


## TODO

René

1. Regina sagen, dass sie auf die Eigenschaften der FT refen soll
2. Regine Videos vom Handy geben
3. Regina Rücktransformierte Bilder geben
- 4.

Vivi

1. @ René: Zusätzlich eingebauten Spiegel und Pinhole in 4f-Aufbau rein! DANKE! :)  
und ich fürchte ich brauche Abbildungen der Objekte, also diese Kreise, das Fourier-  
haus usw... wie machen wir das denn am Besten?  
uuuuund ich denke, es passt  besten rein, wenn du in dem Lichtesensor-Teil kurz  
sagst, was wir für Intensitäten vor und nach dem Auskoppler jeweils gemessen haben.  
oder steht das da schon? habs beim überfliegen nicht entdeckt ;)
2. ...

# *Fortgeschrittenenpraktikum*

## Optische Fouriertransformation

Vivien Sleziona \*

Regina Schauer †

René Vollmer ‡

Betreut durch

Kai Morgener§

23.02.2015

Die Fourier-Analytik und insbesondere die Fouriertransformation sind auf vielen modernen Anwendungen kaum noch weg zu denken. Sie ist essentieller Bestandteil vieler Bildverarbeitungsalgorithmen[1] und -kompressionsverfahren wie JPEG[2], sie wird genutzt um Bildinformationen Computeralgorithmen zugänglich zu machen[3] und in vielen anderen Bereichen der Signalverarbeitung.

In diesem Versuch soll mit einfachen optischen Mitteln eine Fouriertransformation auf Bildern durchgeführt, die Fouriertransformierte manipuliert und rücktransformiert werden. Dabei wird dem Leser ein intuitives Verständnis für die Funktionsweise und Bedeutung von Fouriertransformationen vermittelt werden.

---

\*vivi.s@arcor.de

†regina.schauer@web.de

‡rene.vollmer@studium.uni-hamburg.de

§kmorgene@physnet.uni-hamburg.de

# Contents

<b>1</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Mathematische Grundlagen . . . . .	1
1.2	Optik . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Experimental Procedure</b>	<b>4</b>
2.1	Einkopplung . . . . .	4
2.2	Lichtsensord . . . . .	5
2.3	Abbildung und Fourierbild . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Fazit</b>	<b>8</b>
	List of figures	<b>B</b>
<b>5</b>	<b>Appendix</b>	<b>C</b>

# 1 Theoretische Grundlagen

## 1.1 Mathematische Grundlagen

Die kontinuierliche Fourier-Transformation (kurz FT) ist definiert als

$$G(x) = F \{g(x)\} := \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot e^{-2\pi i x s} dx \quad (1)$$

wobei  $g(x) \in L^1(\mathbb{R})$  eine absolut integrierbare, außer an endlich vielen Stellen stetige Funktion in einer Variable ist. Die transformierte dieser Funktion wird häufig mit dem gleichen Buchstaben wie die nicht transformierte, jedoch groß geschrieben bezeichnet.

Die Rücktransformation (auch *inverse Fourier-Transformation*, kurz iFT) ist definiert als

$$g(x) = F^{-1} \{G(x)\} := \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \cdot e^{+2\pi i x s} ds \quad (2)$$

Anschaulich entspricht eine FT eine Zerlegung einer Funktion in periodische Funktionen einer bestimmten Wellenlänge und Amplitude. Die transformierte Funktion bildet anschließend die Amplituden gegen die Frequenz ab. So würde eine einfache periodische Sinus-Funktion unter FT zu einer delta-Verteilung.

Diese beiden Abbildungen besitzt einige besondere Eigenschaften, die sie für die Informationsverarbeitung interessant machen. Die wichtigsten sollen hier kurz skizziert werden:

### 1. Zweifache Anwendung

$$F \{F \{g(x)\}\} = F \{G(s)\} = g(-x) \quad (3)$$

*Beweisskizze:* Vorzeichenumkehr  $x \rightarrow -x$  in 2 entspricht der FT von  $G(s)$  und  $F \{G(s)\} = F \{F \{F^{-1} \{G(s)\}\}\} = F \{F \{g(x)\}\}$ .

### 2. Linearität

$$F \{a \cdot g(x) + b \cdot h(x)\} = a \cdot F \{g(x)\} + b \cdot F \{h(x)\} \quad (4)$$

*Beweisskizze:* Dank der Eigenschaften von  $g(x)$  kann das Integral der Fourier-Transformation in Teilintegrale geteilt und lineare Faktoren heraus gezogen werden.

### 3. Ähnlichkeit

$$F \{g(a \cdot x)\} = 1/a \cdot F \{g(x/a)\} = 1/a \cdot G(s/a) \quad (5)$$

*Beweisskizze:* Substitution von  $y = a \cdot x$  als Integrationsvariable.

### 4. Verschiebung

$$F \{g(x - a)\} = e^{-2\pi i s a} \cdot F \{g(x)\} = e^{-2\pi i s a} \cdot G(s) \quad (6)$$

*Beweisskizze:* Variablensubstitution  $x - a \rightarrow x$ .

## 5. Faltung

$$F \{g(x) \circ h(x)\} = F \{g(x)\} \cdot F \{h(x)\} = G(x) \cdot H(x) \quad (7)$$


Mit der Definition der Faltung als

$$g(x) \circ h(x) := \int g(x) \cdot h(x - a) da \quad (8)$$

*Beweisskizze:* Nutze  $F \left\{ \int g(a) \circ h(x - a) da \right\} = \int g(a) \cdot F \{h(x)\} da$  und anschließendes Vertauschen der Integrationen über  $a$  und  $x$  aus Faltung und FT.

Einige dieser Eigenschaften können direkt im Versuch gesehen werden, siehe Abschnitt 3.

## 1.2 Optik

Die geometrische Optik ist der Teilbereich der Optik, wo Lichtwellen durch idealisierte Strahlen angenähert werden um den  Weg des Lichtes zu (re)konstruieren. Sämtliche Schlussfolgerungen basieren auf diesen vier Axiomen:

1. Axiom: In homogenem Material verlaufen Lichtstrahlen gerade.
2. Axiom: An der Grenze zwischen zwei homogenen und isotropen Materialien wird das Licht nach dem Reflexionsgesetz reflektiert und nach dem Brechungsgesetz gebrochen.
3. Axiom: Zeit- bzw. Strahlenumkehr, die Richtung eines Lichtstrahles ist belanglos.
4. Axiom: Die Lichtstrahlen beeinflussen sich nicht gegenseitig.

Durch die spezielle Geometrische Form von Sammellinsen ergibt sich ein Brechungswinkel in Abhängigkeit vom Abstand zum Mittelpunkt, der effektiv Strahlen bündeln oder kollimieren kann. Die Brennweite  $f$  gibt den Abstand an, in dem sich eine punktförmige Lichtquelle befinden muss, um von der Linse kollimiert zu werden. Gleichzeitig ist sie auch die Entfernung in der ein kollimierter Strahl hinter einer Linse gebündelt wird (siehe auch drittes Axiom).

Neben den Effekten der geometrischen Optik gibt es noch Effekte, die sich nicht durch dieses einfache Modell beschreiben lassen. Hierzu zählt die Streuung. Diese kann nach dem Huygensssches Prinzip[4] beschrieben und mittels der Beschreibung durch die Fraunhoferbeugung[5][6, Kap. 2] vereinfacht werden. Die wesentliche Erkenntnis hieraus ist, dass ein Lichtstrahl der durch ein Objekt mit einem oder mehreren Spalten, deren Öffnungsbreite in der Größenordnung der Wellenlänge liegt, läuft gestreut, das heißt aufgeweitet, wird. Dieser Strahl wird anschließend auf Grund von Laufzeitunterschieden mit sich selber interferieren. Dabei ist das auf einem, in einem zur Spaltweite großem Abstand befindlichen, Schirm entstehende Muster von der Spaltweite und -anzahl abhängig. Dabei gilt: Je feiner das Spaltpattern, desto größer ist der Abstand zwischen den Interferenzmaxima.

Effektiv wird das Licht also in Teilstrahlen aufgeteilt, deren Winkel abhängig von der Amplitudenstruktur des Objektes ist. Je weiter man sich nun von dem Objekt entfernt, desto größer wird das Verhältnis zwischen Winkel- und räumlichen Informationen. In der Unendlichkeit gibt der Ort eines Maximums nur noch Informationen über die Größenordnung der Struktur, nicht mehr über dessen Position. Dies entspricht dem anschaulichen Bild der FT.

Es kann nun gezeigt werden, dass die besondere Beschaffenheit einer Sammellinse, die sich genau in Brennweite zu dem Objekt und einem Schirm befindet, dafür sorgt, dass dieser Zustand nicht erst in der Unendlichkeit, sondern auf dem Schirm auftritt. Dies ist in Abbildung 1 am Beispiel eines einfachen Spaltes illustriert. Eine weitere Linse kann das Bild zurück transformieren und man erhält eine Abbildung des Objektes. Dies entspricht der iFT.

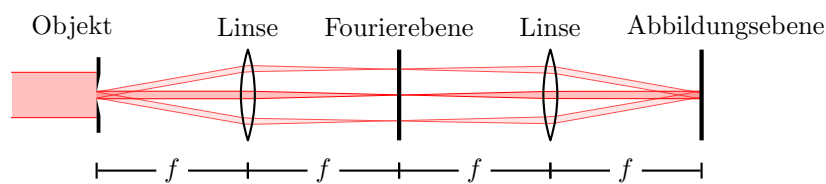


Figure 1: Ein kollimierter Laserstrahl von links trifft auf ein Objekt (hier einen Spalt) und wird gestreut. Hier sind beispielhaft drei Strahlenverläufe eingezeichnet. Diese könnten als 1., 0. und -1. Intensitätsmaximum der Streuung interpretiert werden. Man erkennt, dass durch das Objekt die Intensitätsverteilung in der Fourierebene beeinflusst wird. Eine zweite Linse transformiert diese wieder zurück und erzeugt so eine Abbildung des Objektes.

Eine mathematische Herleitung dieser, hier nur anschaulich erläuterten Effekte, ist beispielsweise im Begleitheft zu diesen Versuchen oder in [6, Kap. 2.3] zu finden.



## 2 Experimental Procedure

Der Versuch der optischen Fouriertransformation besteht aus drei Versuchsteilen. Zunächst wird die Einkopplung des Laserstrahls im Faserkopplungsaufbau optimiert und die Effizienz der Einkopplung und der Faser mithilfe einer Photodiode gemessen.

Hierzu wird eine Photodiode mit einem ausgewählten Widerstand so aufgebaut, dass die Lichtleistung über ein Oszilloskop gemessen werden kann.

Im letzten Versuchsteil wird als optischer Pfad hinter dem Auskoppler der sogenannte 4f-Aufbau aufgebaut und optimiert. Mit einer Kamera werden die Bilder mehrerer Objekte und deren Abbildungen in der Fourierebene aufgenommen. Für manche Objekte wird statt einer Abbildung in der Fourierebene eine Reihe an Aufnahmen in der Abbildungsebene gemacht, in der verschiedene Filter in die Fourierebene eingesetzt werden.

### 2.1 Einkopplung

Der Laserstrahl eines *LD: Mitsubishi ML101J27* cw- Lasers, betrieben mit 90,3 mA bei  $18^{\circ}\text{C}$ , mit einer Wellenlänge von 660nm und einer maximalen Leistung von 35 mW wird in eine Leitungsfaser eingekoppelt.

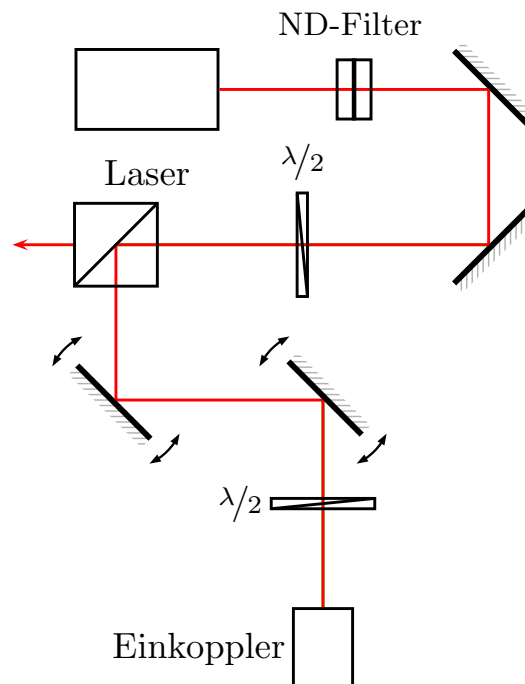


Figure 2: Schematischer Strahlungsaufbau zwischen Laser und Fasereinkopplung. Mit Hilfe der  $\frac{\lambda}{2}$ -Platte und des Strahlteilers dahinter kann die Intensität des Laserstrahls eingestellt werden. Der zweite Strahl nach dem Strahlteiler dient zum parallelen Durchführen des Versuchs durch eine zweite Gruppe und wird daher nicht weiter betrachtet.

Der Faserkopplungsaufbau (siehe Abbildung 2) wird nicht selbst aufgebaut, sondern lediglich optimiert. Hierzu wird ein Laserstrahl an dem noch freien Ende der Faser angebracht und vor dem Einkoppler mithilfe der Spiegel eine optimale Überlagerung der beiden Signale eingestellt.

Anschließend betrachtet man das eingekoppelte Signal am Ende der Faser, um dessen Leistung weiter zu optimieren. Dies erfolgt zunächst mit dem bloßen Auge und anschließend mit einem Powermeter, welches an ein Oszilloskop angeschlossen wird, um schnelle Änderungen der gemessenen Lichtleistung besser sichtbar zu machen. Es wird ein Optimum der Fasereinkopplung möglichst genau eingestellt.

## 2.2 Lichtsensor

Für die Optimierung der Einkopplungsleistung wurde ein Powermeter benutzt. Dieses wurde an ein digitales Oszilloskop angeschlossen, um schnelle Änderungen zu visualisieren und so den Optimierungsvorgang, insbesondere das *Walken*, zu erleichtern. Da diese Powermeter mit recht hohen Anschaffungskosten einher gehen, wurde in diesem Versuchsteil versucht, eine Leistungsmessung des Laserlichtes mit einer Photodiode zu messen.

Die verwendete Photodiode<sup>1</sup> produziert laut Datenblatt einen Strom von 0,18-0,21 mA pro Milliwatt eingestrahelter Lichtleistung bei 436 nm Wellenlänge. Da Strom nicht direkt gemessen werden kann, wird ein Widerstand parallel geschaltet und der Spannungsabfall über diesen nach  $U = R \cdot I$  mit einem Oszilloskop gemessen. Wenn man für 1 mW Lichtleistung einen Spannungsabfall von 100 mV erreichen möchte, würde man einen  $U/I = 100 \text{ mV} / 0,2 \text{ mA} = 500 \Omega$  Widerstand verwenden. Da dies jedoch ein sehr kleiner Messbereich ist, wurden 4 V pro Milliwatt angesetzt und entsprechend ein 20 kΩ Widerstand verwendet.

Für sehr schwachen Lichteinfall (Deckenlampe, Fenster aus der Ferne, ...) konnte auf dem Oszilloskop eine Schwankung in der Spannung festgestellt werden. Bei hohen Lichtleistungen fallen diese Schwankungen sehr klein aus. Für andere Widerstandswerte, z.B. 10 oder 100 kΩ, erhält man nahezu identische Werte um 440 mV. Da dies in etwa der Bandlücke eines PN-Überganges entspricht, liegt die Vermutung nahe, dass dies eine Sättigungserscheinung ist.

Daher wurden kleinere Widerstandswerte von 500 und 1000 Ω getestet. Die gemessenen Spannungen sowie die dazu vom Powermeter abgelesenen Werte für die Lichtleistung sind in Abbildung 3 aufgetragen.

Es ist für 1 kΩ eine Sättigung ab etwa 0,9 mW erkennbar, die Variante mit 500 Ω weist im gesamten Messbereich ein sehr lineares Verhalten auf. Die Fehlerbalken in der x-Achse wurden zu 0,01 mW gewählt, da das Powermeter nur zwei Nachkommastellen anzeigt. Der Fehler in der y-Achse wurde auf etwa 5% gewählt.

---

<sup>1</sup>Modell OSD15-5T von CENTRONIC[7]



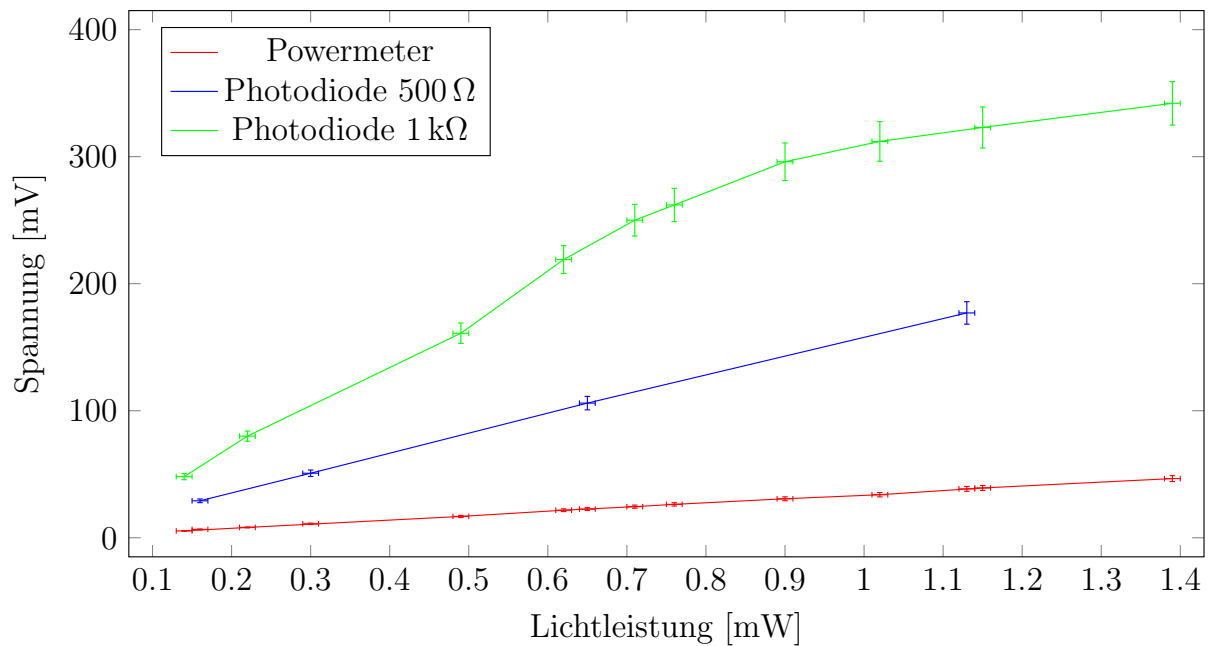


Figure 3: Spannungen gemessen über je einen zu einer Photodiode parallel geschalteten Widerstand mit 500 und 1000  $\Omega$ . Zusätzlich ist der Verlauf der Spannung eines Powermeters aufgetragen.

## 2.3 Abbildung und Fourierbild

Hinter dem Faserauskoppler wird der Aufbau aus Abbildung 4 realisiert.

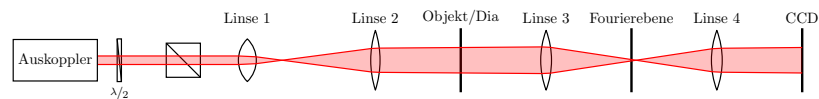


Figure 4: Schematische Skizze des 4f-Aufbaus. Brennweiten der Linsen wie folgt: Linse 1 mit  $f_1 = 20mm$ , Linse 2 mit  $f_2 = 300mm$ , Linse 3 mit  $f_3 = 100mm$ , Linse 4 mit  $f_4 = 100mm$ . Zwischen Linse 2 und 3 befindet sich die Halterung für das Objekt/Dia, in der Fourierebene wird entweder eine zweite Kamera oder ein Filter positioniert. Die CCD Kamera am Ende des Strahlengangs befindet sich in der Abbildungsebene des Aufbaus.

Dabei wurden Linsen mit den Brennweiten  $f_1 = 20mm$ ,  $f_2 = 300mm$ ,  $f_3 = 100mm$  und  $f_4 = 100mm$  verwendet.

Direkt hinter dem Auskoppler wurde zusätzlich ein Spiegel, reflektierend für Wellenlängen zwischen 400 - 700 nm, in den 4f-Aufbau aufgenommen, um den Verlauf des Laserstrahls im optischen Pfad besser feinjustieren zu können. Ebenso wurde ein Pinhole im Fokus der Linsen 1 und 2 ergänzt, um das Gaußprofil des zur Messung verwendeten Laserstrahls zu optimieren.



In dem 4f-Aufbau passiert der Laserstrahl nach der Reflektion am ersten Spiegel eine  $\frac{\lambda}{2}$ -Platte und dahinter einen Strahlteiler. Mithilfe dieser beiden Komponenten kann die

Intensität des anschließend verwendeten Strahls eingestellt werden.

Um die abzubildenden Objekte vollständig ausleuchten zu können, wird der Laserstrahl mithilfe der ersten beiden Linsen aufgeweitet und kollimiert. Im Brennpunkt der dritten Linse befindet sich ein Objektträger in der Gegenstandsebene. In diesem werden die abzubildenden Objekte angebracht.

Die Fourierebene befindet sich im Brennpunkt der Linsen 3 und 4. Nach der vierten Linse wird der Strahl erneut kollimiert und trifft auf die CCD Kamera, Kamera 1.

Um Aufnahmen der Fourierebenen zu erhalten, wird bei Bedarf eine zweite Kamera, Kamera 2, in der Fourierebene montiert. So wird gleichzeitig der 2f-Aufbau realisiert.

Nachdem der 4f-Aufbau montiert und der Verlauf des Laserstrahls im optischen Pfad optimiert ist, werden nacheinander die Objekte 1 bis 5 (Siehe Abbildung ...) in Form von Dias in dem Objektträger montiert. Anhand der Dias werden zunächst sowohl Kamera 1, als auch Kamera 2 nachjustiert, bis ein möglichst scharfes Bild auf dem über das Programm *uc480 Viewer* angeschlossenem Bildschirm zu erkennen ist.

Mit den beiden Kameras werden nacheinander für jedes der Objekte Aufnahmen in der Abbildungsebene und zugehörig zu jeder Einstellung auch in der Fourierebene gemacht. Zudem werden für die Objekte 4 und 5 beispielhaft verschiedene Filter in die Fourierebene gestellt und Aufnahmen der Kamera in der Abbildungsebene gemacht. Für Objekt 4 wird hierzu ein Tiefpass und mehrere Breitbandfilter verwendet. Für Objekt 5 wird ein Halbebenenfilter horizontal, vertikal und diagonal in die Fourierebene gehalten.

Als Nächstes wird die Abbildung eines Fingerabdrucks auf einem Glasplättchen zunächst ohne Filter aufgenommen. Anschließend wird die Abbildung mit einem in der Fourierebene befindlichen Hochpass- und einem Halbebenenfilter aufgenommen. Zudem wird mit Kamera 2 das Fourierspektrum des Fingerabdrucks photographiert.

Als Letztes wird ein Teelicht auf die Position des Objektträgers gestellt und ein Halbebenenfilter in der Fourierebene installiert. Mit Kamera 1 werden mehrere Abbildungen aufgenommen, um die Strömungsbewegungen oberhalb der Flamme beobachten zu können. Zum Vergleich wird zudem eine Aufnahme mit Halbebenenfilter, jedoch ohne Teelicht gemacht.

**3    Auswertung**

**4    Fazit**

## References

- [1] R. L. Easton, *Fourier methods in imaging*. Chichester: Wiley, 2010.
- [2] „JPEG,” Aug. 2015, Page Version ID: 677928895. [Online]. Verfügbar unter: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=JPEG&oldid=677928895>
- [3] Prof. Dr. Norbert Link, „Vorlesungsscript: Diskrete Fouriertransformation - Informationsgewinnung (Computer Vision).” [Online]. Verfügbar unter: <http://www.home.hs-karlsruhe.de/~laas0002/Skripte/>
- [4] „Huygenssches Prinzip – Wikipedia.” [Online]. Verfügbar unter: [https://de.wikipedia.org/wiki/Huygenssches\\_Prinzip](https://de.wikipedia.org/wiki/Huygenssches_Prinzip)
- [5] „Beugungsintegral,” Feb. 2015, Page Version ID: 138644725. [Online]. Verfügbar unter: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Beugungsintegral&oldid=138644725>
- [6] W. Stössel, *Fourieroptik: eine Einführung ; mit 47 Übungsaufgaben und Lösungen*. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo; Hong Kong; Barcelona; Budapest: Springer, 1993.
- [7] Farnell.com, „OSD15-5T - CENTRONIC - FOTO DETEKTOR 5NA.” [Online]. Verfügbar unter: <http://de.farnell.com/centronic/osd15-5t/foto-detektor-5na/dp/548730?ost=548730>

## List of Figures

1	Illustration: Inverse und Fouriertransformation an Linsen . . . . .	3
2	Schematischer Strahlungsaufbau zwischen Laser und Fasereinkopplung. Mit Hilfe der $\frac{\lambda}{2}$ -Platte und des Strahlteilers dahinter kann die Intensität des Laserstrahls eingestellt werden. Der zweite Strahl nach dem Strahlteiler dient zum parallelen Durchführen des Versuchs durch eine zweite Gruppe und wird daher nicht weiter betrachtet. . . . .	4
3	Vermessung einer Photodiode . . . . .	6
4	Schematische Skizze des 4f-Aufbaus. Brennweiten der Linsen wie folgt: Linse 1 mit $f_1 = 20mm$ , Linse 2 mit $f_2 = 300mm$ , Linse 3 mit $f_3 = 100mm$ , Linse 4 mit $f_4 = 100mm$ . Zwischen Linse 2 und 3 befindet sich die Halterung für das Objekt/Dia, in der Fourierebene wird entweder eine zweite Kamera oder ein Filter positioniert. Die CCD Kamera am Ende des Strahlengangs befindet sich in der Abbildungsebene des Aufbaus. . . . .	6

## 5 Appendix