

TODO

René

1. Regina sagen, dass sie auf die Eigenschaften der FT refen soll
2. Regine Videos vom Handy geben
3. Regina Rücktransformierte Bilder geben
- 4.

Vivi

1. ...
2. ...

Fortgeschrittenenpraktikum

Optische Fouriertransformation

Vivien Sleziona *

Regina Schauer †

René Vollmer ‡

Betreut durch

Kai Morgener§

23.02.2015

Die Fourier-Analytik und insbesondere die Fouriertransformation sind auf vielen modernen Anwendungen kaum noch weg zu denken. Sie ist essentieller Bestandteil vieler Bildverarbeitungsalgorithmen[1] und -kompressionsverfahren wie JPEG[2], sie wird genutzt um Bildinformationen Computeralgorithmen zugänglich zu machen[3] und in vielen anderen Bereichen der Signalverarbeitung.

In diesem Versuch soll mit einfachen optischen Mitteln eine Fouriertransformation auf Bildern durchgeführt, die Fouriertransformierte manipuliert und rücktransformiert werden. Dabei wird dem Leser ein intuitives Verständnis für die Funktionsweise und Bedeutung von Fouriertransformationen vermittelt werden.

*vivi.s@arcor.de

†regina.schauer@web.de

‡rene.vollmer@studium.uni-hamburg.de

§kmorgene@physnet.uni-hamburg.de

Contents

1	Theoretische Grundlagen	1
1.1	Mathematische Grundlagen	1
1.2	Optik	2
2	Experimental Procedure	4
2.1	Einkopplung	4
2.2	Lichtsensoren	4
2.3	Abbildung und Fourierbild	5
3	Auswertung	6
4	Fazit	6
	List of figures	B
5	Appendix	C

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Mathematische Grundlagen

Die kontinuierliche Fourier-Transformation (kurz FT) ist definiert als

$$G(x) = F \{g(x)\} := \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot e^{-2\pi i x s} dx \quad (1)$$

wobei $g(x) \in L^1(\mathbb{R})$ eine absolut integrable, außer an endlich vielen Stellen stetige Funktion in einer Variable ist. Die transformierte dieser Funktion wird häufig mit dem gleichen Buchstaben wie die nicht transformierte, jedoch groß geschrieben bezeichnet.

Die Rücktransformation (auch *inverse Fourier-Transformation*, kurz iFT) ist definiert als

$$g(x) = F^{-1} \{G(x)\} := \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \cdot e^{+2\pi i x s} ds \quad (2)$$

Anschaulich entspricht eine FT eine Zerlegung einer Funktion in periodische Funktionen einer bestimmten Wellenlänge und Amplitude. Die transformierte Funktion bildet anschließend die Amplituden gegen die Frequenz ab. So würde eine einfache periodische Sinus-Funktion unter FT zu einer delta-Verteilung.

Diese Funktion besitzt einige besondere Eigenschaften, die sie für die Informationsverarbeitung interessant machen. Die wichtigsten sollen hier kurz skizziert werden:

1. Zweifache Anwendung

$$F \{F \{g(x)\}\} = F \{G(s)\} = g(-x) \quad (3)$$

Beweisskizze: Vorzeichenumkehr $x \rightarrow -x$ in 2 entspricht der FT von $G(s)$ und $F \{G(s)\} = F \{F \{F^{-1} \{G(s)\}\}\} = F \{F \{g(x)\}\}$.

2. Linearität

$$F \{a \cdot g(x) + b \cdot h(x)\} = a \cdot F \{g(x)\} + b \cdot F \{h(x)\} \quad (4)$$

Beweisskizze: Dank der Eigenschaften von $g(x)$ kann das Integral der Fourier-Transformation in Teilintegrale geteilt und lineare Faktoren heraus gezogen werden.

3. Ähnlichkeit

$$F \{g(a \cdot x)\} = 1/a \cdot F \{g(x/a)\} = 1/a \cdot G(s/a) \quad (5)$$

Beweisskizze: Substitution von $y = a \cdot x$ als Integrationsvariable.

4. Verschiebung

$$F \{g(x - a)\} = e^{-2\pi i s a} \cdot F \{g(x)\} = e^{-2\pi i s a} \cdot G(s) \quad (6)$$

Beweisskizze: Variablensubstitution $x - a \rightarrow x$.

5. Faltung

$$F \{g(x) \circ h(x)\} = F \{g(x)\} \cdot F \{h(x)\} = G(x) \cdot H(x) \quad (7)$$

Mit der Definition der Faltung als

$$g(x) \circ h(x) := \int g(x) \cdot h(x - a) da \quad (8)$$

Beweisskizze: Nutze $F \left\{ \int g(a) \circ h(x - a) da \right\} = \int g(a) \cdot F \{h(x)\} da$ und anschließendes Vertauschen der Integrationen über a und x aus Faltung und FT.

Einige dieser Eigenschaften können direkt im Versuch gesehen werden, siehe Abschnitt 3.

1.2 Optik

Die geometrische Optik ist der Teilbereich der Optik, wo Lichtwellen durch idealisierte Strahlen angenähert werden um den Weg des Lichtes zu (re)konstruieren. Sämtliche Schlussfolgerungen basieren auf diesen vier Axiomen:

1. Axiom: In homogenem Material verlaufen Lichtstrahlen gerade.
2. Axiom: An der Grenze zwischen zwei homogenen und isotropen Materialien wird das Licht nach dem Reflexionsgesetz reflektiert und nach dem Brechungsgesetz gebrochen.
3. Axiom: Zeit- bzw. Strahlenumkehr, die Richtung eines Lichtstrahles ist belanglos.
4. Axiom: Die Lichtstrahlen beeinflussen sich nicht gegenseitig.

Durch die spezielle Geometrische Form von Sammellinsen ergibt sich ein Brechungswinkel in Abhängigkeit vom Abstand zum Mittelpunkt, der effektiv Strahlen bündeln oder kollimieren kann. Die Brennweite gibt den Abstand an, in dem sich eine punktförmige Lichtquelle befinden muss, um von der Linse kollimiert zu werden. Gleichzeitig ist sie auch die Entfernung in der ein kollimierter Strahl hinter einer Linse gebündelt wird (siehe auch drittes Axiom).

Neben den Effekten der geometrischen Optik gibt es noch Effekte, die sich nicht durch dieses einfache Modell beschreiben lassen. Hierzu zählt die Streuung. Diese kann nach dem Huygenssches Prinzip[4] beschrieben und mittels der Beschreibung durch die Fraunhoferbeugung[5] vereinfacht werden. Die wesentliche Erkenntnis hieraus ist, dass ein Lichtstrahl der durch ein Objekt mit einem oder mehreren Spalten, deren Öffnungsbreite in der Größenordnung der Wellenlänge liegt, läuft gestreut, das heißt aufgeweitet, wird. Dieser Strahl wird anschließend auf Grund von Laufzeitunterschieden mit sich selber interferieren. Dabei ist das auf einem, in einem zur Spaltweite großem Abstand befindlichen, Schirm entstehende Muster von der Spaltweite und -anzahl abhängig. Dabei gilt: Je feiner das Spaltpattern, desto größer ist der Abstand zwischen den Interferenzmaxima.

Effektiv wird das Licht also in Teilstrahlen aufgeteilt, deren Winkel abhängig von der Amplitudenstruktur des Objektes ist. Je weiter man sich nun von dem Objekt entfernt, desto größer wird das Verhältnis zwischen Winkel- und räumlichen Informationen. In der Unendlichkeit gibt der Ort eines Maximums nur noch Informationen über die

Größenordnung der Struktur, nicht mehr über dessen Position. Dies entspricht dem anschaulichen Bild der FT.

Es kann nun gezeigt werden, dass die besondere Beschaffenheit einer Sammellinse, die sich genau in Brennweite zu dem Objekt und einem Schirm befindet, dafür sorgt, dass die . Dies ist in Abbildung 1 am Beispiel eines einfachen Spaltes illustriert.

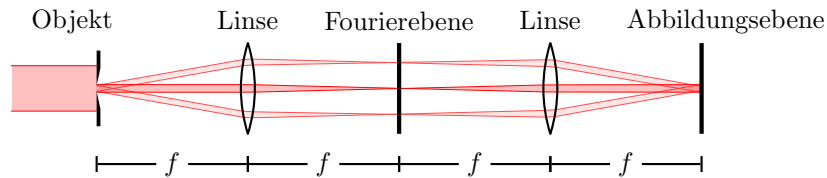


Figure 1: Ein kollimierter Laserstrahl von links trifft auf ein Objekt (hier einen Spalt) und wird gestreut. Hier sind beispielhaft drei Strahlenverläufe eingezeichnet. Diese könnten als 1., 0. und -1. Intensitätsmaximum der Streuung interpretiert werden. Man erkennt, dass durch das Objekt die Intensitätsverteilung in der Fourierebene beeinflusst wird. Eine zweite Linse transformiert diese wieder zurück und erzeugt so eine Abbildung des Objektes.

Eine mathematische Herleitung dieser, hier nur anschaulich erläuterten Effekte, ist beispielsweise im Begleitheft zu diesem Versuch oder in[6] zu finden.

Eine weitere Linse transformiert das Bild zurück und man erhält eine Abbildung des Objektes. Dies wird

2 Experimental Procedure

2.1 Einkopplung

2.2 Lichtsensor

Für die Optimierung der Einkopplungsleistung wurde ein Powermeter benutzt. Dieses wurde an ein digitales Oszilloskop angeschlossen, um schnelle Änderungen zu visualisieren und so den Optimierungsvorgang, insbesondere das *Walken*, zu erleichtern. Da diese Powermeter mit recht hohen Anschaffungskosten einher gehen, wurde in diesem Versuchsteil versucht eine Leistungsmessung des Laserlichtes mit einer Photodiode zu messen.

Die verwendete Photodiode¹ produziert laut Datenblatt einen Strom von 0,18-0,21 mA pro Milliwatt eingestrahelter Lichtleistung bei 436 nm Wellenlänge. Da Strom nicht direkt gemessen werden kann, wird ein Widerstand parallel geschaltet und der Spannungsabfall über diesen nach $U = R \cdot I$ mit einem Oszilloskop gemessen. Wenn man für 1 mW Lichtleistung einen Spannungsabfall von 100 mV erreichen möchte, würde man einen $U/I = 100 \text{ mV} / 0,2 \text{ mA} = 500 \Omega$ Widerstand verwenden. Da dies jedoch ein sehr kleiner Messbereich ist, wurden 4 V pro Milliwatt angesetzt und entsprechend ein $20 \text{ k}\Omega$ Widerstand verwendet.

Für sehr schwachen Lichteinfall (Deckenlampe, Fenster aus der Ferne, ...) konnte auf dem Oszilloskop eine Schwankung in der Spannung festgestellt werden. Bei hohen Lichtleistungen fallen diese Schwankungen sehr klein aus. Für andere Widerstandswerte, z.B. 10 oder $100 \text{ k}\Omega$, erhält man nahezu identische Werte um 440 mV. Da dies in etwa der Bandlücke eines PN-Überganges entspricht, liegt die Vermutung nahe, dass dies eine Sättigungserscheinung ist.

Daher wurden kleinere Widerstandswerte von 500 und 1000Ω getestet. Die gemessenen Spannungen sowie die dazu vom Powermeter abgelesenen Werte für die Lichtleistung sind in Abbildung 2 aufgetragen.

Es ist für $1 \text{ k}\Omega$ eine Sättigung ab etwa 0,9 mW erkennbar, die Variante mit 500Ω weist im gesamten Messbereich ein sehr lineares Verhalten auf. Die Fehlerbalken in der x-Achse wurden zu 0,01 mW gewählt, da das Powermeter nur zwei Nachkommastellen anzeigt. Der Fehler in der y-Achse wurde auf 5% gewählt, was in etwa dem Unterschied zwischen Mittelwert und Maximum der Spannung in einem kleinen Zeitraum auf dem Oszilloskop entspricht.

Es lässt sich vermuten, dass der Aufbau mit 500Ω für Lichtintensitäten bis etwa 1,5 mW geeignet ist, da dort in etwa die Spannung erreicht werden sollte, bei der die Reaktion des $1 \text{ k}\Omega$ Aufbaus nicht mehr linear in der Lichtleistung ist. Bei größeren Lichtintensitäten sind entsprechend kleinere Widerstände zu empfehlen. Falls keine absoluten Leistungen berechnet werden sollen, sondern die relative Intensität von Interesse ist, kann natürlich auch der nicht-lineare Bereich zum Teil mit genutzt werden.

¹Modell OSD15-5T von CENTRONIC[7]

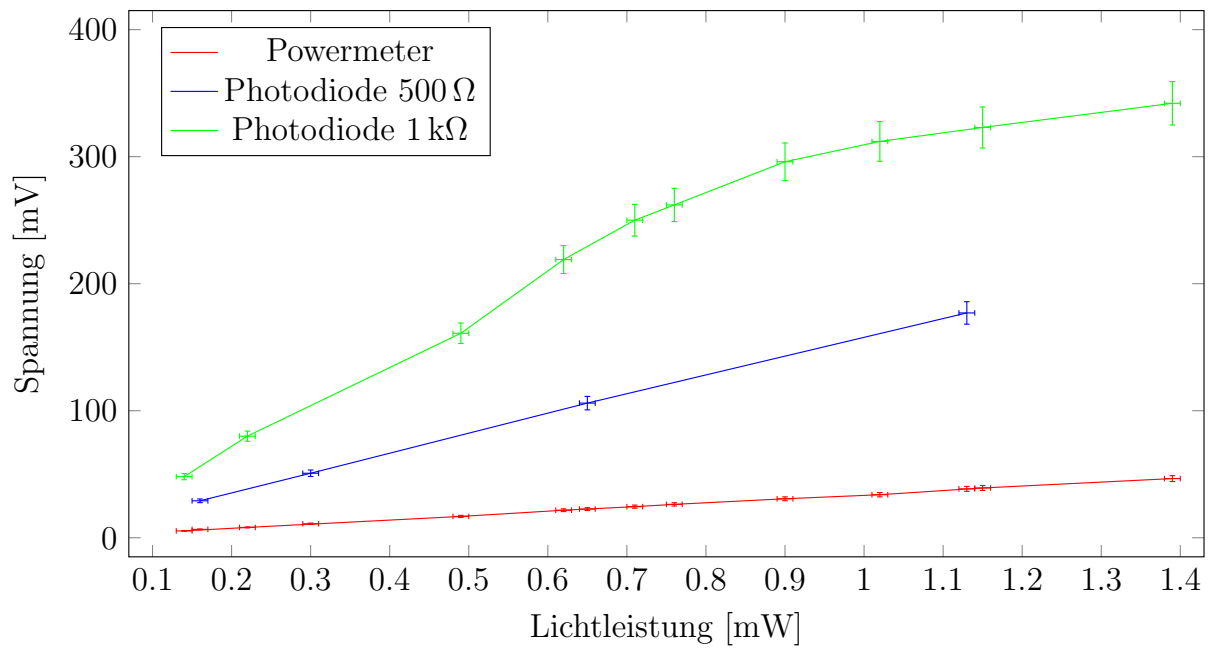


Figure 2: Spannungen gemessen über je einen zu einer Photodiode parallel geschalteten Widerstand mit 500 Ω und 1000 Ω . Zusätzlich ist der Verlauf der Spannung eines Powermeters aufgetragen. Die Messpunkte (Fehlerbalken) sind für die Anschaulichkeit mit Linien verbunden.

2.3 Abbildung und Fourierbild

3 Auswertung

4 Fazit

References

- [1] R. L. Easton, *Fourier methods in imaging*. Chichester: Wiley, 2010.
- [2] „JPEG,” Aug. 2015, Page Version ID: 677928895. [Online]. Verfügbar unter: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=JPEG&oldid=677928895>
- [3] Prof. Dr. Norbert Link, „Vorlesungsscript: Diskrete Fouriertransformation - Informationsgewinnung (Computer Vision).” [Online]. Verfügbar unter: <http://www.home.hs-karlsruhe.de/~laas0002/Skripte/>
- [4] „Huygenssches Prinzip – Wikipedia.” [Online]. Verfügbar unter: https://de.wikipedia.org/wiki/Huygenssches_Prinzip
- [5] „Beugungsintegral,” Feb. 2015, Page Version ID: 138644725. [Online]. Verfügbar unter: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Beugungsintegral&oldid=138644725>
- [6] Universität Göttingen, „LP – Fouriertransformation in der Optik.” [Online]. Verfügbar unter: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/5416>
- [7] Farnell.com, „OSD15-5T - CENTRONIC - FOTO DETEKTOR 5NA.” [Online]. Verfügbar unter: <http://de.farnell.com/centronic/osd15-5t/foto-detektor-5na/dp/548730?ost=548730>

List of Figures

1	Illustration: Inverse und Fouriertransformation an Linsen	3
2	Vermessung einer Photodiode	5

5 Appendix