

Fortgeschrittenenpraktikum

Quantenhalleffekt

Vivien Sleziona *

René Vollmer †

Betreut durch

Nils Gayer‡

September 2015

[Zusammenfassung]

Der Quanten-Hall-Effekt wurde 1980 von K. von Klitzing, G. Dorda sowie M. Pepper entdeckt. Er unterscheidet sich vom klassischen Hall-Effekt, dadurch, dass bei ersterem der Wert des Hallwiderstands R_H nicht linear mit steigendem Magnetfeld zunimmt, sondern Plateaus ausbildet. Dabei sind die Spannungswerte dieser Plateaus unabhängig von der Probe und nehmen nur Bruchteile einer rein durch Naturkonstanten bestimmten Größe an. Dadurch wird der Effekt als Norm für den elektrischen Widerstand genutzt. Im Jahr 1985 erhielt Klitzing für die Untersuchung des Quanten-Hall-Effekts den Nobelpreis.

Im vorliegenden Versuchsprotokoll werden die theoretischen Grundlagen, die Durchführung sowie die Befunde und Schlussfolgerungen des Experiments zum Quanten-Hall-Effekt dargestellt. Dafür wird ein zweidimensionales Elektronengas auf wenige Kelvin heruntergekühlt, von einem Strom durchflossen und einem starken Magnetfeld ausgesetzt.

*vivi.s@arcor.de

†rene.vollmer@studium.uni-hamburg.de

‡ngayer@physnet.uni-hamburg.de

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlagen	1
1.1	Zweidimensionales Elektronengas	1
1.1.1	Aufbau der Probe	1
1.1.2	Quantenmechanische Beschreibung unter Einfluss eines Magnetfeldes	2
1.2	Klassischer Hall-Effekt	4
1.3	Quanten-Hall-Effekt und Shubnikov-de Haas-Oszillation	7
1.3.1	Randkanalmodell	7
1.3.2	Erklärung der Hall-Plateaus und der SDH-Oszillation	9
1.3.3	Lokalisierte Zustände	9
1.4	Plattenkondensator	10
2	Experimentelle Durchführung und Beobachtungen	12
2.1	Gleichstrommessungen	13
2.2	Wechselstrommessung	15
2.3	Winkelabhängigkeit	17
2.4	Temperaturabhängigkeit	18
2.5	Gatespannungsabhängigkeit	19
3	Auswertung	20
3.1	Gleichstrommessungen	20
3.1.1	Näherung über die Hall-Spannung	20
3.1.2	Näherung über die Shubnikov-de Haas-Oszillation	20
3.2	Wechselstrommessung	22
3.2.1	Näherung über die Hall-Spannung	22
3.2.2	Näherung über die Shubnikov-de Haas-Oszillation	22
3.3	Vergleich Gleich- und Wechselstrommessung	24
3.4	Winkelabhängigkeit	25
3.5	Temperaturabhängigkeit	27
3.6	Gatespannungsabhängigkeit	29
4	Fazit	31
	Literatur	A
	Abbildungsverzeichnis	A

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Zweidimensionales Elektronengas

Damit es zum Quanten-Hall-Effekt (QHE) kommen kann, müssen einige Bedingungen erfüllt sein. Eine davon ist die Existenz eines zweidimensionalen Elektronengases. In einem zweidimensionalen Elektronengas (2DEG) ist die Bewegung der freien Elektronen auf eine Ebene eingeschränkt. Es gibt verschiedene Möglichkeiten dies zu erreichen.

1.1.1 Aufbau der Probe

In diesem Versuch wird dazu eine AlGaAs-GaAs-Heterostruktur verwendet, siehe Abbildung 1. Die darin gestapelten, unterschiedlichen, einkristallinen Halbleitermaterialien sorgen aufgrund ihrer verschiedenen Bandlücken dafür, dass der Verlauf der Leitungs- bzw. Valenzbandkante in Stapelrichtung einen sehr kleinen Potentialtopf für die Leitungselektronen erzeugt. Der elektronische Transport ist so in Stapelrichtung stark eingeschränkt, während sich die Elektronen in den anderen beiden Raumrichtungen bewegen können. Dabei muss die Bandverbiegung so sein, dass der Bereich des Potentialtopfes nur wenige Nanometer zwischen den Schichten einnimmt [1, Kap.8 a].

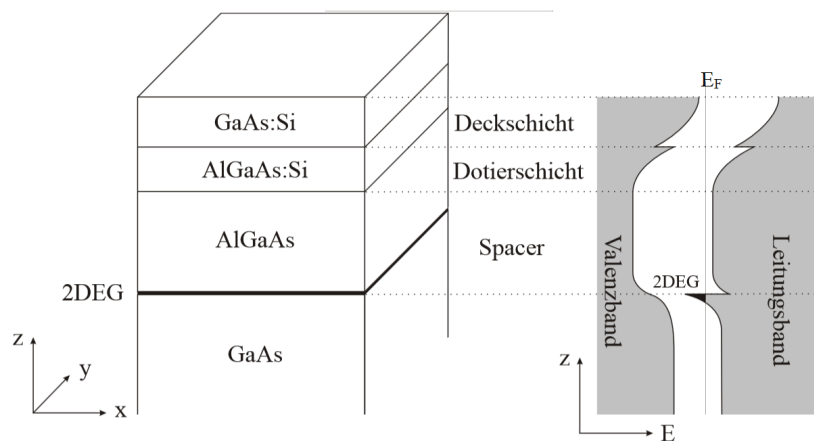


Abbildung 1: **Links:** Vereinfachter Aufbau der GaAs-AlGaAs-Heterostruktur des 2DEG [2].

Rechts: Bandverlauf des 2DEG [2].

In Abbildung 1 ist der schematische Aufbau der in diesem Experiment untersuchten Probe dargestellt. Während sich die Gitterkonstanten der beiden Materialien um weniger als ein Prozent unterscheiden, liegt die Bandlücke des Silizium-dotierten AlGaAs höher als die des GaAs, sodass das Leitungsband des GaAs energetisch günstigere Zustände besitzt. Daher kommt es zum Elektronenfluss aus dem AlGaAs in das undotierte GaAs und so zu einem Verbiegen des Leitungs- und Valenzbandes, dargestellt in Abbildung 1, rechts. Der näherungsweise Potentialtopf, welcher sich im Leitungsband zwischen dem AlGaAs und dem GaAs ausbildet, besitzt ein Minimum unterhalb der Fermienergie E_F und aufgrund seiner energetisch günstigeren Lage, werden die Elektronen in diesem Potentialtopf gefangen. In der Abbildung wird das undotierte AlGaAs auch als *Spacer* bezeichnet, denn diese Schicht in der Probe dient hauptsächlich dazu, Streupotentiale, welche zwischen GaAs

und der Dotierschicht AlGaAs:Si zu reduzieren, um die mittlere freie Weglänge und damit die Beweglichkeit der Elektronen zu erhöhen. Die Deckschicht GaAs:Si dient lediglich zum Schutz der Probe vor Oxidation und hat keine technische Bedeutung.

1.1.2 Quantenmechanische Beschreibung unter Einfluss eines Magnetfeldes

In der quantenmechanischen Beschreibung des 2DEGs findet man für die Energien der Elektronen aufgrund der Einschränkung ihrer Bewegung in z-Richtung quantisierte Werte. E_z nimmt die Werte i mit $i = 1, 2, 3, \dots$ an, während die Bewegung der Elektronen in x- und y-Richtung uneingeschränkt bleibt. So setzt sich die Energie der Elektronen wie folgt zusammen:

$$E(k_x, k_y, i) = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m^*} + E_i^z \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Hier sind k_x und k_y die Wellenvektoren der Elektronen in x - und y -Richtung und m^* ist die effektive Masse. $i = 1, 2, 3, \dots$ entspricht der Quantisierung in z -Richtung, welche zur Folge hat, dass sich für jedes Energieniveau ein zweidimensionales Leitungsband in x - und in y -Richtung ausbildet [3, Kap. 3.6]. Es ist für das hier durchgeführte Experiment zum Quanten-Hall-Effekt essentiell, die Energierelationen der Elektronen im zweidimensionalen Elektronengas zu bestimmen.

Die Zustandsdichte D in einem Band ergibt sich aus der Anzahl der Elektronenzustände N pro Energieintervall und Probenvolumen V und kann mit Gleichung (1) geschrieben werden als:

$$D(E) = \frac{1}{V} \frac{dN(E)}{dE} = g \frac{m^*}{2\pi\hbar^2} \quad (2)$$

Mit dem Probenvolumen V und der Teilchenzahl N . Der rechte Term folgt dabei aus der Zweidimensionalität des Probenvolumens und aus Gleichung 1. Die Zustandsdichte $D(E)$ in dem Leitungsband eines 2DEGs ist also konstant mit dem Entartungsfaktor g . Für die Spinartung ist $g = 2$. Im senkrechten Magnetfeld ist die Bewegung der Elektronen auch in der xy -Ebene festgelegt.

Wenn nun ein Magnetfeld angelegt wird, werden die freien Elektronen klassisch durch die Lorentz-Kraft auf Kreisbahnen abgelenkt. Diese lässt sich durch die Überlagerung zweier senkrecht aufeinander stehenden harmonischen Schwingungen beschreiben, die senkrecht zueinander in der xy -Ebene schwingen. Der Abstand der Energiewerte ist durch $\hbar\omega_c$ gegeben, mit der Kreisfrequenz:

$$\omega_c = \frac{eB}{m^*} \quad (3)$$

Diese Kreisfrequenz wird auch Zyklotronfrequenz genannt. Da die Energieniveaus eines solchen Oszillators äquidistant sind, folgt für die Elektronenenergiedispersion des 2DEG in einem in z -Richtung angelegten Magnetfeld

$$E = E_i^z + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + g_L^* \mu_B B s \quad \text{mit} \quad n, i = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Mit dem effektiven Lande-Faktor g_L^* , dem bohrschen Magneton μ_B und der Spinquantenzahl $s = +/ - \frac{1}{2}$. Die Energien E_n heißen Landau-Niveaus. Der mittlere Term der Gleichung

beschreibt die kinetische Energie der Elektronen in quantenmechanischer Betrachtung und der rechte Term berücksichtigt die Spin-Bahn-Wechselwirkung des Systems.

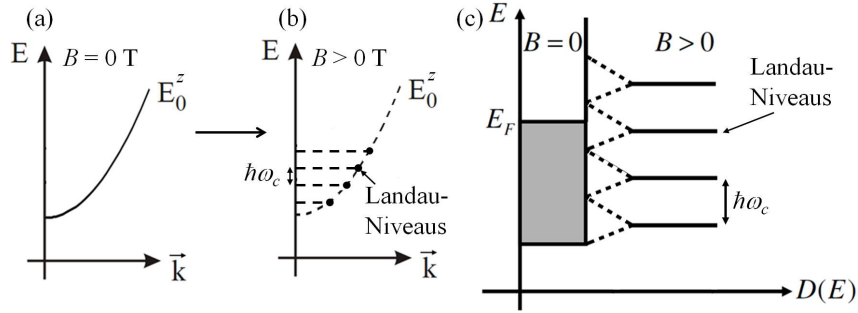


Abbildung 2: Vergleich der klassischen Beschreibung der Energieabhängigkeit (a) mit der Quantenmechanischen (b). (c) Vergleich des Zusammenhanges zwischen Zustandsdichte und Energie in klassischer und quantenmechanischer Beschreibung [2].

Abbildung 2 veranschaulicht das Annehmen diskreter Werte der Zustandsdichte im quantenmechanischen Fall. Das Magnetfeld wirkt auf die Bewegungsrichtung der Elektronen, nicht aber auf deren kinetische Energie, daher lässt sich die Anzahl der Elektronen pro Zustand mit der Zustandsdichte $D(E)$ bei $B = 0$ T ausdrücken mit

$$N_L = \frac{D(E)}{g} \hbar\omega_c = \frac{eB}{h} \quad (5)$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Anzahl der Elektronen pro Flächeneinheit, die ein Landauniveau aufnehmen kann, linear mit dem Magnetfeld zunimmt. Es wird ein Füllfaktor ν eingeführt, welcher angibt, wie viele Spin aufgespaltenen Landau-Niveaus bei gegebener Ladungsträgerdichte n_s und einem Magnetfeld B zumindest teilweise besetzt sind:

$$\nu = \frac{n_s}{N_L} = \frac{\hbar n_s}{eB} \quad (6)$$

1.2 Klassischer Hall-Effekt

Beim klassischen Hall-Effekt liegt ein Magnetfeld B senkrecht zu einem stromdurchflossenen Leiter an. Das Magnetfeld wirkt durch die Lorentzkraft auf die bewegten Ladungsträger und es bildet sich die sogenannte Hallspannung U_{Hall} senkrecht zur Strom- und Magnetfeldrichtung aus. Die Hallspannung ist proportional zum angelegten Magnetfeld. Dieser Effekt wurde 1879 von dem amerikanischen Physiker Edwin H. Hall entdeckt [4, Kap. 10.7].

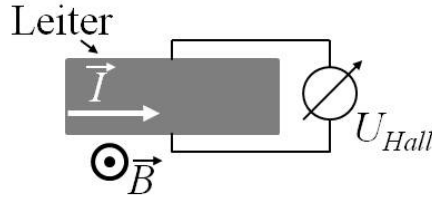


Abbildung 3: Schematischer Aufbau zur Beobachtung des klassischen Hall-Effekts [2].

Für das in diesem Versuch verwendete 2DEG lässt sich die Beweglichkeit der Ladungsträger mit der Drude-Transporttheorie annähern. Diese basiert auf der Tatsache, dass sich die Bewegung der Ladungsträger im Elektronengas mit den klassischen Newtonschen Bewegungsgleichungen beschreiben lässt. Man erhält die Bewegungsgleichung für Elektronen im E- und B-Feld im stationären Zustand:

$$\frac{m^*}{\tau} \vec{v}_D = -e(\vec{E} + \vec{v}_D \times \vec{B}) \quad (7)$$

Mit τ als mittlere Stoßzeit zweier Elektronen und \vec{v}_D als Driftgeschwindigkeit der Elektronen. Diese erhält man für $B = 0$ T aus:

$$\vec{v}_D = \frac{-e\tau}{m^*} \vec{E} = \mu \vec{E} \quad (8)$$

mit der Beweglichkeit

$$\mu = \frac{-e\tau}{m^*} \quad (9)$$

Die Stromdichte \vec{j} beschreibt die Anzahl der Ladungen pro Zeit und Fläche und lässt sich anhand von Gleichung 8 beschreiben durch:

$$\vec{j} = -en_s \vec{v}_D = en_s \mu \vec{E} = \sigma_0 \vec{E} \quad (10)$$

mit σ_0 als spezifischer Leitfähigkeit des Systems

$$\sigma_0 = en_s \mu \quad (11)$$

Aufgrund der in z-Richtung eingeschränkten Elektronenbewegung innerhalb des 2DEGs, spielen nur die x- und y-Komponenten eine Rolle und Gleichung 10 kann als Produkt aus Tensor und Vektor geschrieben werden

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (12)$$

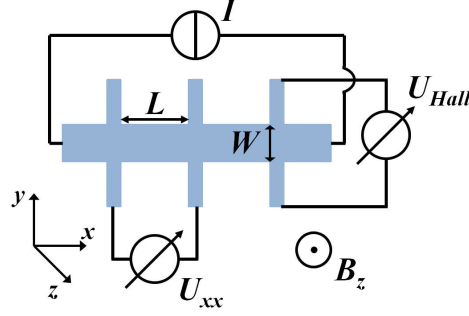


Abbildung 4: Schematische Darstellung der Hall-Streifen-Geometrie der Probe [2].

Hierbei entsprechen die Einträge auf der Diagonalen des Tensors der spezifischen Leitfähigkeit in Richtung des elektrischen Feldes [3, Kap.3.6]. Die Einträge auf der Nebendiagonalen sind nur für $B \neq 0$ nicht Null. Den spezifischen Widerstandstensor erhält man durch Matrixinversion.

$$\rho = \sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}\sigma_{yx}} = \begin{pmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Im hier durchgeführten Experiment wurde die Richtung des Stroms festgelegt und aus den gemessenen Spannungen zunächst die Komponenten des spezifischen Widerstandstensors $\vec{\rho}$ bestimmt. Aus diesen erhält man dann die Elektronenbeweglichkeit μ und -dichte n_s .

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{1}{e\mu n_s} \quad (14)$$

und

$$\rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{1}{en_s} B \quad (15)$$

Die Komponenten des Leitfähigkeitstensors ergeben sich über Matrixinversion aus dem Widerstandstensor, sodass spezifische Leitfähigkeit und spezifischer Widerstand gleichzeitig Null werden können. Man erhält über die Stromdichte \vec{j} folgenden Zusammenhang von spezifischer Leitfähigkeit zu spezifischem Widerstand

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = \rho \cdot \vec{j} \quad (16)$$

bzw.

$$\rho_{xx} = \frac{E_x}{j_X} \quad (17)$$

und

$$\rho_{xy} = \frac{E_y}{j_X} \quad (18)$$

Zudem wurde im Experiment nicht die Stromdichte vorgegeben und das E-Feld gemessen, sondern es wurde die Spannung gemessen, indem der absolute Strom vorgegeben wurde. Die Probe entsprach hierzu der sogenannten Hall-Streifen-Geometrie.

Das hat den Vorteil, dass kein Strom durch die Kontakte fließt, an welchen die Hallspannung gemessen wird, sodass Kontaktwiderstände keine Rolle spielen, sondern nur die in der Probe abfallende Spannung. Der absolute Strom ist dann gegeben durch

$$I = j \cdot W \quad (19)$$

Mit der Breite des Hallstreifens W . Die Längsspannung U_{xx} ergibt sich aus

$$U_{xx} = E_x \cdot L \quad (20)$$

Mit der Probenlänge L . Mit den Zusammenhängen aus Gleichung 17 und 18 ergibt sich für die spezifischen Widerstände

$$\rho_{xx} = \frac{U_{xx}}{I} \frac{W}{L} \quad (21)$$

und

$$\rho_{xy} = \frac{U_{Hall}}{I} \quad (22)$$

Daraus und aus den Gleichungen 14 und 15 folgt für die Ladungsträgerdichte im Leiter:

$$n_s = \frac{I}{e} \cdot \left(\frac{dU_{Hall}}{dB} \right)^{-1} \quad (23)$$

Mit der Änderung der Hallspannung mit dem Magnetfeld $\frac{dU_{Hall}}{dB}$.

Anhand der Ladungsträgerdichte und der in Stromrichtung über den Leiter abfallenden Spannung, kann man zudem die Beweglichkeit der Ladungsträger ermitteln:

$$\mu = \frac{1}{n_s e} \frac{I}{U_{xx}} \frac{L}{W} \quad (24)$$

Ein alternativer Ansatz, welcher in diesem Versuch für die Auswertung verwendet wurde um die Ladungsträgerdichte zu bestimmen, ist der über die Shubnikov-de Haas-Oszillation. Hierzu wird die Längsspannung U_{xy} gegen das reziproke Magnetfeld $1/B$ aufgetragen und jedem Minimum der Oszillation ein Füllfaktor ν zugeordnet. Die Ladungsträgerdichte hängt wie folgt mit dem Füllfaktor zusammen

$$\nu = \frac{h n_s}{e B} \quad \Leftrightarrow \quad n_s = \frac{e b}{h} \quad (25)$$

Dabei ist h Plancksche Wirkungsquantum, e die Elementarladung, B die Stärke des Magnetfeldes und b die Steigung im ν - $1/B$ -Diagramm.

1.3 Quanten-Hall-Effekt und Shubnikov-de Haas-Oszillation

Beim Quanten-Hall-Effekt bilden sich im Gegensatz zum klassischen Hall-Effekt waagerechte Plateaus für die Hallspannung aus. Diese sind materialunabhängig und ihre Werte sind durch Gleichung 26 gegeben. Die Plateaus bilden sich bei tiefen Temperaturen und bei Magnetfeldern ab einer Stärke von $|B| > 2 \text{ T}$ aus. Unterhalb dieser B-Feldstärke stimmen die Werte des quantenmechanischen Regimes in etwa mit dem des Klassischen überein [3, Kap.3.6].

$$R_H = \frac{1}{\nu} \cdot 25812,8 \Omega = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2} \quad (26)$$

Dabei ist ν der Füllfaktor, h das Plancksche Wirkungsquantum und e die Elementarladung.

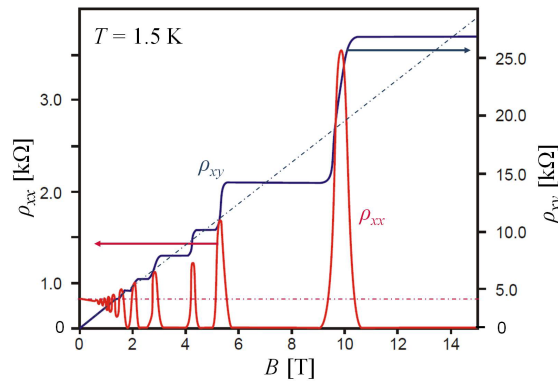


Abbildung 5: Beispielmessung des Quanten-Hall-Effekts und der Shubnikov-de Haas-Oszillation. Die gestrichelten Linien stellen die klassisch erwarteten Kurven dar. Es ist zu erkennen, dass sich spezifischer Längs- und Hallwiderstand bei kleinen Magnetfeldern verhalten wie klassisch zu erwarten. Mit steigendem B-Feld kommt es immer deutlicher zu Quanteneffekten. Der spezifische Hall-Widerstand folgt dabei Werten mit ausgeprägten Plateaus, während im spezifischen Längswiderstand Shubnikov-de Haas-Oszillationen auftreten [2].

Während sich unter den Bedingungen des Quanten-Hall-Effekt für den Hallwiderstand die oben beschriebenen Plateaus ausbilden, sind für den spezifischen Längswiderstand der Probe Oszillationen zu beobachten. Man spricht von der sogenannten Shubnikov-de Haas-Oszillation (SDHO). Bei einem sehr großen Magnetfeld nimmt der Längswiderstand im Minimum dieser Oszillation sogar den Wert Null an.

1.3.1 Randkanalmodell

Um die beiden hier betrachteten Effekte erklären zu können, wird das sogenannte Randkanalmodell verwendet. Dabei handelt es sich um eine Näherung, bei der am Rand der Probe ein Potential angenommen wird, welches zu einer Erhöhung der Landau-Niveaus führt. Obwohl die Fermi-Energie E_F im Inneren der Probe zwischen zwei Landau-Niveaus liegen, können so am Probenrand auch elektronische Zustände nahe der Fermi-Energie entstehen. Es bilden sich also eindimensionale Randkanäle zum Transport der Ladungsträger aus.

Diese können sich nur in eine Richtung bewegen, welche von der Orientierung des Magnetfelds abhängt. Die chiralen Zustände sind durch Einwirken des Magnetfeldes über die Lorentzkraft auf geladene Teilchen recht stabil und Ladungsträger können dadurch trotz eventueller Stöße mit Phononen wieder auf ihre Bahn finden. Dies ist in der folgenden Abbildung 6 dargestellt.

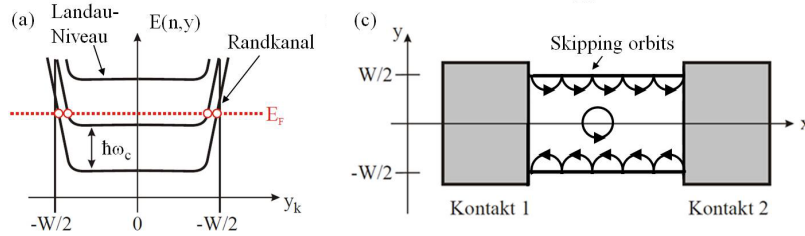


Abbildung 6: **Links:** Schematische Darstellung der Erzeugung von Randpotentialen [2].
Rechts: Schema zur Darstellung der Bewegung von Elektronen im Randkanalmodell [2].

Zur anschaulichen Beschreibung des Ladungstransport in den Randkanälen kann der Landauer-Büttiker-Formalismus genutzt werden. Dabei werden Parallelen von der Optik zur Technik aufgezeigt, wie zum Beispiel der Vergleich der Transmission einer Elektronenwelle mit der einer elektromagnetischen Lichtwelle.

Die Anzahl M der Randkanäle hängt ab von der Lage der Fermienergie E_F und somit auch von der Stärke des Magnetfeldes, wie in Abbildung ?? (a) dargestellt. Die Hauptaussage des Landauer-Büttiker-Formalismus beruht auf der Annahme, dass die Elektronen mit einer Wahrscheinlichkeit T_{lm} vom Kontakt m zum Kontakt l transmittiert werden. Dabei sei nun die Anzahl der Kontakte an der Probe $p = 2$, diese liegen auf unterschiedlichen chemischen Potentialen μ_p . Dann sei weiter am oberen Rand der Probe $T_{12} = 1$ und $T_{21} = 0$, denn ein Elektron, welches an Kontakt 1 in den Randkanal transmittiert wird, kann die Probe nur über Kanal 2 wieder verlassen. Am unteren Rand der Probe drehen sich die Wahrscheinlichkeiten genau um. Die gemessene Spannung an den beiden Kontakten ist dann

$$U_{12} = U_1 - U_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{e} \quad (27)$$

Den entsprechenden Strom erhält man aus

$$I_0 = -e \cdot \left(\int_0^{\mu_1} T_{12} D(E) v(E) dE - \int_0^{\mu_2} T_{12} D(E) v(E) dE \right) \quad (28)$$

Mit der Transmissionswahrscheinlichkeit T , der Zustandsdichte $D(E)$ und der Gruppengeschwindigkeit $v(E) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k}$. Der gesamte Nettostrom setzt sich aus dem Strom des oberen und unteren Kanals zusammen und beträgt

$$I = I_0 + I_u = -e \int_{\mu_2}^{\mu_1} T_{12} D(E) v(E) dE = \frac{e^2}{h} (U_1 - U_2) \quad (29)$$

1.3.2 Erklärung der Hall-Plateaus und der SDH-Oszillation

Das Randkanalmodell und der Landauer-Büttiker-Formalismus (oben beschrieben) sind zwei Ansätze zur Erklärung der Ursache für die Hall-Plateaus. Betrachtet wird nun eine Vierpunkt-Messung, wie sie in Abbildung 7 dargestellt ist.

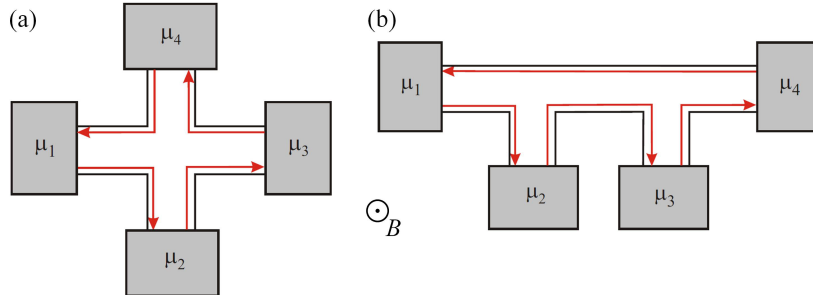


Abbildung 7: **Links:** Schema der sogenannten Hall-Kreuz-Geometrie zur Messung der Hall-Spannung zwischen μ_2 und μ_4 [2].

Rechts: Schema der Kontaktgeometrie zur Messung des Längswiderstandes zwischen μ_2 und μ_3 [2].

Die roten Pfeile in der Abbildung 7 zeigen die mögliche Richtung des Stromflusses in den Randzuständen an. Deren Anzahl sei M . Ströme, die in einen Kontakt hinein fließen, seien positiv. Anhand Gleichung 29 lassen sich in diesem Beispiel die vier Ströme berechnen und man erhält ein Gleichungssystem dessen Lösungen die Hallspannung $U_{Hall} = U_4 - U_2$ liefern. Mithilfe des Ohmschen Gesetzes erhält man den Hallwiderstand über

$$R_H = \frac{U_H}{I} = \frac{1}{M} \frac{h}{e^2} \quad (30)$$

Anhand dieser Formel ist zu erkennen, dass der Hallwiderstand also von der Anzahl der Randkanäle abhängt. Die Anzahl der Randkanäle ändert sich, wenn ein Landau-Niveau die Fermienergie durchläuft, dies geschieht in den Übergangsbereichen zwischen zwei Plateaus. Infolgedessen ändert sich also auch der Wert für die den Hallwiderstand R_H . Dies erklärt das Erscheinen der Plateauwerte im Hallwiderstand. Die Übergangsbereiche werden im Unterkapitel 1.3.3 näher erläutert. Es wird erneut der Landauer-Büttiker-Formalismus zur Hand genommen, um das Verschwinden des Längswiderstandes im Bereich eines Plateaus zu erklären. Im Bereich eines Plateaus liegt die Fermienergie zwischen zwei Landau-Niveaus und dadurch liegen die Kontakte über welche die Längsspannung gemessen wird, auf dem selben Potential. Das führt dazu, dass die Längsspannung den Wert Null annimmt. Für eine ideale Probe ist dies allerdings nur bei singulären Magnetfeldwerten tatsächlich der Fall.

1.3.3 Lokalisierte Zustände

Die Fermienergie liegt per Definition zwischen dem höchsten besetzten und dem niedrigsten unbesetzten Elektronenniveau. Die Landau-Niveaus haben den Abstand $\hbar\omega_c$. Dieser Abstand wächst also linear mit dem B-Feld. So nimmt auch die Fermienergie linear mit dem Magnetfeld zu. Gleichzeitig nimmt jedoch auch die Entartung der Niveaus zu. Wenn also mit zunehmendem Magnetfeld die letzte Besetzung des höchsten Zustandes in den

nächst niedrigeren Zustand springt, springt auch die Fermienergie. Dieses Verhalten ist schematisch in Abbildung 8 dargestellt.

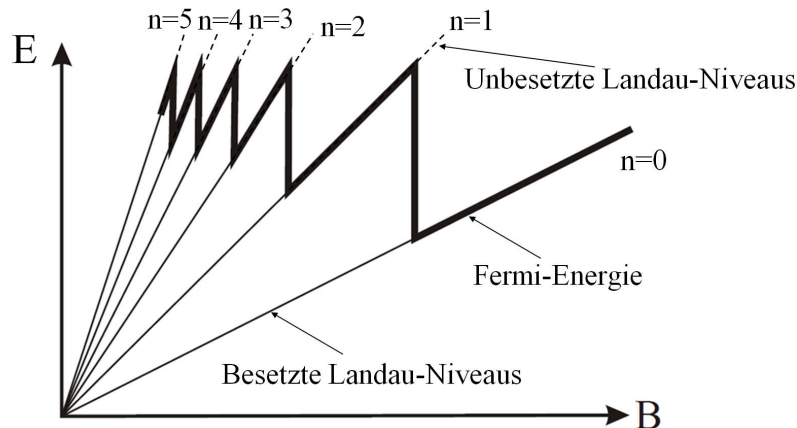


Abbildung 8: Abhängigkeit der Besetzung von Landau-Niveaus und der Fermi-Energie im Magnetfeld [2].

Eine ideale Probe zeichnet sich durch eine peak-förmige Zustandsdichte aus. Liegt ein singuläres Magnetfeld an, liegt die Fermienergie darin zwischen zwei Landau-Niveaus. Doch bei einer realen Probe treten Fluktuationen in der Zustandsdichte auf. Das liegt daran, dass die Landau-Niveaus im Inneren der Probe nicht konstant verlaufen, sondern durch Störstellen verbreitert sind.

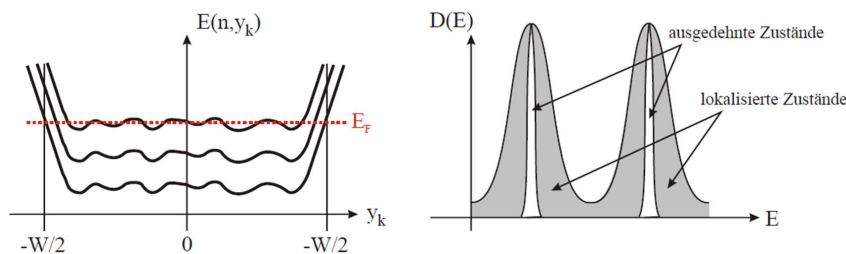


Abbildung 9: **Links:** Landau-Niveaus in einer realen Probe [2].

Rechts: Verbreiterung der Zustandsdichte durch Störquellen [2].

Die chiralen Zustände des Randkanalmodells verschwinden in den Übergangsbereichen, in welchen die Fermienergie exakt auf einem Landau-Niveau liegt. Dadurch kann es zu Rückstreuung kommen und der Längswiderstand ist nicht mehr Null. So lässt sich die Ursache der Ausdehnung der Hall-Plateaus, sowie SDH-Oszillation mittels des Randkanalmodells zusammen mit dem Landauer-Büttiker-Formalismus und den lokalisierten Zuständen erklären.

1.4 Plattenkondensator

In der Auswertung des Versuchsteils zur Gatespannungsabhängigkeit wird näherungsweise von einem Plattenkondensator der Fläche A ausgegangen. Für die Anzahl der Ladungsträger

gilt mit $N_s = n_s \cdot A$

$$N_s = C \cdot U_{Gate} \quad (31)$$

mit der Kapazität C des Kondensators. Diese ist definiert über

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 A}{d} \quad (32)$$

mit dem Abstand d der Platten, der Dielektrizitätskonstanten des Vakuums ϵ_0 und der Dielektrizitätskonstanten des Dielektrikums im Kondensator ϵ . Aus 31 und 32 ergibt sich:

$$n_s = \frac{\epsilon \epsilon_0}{d} (U_{Gate} - U_{th}) \quad (33)$$

mit der Einsatzspannung U_{th} .

2 Experimentelle Durchführung und Beobachtungen

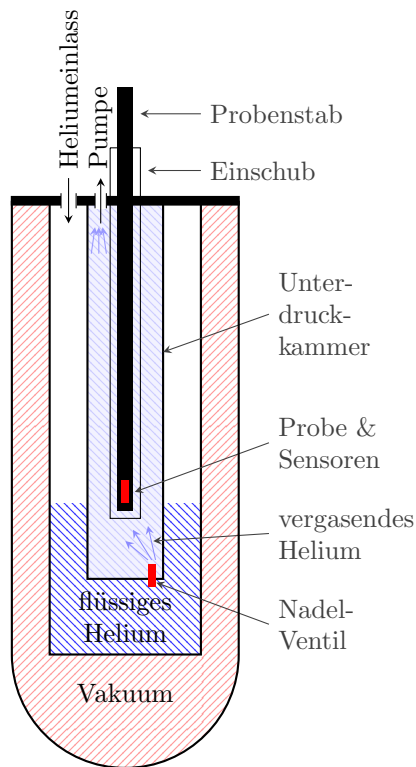


Abbildung 10: Schematische Zeichnung des im Text beschriebenen Kryostaten.

Der Versuchsaufbau besteht aus einem im Boden eingelassenen Kryostaten und sich in einem Rack befindlichen Steuerungs- und Messelektronik, welche mit Hilfe eines Computers gesteuert bzw. ausgelesen wird und deren Messdaten aufgezeichnet werden können. Der Kryostat ist ein Vakuumtank mit einer heliumgefüllten Kammer im Inneren. Darin befindet sich eine Kammer, in der wiederum ein Probeneinschub ist. Mit einer Pumpe wird der Druck in dieser Kammer auf wenigen Millibar gehalten. Durch die Verdunstungskälte kann die Innentemperatur und so auch die Probentemperatur auf etwa 1,5 K gehalten werden. Dieser Aufbau ist in Abbildung 10 schematisch dargestellt. Durch einige Sensoren und eine Heizung kann die Temperatur anschließend sehr genau geregelt werden. Um letztendlich den QHE und die SDHO beobachten zu können, sind sehr hohe Magnetfelder von Nöten, hierfür werden zwei supraleitende Magnetspulen genutzt.

Vor dem Versuch wurde der Tank über den Heliumeinlass an der Oberseite mit flüssigem Helium gefüllt. Die Probe wurde an der Spitze des Probenstabes montiert und in den Probeneinschub eingeführt. Anschließend wurde die den Einschub umgebende Kammer mehrfach mit Hilfe eines Nadelventils mit Helium geflutet und anschließend wieder abgepumpt, um Luftreste zu entfernen und Vereisungen an Probe und Nadelventil zu vermeiden. Anschließend wurde bei laufender Pumpe eine Einstellung für die Heliumzufuhr (Nadelventil) gesucht, sodass sich in der Kammer der gewünschte Unterdruck und somit die sehr tiefen Temperaturen einstellen.

Im Nachfolgenden werden in den ersten beiden Abschnitten zwei unterschiedliche Messmethoden erprobt und in den Anschließendenden werden Winkel, Temperatur und Elektronendichte variiert und die Folgen auf den Quanten-Hall Effekt und die Shubnikov-de Haas Oszillationen untersucht.

2.1 Gleichstrommessungen

In diesem Versuchsabschnitt wurden die Längs- und Querspannung gemessen und aufgezeichnet, während an der Probe ein Gleichstrom anlag. Gleichzeitig wurde das Magnetfeld verändert.

Um eine stabile Temperatur zu erhalten, wurde die Kammer von den 1,5 K auf 2 K geheizt und programmgesteuert auf dieser Temperatur gehalten. Der Strom in x-Richtung betrug $1 \mu\text{A}$. Das Magnetfeld wurde auf $-7,7 \text{ T}$ gefahren. Dies dauert rund sieben Minuten, da es sich um supraleitende Spulen handelt und das Anlegen eines Stroms eine Gegeninduktion verursacht. Sobald das Magnetfeld aufgebaut war, wurde die Hallspannung U_H sowie die Längsspannung U_{xx} aufgezeichnet, während das Magnetfeld mit der maximalen Geschwindigkeit von $1 \text{ T}/\text{min}$ auf $+7,7 \text{ T}$ gefahren wurde.

Die mit Hilfe der Formeln (21) und (22) aus den Spannungen berechneten Widerstände sind in Abbildung 11 zu sehen.

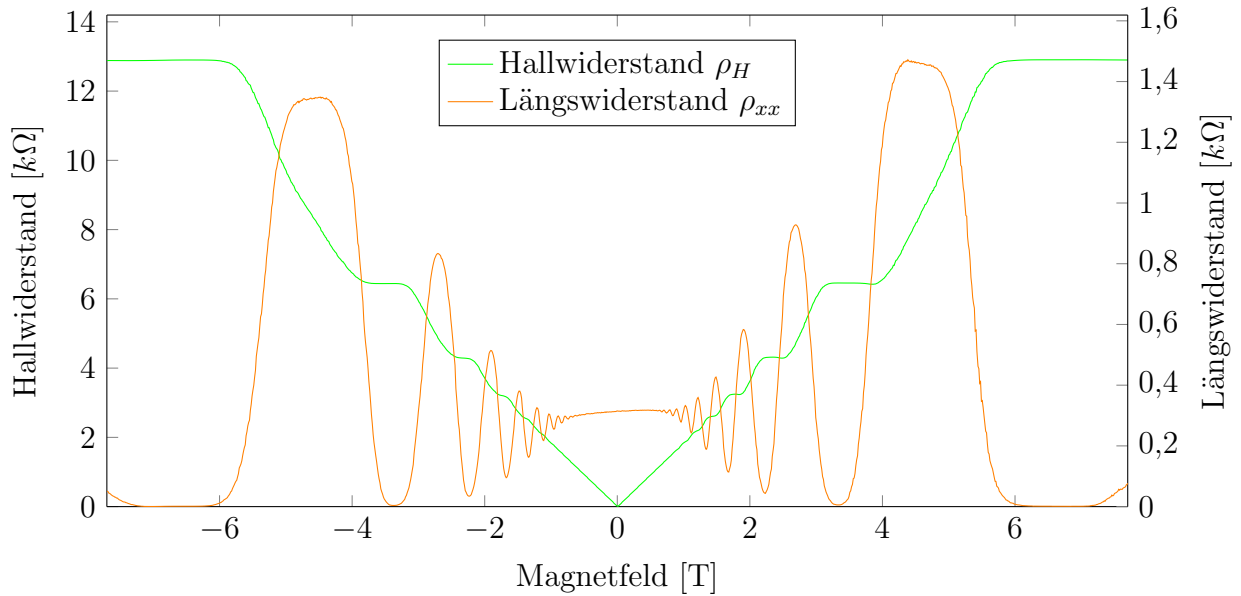


Abbildung 11: Plot der aus den gemessenen Längs- und Querspannungen berechneten Widerständen, eines mit Gleichstrom durchflossenen 2DES im maximalen Magnetfeldbereich und maximaler Magnetfeldrampe. Die Hall-Spannung und somit der berechnete Hall-Widerstand nimmt bei negativen Magnetfeldern negative Werte an, Aus Platzgründen wurde diese jedoch in den positiven Bereich geklappt.

Um im Bereich von -2 bis $+2 \text{ T}$ eine bessere Auflösung der sehr dicht beieinander liegenden Niveaus zu bekommen wurde eine zweite analog verlaufende Messung in diesem Bereich mit einer kleineren Magnetfeldrampe von $0,2 \text{ T}/\text{min}$ durchgeführt. Da das Fahren der Magnetfelder, wie bereits erwähnt, längere Zeiten in Anspruch nimmt, kann hier mit vorausschauendem Handeln viel Zeit gespart werden. Daher wurde das Magnetfeld von den $+7,7 \text{ T}$ aus dem letzten Versuchsteil erst auf $+2,2 \text{ T}$ gefahren und die Messung anschließend mit einer negativen Magnetfeldrampe durchgeführt.

Die aus den Messergebnissen berechneten Widerstandsverläufe sind in Abbildung 12

aufgetragen. Zwischen den Messungen im Teilbereich und jenen im gesamten ist ein leichter Versatz sowohl in horizontaler als auch vertikaler Richtung festzustellen. Die bessere Auflösung der Teilbereichsmessung ermöglicht das Auffinden eines neuen Minimas in der Längsspannung beziehungsweise in dem Längswiderstand.

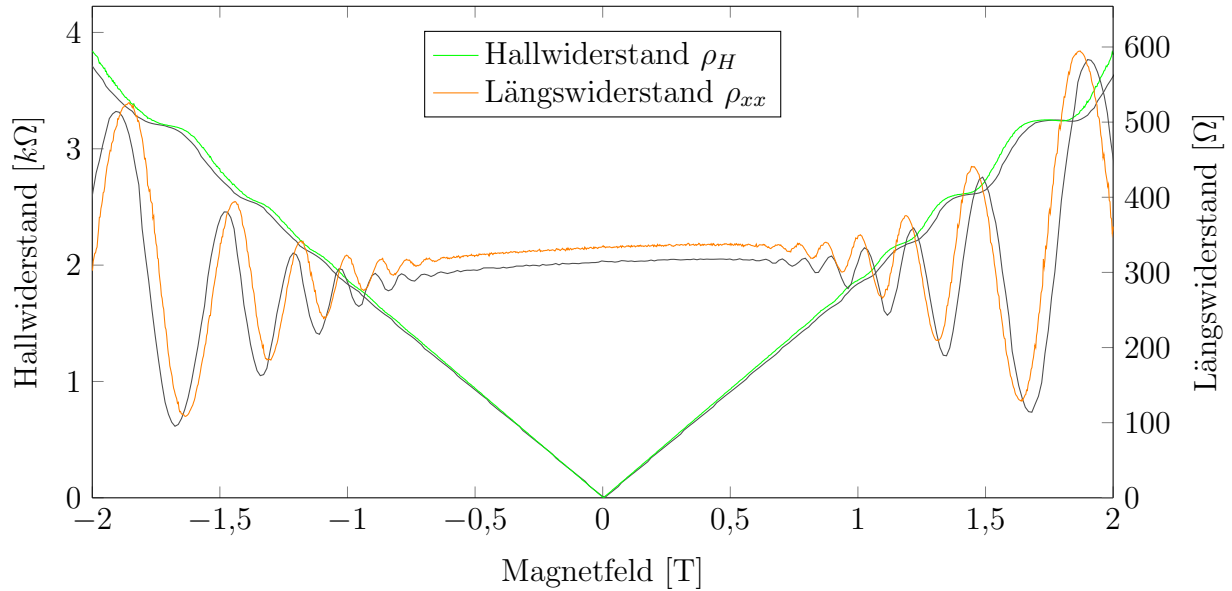


Abbildung 12: Plot des aus den gemessenen Längs- und Querspannungen berechneten Widerständen eines mit Gleichstrom durchflossenen 2DES im reduzierten Magnetfeldbereich und geringerer Magnetfeldrampe. Die Hall-Spannung und somit der berechnete Hall-Widerstand nimmt bei negativen Magnetfeldern negative Werte an, Aus Platzgründen wurde diese jedoch in den positiven Bereich geklappt. In grau sind die entsprechenden Ergebnisse der Messung des gesamten Bereiches aus der vorherigen Abbildung unterlegt.

Es sind deutlich die Plateaus des Hall-Widerstandes und die Oszillation des Shubnikov-de Haas-Widerstandes zu erkennen. Die Maxima der SDHO liegen bei den Übergängen zwischen den Plateaus des QHE. Ferner ist eine leichte Asymmetrie der Messergebnisse zwischen positiven und negativen Magnetfeldern zu erkennen.

2.2 Wechselstrommessung

Im folgendem Abschnitt wurden die Messungen des vorigen Versuchsteils im Wesentlichen wiederholt, mit dem Unterschied, dass anstatt eines Gleichstroms ein Wechselstrom die Probe durchfließt. Dieser wurde mit einem Funktionsgenerator mit der Amplitude $U_{RMS} = 1 \text{ V}$ erzeugt. Um den Strom unabhängig von dem Widerstand des Hall-Streifens zu halten, musste ein hinreichend großer Widerstand in Reihe geschaltet werden. Da der Eigenwiderstand des Hall-Streifens bei einigen Kiloohm lag, wurde ein $1 \text{ M}\Omega \pm 5\%$ Widerstand verwendet. So kann in guter Näherung angenommen werden, dass der Strom allein durch den zusätzlich angelegten Vorwiderstand zu $I = U/R = 1 \text{ V}/1 \text{ M}\Omega = 1 \mu\text{A}$ bestimmt wurde. Um die kleinen, dennoch auftretenden Schwankungen auszugleichen, wurde der Strom ebenfalls für jeden Datenpunkt aufgezeichnet. Für die Rechnungen wurde der Mittelwert dieser Werte zu $I = 0,978 \mu\text{A}$ berechnet. Die Berechnung des Widerstandes mit den Formeln (21) und (22) wurde entsprechend zeilenweise mit dem gemessenen Strom durchgeführt.

Die verwendeten Messgeräte für die Längs- und Querspannungen wurden mit dem Frequenzgenerator als Referenz verbunden.

Die aus den Messwerten gewonnen Widerstandswerte sind für die gesamte Magnetfeldreichweite bei maximaler Magnetfeldrampe in Abbildung 13 und für den detaillierten Ausschnitt in Abbildung 14 aufgetragen.

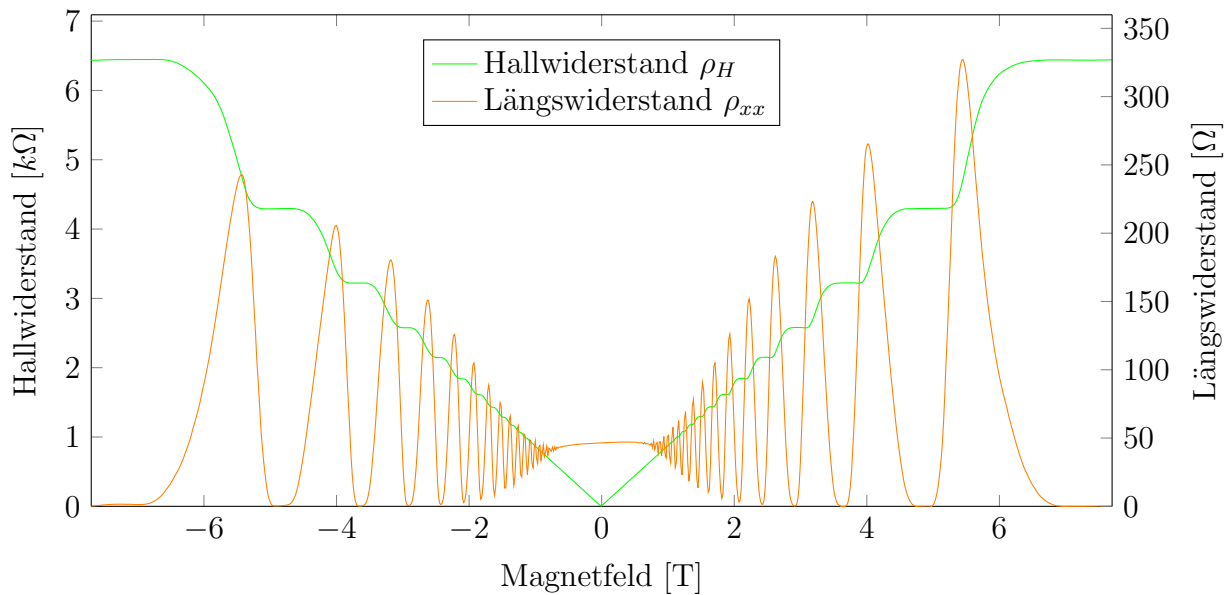


Abbildung 13: Plot des aus den gemessenen Längs- und Querspannungen berechneten Widerständen eines mit Wechselstrom durchflossenen 2DES im maximalen Magnetfeldbereich und maximaler Magnetfeldrampe. Die Hall-Spannung und somit der berechnete Hall-Widerstand nimmt bei negativen Magnetfeldern negative Werte an, Aus Platzgründen wurde diese jedoch in den positiven Bereich geklappt.

Auch bei diesen Messungen ist die Asymmetrie des Längswiderstandes bei positiven und negativen Magnetfeldes zu beobachten. Die Messungen des gesamten und des Teilbe-

reiches sind sehr Kongruent, die des gesamten Bereiches kann jedoch die Oszillationen des Längswiderstandes im Bereich zwischen -1 und 1 T nicht mehr gut auflösen. Durch die reduzierte Magnetfeldrampe der Messung im Teilbereich zwischen -2 und $+2$ T hat diese eine für diesen Bereich wesentlich besser geeignete Auflösung.

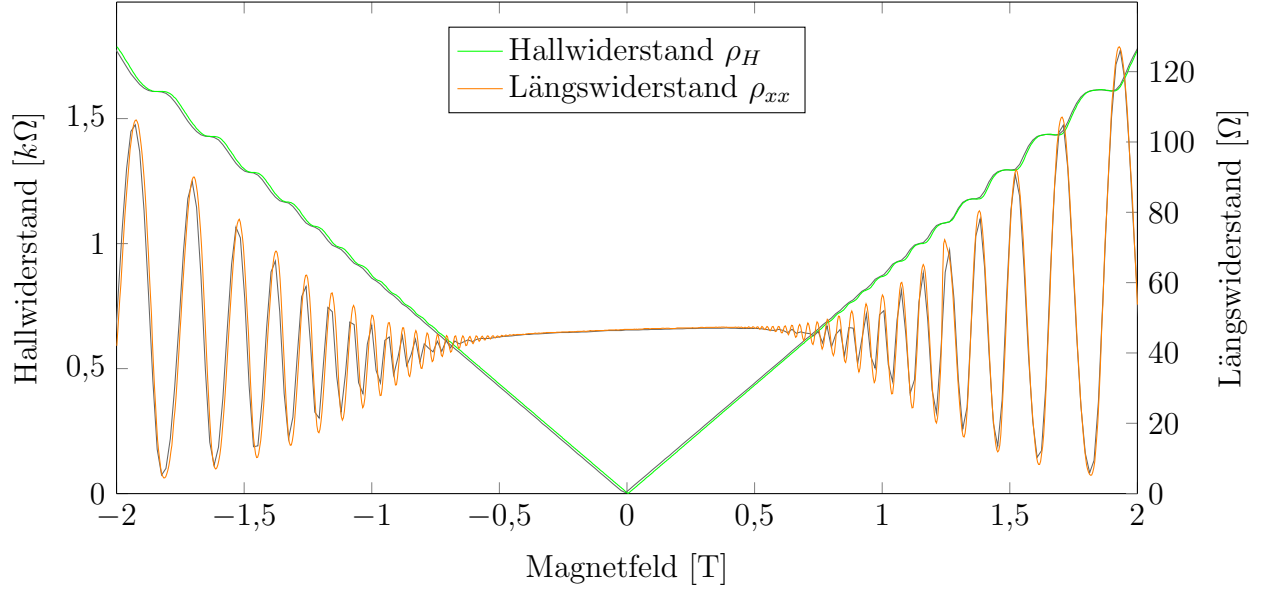


Abbildung 14: Plot des aus den gemessenen Längs- und Querspannungen berechneten Widerständen eines mit Wechselstrom durchflossenen 2DES im reduzierten Magnetfeldbereich und geringerer Magnetfeldrampe. Die Hall-Spannung und somit der berechnete Hall-Widerstand nimmt bei negativen Magnetfeldern negative Werte an, Aus Platzgründen wurde diese jedoch in den positiven Bereich geklappt. In grau sind die entsprechenden Ergebnisse der Messung des gesamten Bereiches aus der vorherigen Abbildung unterlegt.

2.3 Winkelabhängigkeit

In diesem Versuchsteil wurde die Abhängigkeit des Quanten-Hall-Effekts, sowie des Shubnikov-de Haas-Effekts vom Einfallswinkel des Magnetfeldes auf die Probe untersucht. Hierzu wurde ausgenutzt, dass sich der Probenstab im Einschub drehen ließ, ohne sich dabei aus der Fixierung zu lösen. Mit Hilfe einer Winkelscheibe auf der Abdeckung des Kryostaten und einer Markierung am Probenstab, wurde nun eine Messreihe bestehend aus mehreren Messungen für verschiedene Winkeleinstellungen der Probe zum Magnetfeld durchgeführt. Für den Winkel wurden hierbei in 10° -Schritten Werte zwischen 260° und 10° gewählt, sodass insgesamt eine Drehung von 110° ausgeführt wurde. Dabei lag eine Temperatur von 2 K an der Probe an und für jede Messung wurde das Magnetfeld analog zu den ersten Messungen von $+7,7$ bis $-7,7$ T gefahren, mit der maximalen Geschwindigkeit von 1 T/min . Aufgrund der deutlicheren Hall-Plateaus in den Graphen wurde für diese Messreihe weiterhin die Wechselstromquelle des vorangegangenen Versuchsteils genutzt.

Anhand der Messungen war zu erkennen, dass beide betrachteten Effekte immer weniger ausgeprägt waren und schließlich verschwanden, je weiter die Probe aus der Nullposition ausgelenkt wurde.

2.4 Temperaturabhängigkeit

Im Folgenden sollte nun die Temperaturabhängigkeit des Quanten-Hall- und des Shubnikov-de Haas-Effekts überprüft werden. Ziel dabei war es, die Grenztemperatur zu finden, bis zu welcher die beiden Effekte noch zu beobachten sind. Dazu wurden Messungen für unterschiedliche Temperaturwerte an der Probe aufgenommen. Begonnen wurde dabei bei der Ausgangstemperatur von 2 K und es wurden in unregelmäßigen Intervallen Temperaturen bis hin zu 40 K gewählt. Für jede Messung wurde analog zu den vorangegangenen Versuchsteilen das Magnetfeld mit einer Geschwindigkeit von 1 T/min zwischen $-7,7$ und $7,7 \text{ T}$ gefahren. Auch hier wurde aufgrund der deutlicheren Hall-Plateaus in den Graphen weiterhin die Wechselstromquelle genutzt.

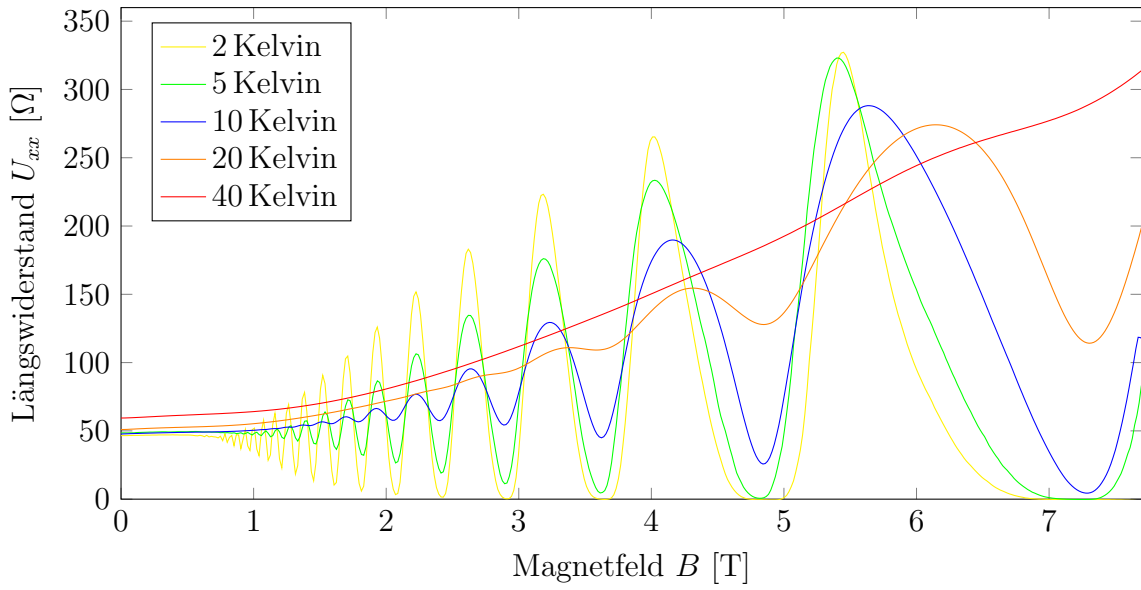


Abbildung 15: Teilverlauf des berechneten Längswiderstands bei Unterschiedlichen Temperaturen. Für die Übersichtlichkeit wurde die Hälfte mit negativen Magnetfeldern nicht dargestellt.

In Abbildung 15 ist jene Hälfte der Messergebnisse zu sehen, die bei positiven Magnetfeldern aufgenommen wurde.

2.5 Gatespannungsabhängigkeit

Im letzten Versuchsabschnitt wurde der Einfluss einer Gatespannung auf die beiden zu untersuchenden Effekte beleuchtet, mit dem Ziel, aus den dadurch erfassten Daten, den Abstand des 2DEG in der Probe zur Gateelektrode zu bestimmen.

Für die folgenden Messungen wurden in Schritten von 50 mV Gatespannungen von -200 bis 200 mV gewählt. Dabei wurde eine Temperatur von 2 K an der Probe eingestellt und analog zu den obigen Versuchsteilen aufgrund der deutlicheren Hall-Plateaus in den Graphen die Wechselstromquelle genutzt.

Der aus der Hallspannung berechnete Hall-Widerstand ist in Abbildung 16 im Messbereich von 0 bis 7.7 T aufgetragen.

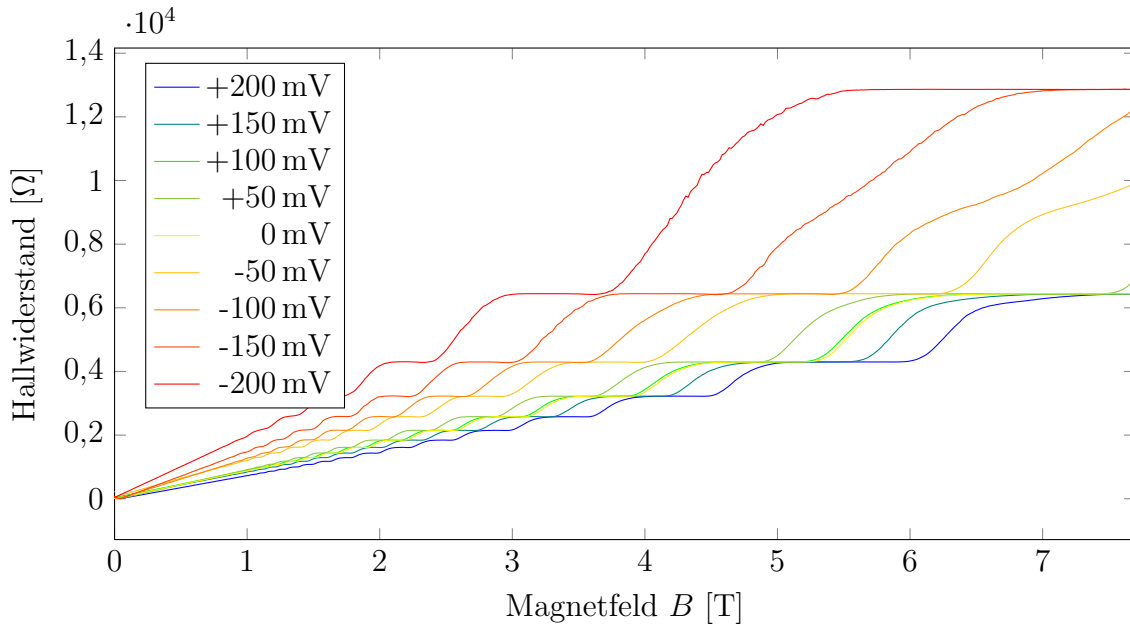


Abbildung 16: Berechnete Elektronendichte n_s und -beweglichkeit μ in Abhängigkeit zu der Gatespannung.

3 Auswertung

Im Folgenden sind die Auswertungen der in den jeweiligen Versuchsteilen aufgenommenen Messdaten zu finden.

3.1 Gleichstrommessungen

Anhand der Messdaten aus der Gleichstrommessung, abgebildet in Graphik 11 und 12, wurde die Dichte der Ladungsträger im 2DEG, sowie deren Beweglichkeit bestimmt.

3.1.1 Näherung über die Hall-Spannung

Zunächst wurde die Steigung der Hall-Spannung mittels linearer Regression aus dem klassischen Bereich der Messdaten zwischen -2 T und 2 T anhand der Formel $U_{Hall} = a \cdot B$ bestimmt:

$$a = \frac{dU_{Hall}}{dB} = (1.876037 \pm 0,000305) \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s} \quad (34)$$

Hieraus ließ sich mit der Formel (23) und dem bekannten Strom von $I = 1 \mu\text{A}$ die Ladungsträgerdichte des 2DEG berechnen:

$$n_s = \frac{I}{e} \left(\frac{dU_{Hall}}{dB} \right)^{-1} = (3,33149 \pm 0,00054) \cdot 10^{16} \cdot 1/\text{m}^2 \quad (35)$$

Mit den Bekannten Maßen der Probe wurde anschließend die Beweglichkeit der Ladungsträger bestimmt. Dies erfolgte anhand der Formel 24 und mit der Probenlänge $L = 600 \mu\text{m}$ und -breite $W = 100 \mu\text{m}$.

$$\mu = (5,92433 \pm 0,00096) \text{ m}^2/\text{Vs} \quad (36)$$

3.1.2 Näherung über die Shubnikov-de Haas-Oszillation

Eine Alternative Möglichkeit, die Ladungsträgerdichte zu berechnen, erfolgt über die Shubnikov-de Haas-Oszillation. Hierzu wurde die Längsspannung über der Probe gegen $1/B$ aufgetragen und jedem Minimum der Oszillation ein Füllfaktor ν zugeordnet. Dies ist in Abbildung 17 zu sehen. Es wurde für den alle Minima die erste Messung verwendet (gesamter Messbereich), da die Auflösung ausreichend war. Ferner konnte so der leichte Versatz zwischen den Messungen keinen negativen Einfluss auf die Ergebnisse haben. Dafür wurde das Minimum/Plateau mit dem höchsten Füllfaktor, welches nur in der Teilbereichsmessung zu sehen war ignoriert.

Mit der linearen Regression $\mu = b/B$ kann die Steigung zu $b = (13,1462 \pm 0,0190)\text{T}$ bestimmt werden. Mit dieser ließ sich analog zur Näherung über die Hall-Spannung mit Gleichung (24) die Ladungsträgerdichte bestimmen:

$$n_s = (3,17874 \pm 0,00046) \cdot 10^{15} \cdot 1/\text{m}^2 \quad (37)$$

So ergibt sich aus Gleichung (25) für die Beweglichkeit:

$$\mu = (6,20901 \pm 0,00896) \text{ m}^2/\text{Vs} \quad (38)$$

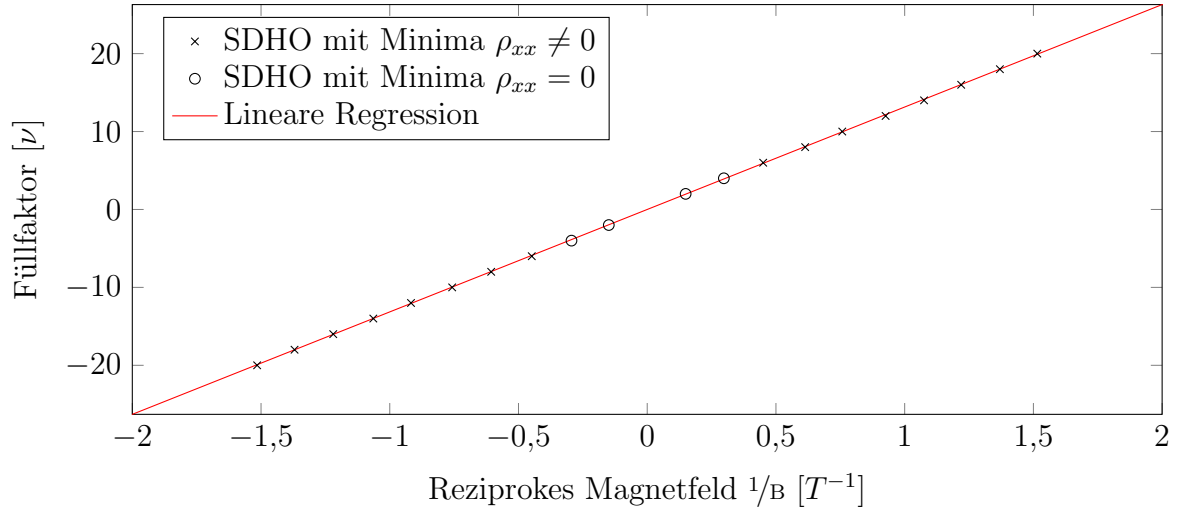


Abbildung 17: Lineare Regression über den Füllfaktor der QHE-Plateaus der Gleichstrommessung aufgetragen gegen das Reziproke Magnetfeld.

In den Graphen 11 und 12 fiel eine leichte Asymmetrie der Messkurven auf. Da sich dies in allen folgenden Messungen ebenfalls bemerkbar machte, wurde hier auf einen Fehler an der Probe selbst geschlossen. So ist es zum Beispiel möglich, dass die Kontakte an der Probe zur Messung der Längs- und Hall-Spannungen eine leichte Asymmetrie aufweisen.

Wenn man über die Widerstandswerte des letzten Plateaus mit Füllfaktor $\nu = 2$ mittelt, kann man den Kitzling-Faktor errechnen:

$$R_K = 12,882 \pm 0,022 \text{ k}\Omega \cdot 2 = 25,764 \pm 0,044 \text{ k}\Omega$$

Dieses Ergebnis liegt sehr dicht an dem Literaturwert von $R_K = h/e = 25,812 \text{ k}\Omega$, wenngleich gerade eben nicht mehr im Konfidenzintervall. Dies könnte auf einen geringen Systematischen Fehler hinweisen. Um ein zuverlässigeres Ergebnis zu erhalten, müssten analog Rechnungen für weitere Plateaus durchgeführt werden. Dies wurde aus Zeitgründen in Rücksprache mit dem Betreuer nicht getan.

3.2 Wechselstrommessung

Analog zur Auswertung der Gleichstrommessung wurde auch für die aufgenommenen Messdaten der Wechselstrommessung, abgebildet in Graphik 13 und 14, die Dichte der Ladungsträger im 2DEG, sowie deren Beweglichkeit bestimmt.

3.2.1 Näherung über die Hall-Spannung

Wie in der Auswertung der Gleichstrommessung wurden auch hier die beiden physikalischen Größen zunächst über die Steigung des klassischen Teils der Hallspannung zwischen -1 T und 1 T bestimmt.

$$\frac{dU_{Hall}}{dB} = (18,7604 \pm 0,0030) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} \quad (39)$$

Dabei wurde von den gemessene Strom der Mittelwert für diesen Bereich ermittelt: $I = 0,978 \mu\text{A}$. Analog zur Auswertung der Gleichstrommessdaten ergaben sich hier für die gesuchten Größen folgende Werte:

$$n_s = (7,15761 \pm 0,00015) \cdot 10^{15} \text{ 1/m}^2 \quad (40)$$

$$\mu = (18,9783 \pm 0,0039) \text{ m}^2/\text{Vs} \quad (41)$$

3.2.2 Näherung über die Shubnikov-de Haas-Oszillation

Ebenfalls analog zur Gleichstrommessung wurden die gesuchten physikalischen Größen alternativ über die Shubnikov-de Haas-Oszillation berechnet. Dies ist in Abbildung 18 zu sehen. Dabei wurde für alle Minima im Bereich von -1 bis 1 T die zweite Messung (kleinerer Bereich mit höherer Auflösung) verwendet, da die Messung im gesamten Bereich für diesen Teilbereich eine zu geringe Auflösung aufwies. Es ergibt sich eine Steigung der Geraden von $b = (28,9081 \pm 0,0358)\text{T}$ und daraus analog zum vorherigen Versuchsteil die physikalischen Größen:

$$n_s = (6,9899 \pm 0,0087) \cdot 10^{15} \cdot \text{1/m}^2 \quad (42)$$

$$\mu = (19,4335 \pm 0,0241) \text{ m}^2/\text{Vs} \quad (43)$$

Die Plateaus mit den Füllfaktoren $\nu = 2$ und 4 waren anscheinend nicht mehr im Messbereich enthalten. Entsprechend wurde das erste Plateau als $\nu = 6$ angenommen. Dies führt für die Kitzling-Konstante auf

$$R_K = 6,438 \pm 0,097 \text{ k}\Omega \cdot 4 = 25,752 \pm 0,388 \text{ k}\Omega$$

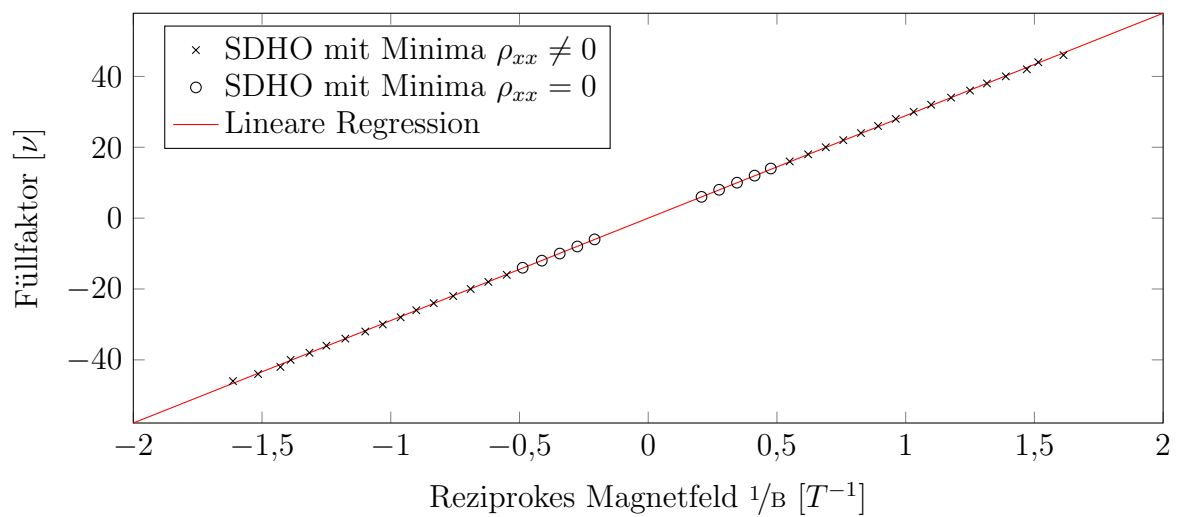


Abbildung 18: Lineare Regression über den Füllfaktor der QHE-Plateaus der Wechselstrommessung aufgetragen gegen das Reziproke Magnetfeld.

3.3 Vergleich Gleich- und Wechselstrommessung

Ein Vergleich der Auswertungen für Gleich- und Wechselstrommessungen zeigt, dass sich die Ergebnisse jeweils um mindestens Faktor 2 unterscheiden. Dabei handelt es sich offensichtlich um einen systematischen Fehler, welcher nicht vollständig erklärt werden kann. Die Grundlegende Ursache wird jedoch auf eine Änderung der Ladungsträgerdichte in der Probe, welche zwischen den beiden Messreihen, zurückzuführen sein. Dies ließ sich bereits anhand der Messdaten selbst erkennen, da sich die Kurven der Graphen für die beiden verschiedenen Messreihen bereits um den selben Faktor in ihrer Amplitude unterscheiden.

Es wurden verschiedene Theorien aufgestellt, um diese Abweichung zu erklären. Eine elektrostatische Ladung des Gates auf etwa 100 mV (vgl. Kapitel 3.6) würde ausreichen, um diesen Effekt zu erklären. Eine Spannung in diesem Bereich kann sehr leicht durch Berührung von statisch aufgeladenen Gegenständen (z.B. Bekleidung) oder selbst von der Haut hervorgerufen werden.

Bei beiden Messungen ist eine Asymmetrie des Längswiderstandes bei positiven und negativen Magnetfeldes zu beobachten. Diese lässt sich über eine fehlerhafte Probe erklären. Die gemessene Längsspannung hat durch eine Asymmetrie der Probe einen Anteil der Hallspannung. Dies sorgt im Bereich von negativen Hallspannungen (negative Magnetfelder) zu verkleinerten und bei positiven Hallspannungen (positive Magnetfelder) zu erhöhten Längswiderständen.

Es lässt sich jedoch festhalten, dass beide Messungen in sich konsistent gewesen zu sein scheinen, was sich an der in beiden Fällen recht sauberen linearen Regression zeigt. Die Näherung über die Hall-Spannung liefert in beiden Fällen einen kleineren Fehler für die zu berechnenden physikalischen Größen.

3.4 Winkelabhängigkeit

Anhand der aufgenommenen Messdaten des Versuchsteils zur Winkelabhängigkeit wurde nun die Abhängigkeit des Quanten-Hall-Effekts, sowie des Shubnikov-de Haas-Effekts vom Einfallswinkel des Magnetfeldes auf die Probe analysiert. Dazu wurden in Abbildung 19 die Magnetfeldwerte der Minima in Abhängigkeit des Winkels zur Probenormalen aufgetragen. Der hier angegebener Winkel von 360 beziehungsweise 370° entspricht einer Auslenkung

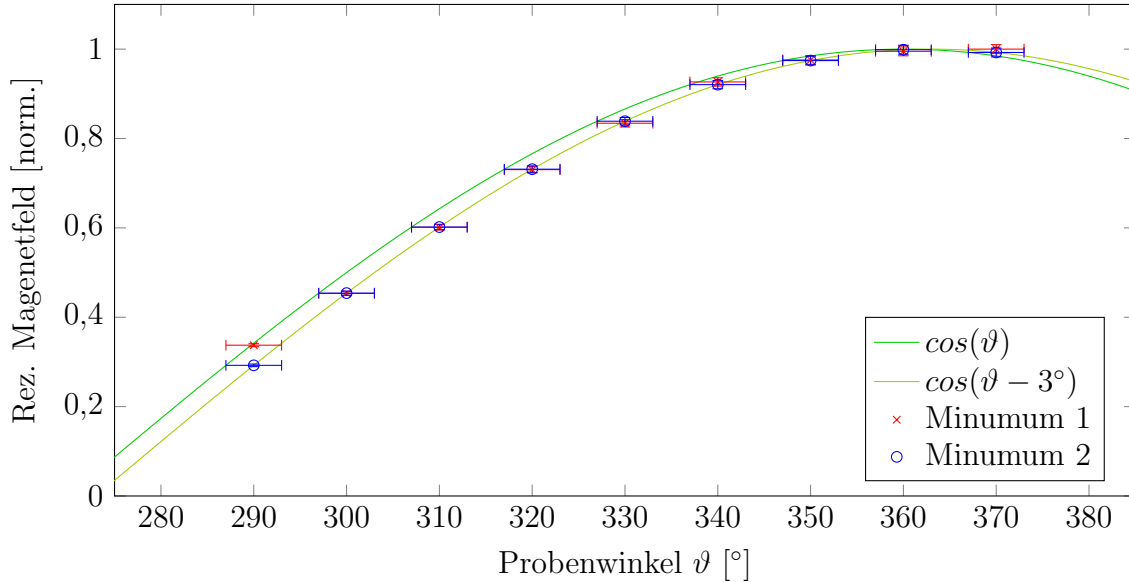


Abbildung 19: Normierte Reziproke Magnetfelder zweier Minima der SDHO, aufgetragen gegen den Winkel der Probe zum Magnetfeld. Als Referenz sind zusätzlich zwei Cosinus-Funktionen hinzugefügt worden (s. Text).

aus der Normalen der Probe zum Magnetfeld von 0 beziehungsweise 10°. In der Graphik wurden die Werte eines bestimmten Minimas bei unterschiedlichen Winkeleinstellungen gegen das reziproke Magnetfeld $1/B$ aufgetragen. Zudem wurden hier die Positionen zweier verschiedener Minima (Minimum 1 mit einem Füllfaktor $\nu = 16$ in rot, Minimum 2 mit $\nu = 18$ in blau dargestellt) verglichen und um in einem Graphen vergleichbar dargestellt zu werden, auf den jeweils Maximalen Wert zu 1 normiert. Zwischen den Einstellungen 370 bis 320° verläuft die Kurve Cosinusförmig. Bei Werten weiter links auf der x-Achse, welche hier einer größeren Auslenkung aus der Null-Position entsprechen, weicht die Kurve immer mehr von dieser Form ab. Für die Winkelabhängigkeit der beiden betrachteten Effekte wird theoretisch eine Cosinusfunktion erwartet, da bei einem Winkel von 0° das effektive Magnetfeld am stärksten und bei einem Winkel von 90° zur Probenfläche gleich Null ist. Ausgedrückt wird diese Beziehung durch das Skalarprodukt

$$\vec{B} = |\vec{B}| \cdot \cos(\vartheta) \quad (44)$$

Mit dem Winkel ϑ zwischen Magnetfeldlinien und Probennormalen. Die Ablesegenauigkeit des Probenwinkels wird auf ± 3 Grad geschätzt. Der Fehler in der Magnetfeldmessung wird auf $\pm 0,01$ T geschätzt. Zur Anschauung sind die beiden Kurven der Funktionen $\cos(\nu)$ und $\cos(\nu - 3^\circ)$ zusammen mit den Messwerten in Abbildung 19 aufgetragen. Es ist gut zu erkennen, dass die Kurve der Funktion $\cos(\nu - 3^\circ)$ näher an den aus den Messdaten

erhaltenen Werten liegt. Dies legt nahe, dass ein leichtes Offset vorliegt. Dieses könnte beispielsweise durch ein ungenaues Anbringen der (aufgeklebten Papier-)Winkelscheibe liegen.

Die hier dargestellte Abhängigkeit zeigt deutlich, dass für zunehmende Auslenkung aus der Nullposition höhere Magnetfelder, also kleinere Werte für $1/B$ notwendig sind, um für die SDH-Oszillation Minima zu erzeugen und es kann angenommen werden, dass diese bei einer Auslenkung von 90 Grad vollständig verschwinden.

3.5 Temperaturabhängigkeit

Wie zu den Messdaten der Gleich- und Wechselstrommessungen wurden die Ladungsträgerdichten und -beweglichkeiten hier für alle verschiedenen aufgenommenen Temperaturwerte von 2 K bis 40 K bestimmt. In der Abbildung 15 ist der Längs-Spannungsverlauf zu verschiedenen Temperaturen abgebildet. Hierbei ist deutlich zu erkennen, wie die SDHO mit steigender Temperatur weniger stark ausgeprägt sind. Die Temperatur, ab welcher der Effekt nicht mehr zu erkennen ist, liegt zwischen 20 und 40 K.

Ladungsträgerdichte und -beweglichkeit wurden wie in den obigen Versuchsteilen über die Hall-Spannung berechnet und die Ergebnisse zu den verschiedenen Temperaturen in Tabelle 1 eingetragen.

T [K]	b [T]	$U_{xx}(B = 0)$ [V]	n_s [1/m ²]	μ [m ² /Vs]
2	$8,51422 \cdot 10^{-4}$	$2,73230 \cdot 10^{-4}$	$7,17948 \cdot 10^{15}$	18,6968
5	$8,64040 \cdot 10^{-4}$	$2,84912 \cdot 10^{-4}$	$7,07464 \cdot 10^{15}$	18,1959
10	$8,47763 \cdot 10^{-4}$	$2,80024 \cdot 10^{-4}$	$7,21046 \cdot 10^{15}$	18,1648
20	$8,54649 \cdot 10^{-4}$	$2,99456 \cdot 10^{-4}$	$7,15237 \cdot 10^{15}$	17,1240
40	$8,66678 \cdot 10^{-4}$	$3,48808 \cdot 10^{-4}$	$7,05310 \cdot 10^{15}$	14,9081

Tabelle 1: Berechnete Elektronendichte n_s und -beweglichkeit μ in Abhängigkeit zu der Probentemperatur, aus Platzgründen ohne Fehler.

Die gleichen Ergebnisse sind zusätzlich in Abbildung 20 dargestellt. Um die Verläufe besser im Verhältnis zu verstehen, wurde die y-Achsenabschnitte in einem Bereich von $\pm 15\%$ um den Mittelwert gewählt. So sieht man, dass die Elektronendichte nahezu konstant verläuft, wohingegen ein leicht abnehmende Elektronenbeweglichkeit zu beobachten ist. Für die Elektronendichte ist keine einfache Abhängigkeit von der Temperatur bekannt, wohingegen die Elektronenbeweglichkeit durch die ansteigende Wechselwirkung abnehmen sollte. Beides spiegeln die Messergebnisse wider.

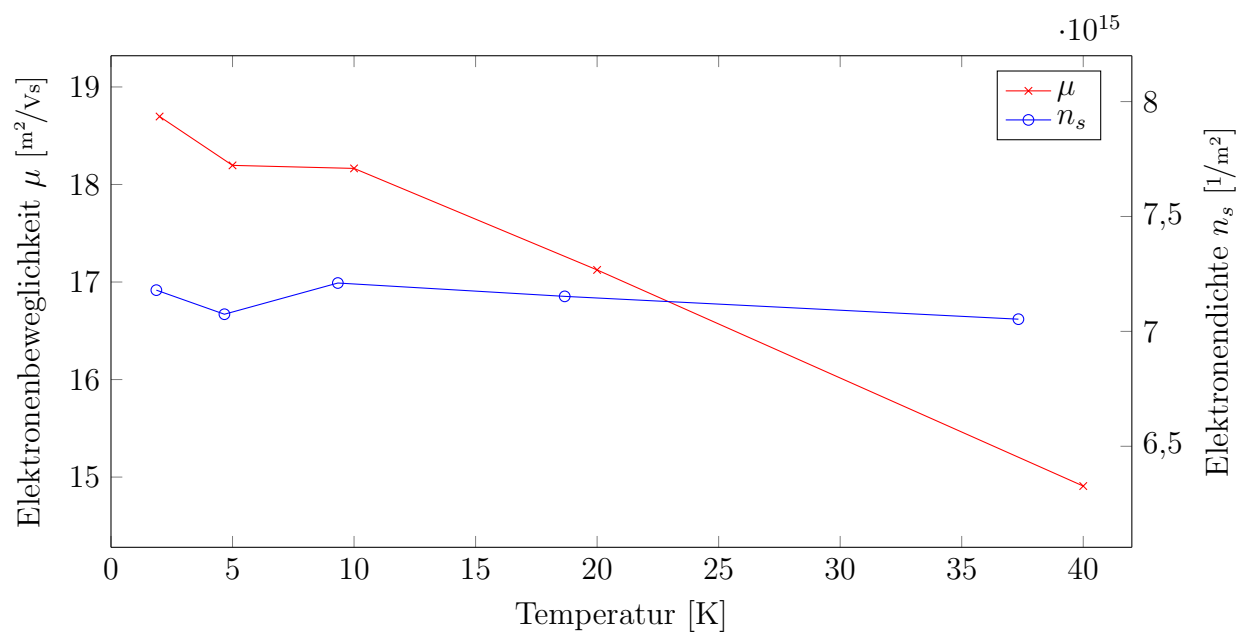


Abbildung 20: Berechnete Elektronendichte n_s und -beweglichkeit μ in Abhängigkeit zu der Proben temperatur. Fehlerbalken sind nicht eingetragen, da sie um mindestens eine Größenordnung kleiner sind als die Messergebnisse. Die Linien sind zur visuellen Führung eingezeichnet.

3.6 Gatespannungsabhängigkeit

Im abschließenden Versuchsteil sollte erst die Abhängigkeit der Ladungsträgerdichte von der Gatespannung ermittelt werden und dann daraus der Abstand des Gates zum 2DES.

Die Ladungsträgerdichten wurden analog zu den obigen Versuchsteilen aus der Näherung über die Hall-Spannung bestimmt und es ergaben sich die Werte in Tabelle 2. Wie bereits in den Messergebnissen selber (s. Abbildung 16) zu sehen, fällt der Punkt ohne Gatespannung aus der Systematik heraus. Es wurde hier keine eigene Messung gemacht, sondern die Messung aus dem Kapitel 2.2 weiterverwendet. Dies stärkt die Vermutung aus diesem Kapitel, dass die Abweichung zu der Gleichstrommessung des Kapitel 2.1 aus einer elektrostatischen Aufladung des Gates herrührt.

U_{Gate} [mV]	b [T]	U_{xx} [mV]	n_s [1/m ²]	μ [m ² /Vs]
200	$7,41865 \cdot 10^4$	14,2813	$8,23972 \cdot 10^{15}$	31,1679
150	$7,86923 \cdot 10^4$	22,4114	$7,76793 \cdot 10^{15}$	21,0676
100	$8,52505 \cdot 10^4$	27,6567	$7,17036 \cdot 10^{15}$	18,4947
50	$9,34121 \cdot 10^4$	34,1417	$6,54387 \cdot 10^{15}$	16,4161
0	$8,52914 \cdot 10^4$	27,4183	$7,16692 \cdot 10^{15}$	18,6645
-50	$1,12890 \cdot 10^3$	34,1417	$5,41482 \cdot 10^{15}$	19,8390
-100	$1,26965 \cdot 10^3$	73,0876	$4,81451 \cdot 10^{15}$	10,4230
-150	$1,51940 \cdot 10^3$	11,6087	$4,02315 \cdot 10^{15}$	7,8531
-200	$1,87273 \cdot 10^3$	21,6796	$3,26410 \cdot 10^{15}$	5,1829

Tabelle 2: Berechnete Elektronendichte n_s und -beweglichkeit μ in Abhängigkeit zu der Gatespannung, aus Platzgründen ohne Fehler. Ausgegraut sind die Werte, die mit einer positiven Magnetfeldrampe gemessen wurden, alle anderen wurden bei einer negativen gemessen.

Anhand der wie in Kapitel 2.5 beschriebenen aufgenommenen Messdaten zur Gatespannung sollte der Abstand des 2DEG zur Probenoberfläche bestimmt werden. Dazu dient die Annahme, dass das 2DEG und das verwendete Titan-Gate einen Plattenkondensator bilden. Die beiden Schichten von GaAs und AlGaAs dazwischen bilden hierfür ein nicht-leitendes Dielektrikum. Durch das Anlegen der Gatespannung wurde die Ladungsträgerdichte im 2DEG verändert. Dies kann durch das Modell eines Plattenkondensators erklärt werden: In einem Plattenkondensator der Fläche A ist die Anzahl der Ladungsträger $N_s = n_s \cdot A$ gegeben durch die Gleichung (31). Dabei kann $\epsilon \approx 12$ angenommen werden, da die verwendete Probe im wesentlichen AlGaAs mit einem Aluminiumanteil von 33 % enthält. Anhand der beiden Gleichungen und der Einsatzspannung U_{th} kann nun die Abhängigkeit der Ladungsträgerdichte von der Gatespannung angegeben werden durch Gleichung (33).

Um den Abstand des Gates zu bestimmen, wurde eine Lineare Regression unter Auslassung des Messwertes bei $U_{Gate} = 0$ mV über die Elektronendichte durchgeführt. Mit

der Regressionsformel $n_s = a \cdot U_{Gate} + b$ wurden folgende Parameter errechnet:

$$a = (0,012326 \pm 0,00031) \cdot 10^{15} \text{ (m}^2 \cdot \text{mV)}^{-1} \quad (45)$$

$$b = (5,90481 \pm 0,04254) \cdot 10^{15} \text{ 1/m}^2 \quad (46)$$

Durch Umformung der erwähnten Gleichung (33) ergibt sich der Abstand zu

$$n_s = \frac{\epsilon\epsilon_0}{d} \cdot U_{Gate} - \frac{\epsilon\epsilon_0}{n_s} \cdot U_{th} = a \cdot U_{Gate} + b \quad (47)$$

$$\Rightarrow a = \frac{\epsilon\epsilon_0}{d} \quad (48)$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{\epsilon\epsilon_0}{a} \cong (53,80 \pm 1,32) \text{ nm} \quad (49)$$

Die Werte aus Tabelle 2 sind auch in Abbildung 21 aufgetragen. Die Werte der Elektronenbeweglichkeit zeigen keinen klaren linearen Zusammenhang wie die der Elektronendichte.

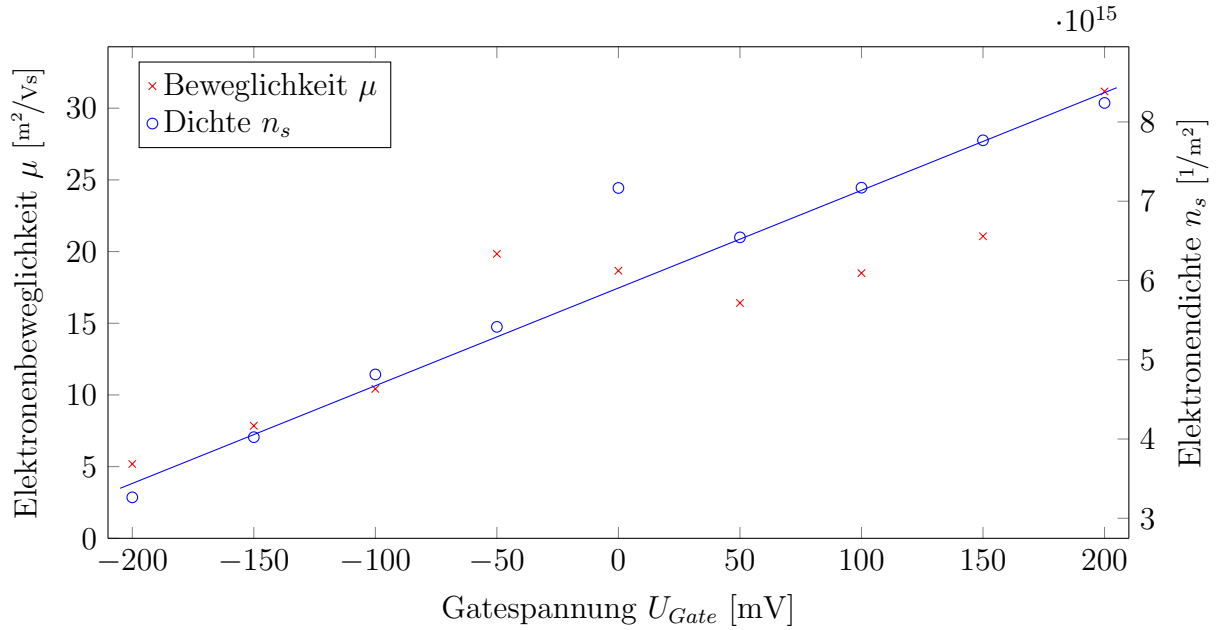


Abbildung 21: Berechnete Elektronendichte n_s und -beweglichkeit μ in Abhängigkeit zu der Gatespannung. Die blaue Linie ist die Lineare Regression der blauen Kreise unter Auslassung des $U_{Gate} = 0 \text{ mV}$ -Wertes, siehe Text.

4 Fazit

In diesem Versuch konnten erfolgreich der Hall- und Shubnikov-de Hass-Effekt nachgewiesen werden. So konnte mit hoher Genauigkeit der Klitzing-Faktor ermittelt werden. Aus dem asymmetrischen Verhalten der Messergebnisse konnte ein Rückschluss auf die Symmetrie der Probe gezogen werden.

Über die Variation verschiedener Parameter konnte weiteres Verständnis gewonnen werden: Das Verhalten des Hall-Streifens unter Rotation konnte sehr anschaulich und in guter Übereinstimmung über eine Geometrische Beziehung verstanden werden. Auch die Variation der Gate-Spannung konnte mit dem Modell eines Kondensators sehr gut und anschaulich verstanden werden. So konnte rückwirkend plausibel gemacht werden, warum eine Abweichung zwischen DC- und AC-Messung aufgetreten ist: Vermutlich war das Gate der Probe während der ersten Messung leicht geladen. Auch bei der Temperaturmessung konnte die erwartete Abnahme in der Elektronenbeweglichkeit gezeigt werden.

Literatur

- [1] C. Weisbuch und B. Vinter, *Quantum semiconductor structures: fundamentals and applications*. Boston: Academic Press, 1991.
- [2] T. Bartsch, *Anleitungsheft: Quanten-Hall-Effekt*. Universität Hamburg, 2015.
- [3] K. Kopitzki und P. Herzog, *Einführung in die Festkörperphysik*, 6. Aufl., Serie Studium. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2009.
- [4] P. A. Tipler und R. A. Llewellyn, *Modern physics*, 5. Aufl. New York, NY: W.H. Freeman, 2008.

Abbildungsverzeichnis

1	2DEG Schicht	1
2	Landau Niveaus	3
3	Halleffekt klassisch	4
4	Hallstreifengeometrie	5
5	Beispiel-Messung Hall-Plateaus und SDH-Oszillation	7
6	Schema Randkanalmodell	8
7	Vierpunkt-Messung	9
8	Fermi-Energie lokalisierter Zustände	10
9	Struktur von Landau-Niveaus in realer Probe	10
10	Schematischer Aufbau des Kryostaten	12
11	Gleichstrommessung im maximalen Magnetfeldbereich	13
12	Höher aufgelöste Gleichstrommessung in Magnetfeldteilbereich	14
13	Wechselstrommessung im maximalen Magnetfeldbereich	15
14	Höher aufgelöste Gleichstrommessung in Magnetfeldteilbereich	16
15	Hall-Widerstand unter Temperaturvariation	18
16	Auswertung der Gatespannungsvariation	19
17	Lineare Regression Gleichstrommessung	21
18	Lineare Regression Wechselstrommessung	23
19	Auswertung der Winkelvariation	25
20	Auswertung der Temperaturvariation	28
21	Auswertung der Gatespannungsvariation	30