

Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene

---

# Quanten-Hall-Effekt

---

Bernd Lienau, Sebastian Mahncke, Lars Rohwer

blienau@physnet.uni-hamburg.de - mahncke.sebastian@gmail.com - larsrohwer@gmail.com

Sommersemester 2015, Universität Hamburg  
Versuchsprotokoll vom 10. September 2015(2. Auflage)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1	2-Dimensionales Elektronengas . . . . .	4
2.1.1	Aufbau der Probe . . . . .	4
2.1.2	Quantenmechanischer Einfluss des Magnetfeldes . . . . .	5
2.2	Klassischer Hall-Effekt . . . . .	6
2.3	Quanten-Hall-Effekt . . . . .	9
2.3.1	Das Randkanalmodell . . . . .	9
2.3.2	Erklärung der Hall-Plateaus und der SDH-Oszillationen . . . . .	10
2.3.3	Lokalisierte Zustände . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Experimenteller Aufbau, Messmethode und Durchführung</b>	<b>13</b>
3.1	Aufbau des Experiments . . . . .	13
3.2	Durchführung des Versuches . . . . .	14
3.2.1	Einbau der Probe . . . . .	14
3.2.2	Messungen . . . . .	14
3.2.3	Ausbau der Probe . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Messergebnisse mit Fehlerdiskussion</b>	<b>16</b>
4.1	Gleichstrommessung . . . . .	17
4.1.1	Über die Hall-Spannung . . . . .	17
4.1.2	Über die SDH-Oszillationen . . . . .	17
4.2	Wechselstrommessung . . . . .	19
4.2.1	Über die Hall-Spannung . . . . .	19
4.2.2	Über die SDH-Oszillationen . . . . .	19
4.2.3	Vergleich der Messergebnisse . . . . .	20
4.3	Winkelabhängigkeit . . . . .	20
4.4	Temperaturabhängigkeit . . . . .	21
4.5	Gatespannungsabhängigkeit . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Abschließende Diskussion</b>	<b>25</b>
<b>6</b>	<b>Literatur und Quellen</b>	<b>26</b>
6.1	Literatur . . . . .	26
6.2	Grafiken . . . . .	26
<b>7</b>	<b>Anhang</b>	<b>27</b>
7.1	Gleichstrommessung . . . . .	27
7.2	Wechselstrommessung . . . . .	28
7.3	Winkelabhängigkeit . . . . .	29
7.4	Temperaturabhängigkeit . . . . .	30
7.5	Gatespannungsabhängigkeit . . . . .	31

# 1 Einleitung

In dem vorliegenden Versuchsprotokoll werden die theoretischen Grundlagen sowie die Befunde des Experiments zum Quanten-Hall-Effekt mit abschließender Diskussion dargestellt.

Der Quanten-Hall-Effekt wurde 1980 von K. von Klitzing, G. Dorda sowie M. Pepper<sup>[1]</sup> entdeckt und unterscheidet sich von dem klassischen Hall-Effekt, bei dem der Hall-Widerstand  $R_H$  linear mit steigendem Magnetfeld zunimmt. Unter den Voraussetzungen, dass ein starkes Magnetfeld anliegt, ein 2DEG vorhanden ist und sich die zu untersuchende Probe in einem Bereich sehr tiefer Temperaturen befindet, ist eine solche Proportionalität jedoch nicht mehr gegeben und es wird vom Quanten-Hall-Effekt gesprochen.

Bei dem Quanten-Hall-Effekt bildet der Hall-Widerstand Plateaus, die die Werte

$$R_H = \frac{1}{\nu} \cdot 25812,8 \, \Omega = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{h}{e^2} \quad (1)$$

annehmen können und unabhängig von der Probe sind. Dabei ist  $\nu \in \mathbb{R}$  ein von der Probe unabhängiger Füllfaktor,  $h$  das Plancksche Wirkungsquantum und  $e$  die Elementarladung.

Für die physikalische Untersuchung dieser Eigenschaft erhielt Klitzing im Jahr 1985 den Nobelpreis.

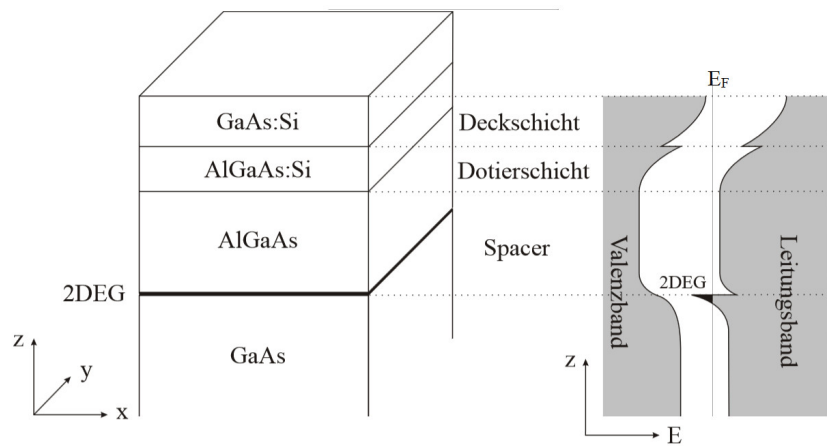
In diesem Experiment wird der elektronische Transport in einem 2DEG untersucht, indem die Ladungsträgerdichte und -beweglichkeit in Abhängigkeit verschiedener Parameter (siehe Kapitel 3.2) mit Hilfe der von dem Quanten-Hall-Effekt verursachten Querspannung bestimmt wird. Durch Variieren des Winkels zwischen Magnetfeldlinien und Probe wird der Einfluss der Magnetfeldorientierung analysiert. Im abschließenden Versuchsteil wird der Abstand des 2DEGs von der Gateelektrode durch Anlegen einer Gatespannung ermittelt.

## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 2-Dimensionales Elektronengas

Wie bereits erwähnt müssen zur Beobachtung des Quanten-Hall-Effekts gewisse Bedingungen gegeben sein. Eine wesentliche davon ist die Existenz eines zweidimensionalen Elektronengases (2DEG). In diesem Versuch werden sich zur Erzeugung dessen die Eigenschaften der Halbleiterheterostruktur aus GaAs und AlGaAs zum Nutzen gemacht.

#### 2.1.1 Aufbau der Probe



**Abb. 1:** Links: Vereinfachte Skizze der GaAs-AlGaAs-Heterostruktur - Rechts: Bandkantenverlauf der Halbleiterheterostruktur, [Vorbereitungsmappe, S.9]

In der obigen Abbildung ist ein schematischer Aufbau der zu untersuchenden Probe zu sehen. Die Grenzschicht zwischen dem GaAs und dem AlGaAs ist auf atomarer Ebene glatt, da sich die Gitterkonstanten beider Materialien um weniger als einen Prozent unterscheiden. Da die Bandlücke des AlGaAs jedoch höher als die des GaAs ist, hat das Leitungsband des GaAs energetisch günstigere Zustände, die Folge ist ein Elektronenfluss aus dem Silizium-dotierten AlGaAs in das undotierte GaAs. Dies führt zu einem Verbiegen des Leitungs- und des Valenzbandes, wie es in Abbildung 1 rechts zu sehen ist.

Zwischen dem AlGaAs und dem GaAs bildet sich approximativ ein Potentialtopf im Leitungsband, dessen Minimum unterhalb der Fermienergie  $E_F$  liegt. Aufgrund des energetisch günstigeren Niveaus werden die Elektronen dort gefangen. Da die Ausdehnung  $\Delta z$  dieses Potentialtopfes nur wenige Nanometer<sup>[2]</sup> groß ist, spricht man in guter Näherung von einem zweidimensionalen Elektronengas, dessen Bewegungen in der  $x - y$ -Ebene frei sind.

Das undotierte AlGaAs wird auch Spacer genannt und dient überwiegend zum Reduzieren von den ionisierten Dotieratomen hervorgerufenen Streupotentialen, damit sich die freie mittlere Weglänge und damit die Beweglichkeit der Elektronen erhöht. Die Deckschicht, bestehend aus dotiertem GaAs, soll die Probe vor Oxidation schützen und Oberflächenzustände abschirmen, hat technisch für die Elektronen jedoch keine weitere Bedeutung.

### 2.1.2 Quantenmechanischer Einfluss des Magnetfeldes

Für den Verlauf des Experimentes ist es essentiell, die Energierelationen der Elektronen in dem zweidimensionalen Elektronengas bestimmen. Betrachtet man das 2DEG quantenmechanisch, so lässt sich feststellen, dass die Energien der Elektronen aufgrund der Einschränkung in  $z$ -Richtung quantisiert sind und die Werte  $E_i^z$  mit  $i = 1, 2, \dots$  annehmen können. In zwei Dimensionen ( $x$ - und  $y$ -Richtung) ist die Teilchenbewegung jedoch uneingeschränkt, sodass sich für die Gesamtenergie ergibt:

$$E(k_x, k_y, i) = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m^*} + E_i^z \quad (2)$$

Dabei sind  $k_x, k_y$  die Wellenvektoren der Elektronen in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung,  $m^*$  die effektive Masse und  $i = 1, 2, \dots$ . Die Quantisierung in  $z$ -Richtung hat zudem zur Folge, dass sich für jedes Energieniveau ein zweidimensionales Subband, ein Leitungsband in  $x$ - und in  $y$ -Richtung, bildet.

Für den Quanten-Hall-Effekt ist die Zustandsdichte, also die Anzahl an Zuständen pro Energieintervall und Probenvolumen, von außerordentlicher Bedeutung. Diese Größe lässt sich berechnen mit

$$D(E) = \frac{1}{V} \frac{\partial N(E)}{\partial E} \quad (3)$$

mit dem Probenvolumen  $V$  und der Teilchenzahl  $N$ . Mit Gleichung 2 und der Tatsache, dass das Volumen  $V$  nur zweidimensional ist, folgt allgemein für die Zustandsdichte

$$D(E) = g \frac{m^*}{2\pi\hbar^2} \quad (4)$$

Sie ist somit konstant mit einem Entartungsfaktor  $g$ , welcher für Spin-Entartung  $g_s = 2$  oder für die materialabhängige Valley-Entartung  $g_v$  auch größere Werte annehmen kann.

Das Anlegen eines Magnetfeldes senkrecht zur Bewegungsrichtung der Elektronen hat eine Verletzung des obigen Zusammenhangs zur Folge, die Zustandsdichte ist in dieser Situation nicht mehr konstant. Eine Lorentzkraft wird auf die Teilchen, die sich infolgedessen auf Kreisbahnen bewegen, ausgeübt. Die Frequenz dieser Kreisbewegung beträgt

$$\omega_c = \frac{eB}{m^*} \quad (5)$$

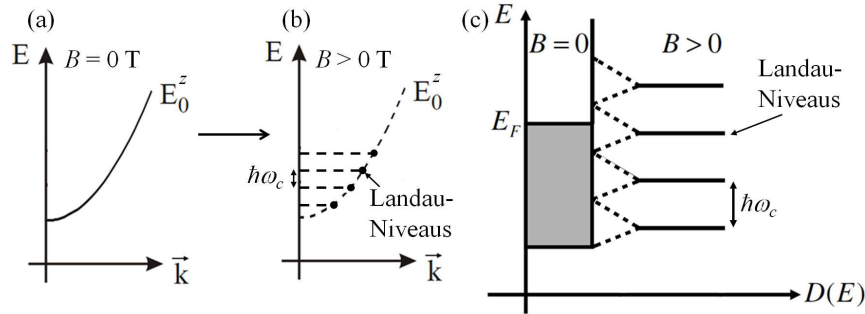
und wird auch Zyklotronfrequenz genannt.

Diese Kreisbewegung kann sich als Überlagerung zweier harmonischer Oszillatoren vorgestellt werden, die senkrecht zueinander in der  $xy$ -Ebene schwingen. Bekanntermaßen sind die Energieniveaus eines solchen Oszillators äquidistant, für die Elektronenenergie dispersion ergibt sich nach Anlegen eines externen  $B$ -Feldes deshalb

$$E = E_i^z + \underbrace{\left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c}_{E_n} + g_L^* \mu_B B s \quad (6)$$

mit  $n, i = 1, 2, 3, \dots$ , Spin-Quantenzahl  $s = \pm \frac{1}{2}$ , dem effektiven Lande-Faktor  $g_L^*$  und dem Bohrschen Magneton  $\mu_B$ . Der mittlere Term drückt dabei die kinetische Energie der Elektronen

in quantenmechanischer Betrachtung aus, die Energien  $E_n$  für unterschiedliche  $n \in \mathbb{Z}$  heißen Landau-Niveaus. Der letzte Term berücksichtigt außerdem die Spin-Bahn-Wechselwirkung im physikalischen System.



**Abb. 2:** Vergleich der Energieabhängigkeit im klassischen Bereich (a) mit dem quantenmechanischen Bereich (b). (c) Vergleich des Zusammenhanges der Zustandsdichte mit der Energie im klassischen und quantenmechanischen Bereich, [Vorbereitungsmappe, S.12]

Die obige Abbildung 2 stellt veranschaulicht dar, dass die Zustandsdichte im quantenmechanischen Fall diskrete Werte annimmt. Da das Magnetfeld lediglich Einfluss auf die Bewegungsrichtung der Elektronen, nicht aber auf ihre kinetische Energie hat, lässt sich die größtmögliche Anzahl  $N_L$  an Elektronen pro Flächeneinheit in einem spinaufgespaltenem Landau-Niveau aus der Zustandsdichte  $\frac{D(E)}{g}$  bei  $B = 0 \text{ T}$  berechnen mit

$$N_L = \frac{D(E)}{g} \hbar\omega_c = \frac{eB}{h} \quad (7)$$

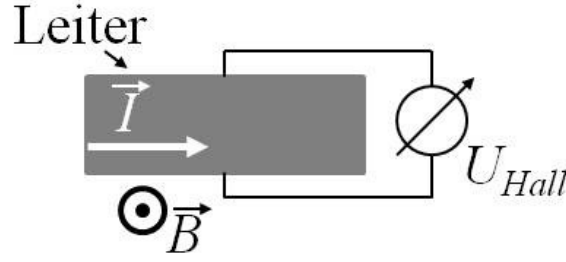
Sie ist also proportional zum Magnetfeld  $B$ . Der bereits in der Einleitung angesprochene Füllfaktor  $\nu$  gibt Auskunft über die Anzahl an zumindest teilweise besetzten Spin aufgespaltenen Landau-Niveaus bei gegebener Ladungsträgerdichte  $n_s$  und Magnetfeld  $B$ :

$$\nu = \frac{n_s}{N_L} = \frac{\hbar n_s}{eB} \quad (8)$$

## 2.2 Klassischer Hall-Effekt

Der amerikanische Physiker Edwin H. Hall entdeckte 1879, dass sich bei Anlegen eines Magnetfeldes senkrecht zum Stromfluss eines Leiters eine Spannung  $U_{\text{Hall}}$  aufbaut, die senkrecht zur Stromrichtung und zum Magnetfeld ist. Dieser Hall-Effekt ist auf die Lorentzkraft zurückzuführen, die eine Ablenkung der geladenen Teilchen im Leiter zur Folge hat und proportional zur Magnetfeldstärke ist.

Um die Beweglichkeit der Elektronen in dem Versuchsaufbau zu ermitteln wird der Ansatz der Drude-Theorie gewählt, nach der das Elektronengas nach den klassischen Newtonschen Bewegungsgleichungen beschrieben werden kann. Bewegt sich ein Ladungsträger in einem elektrischen



**Abb. 3:** Schematischer Aufbau zur Beobachtung des Hall-Effekts, [Vorbereitungsmappe, S. 13]

Feld  $\vec{E}$  und einem magnetischen Feld  $\vec{B}$ , so ist die Bewegungsgleichung durch

$$\frac{m^*}{\tau} \vec{v}_D = -e(\vec{E} + \vec{v}_D \times \vec{B}) \quad (9)$$

mit der mittleren Zeit  $\tau$  zwischen zwei Elektronenstößen und der Driftgeschwindigkeit  $\vec{v}_D$  der Elektronen. Setzt man zunächst  $B = 0T$  voraus, so ergibt sich für die Driftgeschwindigkeit

$$\vec{v}_D = \frac{-e\tau}{m^*} \vec{E} = \mu \vec{E} \quad (10)$$

mit der Beweglichkeit

$$\mu = -\frac{e\tau}{m^*} \quad (11)$$

Die Driftgeschwindigkeit wird benötigt, um die Stromdichte  $\vec{j}$  in der Probe zu berechnen. Diese Größen stehen im folgenden Verhältnis:

$$\vec{j} = -en_s \vec{v}_D = en_s \mu \vec{E} = \sigma_o \vec{E} \quad (12)$$

mit der spezifischen Leitfähigkeit  $\sigma_o = en_s \mu$ . Da die Elektronenbewegung wegen des 2DEGs in  $z$ -Richtung eingeschränkt ist und somit lediglich die  $x$ - und  $y$ -Komponenten von Bedeutung sind, kann die obige Gleichung als Produkt aus Tensor und Vektor geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (13)$$

Die Einträge auf der Diagonalen des Tensors geben die spezifische Leitfähigkeit in Richtung des elektrischen Feldes an, die auf der Nebendiagonalen sind nur bei  $B \neq 0T$  von Null verschieden. Durch Berechnen der Inversen lässt sich dann der spezifische Widerstandstensor angeben:

$$\rho = \sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}\sigma_{yx}} \begin{pmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} \quad (14)$$

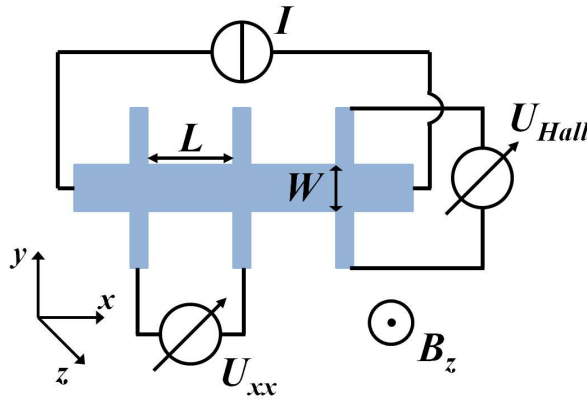
Für die einzelnen Komponenten ergibt sich damit

$$\rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{1}{en_s} B \text{ und } \rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{1}{e\mu n_s} \quad (15)$$

Der spezifische Widerstand  $\rho_{xx}$  entlang der Stromrichtung ist also unabhängig vom Magnetfeld, der spezifische Hall-Widerstand  $\rho_{yx}$  steigt linear mit dem  $B$ -Feld an. Durch Messungen der spezifischen Widerstände kann nach Umstellen der **Gleichungen 15** die Elektronendichte  $n_s$  und die Beweglichkeit  $\mu$  berechnet werden. Da die Probe in diesem Experiment isotrop ist, sind die Werte dieser Größen unabhängig von der Raumrichtung. Fließt beispielsweise nur ein Strom in  $x$ -Richtung, so ist

$$\rho_{xx} = \frac{E_x}{j_x} \text{ und } \rho_{xy} = \frac{E_y}{j_x} \quad (16)$$

Da es aber technisch praktikabler ist, eine Spannung bei einem konstanten absoluten Strom  $I$  anstelle einer Stromdichte  $\vec{j}$  zu messen, wird in diesem Versuch eine Probe in der Hall-Streifen-Geometrie verwendet, deren Aufbau der Abbildung 4 entnommen werden kann.



**Abb. 4:** Darstellung der Probe in der Hall-Streifen-Geometrie, [Vorbereitungsmappe, S. 16]

Mit Hilfe dieses Aufbaus ist gewährleistet, dass die Hall-Spannung  $U_{\text{Hall}}$  immer senkrecht zum Strom gemessen wird und Spannungsmessungen in einer Vier-Pol-Geometrie durchgeführt werden können. Der Strom gemäß der obigen Abbildung 4 ist

$$I = j \cdot W \quad (17)$$

da sich dieser nur in zwei Dimensionen bewegen kann. Hierbei ist  $W$  die Breite des Hall-Streifens. Für die Spannungen ergibt sich

$$U_{\text{Längs}} = U_{xx} = E_x \cdot L \text{ und } U_{\text{Hall}} = E_y \cdot W \quad (18)$$

Mit den Zusammenhängen aus **Gleichung 16** lassen sich die spezifischen Widerstände auch ausdrücken durch

$$\rho_{xx} = \frac{U_{xx}}{I} \frac{W}{L} \text{ und } \rho_{xy} = \frac{U_{\text{Hall}}}{I} \quad (19)$$

Der Vergleich mit **Gleichung 15** führt auf die essentiellen Formeln zur Berechnung der Ladungsträgerdichte und -beweglichkeit:

$$n_s = \frac{I}{e} \frac{1}{\frac{dU_{\text{Hall}}}{dB}} \quad (20)$$

$$\mu = \frac{1}{n_s e} \frac{I}{U_{xx}} \frac{L}{W} \quad (21)$$



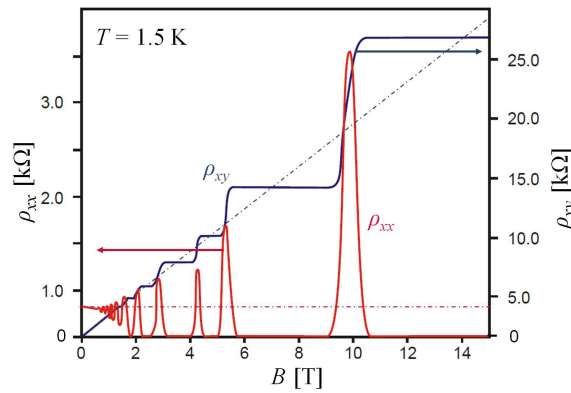
## 2.3 Quanten-Hall-Effekt

Bei Magnetfeldern mit einer Stärke von  $|B| < 2$  Tesla stimmen die Werte für den Hall-Widerstand im quantenmechanischen Regime in etwa mit denen des klassischen Regimes überein. Erhöht man jedoch die Stärke des Feldes, so sind deutliche Plateaus im Verlauf des spezifischen Hall-Widerstandes  $\rho_{xy}$  zu sehen, deren Werte quantisiert sind

$$R_H = \rho_{xy} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2} = \frac{1}{\nu} \cdot 25812,8 \, \Omega \quad (22)$$

mit  $\nu = 1, 2, \dots$ .

Der spezifische Längswiderstand weist bei starken Magnetfeldern Shubnikov-de Haas-Oszillationen auf, im Bereich der Plateaus fällt dieser sogar auf Null ab. Die Abbildung 5 zeigt eine typische Messung:



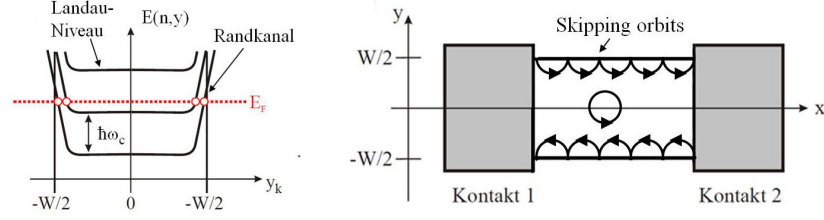
**Abb. 5:** Typisches Messergebnis des Quanten-Hall-Effekts, [Vorbereitungsmappe, S. 17]

### 2.3.1 Das Randkanalmodell

Zumindest ein Anteil der oben erwähnten Phänomene kann mit dem Randkanalmodell erklärt werden. Am Rand der Probe wird ein Potential erzeugt, das eine Erhöhung der Landau-Niveaus zur Folge hat, sodass dort auch elektronische Zustände nahe der Fermi-Energie  $E_F$  entstehen, wenn diese im Innern der Probe eigentlich zwischen zwei Landau-Niveaus liegt. Es bilden sich ein-dimensionale Randkanäle, die zum Transport der Ladungsträger beitragen. Diese Ladungsträger bewegen sich abhängig von der Magnetfeldorientierung nur in eine Richtung. Da das Magnetfeld die Lorentzkraft auf die geladenen Teilchen ausübt können diese chiralen Zustände trotz eventueller Stöße mit Phononen wieder auf ihre Bahn finden, wie es in der Abbildung 6 dargestellt ist.

Um den Ladungstransport in diesen Randkanälen anschaulicher zu beschreiben kann der Landauer-Büttiker-Formalismus herangezogen werden. Dieser stellt Analogien zwischen der Optik und der Technik her - so wird beispielsweise die Transmission einer Elektronenwelle wie die einer elektromagnetischen Lichtwelle behandelt. Abhängig von der Stärke des Magnetfeldes und somit auch der Lage der Fermi-Energie  $E_F$  (vergleiche Abbildung 6 links) variiert auch die Anzahl  $M$  an Randkanälen. Die Anzahl der Kontakte an der Probe werde mit  $p$  bezeichnet, diese liegen jeweils auf verschiedenen chemischen Potentialen  $\mu_p$ .

Der Kern dieses Formalismus' ist die Annahme, dass die Elektronen mit der Wahrscheinlichkeit



**Abb. 6:** Links: Skizzenhafte Darstellung der Erzeugung von Randpotentialen - Rechts: Bewegung der Elektronen im Randkanalmodell, [Vorbereitungsmappe, S.19]

$T_{lm}$  von dem Kontakt  $m$  zu dem Kontakt  $l$  transmittiert werden. Bei einer Probe mit  $p = 2$  betrage  $T_{21} = 1$  und  $T_{12} = 0$  am oberen Rand (am unteren Rand sind die Wahrscheinlichkeiten genau umgekehrt), da ein Elektron, das am ersten Kontakt der Probe in den Randkanal transmittiert wird, nur in den zweiten Kontakt aus der Probe herauskommen kann. Für die Spannung zwischen diesen Kontakten ergibt sich in dem Fall

$$U_{12} = U_1 - U_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{e} \quad (23)$$

Mittels der Integration von dem Produkt aus Transmissionswahrscheinlichkeit, Zustandsdichte und Gruppengeschwindigkeit über die Energie erhält man den Strom

$$I_o = -e \left( \int_0^{\mu_1} T_{21} D(E) v(E) dE - \int_0^{\mu_2} T_{12} D(E) v(E) dE \right) \quad (24)$$

mit  $v(E) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k}$ . Der gesamte Nettostrom setzt sich aus dem Strom des oberen und des unteren Kanals zusammen und beträgt

$$I = I_o + I_u = -e \int_{\mu_2}^{\mu_1} D(E) v(E) dE = \frac{e^2}{h} (U_1 - U_2) \quad (25)$$

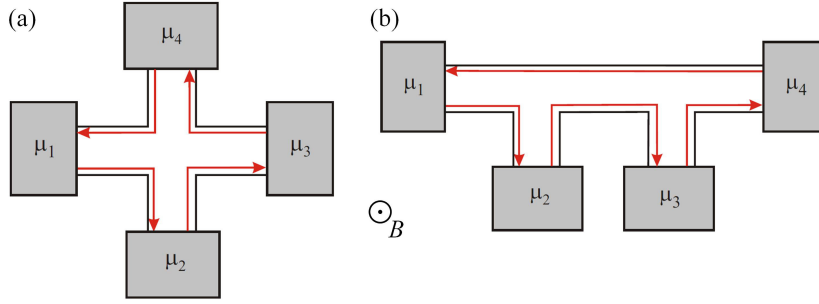
### 2.3.2 Erklärung der Hall-Plateaus und der SDH-Oszillationen

Das oben erwähnte Randkanalmodell und der Landauer-Büttiker-Formalismus helfen dabei, die Ursache der Hall-Plateaus und der Shubnikov-de Haas- (SDH-)Oszillationen zu erklären. Es wird nun eine Vierpunkt-Messung gemäß der Abbildung 7 betrachtet, wobei die roten Pfeile den möglichen Stromfluss in  $M$  Randzuständen angeben. Positive Ströme sind dabei die Ströme, die in einen Kontakt hineinfließen.

Analog zur Gleichung 25 lassen sich die Ströme  $I_i$  mit  $i = 1, 2, 3, 4$  berechnen und ein Gleichungssystem aufstellen, mit dessen Lösungen die Hall-Spannung  $U_{\text{Hall}} = U_4 - U_2$  ermittelt werden kann. Durch Umstellen des Ohmschen Gesetztes ergibt sich für den Hall-Widerstand

$$R_H = \frac{U_H}{I} = \frac{1}{M} \frac{h}{e^2} \quad (26)$$

Dieser ist also von der Anzahl  $M$  der Randzustände abhängig. Durchläuft ein Landau-Niveau die Fermi-Energie in den Übergangsbereichen zwischen zwei Plateaus, so ändert sich die Anzahl an

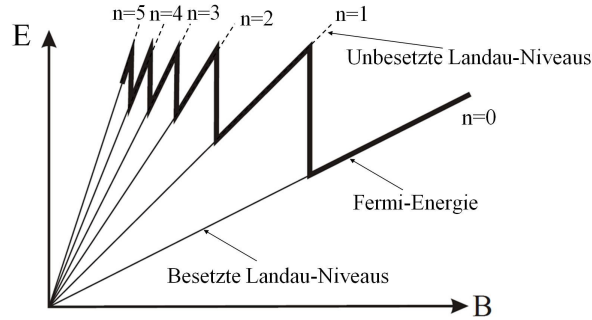


**Abb. 7:** (a) Hall-Kreuz-Geometrie zur Messung der Hall-Spannung - (b) Kontaktgeometrie zur Messung des Längswiderstandes, [Vorbereitungsmappe, S. 21]

Randkanälen und infolgedessen auch der Wert  $R_H$ . Mit diesen Informationen lässt sich also das Erscheinen der Plateauwerte im Quer- bzw. Hall-Widerstand erklären. Auf die Übergangsbereiche zwischen den Plateaus wird im folgenden Kapitel 2.3.3 eingegangen.

Um zu verstehen, warum der Längswiderstand im Bereich der Plateaus verschwindet, kann ebenfalls der Landauer-Büttiker-Formalismus verwendet werden. Liegt die Fermi-Energie zwischen zwei Landau-Niveaus, so liegen die Kontakte, an denen die Längsspannung gemessen wird, auf dem selben Potential, sodass die Spannung den Wert Null annimmt. Im Fall einer idealen Probe tritt dies allerdings nur bei singulären Magnetfeldwerten auf.

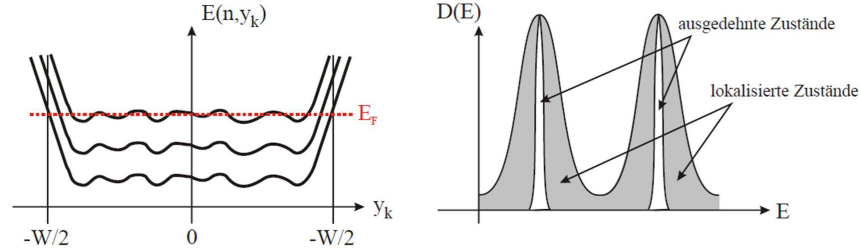
### 2.3.3 Lokalisierte Zustände



**Abb. 8:** Abhängigkeit der Landau-Niveaus und Fermi-Energie vom Magnetfeld, [Vorbereitungsmappe, S. 23]

In einer idealen Probe mit peakförmiger Zustandsdichte ist die Fermi-Energie nur bei einem singulären Magnetfeld zwischen zwei Landau-Niveaus. Nach Definition der Fermi-Energie liegt diese zwischen dem höchsten besetzten und dem niedrigsten unbesetzten Elektronenniveau. Der Abstand  $\hbar\omega_c$  der Landau-Niveaus steigt linear mit dem  $B$ -Feld an, sodass die teilweise gefüllten Landau-Niveaus zu größeren Energien verschoben und gleichzeitig entvölkert werden. Bei ausreichend großem Entartungsgrad des niedrigen Niveaus ist das obere Niveau vollständig entvölkert und die Fermi-Energie fällt auf das nächst kleinere Energieniveau ab.

Bei einer realen Probe treten innerhalb der Probe allerdings Fluktuationen in der Zustandsdichte auf, da die Landau-Niveaus nicht, wie es in Abbildung 6 dargestellt ist, konstant im Innern der Probe verlaufen, sondern Störstellen zur Verbreiterung der Zustandsdichten führt.



**Abb. 9:** Links: Darstellung der Landau-Niveaus in einer realen Probe - Rechts: Ausdehnung der Zustandsdichte aufgrund der Störquellen, [Vorbereitungsmappe, S. 24]

Das Randkanalmodell, der Landauer-Büttiker-Formalismus und die lokalisierten Zustände dienen also zur Erklärung der Ursache für die Ausdehnung der Hall-Plateaus und der Minima der Shubnikov-de Haas-Oszillationen.

In den Übergangsbereichen, in denen die Fermi-Energie exakt auf einem Landau-Niveau liegt, sind die chiralen Zustände in den Randkanälen nicht mehr vorhanden, sodass es dann zu Rückstreuung kommen kann und der Widerstand in Längsrichtung von Null verschiedene Werte annimmt.

## 3 Experimenteller Aufbau, Messmethode und Durchführung

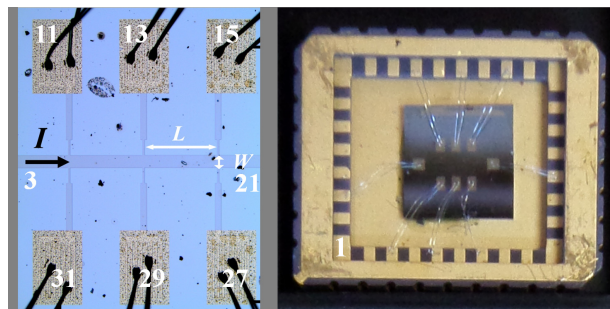
### 3.1 Aufbau des Experiments

Um den Quanten-Hall-Effekt beobachten zu können muss die Probe auf sehr tiefe Temperaturen heruntergekühlt werden und sich in einem starken Magnetfeld befinden. Das Kühlen wird mit flüssigen Helium in einem Kryostat, bestehend aus einem Edelstahlbehälter, realisiert. Bei Atmosphärendruck beträgt die Temperatur 4,2 Kelvin, sodass thermische Anregungen und Streuungen an Phononen vernachlässigbar sind. Ein Isolationsvakuum außerhalb des Kryostaten verhindert ein Verkochen des Heliums.

Auch die Spulen aus supraleitenden Draht befinden sich in einem Bad aus flüssigen Helium, sie können Magnetfelder von bis zu  $\pm 7,7$  Tesla erzeugen und über das spezielle Netzteil mit einem Labview-Programm gesteuert werden.

Der Probenstab wird in die Probenkammer, die durch ein Vakuum vom Heliumbad getrennt ist, herabgelassen. Mit Hilfe eines Nadelventils kann Helium aus dem Heliumbad in die Probenkammer gelassen werden, welches durch zusätzliches Pumpen verdampft wird und die Probenkammer aufgrund der Verdampfungskühlung weiter kühlt. Dieses Verfahren ermöglicht Probenkammertemperaturen von bis zu 1,5 Kelvin. Ein elektrischer Heizer im Raum der Probe kann den Hall-Streifen auf bis zu 250 K erhitzen, ein Sensor in der Probenkammer und ein Sensor in der Nähe des Heizers übermittelt die aktuellen Werte an ein Labview-Programm.

Zum Durchführen der Messungen werden unter anderem eine DC-Stromquelle, zwei Nanovoltmeter sowie AC-Messgeräte mit Lock-In-Verstärkern verwendet. Ein Fischer-Stecker, der den Probenstab mit einer Breakoutbox verbindet, dient zum korrekten Anschließen der Messgeräte an die entsprechenden Kontakte. Abbildung 10 zeigt die Aufnahme einer beispielhaften Probe unter einem Mikroskop sowie die Chipcarrier-Fassung, die Kontakte der in diesem Versuch verwendeten Probe waren jedoch anders belegt.



**Abb. 10:** Links: Aufnahme der Kontaktgeometrie einer Probe unter einem Mikroskop - Rechts: Fotoaufnahme der Probe in einem Chipcarrier, [Vorbereitungsmappe, S. 28]

Bei der DC-Messungen muss aufgrund der Störanfälligkeit des Signals durch WLAN, Handys etc. auf Koaxialkabel zurückgegriffen werden, bei der AC-Messungen filtern die Lock-In-Verstärker die von der Stromquelle vorgegebene Frequenz durch Hoch- und Tiefpassfilter bereits heraus.

Sämtliche Messgeräte können über ein entsprechendes Labview-Programm kontrolliert und ausge-

lesen werden. Die Messpunkte werden automatisch für weitere Auswertungen in 300ms Intervallen in einer .dat-Datei gespeichert.

## 3.2 Durchführung des Versuches

### 3.2.1 Einbau der Probe

Die Schutzhülle des Probenstabes muss zunächst durch vorsichtiges Ziehen entfernt werden. Anschließend wird die Probe der Schachtel entnommen und unter Beachtung der richtigen Orientierung in die vorgesehene Fassung des Stabes gesteckt, die spitze Ecke des Chipcarriers entspricht dabei Kontakt 1. Nachdem die Schutzhülle wieder über den Stab gezogen und mittels Schelle geschlossen wurde, muss überprüft werden, ob das Nadelventil geschlossen, die Rückleitung geöffnet ist und die Temperatur im Probenraum mehr als 85 K beträgt um ein Einfrieren der Luft zu verhindern. Der Stöpsel der Quetschverschraubung wird entnommen, das VAT-Ventil geöffnet und der Stab vorsichtig hinabgelassen. Sobald sich der Probenstab vollständig in der Kammer befindet wird die Quetschverschraubung zugezogen und die Rückleitung geschlossen.

Um den Druck zu senken wird die Pumpe eingeschaltet und das Rücklaufventil geöffnet, bis ein Druck von etwa 0.8 mBar erreicht wurde. Wird nun das Rücklaufventil geschlossen, so bleibt der Druck konstant, sofern die Quetschverschraubung korrekt verschlossen wurde. Ist dies der Fall, kann das Nadelventil durch eine Vierteldrehung geöffnet werden, der Proberaum füllt sich mit Helium und der Druck steigt wieder an. Ist Atmosphärendruck erreicht wird das Nadelventil wieder geschlossen und der Prozess wird zweimal wiederholt. Die dabei entstehende Verdampfungskühlung hat ein starkes Absenken der Temperatur im Probenraum zur Folge, da das flüssige Helium die zum Verdampfen benötigte Energie der Probe entzieht.

Beim letzten Durchgang wird das Nadelventil so weit geöffnet, bis sich der Druck bei einem Wert von knapp unter 1 mBar einpendelt, die Temperatur kann jetzt mittels Labview eingestellt werden. Der Fischer-Stecker ermöglicht das Verbinden des Probenstabes mit der Breakout-Box.

### 3.2.2 Messungen

In diesem Experiment werden 5 verschiedene Messreihen durchgeführt. Abgesehen von der Messreihe zur Überprüfung der Temperaturabhängigkeit wird die Probe auf eine Temperatur von 2 Kelvin herabgekühlt.

#### Gleichstrommessungen:

Zunächst soll der Quanten-Hall-Effekt bei Anlegen eines Gleichstromes an die Probe beobachtet werden. In diesem Rahmen wird eine Keithley-Stromquelle verwendet, die gemäß den Kontakten an die Breakout-Box angeschlossen wird. Die Hall- und die Längsspannung können zeitgleich mittels zwei Nanovoltmetern gemessen werden, die mit Koaxialkabeln mit der Breakout-Box verbunden werden. An der Stromquelle wird manuell ein Strom von 100 nA eingestellt und das Magnetfeld via Labview von -7,7 T bis +7,7 T mit einer Sweep rate von 1 T/min hochgefahren, dabei werden beide Spannungen durch ein Labview-Programm aufgezeichnet.

Anschließend wird der Vorgang mit einer Sweep rate von 0,2 T/min von -2 T bis 2 T wiederholt, um das Einsetzen der Shubnikov-de Haas-Oszillationen besser beobachten zu können.

**Wechselstrommessung:**

Die Gleichstromquelle sowie die Nanovoltmeter aus Versuchsreihe 1 werden durch Lock-In-Verstärker ersetzt. Einer dieser Verstärker dient als Wechselspannungsquelle, mittels großem Vorwiderstand kann diese in eine Wechselstromquelle umgewandelt werden. Die anderen beiden Lock-In-Verstärker dienen als Messgeräte der entsprechenden Hall- und Querspannung, sie filtern die an der Wechselspannungsquelle eingestellte Frequenz bei den Messungen heraus, wenn sie miteinander gekoppelt sind. Die Durchführung aus Versuchsreihe 1 wird nun wiederholt.

**Winkelabhängigkeit:**

In der dritten Versuchsreihe soll die Winkelabhängigkeit zwischen Magnetfeld und Hall-Streifen untersucht werden. Dazu wird der Winkel, der auf einer Schablone an der Quetschverschraubung abgelesen werden kann, in 10 Grad-Schritten von -10 Grad bis 100 Grad variiert und jeweils eine Messung vorgenommen, bei der sich das Magnetfeld von -7,7 T bis 7,7 T mit einer Sweep-rate von 1 T/min ändert.

**Temperaturabhängigkeit:**

Um die Temperaturabhängigkeit von Ladungsträgerdichte und -beweglichkeit zu ermitteln, werden insgesamt fünf Messungen bei verschiedenen Temperaturen zwischen 2 K und 40 K der Probenkammer vorgenommen. Es ist dabei zu beachten, dass die Temperatur der Probenkammer eine gewisse Zeit benötigt, bis sie sich eingependelt hat. Gesteuert werden kann der Soll-Wert ebenfalls über ein Labview-Programm.

**Gatespannungsabhängigkeit:**

Wird eine Gatespannung an die Probe angelegt, so ändert sich ihr Bandverlauf. Damit der Abstand zwischen 2DEG und Gateelektrode bestimmt werden kann, werden Gatespannungen mit einer Gleichspannungsquelle von Knick zwischen -200 mV und 200 mV angelegt und in 50 mV-Schritten erhöht.

**3.2.3 Ausbau der Probe**

Um die Probe auszubauen und ein Einfrieren der Luft zu verhindern, muss der Probenraum auf eine Temperatur von über 85 K erhitzt werden. Zu diesem Zweck wird zunächst das Rücklaufventil geschlossen und somit der Druck auf Atmosphärendruck erhöht. Nach Schließen des Nadelventils kann die Temperatur parallel zum Druckausgleich über die mit Labview zu steuernden Heizer im Proberaum erhöht werden. Anschließend wird nach Entfernen der Kabel der Stab vorsichtig unter Benutzung von entsprechenden Schutzhandschuhen herausgezogen, das VAT-Ventil umgehend geschlossen und die Quetschverschraubung mit dem vorgesehenen Stopfen abgedichtet. Bei Raumtemperatur muss ungefähr eine viertel Stunde gewartet werden, bevor sich der Stab genügend aufgewärmt hat und die Hülle entfernt werden kann.

## 4 Messergebnisse mit Fehlerdiskussion

In dem folgenden Kapitel werden die Messergebnisse des Experiments aufgelistet und ausgewertet. Mittels des Verhaltens zwischen Hall-Spannung  $U_{\text{Hall}}$  und Magnetfeld  $B$  kann die Ladungsträgerdichte  $n_s$  berechnet werden, welche wiederum für die Ermittlung der Beweglichkeit  $\mu$  nötig ist. Diese Größen ergeben sich aus den folgenden Gleichungen:

$$n_s = \frac{I}{e} \frac{1}{\frac{dU_{\text{Hall}}}{dB}} \quad (27)$$

$$\mu = \frac{1}{n_s e} \frac{I}{U_{\text{Längs}}} \frac{L}{W} \quad (28)$$

Dabei kann  $\frac{dU_{\text{Hall}}}{dB}$  mittels linearer Regression bestimmt werden, wenn der klassische Bereich des Quanten-Hall-Effekts betrachtet wird.

Alternativ werden die gesuchten Größen durch Verwendung der Shubnikov-de Haas-Oszillationen ermittelt, indem die Längsspannung  $U_{\text{Längs}}$  gegen das Reziproke zum Magnetfeld, also  $\frac{1}{B}$ , aufgetragen und jedem Maximum ein aufsteigender gerader Füllfaktor  $\nu$ , der bereits in der Einleitung angesprochen wurde, zugeordnet wird. Die Zuordnung ist dabei eindeutig, da für  $\nu = 0$  auf der entsprechende Wert Null sein muss. Damit ist dann

$$\nu = \frac{h n_s}{e B} \quad (29)$$

mit

$$n_s = \frac{b e}{h} \quad (30)$$

wobei  $b$  die Steigung im  $\nu - \frac{1}{B}$ -Diagramm (siehe Abbildung 12) ist. Die Formel zur Berechnung der Beweglichkeit  $\mu$  ist dabei analog zu der ersten Methode, sie entspricht also **Gleichung 28**.

Außerdem sollen die Fehler angegeben werden. Mittels Fehlerfortpflanzung kann garantiert werden, dass Fehler von Messgrößen, die ebenfalls auf fehlerbehaftete Messgrößen aufbauen, korrekt angegeben sind. Bei der Stromquelle wird von einem Fehler von  $s_I = 1 \cdot 10^{-11}$  A bei einem eingestellten Strom von  $I = 1 \cdot 10^{-7}$  A ausgegangen. Die Hall-Konstante  $A_H$  ist durch

$$A_H = \frac{\frac{dU_{\text{Hall}}}{dB}}{I} \quad (31)$$

gegeben. Dann lauten die Formeln zur Berechnung der einzelnen Fehler:

$$s_{A_H} = A_H \cdot \sqrt{\left(\frac{s_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{s_I}{I}\right)^2} \quad (32)$$

wobei  $b = \frac{dU_{\text{Hall}}}{dB}$  ist.

$$s_{n_s} = n_s \cdot \frac{s_b}{b} \quad (33)$$

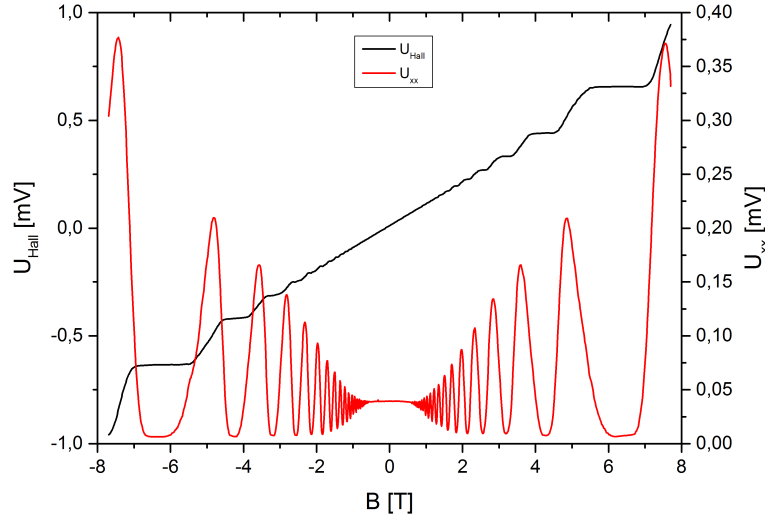
$$s_\mu = \mu \cdot \sqrt{\left(\frac{s_I}{I}\right)^2 + \left(\frac{s_{U_{xx}}}{U_{xx}}\right)^2 + \left(\frac{s_{n_s}}{n_s}\right)^2} \quad (34)$$



## 4.1 Gleichstrommessung

### 4.1.1 Über die Hall-Spannung

Die folgende Abbildung zeigt eine Messung des Quanten-Hall-Effekts bei einem Gleichstrom von 100 nA und einer Temperatur von 2 K im Magnetfeldbereich von -7,7 T bis +7,7 T.



**Abb. 11:** Längs- und Querspannung bei  $I = 100$  nA,  $T = 2$  K und einem steigenden Magnetfeld von  $B = -7,7$  T bis  $B = +7,7$  T bei Gleichstrom

Mittels linearer Regression im klassischen Bereich von etwa -2 T bis 2 T konnte die Steigung  $b = \frac{dU_{\text{Hall}}}{dB}$  ausgewertet werden (vgl. Anhang Abbildung 20 (b)). Das Ergebnis lautet

$$\frac{dU_{\text{Hall}}}{dB} = (10,337 \pm 0,063) \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (35)$$

Mit Gleichung 27 lässt sich nun die Ladungsträgerdichte bei einem Strom von  $I = 100$  nA berechnen:

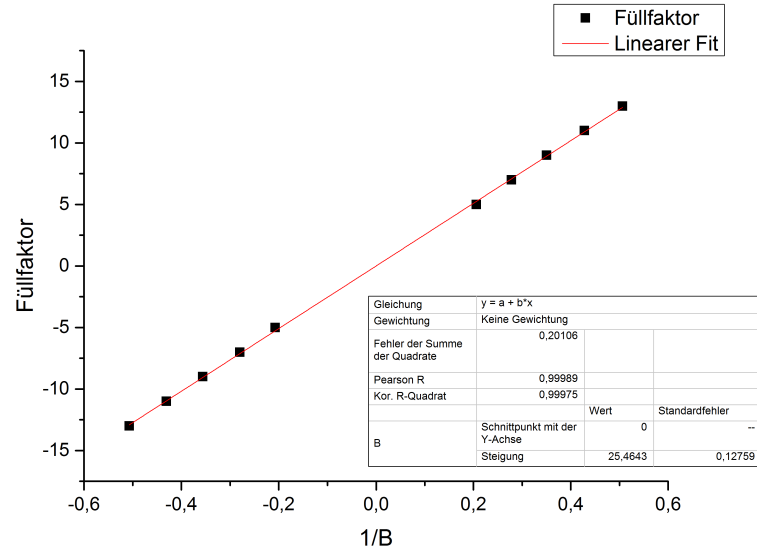
$$n_s = (6,038 \pm 0,037) \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^2} \quad (36)$$

Die Beweglichkeit kann aus Gleichung Gleichung 28 ermittelt werden. Dabei ist  $L = 600 \mu\text{m}$  die Länge und  $W = 100 \mu\text{m}$  die Breite des Hall-Streifens.

$$\mu = (1,899 \pm 0,012) \cdot 10^5 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}} \quad (37)$$

### 4.1.2 Über die SDH-Oszillationen

Alternativ kann die Ladungsträgerdichte über die Shubnikov-de Haas-Oszillationen berechnet werden. Dazu wird  $U_{\text{Längs}}$  gegen  $\frac{1}{B}$  aufgetragen und jedem Minimum ein Füllfaktor  $\nu$  zugeordnet.



**Abb. 12:** Zuordnung der Füllfaktoren über die SDH-Oszillationen

Mit der Steigung  $b = (22,87 \pm 0,38)T$  der Geraden aus Abbildung 12 und Gleichung 29 ist die Ladungsträgerdichte

$$n_s = (5,532 \pm 0,091) \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^2} \quad (38)$$

Mit Gleichung 28 ergibt sich dann für die Beweglichkeit

$$\mu = (2,073 \pm 0,034) \cdot 10^5 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}} \quad (39)$$

Mittels der Zuordnung der Füllfaktoren und der Gleichung

$$R = \frac{U_{\text{Hall}}}{I} = \frac{h}{\nu e^2} \Leftrightarrow \frac{U_{\text{Hall}}}{I} \nu = \frac{h}{e} = R_K \quad (40)$$

kann die Klitzing-Konstante berechnet werden. Durch Mitteln der einzelnen Ergebnisse für  $R_K$  ergibt sich insgesamt:

$$R_K = (25922,69 \pm 738,65) \Omega \quad (41)$$

Damit liegt der berechnete Wert sehr dicht bei dem Literaturwert von  $(25812,8 \Omega [3])$ , da sich dieser noch innerhalb des Fehlers befindet kann von einem guten Ergebnis gesprochen werden. Die geringfügige Abweichung könnte durch Fehler beim Bestimmen der Maxima der SDH-Oszillationen sein.

## 4.2 Wechselstrommessung

Die Auswertung der Wechselstrommessung funktioniert analog zu der der Gleichstrommessung und wird in zwei Vorgehensweisen aufgeteilt.

### 4.2.1 Über die Hall-Spannung

Der Graph (siehe Anhang Abbildung 22 (a)) der Messung verläuft ähnlich wie der der DC-Messung (Abbildung 11). Auch hier wird mittels linearer Regression im klassischen Bereich die Steigung der Hall-Spannungs-Geraden bestimmt. Es ergibt sich

$$\frac{dU_{\text{Hall}}}{dB} = (9,868 \pm 0,002) \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (42)$$

Der große Vorwiderstand von  $10\text{M}\Omega$  sorgte für einen kleinen Spannungsabfall relativ zur Spannungsquelle, die eine Spannung von  $100\text{mV}$  erzeugte, der Strom betrug bei der Wechselstrommessung  $I = 98,6\text{ nA}$ . Analog zu der Auswertung der Gleichstrommessung haben sich für die gesuchten physikalischen Größen folgende Werte ergeben:

$$n_s = (6,236 \pm 0,002) \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^2} \quad (43)$$

$$\mu = (1,813 \pm 0,001) \cdot 10^5 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}} \quad (44)$$

### 4.2.2 Über die SDH-Oszillationen

Die Gerade zur Bestimmung der Füllfaktoren ist in Abbildung 23 (b) (siehe Anhang) zu finden. Die Steigung der linearen Funktion beträgt  $b = (22,83 \pm 0,37)T$ . Mit Gleichung 29 erhalten wir für die Ladungsträgerdichte

$$n_s = (5,521 \pm 0,089) \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^2} \quad (45)$$

und für die Beweglichkeit

$$\mu = (2,004 \pm 0,032) \cdot 10^5 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}} \quad (46)$$

Auch die Kitzling-Konstante konnte mit Hilfe der Ergebnisse ermittelt werden. Für sie ergab sich

$$R_K = (25391,25 \pm 515,93) \Omega \quad (47)$$

Auch dieser Wert liegt sehr nahe an dem Literaturwert, dieser befindet sich noch in dem Fehler. Allerdings ist die Differenz größer als bei der Gleichstrommessung, neben dem oben erwähnten statistischen Fehler beim Ablesen könnte ein weiterer systematischer Fehler durch den Vorwiderstand entstanden sein. Dieser war zwar mit  $10\text{ Megaohm}$  angegeben, Abweichungen dieser Angaben könnten das Ergebnis jedoch verfälscht haben.

### 4.2.3 Vergleich der Messergebnisse

In der folgenden Tabelle sind die Messergebnisse der DC- und der AC-Messung noch einmal zusammengefasst.

		DC	AC
Über die	$n_s$ [ $1/\text{cm}^2$ ]	$(6,038 \pm 0,037) \cdot 10^{11}$	$(6,236 \pm 0,002) \cdot 10^{11}$
Hall-Spannung	$\mu$ [ $\text{cm}^2/\text{Vs}$ ]	$(1,899 \pm 0,012) \cdot 10^5$	$(1,813 \pm 0,001) \cdot 10^5$
Über die	$n_s$ [ $1/\text{cm}^2$ ]	$(5,532 \pm 0,091) \cdot 10^{11}$	$(5,521 \pm 0,089) \cdot 10^{11}$
SDH-Oszillationen	$\mu$ [ $\text{cm}^2/\text{Vs}$ ]	$(2,073 \pm 0,034) \cdot 10^5$	$(2,004 \pm 0,032) \cdot 10^5$

Abb. 13: Tabellarische Gegenüberstellung der DC- und AC-Messwerte

Wie auch theoretisch erwartet stimmen die Messergebnisse der DC-Messungen mit denen der AC-Messungen sehr gut überein. Es hat sich also gezeigt, dass die Art des Stromes (Wechselstrom oder Gleichstrom) an der Probe keinen Einfluss auf die Ladungsträgerdichte und -beweglichkeit hat. Die kleinen Abweichungen zwischen DC und AC werden lediglich Folgen von statistischen Fehlern sein.

Auffällig ist lediglich, dass die nach der Fan-Chart berechneten Werte allesamt etwas größer als die klassisch berechneten Werte ausfallen. Hierbei könnte es sich um einen systematischen Fehler handeln.

## 4.3 Winkelabhängigkeit

Im dritten Versuchsteil sollte die Abhängigkeit des Quanten-Hall-Effekts von dem Winkel zwischen Probe und Magnetfeld analysiert werden. Dazu wurde der Probenstab in 10 Grad-Schritten von -10 Grad (entspricht einem Winkel von 350 Grad) bis zu einem Winkel von 100 Grad gedreht und jeweils eine Messung von -7,7 Tesla bis 7,7 Tesla durchgeführt.

Im Rahmen der Auswertung ist ein Minimum der Shubnikov-de Haas-Oszillation für jeden Winkel notiert worden. In der folgenden Grafik sind die Werte  $\frac{1}{B}$  dieses Minimums gegen den Winkel aufgetragen.

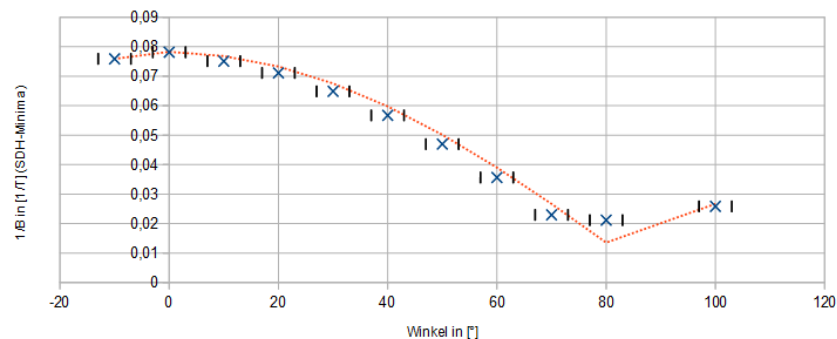
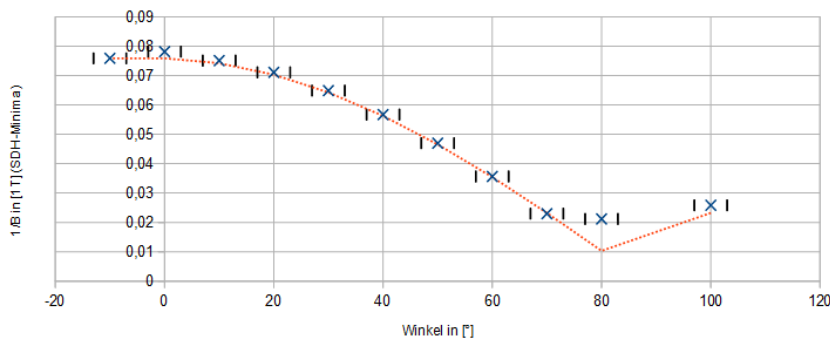


Abb. 14: Graphische Darstellung der SDH-Minima in Abhängigkeit des Winkels

Für Winkel von -10 Grad bis 70 Grad nimmt die Kurve den Verlauf einer Cosinusfunktion an, bei größeren Werten treten starke Abweichungen auf. In der Theorie ist eine solche Cosinusfunktion zu erwarten, da das effektive Magnetfeld bei einem Winkel von 0 Grad am stärksten ist und bei einem Winkel von 90 Grad keinen Einfluss auf die Probe hat, es gilt das Skalarprodukt  $\vec{B} = |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$ , wobei  $\alpha$  hier den Winkel zwischen Magnetfeldlinien und Orthogonale zur Probe beschreibe. Die Abweichungen bei  $\alpha > 70$  Grad werden Folgen statistischer Fehler sein, welche auf einen Wert von  $\pm 3$  Grad geschätzt werden und eventuell durch ungenaues Ablesen (Parallaxe) entstanden sind. Die einzelnen  $y$ -Fehler der Messpunkte sind um einen Faktor von bis zu  $10^{-5}$  kleiner als die eigentlichen Werte, sodass diese nicht mit in das Diagramm übernommen wurden. Auch für Winkel kleiner als 70 Grad ist ein kleines Offset zu erkennen. Verschiebt man die Cosinus-Fitkurve um +3 Grad, so liegen die experimentell ermittelten Werte deutlich näher an den theoretisch zu erwartenden Ergebnisse, wie folgendes Diagramm veranschaulicht:



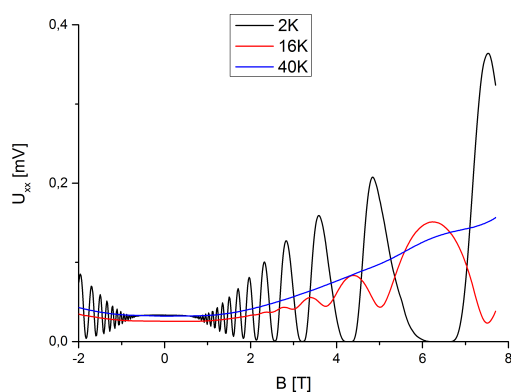
**Abb. 15:** Graphische Darstellung der SDH-Minima in Abhängigkeit des Winkels mit Berücksichtigung des Offsets

Es kann also davon ausgegangen werden, dass die Schablone zum Ablesen der aktuellen Ausrichtung der Probe zum Magnetfeld um etwa 3 Grad relativ zum Nullpunkt verschoben ist. Die Abhängigkeit zeigt aber trotzdem sehr gut, dass für zunehmende Winkel stärkere Magnetfeld (und somit kleinere Werte von  $\frac{1}{B}$ ) nötig sind, um Minima der SDH-Oszillationen zu erreichen, bei einem Winkel von 90 Grad sollten diese vollständig verschwunden sein.

Im Anhang sind die Verläufe einzelner Minima der Shubnikov-de Haas-Oszillationen in Abhängigkeit des Winkels zu finden.

## 4.4 Temperaturabhängigkeit

In der vierten Messreihe wurde die Ladungsträgerdichte und die Beweglichkeit in Abhängigkeit der Temperatur untersucht. Dazu wurden Messungen bei 2K, 4K, 8K, 16K und 40K durchgeführt. In der folgenden Abbildung sind die Messungen der Temperaturen bei 2K, 16K und 40K dargestellt, es ist deutlich zu erkennen wie die Shubnikov-de Haas-Oszillationen mit zunehmender Temperatur schwächer ausgeprägt sind. Die Ladungsträgerdichte und -beweglichkeit wird wie in den bisherigen Versuchsreihen berechnet, die entsprechenden Fit-Kurven sind im Anhang zu finden. Es ergeben sich folgende Werte:



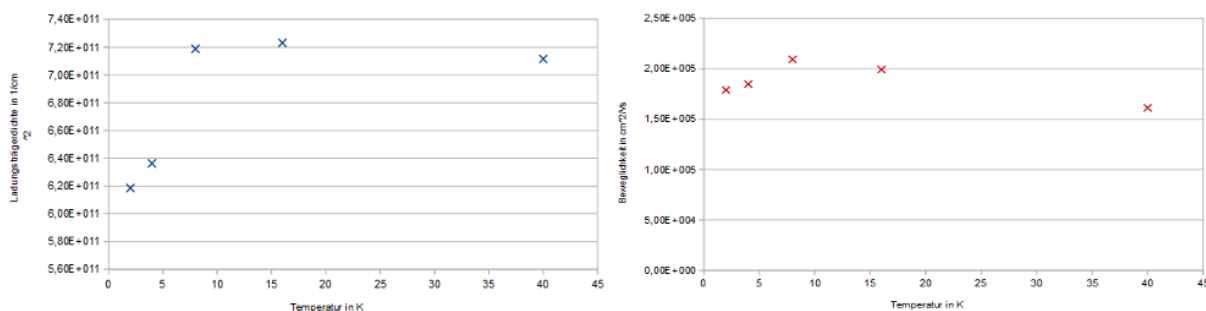
(a)

Temperatur	$n_e$ [ $1/\text{cm}^2$ ]	$\mu$ [ $\text{cm}^2/\text{Vs}$ ]
2K	$(6,186 \pm 0,005) \cdot 10^{11}$	$(1,788 \pm 0,002) \cdot 10^5$
4K	$(6,364 \pm 0,003) \cdot 10^{11}$	$(1,847 \pm 0,001) \cdot 10^5$
8K	$(7,188 \pm 0,003) \cdot 10^{11}$	$(2,092 \pm 0,001) \cdot 10^5$
16K	$(7,231 \pm 0,002) \cdot 10^{11}$	$(1,992 \pm 0,001) \cdot 10^5$
40K	$(7,116 \pm 0,005) \cdot 10^{11}$	$(1,612 \pm 0,002) \cdot 10^5$

(b)

**Abb. 16:** (a) Längsspannung in Abhängigkeit des Magnetfeldes bei unterschiedlichen Temperaturen - (b): Ladungsträgerdichte und -beweglichkeit in Abhängigkeit der Temperatur

Die folgenden Diagramme veranschaulichen den Verlauf der physikalischen Größen:



**Abb. 17:** Die Werte der obigen Tabelle quantitativ in einem Diagramm dargestellt - Links: Ladungsträgerdichte - Rechts: Beweglichkeit

Schon bei Temperaturen ab 10 Kelvin steigt die Ladungsträgerdichte stark an und bleibt dann nahezu konstant. Theoretisch ist diese Entwicklung erst bei größeren Temperaturen zu erwarten, da höhere Temperaturen eine größere Anzahl an Störstellen zur Folge hat. Die Abweichung könnte systematischen Fehlern bei der Temperaturmessung zu Grunde liegen. Die einzelnen Fehler der Messwerte sind jedoch relativ klein und sind daher auch nicht in das Diagramm eingetragen worden.

Die Beweglichkeit steigt zunächst bis zu einer Temperatur von etwa 8 Kelvin an und scheint dann proportional zur Temperatur zu fallen. Ursache hierfür könnten stärkere Schwingungen der Gitterstruktur der Probe und die daraus resultierende Zunahme an Stößen mit Phononen.

## 4.5 Gatespannungsabhängigkeit

Im letzten Versuchsteil wird die Ladungsträgerdichte in Abhängig der angelegten Gatespannung gemessen. Analog zu den bisherigen Messreihen wird dies mittels der Steigung  $\frac{dU_{\text{Hall}}}{dB}$  realisiert. Dabei wird mit jeder Messung die Gatespannung in 50 mV-Schritten von -200 mV auf 200 mV erhöht.

Mit Hilfe dieser Ergebnisse soll der Abstand zwischen 2DEG und Titan-Gate berechnet werden. Der Aufbau hat Ähnlichkeit mit dem eines Plattenkondensators, wobei das 2DEG der einen Platte und das Titan-Gate der zweiten Platte entspricht. Über die absolute Ladungsträgerdichte

$$N_s = n_s \cdot A = C \cdot U_{\text{Gate}} \quad (48)$$

mit der Kapazität  $C = \frac{\epsilon \epsilon_0 A}{d}$ , der Fläche  $A$  der Platten sowie der Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon \approx 12$  lässt sich der Abstand  $d$  berechnen. Der Wert der Ladungsträgerdichte ist damit

$$n_s = \frac{\epsilon \epsilon_0}{d} (U_{\text{Gate}} - U_{th}) \quad (49)$$

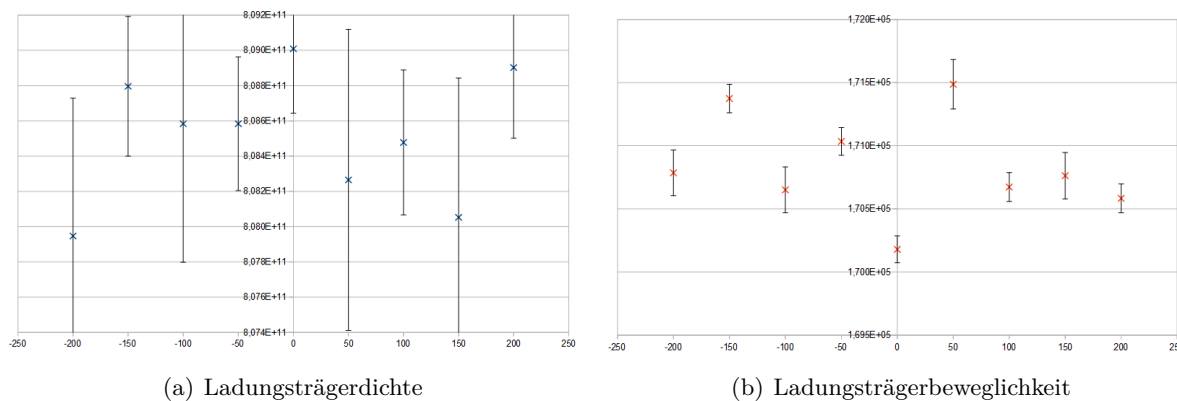
Es ergaben sich folgende Werte für Ladungsträgerdichte  $n_s$  und Beweglichkeit  $\mu$

$U_{\text{gate}}$ in mV	$n_s$ [ $1/\text{cm}^2$ ]	$\mu$ [ $\text{cm}^2/\text{Vs}$ ]
-200	$(8,079 \pm 0,008) \cdot 10^{11}$	$(1,708 \pm 0,002) \cdot 10^5$
-150	$(8,088 \pm 0,004) \cdot 10^{11}$	$(1,714 \pm 0,001) \cdot 10^5$
-100	$(8,086 \pm 0,008) \cdot 10^{11}$	$(1,707 \pm 0,002) \cdot 10^5$
-50	$(8,086 \pm 0,004) \cdot 10^{11}$	$(1,710 \pm 0,001) \cdot 10^5$
0	$(8,090 \pm 0,004) \cdot 10^{11}$	$(1,702 \pm 0,001) \cdot 10^5$
50	$(8,083 \pm 0,009) \cdot 10^{11}$	$(1,715 \pm 0,002) \cdot 10^5$
100	$(8,085 \pm 0,004) \cdot 10^{11}$	$(1,707 \pm 0,001) \cdot 10^5$
150	$(8,081 \pm 0,008) \cdot 10^{11}$	$(1,708 \pm 0,002) \cdot 10^5$
200	$(8,089 \pm 0,004) \cdot 10^{11}$	$(1,706 \pm 0,001) \cdot 10^5$

**Abb. 18:** Messergebnisse der Ladungsträgerdichte und der Beweglichkeit in Abhängigkeit der Gatespannung

Es fällt auf, dass die Werte trotz der angelegten Gatespannung nur sehr kleine Änderungen erfahren. Da der entsprechende Kontakt an dem Hall-Streifen bereits zu Versuchsbeginn defekt war und erneut festgelötet werden musste, kann davon ausgegangen werden, dass sich diese Verbindung ein weiteres Mal gelöst hat und infolgedessen keine Gatespannung effektiv angelegt wurde. Selbst bei starken Magnetfeldern von 7,7 T konnte bei Erhöhung bzw. Verringerung keinerlei Veränderung der Hall-Spannung beobachtet werden. Der obigen Formel zur Berechnung der Ladungsträgerdichte kann entnommen werden, dass der Wert für  $n_s$  in der Theorie linear mit  $U_{\text{Gate}}$  ansteigen sollte.

In den folgenden Diagrammen sind die entsprechenden Werte gegen die Gatespannung aufgetragen



**Abb. 19:** Grafische Darstellung der obigen Messwerte inklusive Fehlerbalken

Eine solche Linearität ist auch in den Diagrammen nicht zu erkennen. Mittels linearer Regression kann  $d = \frac{\epsilon\epsilon_0}{b}$  berechnet werden, wobei  $b$  die Steigung der eigentlich zu erwarteten Geraden ist. Die einzelnen Messungen zu den verschiedenen Gatespannungen sind im Anhang zu finden.



## 5 Abschließende Diskussion

In diesem Versuch wurde der Quanten-Hall-Effekt und seine Abhängigkeit von verschiedenen Parametern untersucht. Die für die Beobachtung nötige Temperatur von etwa 2 Kelvin konnte mittels Verdampfungskühlung der Probe in einem Heliumkryostaten realisiert werden, die supra-leitenden Magneten erzeugten das erforderliche Magnetfeld von bis zu  $\pm 7,7$  Tesla.

Im ersten Versuchsteil sollte der Quanten-Hall-Effekt bei Gleichstrom beobachtet werden, das Experiment brachte die zu erwartenden Ergebnisse hervor. Es bildeten sich Hall-Plateaus, die im klassischen Regime nicht auftreten, sowie die Shubnikov-de Haas-Oszillationen in der Längsspannung. Anschließend wurde die Gleichstromquelle durch eine Wechselstromquelle ersetzt und die Messungen wiederholt. Weiterhin wurde untersucht, wie sich die Ladungsträgerdichte und -beweglichkeit unter Veränderung des Winkels zwischen Magnetfeld und Probe sowie der Temperatur verhält. Im abschließenden Versuchsteil sollte mittels angelegter Gatespannung der Bandkantenverlauf der Probe und somit die Ladungsträgerdichte variiert werden um mit den daraus resultierenden Veränderungen der Ladungsträgerbeweglichkeit den Abstand zwischen Titan-Gate und 2DEG zu bestimmen, allerdings war dies aufgrund eines defekten Kontaktes (Kontakt 7) nicht möglich.

Es hat sich gezeigt, dass die zu berechnenden Werte  $n_s$  und  $\mu$  bei angelegter Wechselspannung in etwa denen bei angelegter Gleichspannung entsprechen. Bei der temperaturabhängigen Messung nahmen die Hall-Plateaus gemäß den Erwartungen bei zunehmender Temperatur ab, bei  $T = 40K$  waren diese schon kaum mehr zu erkennen. Das Verändern des Winkels brachte für Winkel von bis zu 70 Grad die theoretisch erwarteten Ergebnisse hervor, bei größeren Werten fanden Abweichungen statt, wir gehen von einem statistischen Fehler beim Ablesen des Winkels aus. Das Auswerten des letzten Versuchsteil war leider nicht möglich, da die Kontakte des entsprechenden Aufbaus defekt waren und somit keine Gatespannung angelegt werden konnte.

## 6 Literatur und Quellen

### 6.1 Literatur

- [1 ] K.v. Klitzing, G. Dorda und M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980)
- [2 ] Th. Bartsch, Vorbereitungsmappe Quanten-Hall-Effekt, Stand 2015, S.9
- [3 ] Th. Bartsch, Vorbereitungsmappe Quanten-Hall-Effekt, Stand 2015, S.6

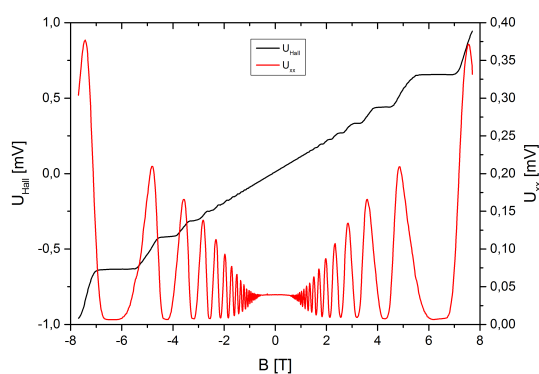
### 6.2 Grafiken

- Abb. 1: Vorbereitungsmappe, Seite 9
- Abb. 2: Vorbereitungsmappe, Seite 12
- Abb. 3: Vorbereitungsmappe, Seite 13
- Abb. 4: Vorbereitungsmappe, Seite 16
- Abb. 5: Vorbereitungsmappe, Seite 17
- Abb. 6: Vorbereitungsmappe, Seite 19
- Abb. 7: Vorbereitungsmappe, Seite 21
- Abb. 8: Vorbereitungsmappe, Seite 23
- Abb. 9: Vorbereitungsmappe, Seite 24
- Abb. 10: Vorbereitungsmappe, Seite 28
- Sonst. : Eigene Aufnahmen und Messergebnisse

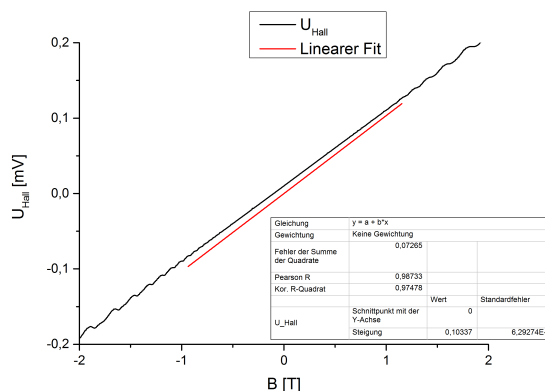
## 7 Anhang

Sämtliche Messergebnisse und Graphen inklusive Fits sind in den folgenden Kapiteln angegeben.

### 7.1 Gleichstrommessung

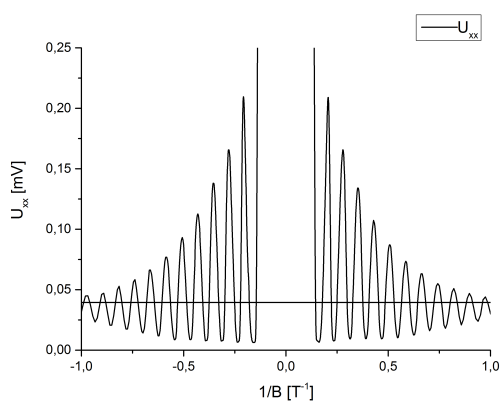


(a) Längs- und Hall-Spannung in Abhängigkeit des Magnetfeldes

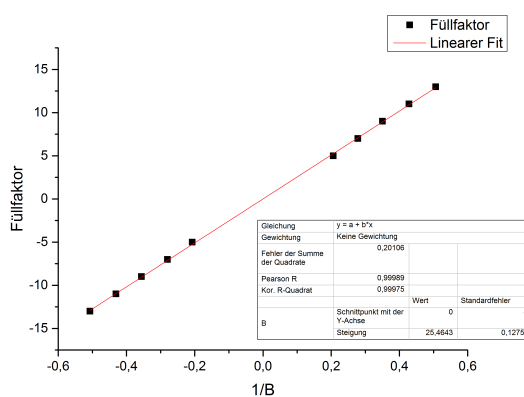


(b) Linearer Fit der DC-Messung

**Abb. 20:** Gleichstrommessung bei einem Magnetfeld von -7,7 T bis 7,7 T



(a) Reziproke Messung des Magnetfeldes

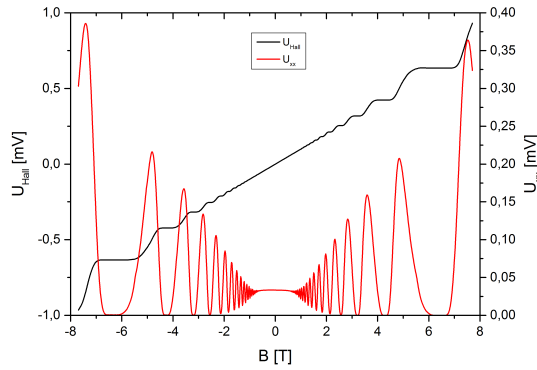


(b) Bestimmung der Füllfaktoren

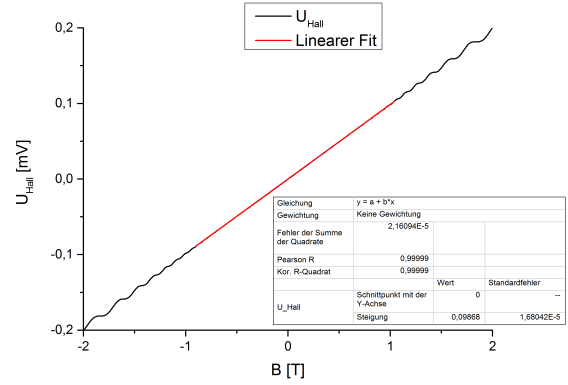
**Abb. 21:** Berechnung der Ladungsträgerdichte und -beweglichkeit über die SDH-Oszillationen bei Gleichstrom

Die obigen Grafiken zeigen die Messwerte der Gleichstrommessungen in einem Magnetfeldbereich von -7,7 T bis 7,7 T.

## 7.2 Wechselstrommessung

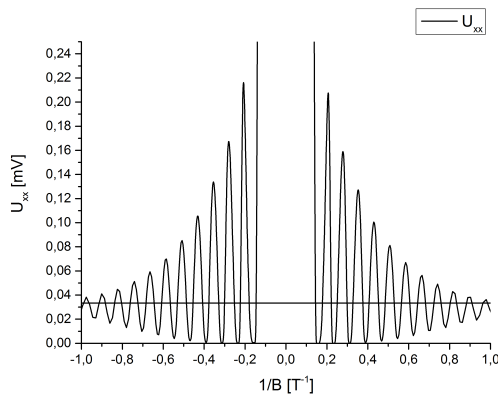


(a) Längs- und Hall-Spannung in Abhängigkeit des Magnetfeldes

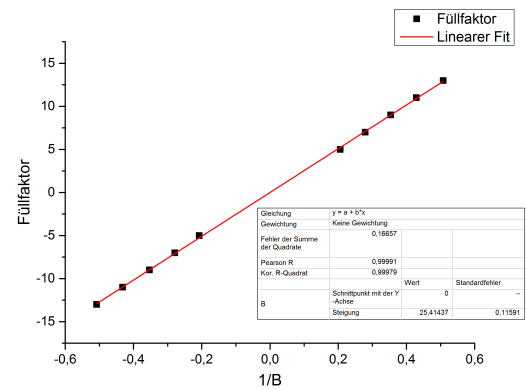


(b) Linearer Fit der AC-Messung

**Abb. 22:** Wechselstrommessung bei einem Magnetfeld von  $-7,7$  T bis  $7,7$  T



(a) Reziproke Messung des Magnetfeldes



(b) Bestimmung der Füllfaktoren

**Abb. 23:** Berechnung der Ladungsträgerdichte und -beweglichkeit über die SDH-Oszillationen bei Wechselstrom

Die obigen Grafiken zeigen die Messwerte der Wechselstrommessung in einem Magnetfeldbereich von  $-7,7$  T bis  $7,7$  T.

### 7.3 Winkelabhängigkeit

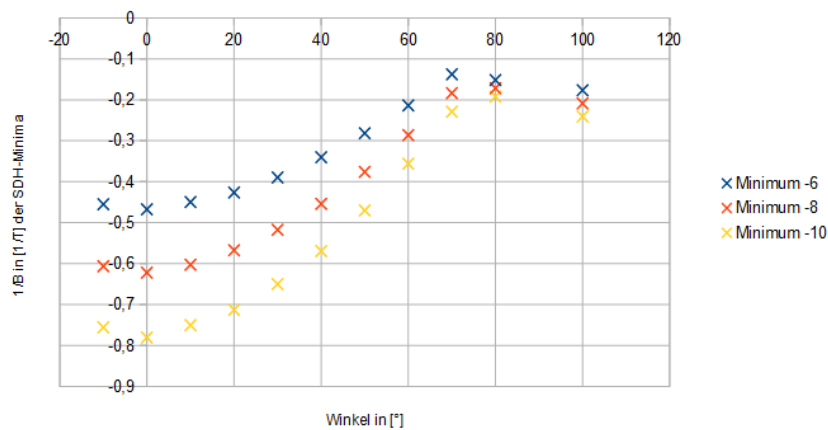


Abb. 24: Minima der Shubnikov-de Haas-Oszillationen in Abhängigkeit des Winkels bei negativem Magnetfeld

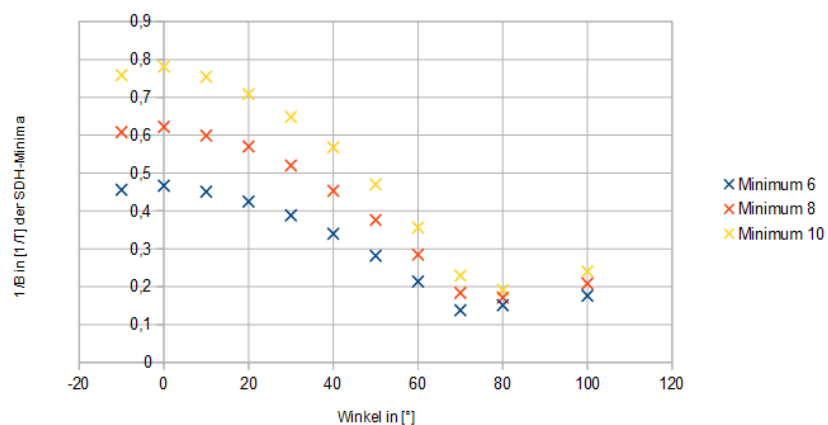


Abb. 25: Minima der Shubnikov-de Haas-Oszillationen in Abhängigkeit des Winkels bei positivem Magnetfeld

## 7.4 Temperaturabhängigkeit

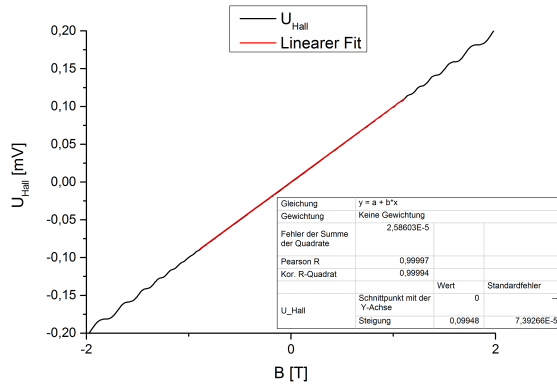
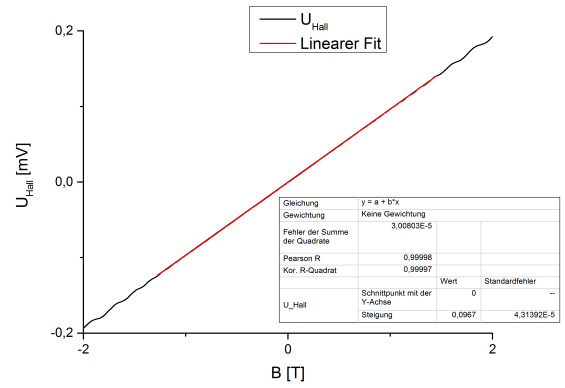
(a)  $T = 2 \text{ K}$ (b)  $T = 4 \text{ K}$ 

Abb. 26: Linearer Fit bei den Temperaturen 2 K und 4 K

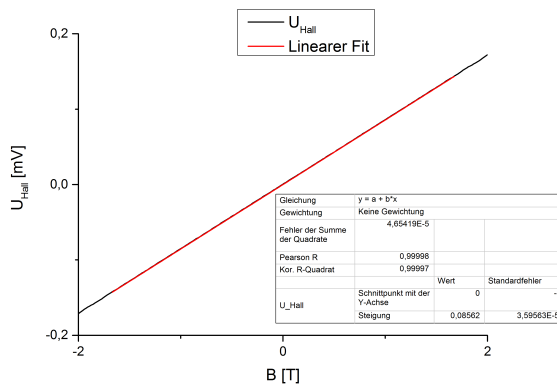
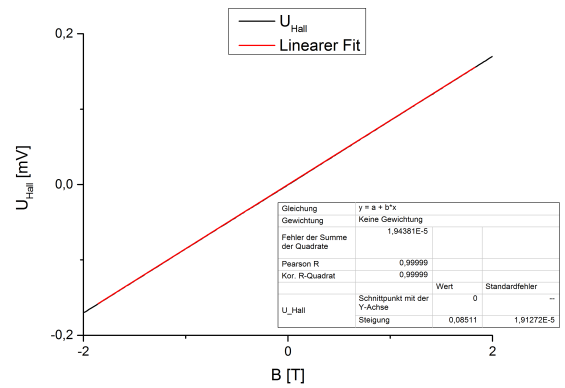
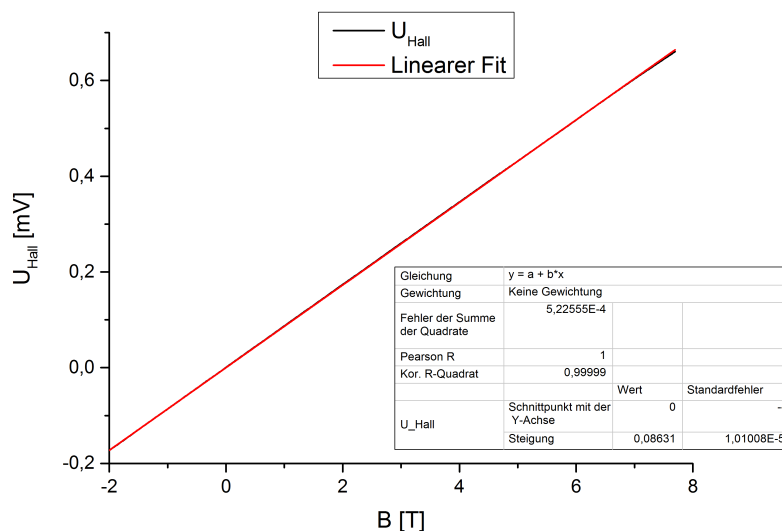
(a)  $T = 8 \text{ K}$ (b)  $T = 16 \text{ K}$ 

Abb. 27: Linearer Fit bei den Temperaturen 8 K und 16 K

Die obigen Graphiken zeigen lineare Fits der Messungen bei Variation der Proben temperatur. Die Quanten-Hall-Effekte sind bei  $T = 40 \text{ K}$  nahezu verschwunden.

Abb. 28: Linearer Fit bei  $T = 40 \text{ K}$ 

## 7.5 Gatespannungsabhängigkeit

Da die Probe aufgrund eines Defekts zunächst aus dem Heliumkryostat entfernt und dieser anschließend erneut heruntergekühlt werden musste wurde zu Beginn eine erneute Messung bei abgeschalteter Gatespannung durchgeführt.

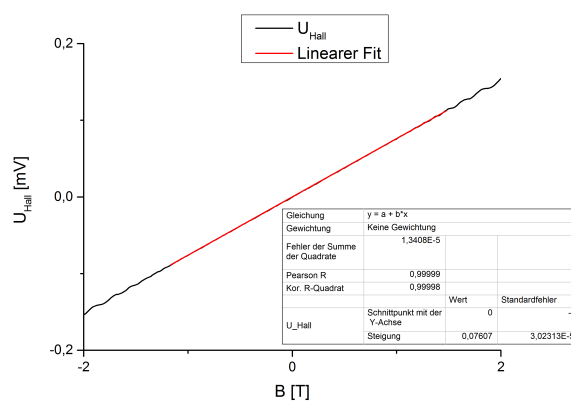
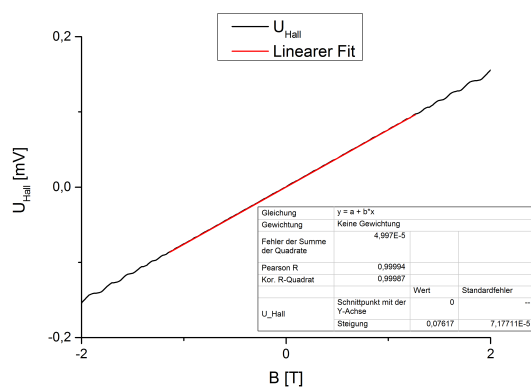
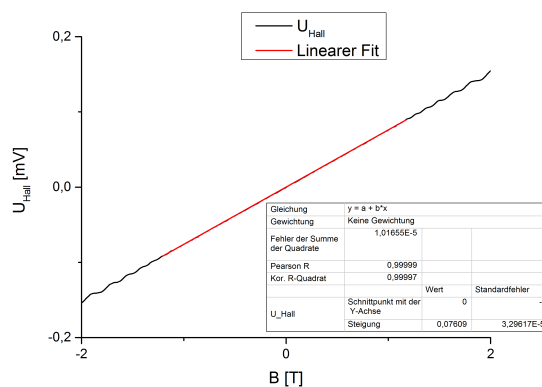


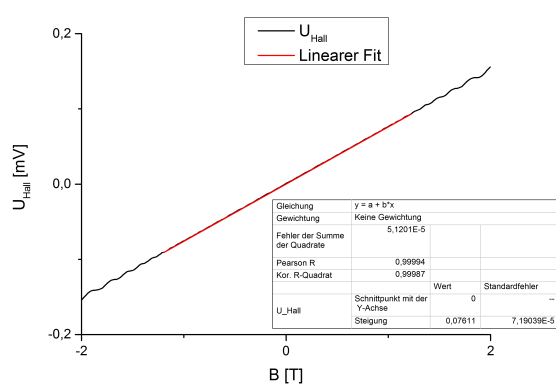
Abb. 29: Linearer Fit bei abgeschalteter Gatespannung



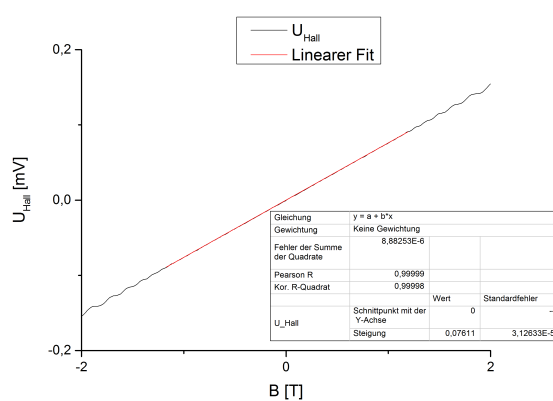
(a) Gatespannung -200 mV



(b) Gatespannung -150 mV

**Abb. 30:** Linearer Fit bei Gatespannungen von -200mV und -150mV

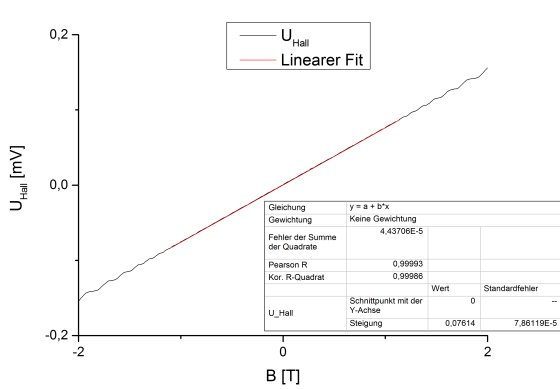
(a) Gatespannung -100 mV



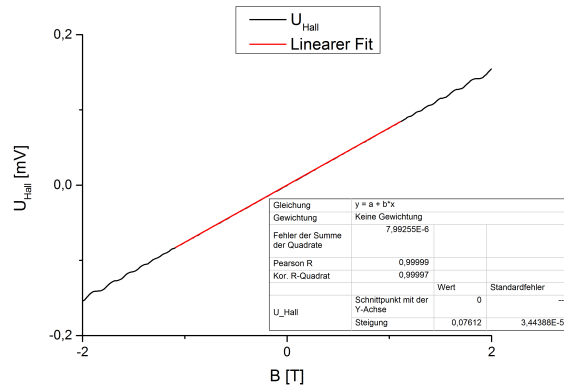
(b) Gatespannung -50 mV

**Abb. 31:** Linearer Fit bei Gatespannungen von -100mV und -50mV

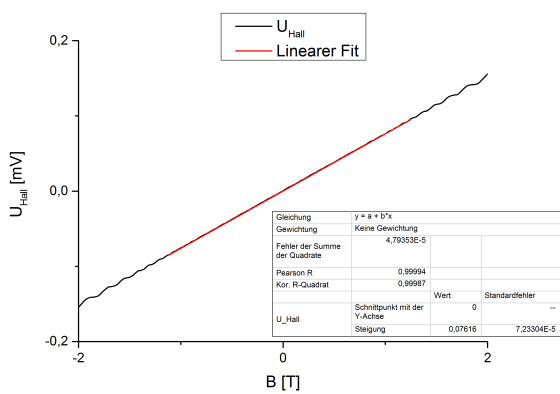




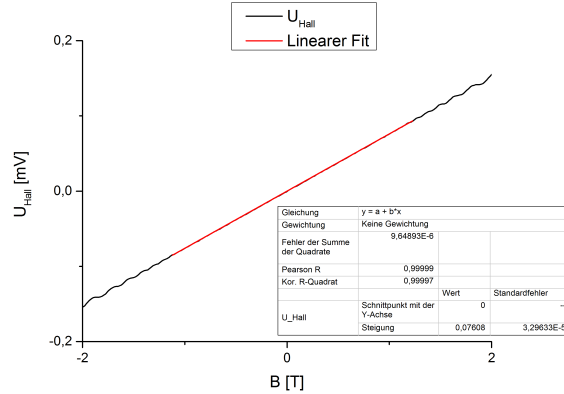
(a) Gatespannung 50 mV



(b) Gatespannung 100 mV

**Abb. 32:** Linearer Fit bei Gatespannungen von 50mV und 100mV

(a) Gatespannung 150 mV



(b) Gatespannung 200 mV

**Abb. 33:** Linearer Fit bei Gatespannungen von 150mV und 200mV

# Abbildungsverzeichnis

1	Links: Vereinfachte Skizze der GaAs-AlGaAs-Heterostruktur - Rechts: Bandkan-	4
2	tenverlauf der Halbleiterheterostruktur, [Vorbereitungsmappe, S.9] . . . . .	
	Vergleich der Energieabhängigkeit im klassischen Bereich (a) mit dem quanten-	
	mechanischen Bereich (b). (c) Vergleich des Zusammenhanges der Zustandsdichte	
	mit der Energie im klassischen und quantenmechanischen Bereich, [Vorbereitungs-	6
	mappe, S.12] . . . . .	
3	Schematischer Aufbau zur Beobachtung des Hall-Effekts, [Vorbereitungsmappe, S.	7
	13] . . . . .	
4	Darstellung der Probe in der Hall-Streifen-Geometrie, [Vorbereitungsmappe, S. 16]	8
5	Typisches Messergebnis des Quanten-Hall-Effekts, [Vorbereitungsmappe, S. 17] .	9
6	Links: Skizzenhafte Darstellung der Erzeugung von Randpotentialen - Rechts: Be-	
	wegung der Elektronen im Randkanalmodell, [Vorbereitungsmappe, S.19] . . . .	10
7	(a) Hall-Kreuz-Geometrie zur Messung der Hall-Spannung - (b) Kontaktgeometrie	
	zur Messung des Längswiderstandes, [Vorbereitungsmappe, S. 21] . . . . .	11
8	Abhängigkeit der Landau-Niveaus und Fermi-Energie vom Magnetfeld, [Vorberei-	
	tungsmappe, S. 23] . . . . .	11
9	Links: Darstellung der Landau-Niveaus in einer realen Probe - Rechts: Ausdehnung	
	der Zustandsdichte aufgrund der Störquellen, [Vorbereitungsmappe, S. 24] . . . .	12
10	Links: Aufnahme der Kontaktgeometrie einer Probe unter einem Mikroskop -	
	Rechts: Fotoaufnahme der Probe in einem Chipcarrier, [Vorbereitungsmappe, S. 28]	13
11	Längs- und Querspannung bei $I = 100 \text{ nA}$ , $T = 2 \text{ K}$ und einem steigenden Ma-	
	gnetfeld von $B = -7,7 \text{ T}$ bis $B = +7,7 \text{ T}$ bei Gleichstrom . . . . .	17
12	Zuordnung der Füllfaktoren über die SDH-Oszillationen . . . . .	18
13	Tabellarische Gegenüberstellung der DC- und AC-Messwerte . . . . .	20
14	Graphische Darstellung der SDH-Minima in Abhängigkeit des Winkels . . . . .	20
15	Graphische Darstellung der SDH-Minima in Abhängigkeit des Winkels mit Be-	
	rücksichtigung des Offsets . . . . .	21
16	(a) Längsspannung in Abhängigkeit des Magnetfeldes bei unterschiedlichen Tem-	
	peraturen - (b): Ladungsträgerdichte und -beweglichkeit in Abhängigkeit der Tem-	
	peratur . . . . .	22
17	Die Werte der obigen Tabelle quantitativ in einem Diagramm dargestellt - Links:	
	Ladungsträgerdichte - Rechts: Beweglichkeit . . . . .	22
18	Messergebnisse der Ladungsträgerdichte und der Beweglichkeit in Abhängigkeit	
	der Gatespannung . . . . .	23
19	Grafische Darstellung der obigen Messwerte inklusive Fehlerbalken . . . . .	24
20	Gleichstrommessung bei einem Magnetfeld von $-7,7 \text{ T}$ bis $7,7 \text{ T}$ . . . . .	27
21	Berechnung der Ladungsträgerdichte und -beweglichkeit über die SDH-Oszillationen	
	bei Gleichstrom . . . . .	27
22	Wechselstrommessung bei einem Magnetfeld von $-7,7 \text{ T}$ bis $7,7 \text{ T}$ . . . . .	28
23	Berechnung der Ladungsträgerdichte und -beweglichkeit über die SDH-Oszillationen	
	bei Wechselstrom . . . . .	28
24	Minima der Shubnikov-de Haas-Oszillationen in Abhängigkeit des Winkels bei ne-	
	gativem Magnetfeld . . . . .	29

25	Minima der Shubnikov-de Haas-Oszillationen in Abhängigkeit des Winkels bei positivem Magnetfeld . . . . .	29
26	Linearer Fit bei den Temperaturen 2 K und 4 K . . . . .	30
27	Linearer Fit bei den Temperaturen 8 K und 16 K . . . . .	30
28	Linearer Fit bei $T = 40$ K . . . . .	31
29	Linearer Fit bei abgeschalteter Gatespannung . . . . .	31
30	Linearer Fit bei Gatespannungen von -200mV und -150mV . . . . .	32
31	Linearer Fit bei Gatespannungen von -100mV und -50mV . . . . .	32
32	Linearer Fit bei Gatespannungen von 50mV und 100mV . . . . .	33
33	Linearer Fit bei Gatespannungen von 150mV und 200mV . . . . .	33