleinerer Größe der Punkte selbst noch ausgeprägter und damit besser zu erkennen (Abb. 12 b2, c2). Die Intensitätsmaxima sind bei den kleineren Punkten durch deren größeren Abstand zueinander kleiner ausgeprägt als bei den größeren Punkten. Somit weist das Hauptmotiv des Beugungsbilds eine geringe Intensität auf, wodurch die Unterstruktur einfacher zu erkennen ist. Auch im Beugungsbild eines Punktringes (Abb. 13) sind Unterstrukturen in der Fourierebene zu erkennen, welche sich durch die Anordnung der acht Punkte ergeben. Zwei Punkte weisen eine senkrechte Linienstruktur

zur Verbindungslinie auf, sodass sich bei acht Punkten vier Linienstrukturen (horizontal, vertikal, beide Diagonale) ergeben. Wenn sich diese Strukturen kreuzen, ergeben sich acht Schnittpunkte und somit entstehen Unterstrukturen in Form von Achtecken (Abb. 14).

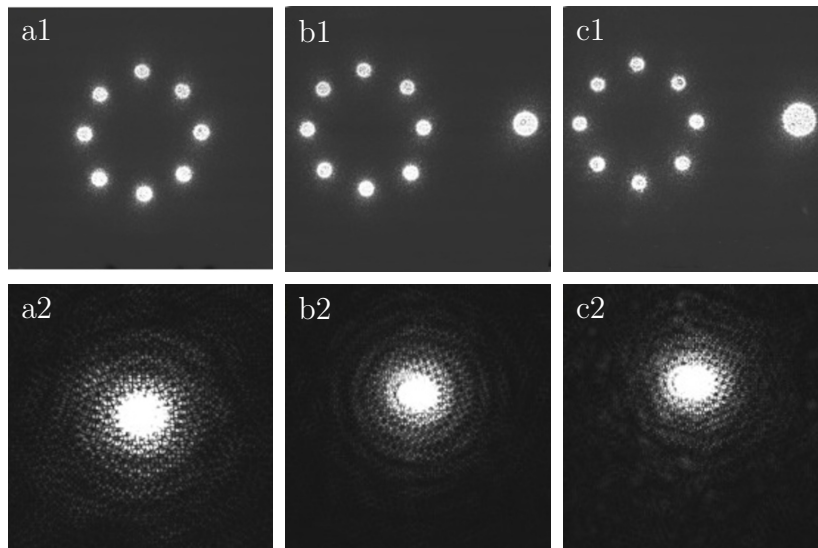


Abbildung 13: Punktringe (a1) und Punktringe mit zusätzlichem Punkt in unterschiedlicher Größe (b1, c1) und die dazugehörigen Beugungsbilder in der Fourierebene (a2-c2).

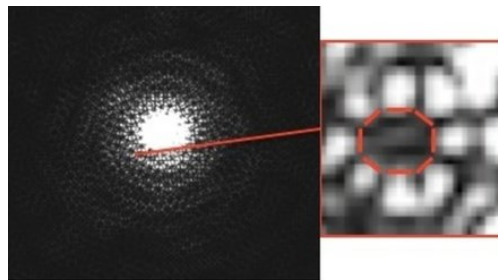


Abbildung 14: Ausschnitt aus dem Beugungsbild des Punktringes, welcher die Unterstruktur eines Achtecks zeigt.

Bei einem Punktkreis mit einem zusätzlichen Punkt ist das Beugungsbild nicht mehr symmetrisch und die Asymmetrie nimmt mit größer werdenden Punkten zu (Abb. 12 b, c).

### 3.3 Erzeugung von Beugungsbildern von Buchstaben und Zahlen

In diesem Abschnitt werden beispielhaft zwei der Motive des Objekts 4 und deren Beugungsbilder untersucht. Die Vorgehensweise zur Aufnahme der Abbildungen hierzu war analog zu den vorangegangenen Abschnitten. Abbildung 15 zeigt die gewählten Motive und deren Beugungsbilder.

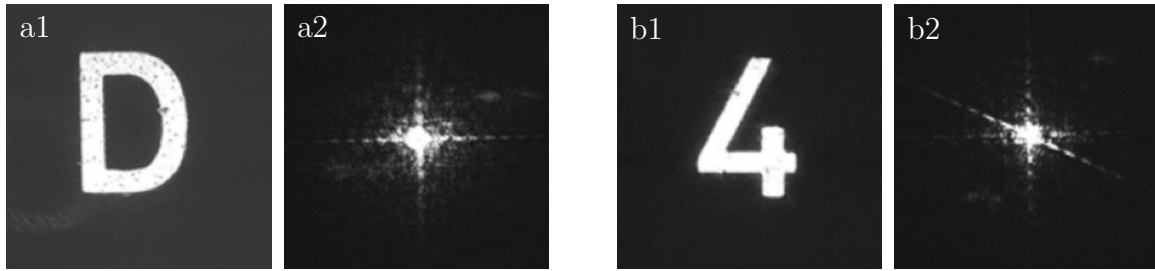


Abbildung 15: Buchstabe D (a1) und Zahl 4 (b1) und die dazugehörigen Beugungsbilder in der Fourierebene (a2 und b2).

### Auswertung

Der Buchstabe D besteht sowohl aus horizontalen, sowie vertikalen Linien, als auch aus runden Elementen (Abb. 15 a1). Das Beugungsbild ergibt sich somit aus der Summe der Beugungsbilder dieser verschiedenen Formen. Die horizontalen Linien bilden ein Fourierspektrum in der Horizontalen und die vertikalen Linien in der Vertikalen mit den jeweiligen Maxima und Minima und Unterstrukturen (Abb. 15 a2). Die runde Form erzeugt im Beugungsbild konzentrische Ringe mit abnehmender Intensität, entsprechend dem Beugungsbild von Punkten. Da der Buchstabe D durch horizontale und vertikalen Linien dominiert wird, ist auch das Beugungsbild stark davon geprägt, sodass die konzentrischen Ringe durch eine geringere Intensität auch schlechter zu erkennen sind.

Die Zahl 4 besteht lediglich aus Linien, wobei neben horizontalen und vertikalen ebenfalls diagonale Linien vorhanden sind (Abb. 15 b1). Das Beugungsbild ähnelt hier dem eines Gitters mit einer Punktreihe aus Interferenzmaxima und –minima in horizontaler, sowie auch in vertikaler Richtung. Zusätzlich verläuft hier eine Punktreihe in der Diagonalen, senkrecht zur Diagonalen der Zahl 4 aus der Abbildungsebene (Abb. 15 b2).

## 3.4 Manipulation der Fourierebene mit Filterdias

Nachfolgend wird die Wirkung verschiedener Filter auf die Abbildungen der betrachteten Objekte untersucht. Als optische Filter werden Objekte oder Medien mit der Eigenschaft bezeichnet, für Licht eines bestimmten Wellenlängenbereichs undurchlässig zu sein. In diesem Versuch werden Form- und Strukturinformationen der Abbildungen der untersuchten Objekte über die Fouriertransformation in der Fourierebene räumlich umgesetzt. Als Filter sind hier daher Objekte interessant, welche für diese nun in räumliche Informationen übersetzten Strukturen nur teilweise durchlässig sind. Es konnten daher die in Abbildung 16 dargestellten Dias als optische Filter verwendet werden. Diese wurden in der Fourierebene des 4f-Aufbaus platziert, um dann die Abbildung mit der Kamera in der Bildebene aufzunehmen.

In diesem Versuch wurden vier verschiedene Arten von Filtern verwendet: Halbebenen- und Breitbandfilter, sowie Hochpass- und Tiefpassfilter. Ein Halbebenenfilter absorbiert alle Frequenzen bis zu oder ab einer bestimmten Frequenz, wobei es sich in diesem Fall dabei um die Frequenzen der Fourierzerlegung handelt, auf welche der Filter Einfluss hat, da dieser in der Fourierebene platziert wird. Beim Halbebenenfilter werden also entsprechend entweder nur niedrige oder nur hohe Frequenzanteile der Bildinformation

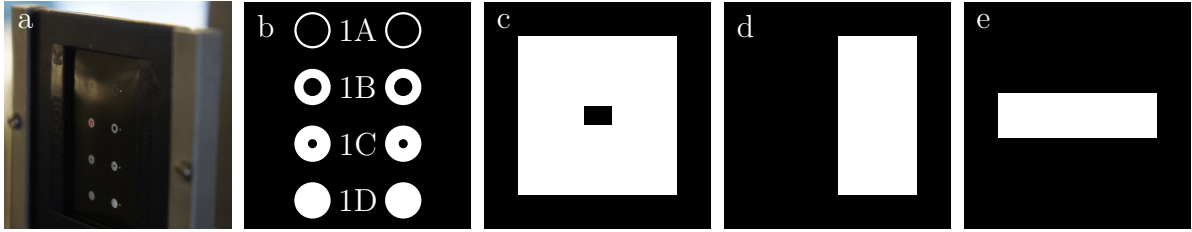


Abbildung 16: Foto des Filterdias mit den Filtern 1A-D (a) so wie eine schematische Darstellung dieser Filter (b), sowie des Filters 2 (c), des Halbebenenfilters (d) und des Schlitzfilters (e).

transmittiert. Ein Breitbandfilter hingegen transmittiert einen bestimmten Frequenzbereich und absorbiert alle Frequenzen, welche über- und unterhalb dieses Bereichs liegen. Ein Hochpassfilter transmittiert nur hohe Wellenlängen, also niedrige Frequenzen, umgekehrt dazu transmittiert ein Tiefpassfilter nur niedrige Wellenlängen, also hohe Frequenzen. Die Dias in Abbildung 16 d und e dienten hier als Halbebenenfilter, während die Dias in Abbildung 16 b als Breitbandfilter fungierten, abgesehen von dem Filter mit der Beschriftung 1D, welcher als Tiefpassfilter wirkte. Das Dia in Abbildung 16 c wurde als Hochpassfilter verwendet.

### 3.5 Beugungsbild und Manipulation des Fourierhauses

Das Fourierhaus ist ein Haus, welches aus Gittern mit gleichen Gitterkonstanten und unterschiedlichen Ausrichtungen dieser Gitter besteht (Abb. 17 a2). Die verschiedenen Gitter entsprechen verschiedenen Bauelementen im Haus. Die Wand besteht aus einem vertikalen Gitter, das Dach aus einem horizontalen Gitter und die Tür und der Schornstein werden aus diagonalen Gittern in entgegengesetzten Richtungen erstellt. Die Fouriertransformation dieses Fourierhauses ergibt das in Abbildung 17 a1 dargestellte Beugungsbild.

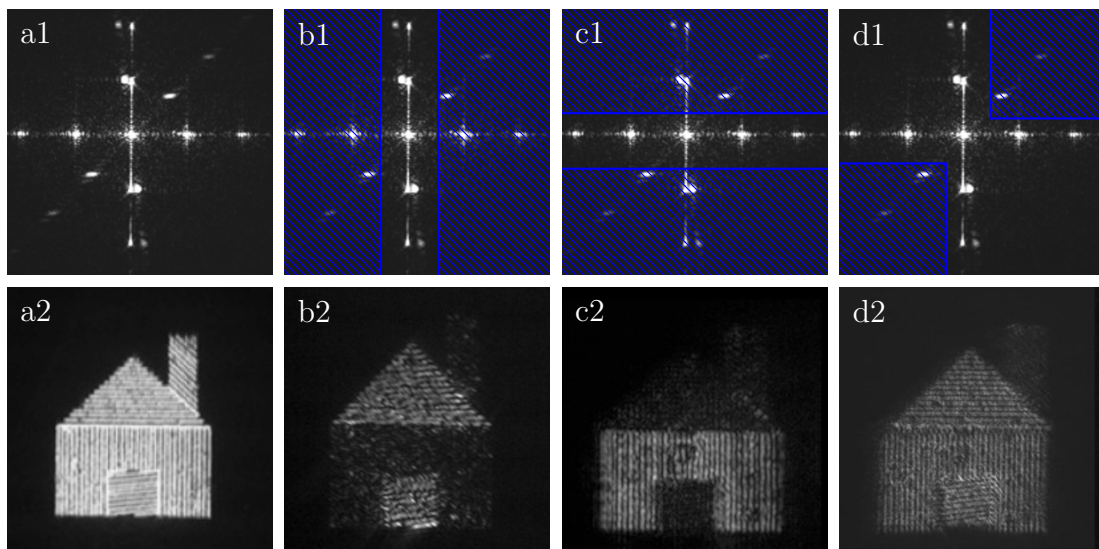


Abbildung 17: Durch zwei Schnitten (blau schraffiert) werden verschiedene Teile der Fourierspektren in der Fourierebene herausgefiltert (oben), welches in der Abbildungsebene zum Verschwinden einzelner Teile führt (unten).

Anschließend wurde das Fourierhaus durch Filter manipuliert. Durch die Verwendung eines Schlitzfilters (s. Abb. 16 e), welcher bestimmte Frequenzbereiche durch Abdecken der entsprechenden Frequenzspektren herausfiltert, konnten verschiedene Bauelemente des Hauses jeweils herausgefiltert werden. Mit diesem Filter wurde das Beugungsbild in der Fourierebene so abgedeckt, dass lediglich das vertikale Fourierspektrum des Dachs und das diagonale Fourierspektrum der Tür offen blieben (Abb. 17 b1). Somit waren in der Abbildungsebene nur die horizontalen Linien des Dachs und näherungsweise horizontalen Linien der Tür sichtbar (Abb. 17 b2). Analog wurde mit Hilfe des Filters anschließend nur das horizontale Fourierspektrum geöffnet und somit nur vertikale Linien (Wand) in der Abbildungsebene sichtbar gemacht (Abb. 17 c1, c2). Als Letztes wurde durch Blockieren (mit Papierstücken) des diagonalen Fourierspektrums lediglich der Schonstein ausgeblendet (Abb. 17 d1, d2).

### Auswertung

Die vier verschiedenen Orientierungen der Gitter sind in der Fourierebene durch die vier verschiedenen Orientierungen der Punktreihen aus Intensitätsmaxima und -minima dargestellt. Auch hier stellen diese die Summe der Beugungsbilder der einzelnen Gittern dar. Da die Gitterkonstante des Fourierhauses im Vergleich zu den in Abbildung 9 und 10 gezeigten Gittern sehr viel kleiner ist, sind die Abstände zwischen den Maxima im Fourierspektrum deutlich größer und die Intensität im Zentrum erhöht.

## 3.6 Optische Filterung durch Hochpass-, Tiefpass- und Breitbandfilter

In diesem Abschnitt soll der Nutzen der FT für die Bildverarbeitung illustriert werden. Dazu wurde zunächst ein Dia mit einem Fettabdruck eines Fingers präpariert. Von dieser wurde die Abbildung ohne Filter aufgenommen. Hierbei war in der Abbildungsebene relativ wenig zu erkennen (s. Abb. 18 a). Anschließend wurde die Abbildung mit einem in der Fourierebene befindlichen Hochpass- und einem Halbebenenfilter (s. Abb. 16 c, d) aufgenommen. Zudem wurde mit der Kamera 2 das Fourierspektrum des Fingerabdrucks photographiert. Zu beobachten war hier, dass die Konturen des Fingerabdrucks in der Abbildung mit Hilfe der Filter deutlich besser erkennbar gemacht werden konnten (vgl. Abbildung 18 b, c).

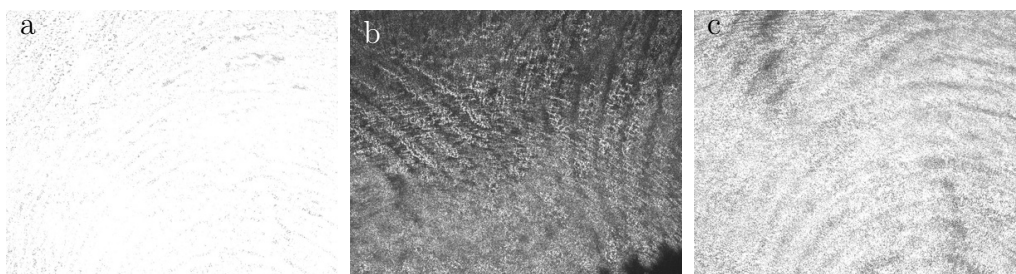


Abbildung 18: Der Fettabdruck eines Fingers in der Abbildungsebene ohne Filter (a) und mit Hochpassfiltern (b, c).

Als nächstes Beispiel wurden mit der Zahl vier und dem Buchstaben D in der Objektebene Bandfilter A, B, C sowie ein Tiefpassfilter D (s. Abb. 16 b) in die Fourierebene eingesetzt. Bei den Bandfiltern werden die Flächen unterdrückt und Ränder als Doppellinien dargestellt. Beim Breitbandfilter 1C konnte dieser Effekt am besten beobachtet werden (Abb. 19 b). Bei den Bandfiltern 1B und 1A ist die Zahl vier kaum noch zu erkennen (Abb. 19c, d). Analoge Beobachtungen waren bei dem Buchstaben D zu erkennen (s. Abb. 20).

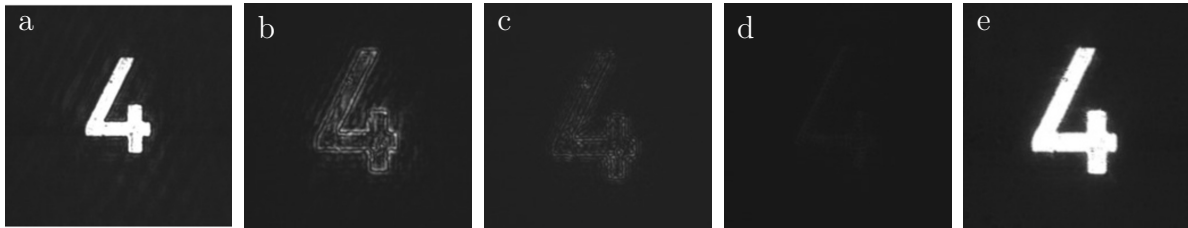


Abbildung 19: Die Zahl vier in der Abbildungsebene ohne Filter (a) und mit den Bandpassfiltern C (b), B (c), A (d) sowie dem Hochpassfilter D (e) manipulierte Bilder der Zahl vier.

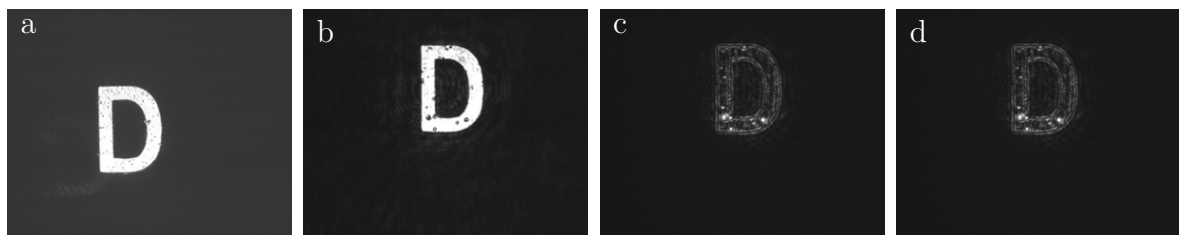


Abbildung 20: Der Buchstabe D des Objekts 4 in der Abbildungsebene ohne Filter (a), mit dem Filter 1D (b), 1C (c), 1B (d).

## Auswertung

Die Bandfilter lassen einen bestimmten Frequenzbereich durch. Dadurch werden sowohl sehr tiefe Frequenzen (Flächen) als auch sehr hohe Frequenzen (Kanten) unterdrückt. Die Frequenzbereiche dazwischen werden jedoch hindurch gelassen, daher prägen sich innerhalb und außerhalb der Kanten Konturlinien aus. Dies ist sowohl für die Zahl 4 als auch den Buchstaben D mit dem Filter C sehr schön zu erkennen. Die Filter A und B lassen nur sehr wenig Licht durch. Da die automatische Kontrastfunktion der Kamerasoftware nicht genutzt wurde, ist auf diesen Bildern nur mit Mühe dieser Effekt erkennen.

Durch die Verwendung eines Tiefpassfilters wurden nur die niedrigen Frequenzen durchgelassen und die hohen Frequenzen herausgefiltert. Dies bewirkt ein Verschwinden der hohen Frequenzen und so ein Verschwinden der Kanten. Dieser weichzeichnende Effekt ist bei der Zahl 4 sehr schön zu erkennen.

Im Gegensatz dazu wurde für das Bild des Fingerabdrucks und des Buchstabens D ein Hochpassfilter eingesetzt, welcher die niedrigen Frequenzen herausfiltert, was zu einer Hervorhebung der Kanten führte.

In der Bildverarbeitung werden die Tiefpass- (Weichzeichner) und Hochpassfilter (Kantenerkennung) häufig verwendet.

### 3.7 Schlierenverfahren

Als Letztes wurde ein Teelicht auf die Position des Objektträgers gestellt und ein Halbebenenfilter in der Fourierebene installiert. Mit Kamera 1 wurden mehrere Abbildungen aufgenommen, um die Strömungsbewegungen oberhalb der Flamme beobachten zu können. Zum Vergleich wurde zudem eine Aufnahme mit Halbebenenfilter, ohne gemacht (s. Abb. 21). Vergleicht man diese Abbildungen sind deutliche Verzerrungen des Lichts aufgrund der Luftströmungen über der Flamme des Teelichts zu erkennen.

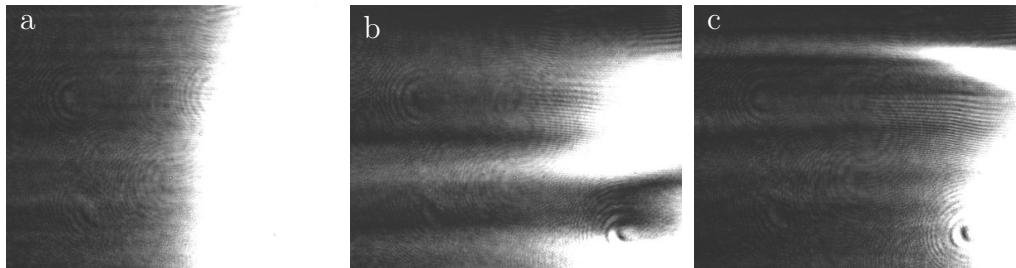


Abbildung 21: Aufnahme ohne Objekt in der Abbildungsebene mit Halbebenenfilter ohne Teelicht (a) und mit Teelicht (b, c).

#### Auswertung

Mit Hilfe eines Halbebenenfilters wurden die durch eine brennende Kerze erzeugten Schlieren dargestellt (Abb. 21). Als Schlieren werden Bereiche bezeichnet, welche sich von ihrer Umgebung in der Dichte bzw. im Brechungsindex unterscheiden, welche in unserem Versuch die durch die Kerze erzeugten Luftströmungen darstellten. Bei diesem Versuchsaufbau wurde das Prinzip genutzt, dass parallele Strahlenbündel beim Durchgang durch ein inhomogenes Dichtefeld unterschiedlich stark abgelenkt werden. Durch den eingesetzten Halbebenenfilter, wurden die Anteile des gebrochenen Lichts stärker oder weniger stark blockiert, sodass richtungsabhängige Brechzahl- bzw. Dichtegradienten auf dem Projektionsschirm sichtbar wurden. Abbildung 22 illustriert dies. Dieses Verfahren wird in großer Ausführlichkeit und sehr Anschaulich in [9, Kapitel 2] dargestellt. Der Effekt war sehr schön zu beobachten. Allerdings legt [9, Fig. 2.2] nahe, dass die Klinge für diesen Versuch falsch platziert wurde.

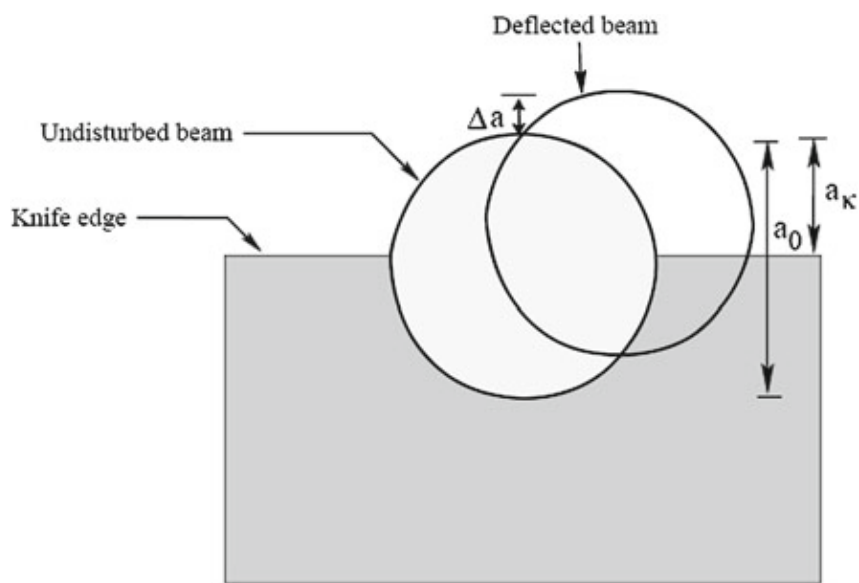


Abbildung 22: Der Filter bzw. die Klinge (*Knife edge*) wurde so platziert, dass sie den halben ungestörten Strahl (*Undisturbed beam*) blockiert. Ein durch Schlieren um  $\Delta a$  abgelenkter Strahl (*Deflected beam*) wird in diesem Fall zu einem geringeren Anteil blockiert [9, Fig. 2.5].



## 4 Fazit

Durch diesen Versuch werden die theoretischen mathematischen Grundlagen der Fouriertransformation anhand anschaulicher Experimente nachvollziehbar. Dabei ist der Vergleich der Eigenschaften der Linse und dem entsprechenden Aufbau mit den geforderten. Eigenschaften einer Funktion (Linearität, Ähnlichkeit, Verschiebung, Faltung) für eine Fouriertransformation für das Verständnis sehr nützlich. Insbesondere wird dies durch die Verwendung von verschiedenen Filtern und die daraus folgende Manipulation der Bilder vermittelt.

Der selbständige Aufbau, der die Optimierung des Diodenlasers als auch des Strahlengangs umfasste, veranschaulichte deutlich die Herausforderungen des Versuchs und somit die Herausforderungen beim Experimentieren und somit dem Umgang mit der Ausrüstung in der Optomechanik. Dabei ist viel Geduld, z.B. bei der Einkopplung erforderlich, sowie auch Kreativität, was uns anhand des Baus der Photodiode zur Messung der Effizienz des Lasers verdeutlicht wurde. Weiterhin zeigte das Justieren des Strahlengangs, dass bereits kleinste Veränderungen einen enormen Einfluss auf die Auflösung der Abbildung haben können. Die Wirkung der Filter auf die Abbildungen erhöhte ebenfalls das Verständnis für Effekte, wie Weichzeichner oder Kantenerkennung in der digitalen Bildverarbeitung. Da Filterungen ebenfalls in der Akustik verwendet werden, um z.B. Rauschen herauszufiltern oder zur Kompression von Daten (jpeg, mp3), wurde somit die breite Anwendung der Fouriertransformation anhand des Versuchs der optischen Fouriertransformation verdeutlicht.

# Literatur

- [1] R. L. Easton, *Fourier methods in imaging*. Chichester: Wiley, 2010.
- [2] „JPEG,” Aug. 2015, Page Version ID: 677928895. [Online]. Verfügbar unter: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=JPEG&oldid=677928895>
- [3] Prof. Dr. Norbert Link, „Vorlesungsscript: Diskrete Fouriertransformation - Informationsgewinnung (Computer Vision).” [Online]. Verfügbar unter: <http://www.home.hs-karlsruhe.de/~laas0002/Skripte/>
- [4] „Huygenssches Prinzip – Wikipedia.” [Online]. Verfügbar unter: [https://de.wikipedia.org/wiki/Huygenssches\\_Prinzip](https://de.wikipedia.org/wiki/Huygenssches_Prinzip)
- [5] „Beugungsintegral,” Feb. 2015, Page Version ID: 138644725. [Online]. Verfügbar unter: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Beugungsintegral&oldid=138644725>
- [6] W. Stössel, *Fourieroptik: eine Einführung ; mit 47 Übungsaufgaben und Lösungen*. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo; Hong Kong; Barcelona; Budapest: Springer, 1993.
- [7] „Highlight Nr. 60 - Institut für Planetenforschung.” [Online]. Verfügbar unter: <http://solarsystem.dlr.de/HofW/nr/060/>
- [8] Farnell.com, „OSD15-5T - CENTRONIC - FOTO DETEKTOR 5NA.” [Online]. Verfügbar unter: <http://de.farnell.com/centronic/osd15-5t/foto-detektor-5na/dp/548730?ost=548730>
- [9] P. K. Panigrahi und K. Muralidhar, *Schlieren and shadowgraph methods in heat and mass transfer*, Serie SpringerBriefs in applied sciences and technology. Thermal engineering and applied science. New York: Springer, 2012.

# Abbildungsverzeichnis

1	Illustration: Inverse und Fouriertransformation an Linsen . . . . .	3
2	Beispiel der FT in der Bildbearbeitung . . . . .	4
3	Schematischer Aufbau Lasereinheit . . . . .	6
4	Vermessung einer Photodiode . . . . .	8
5	Schematische Skizze des 4f-Aufbaus . . . . .	9
6	Vorderer Teil des 4f-Aufbaus . . . . .	10
7	Mode vor und nach Verwendung eines Pinholes . . . . .	10
8	Die zur Messung verwendeten Diamotive . . . . .	12
9	Gitter mit Fourierspektrum . . . . .	13
10	Kreuzgitter mit Fourierspektrum . . . . .	13
11	Punktpaare unterschiedlicher Abstände und Fourierspektren . . . . .	14
12	Punktpaare gleicher Abstände und Fourierspektren . . . . .	15
13	Punktringe mit Fourierspektren . . . . .	16
14	Beugungsbild der Punktringe mit Unterstruktur . . . . .	16
15	Ziffern mit Fourierspektren . . . . .	17
16	Verwendete Filter . . . . .	18
17	Fourierhaus mit verschiedenen Filtern . . . . .	18
18	Bild eines Fettabdruck eines Fingers mit Filter bearbeitet . . . . .	19
19	Bild der Zahl 4 mit Filtern bearbeitet . . . . .	20
20	Bild des Buchstaben D mit Filtern bearbeitet . . . . .	20
21	Sichtbar gemachte Schlieren . . . . .	21
22	Anschauliche Erklärung des Schlierenverfahrens . . . . .	22