

# *Fortgeschrittenenpraktikum*

## Quantenhalleffekt

Vivien Sleziona \*

René Vollmer †

Betreut durch

Nils Gayer‡

September 2015

### [Zusammenfassung]

Der Quanten-Hall-Effekt wurde 1980 von K. von Klitzing, G. Dorda sowie M. Pepper entdeckt. Er unterscheidet sich vom klassischen Hall-Effekt, dadurch, dass bei diesem der Wert des Hallwiderstands  $R_H$  nicht linear mit steigendem Magnetfeld zunimmt, sondern Plateaus ausbildet. Dabei sind die Spannungswerte dieser Plateaus unabhängig von der Probe und nehmen nur Bruchteile einer rein durch Naturkonstanten bestimmten Größe an. Dadurch wird der Effekt als Norm für den elektrischen Widerstand genutzt. Im Jahr 1985 erhielt Klitzing für die Untersuchung des Quanten-Hall-Effekts den Nobelpreis.

Im vorliegenden Versuchsprotokoll werden die theoretischen Grundlagen, die Durchführung sowie die Befunde und Schlussfolgerungen des Experiments zum Quanten-Hall-Effekt dargestellt. Dafür wird ein zweidimensionales Elektronengas auf wenige Kelvin heruntergekühlt, von einem Strom durchflossen und einem starken Magnetfeld ausgesetzt.

---

\*vivi.s@arcor.de

†rene.vollmer@studium.uni-hamburg.de

‡ngayer@physnet.uni-hamburg.de

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Zweidimensionales Elektronengas . . . . .	1
1.1.1	Aufbau der Probe . . . . .	1
1.1.2	Quantenmechanische Beschreibung unter Einfluss eines Magnetfeldes	2
1.2	Klassischer Hall-Effekt . . . . .	4
1.3	Quanten-Hall-Effekt und Shubnikov-de Haas-Oszillation . . . . .	7
1.3.1	Randkanalmodell . . . . .	7
1.3.2	Erklärung der Hall-Plateaus und der SDH-Oszillation . . . . .	9
1.3.3	Lokalisierte Zustände . . . . .	9
1.4	Plattenkondensator . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Experimentelle Durchführung und Beobachtungen</b>	<b>12</b>
2.1	Gleichstrommessungen . . . . .	13
2.2	Wechselstrommessung . . . . .	15
2.3	Winkelabhängigkeit . . . . .	17
2.4	Temperaturabhängigkeit . . . . .	18
2.5	Gatespannungsabhängigkeit . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>20</b>
3.1	Gleichstrommessungen . . . . .	20
3.1.1	Näherung über die Hall-Spannung . . . . .	20
3.1.2	Näherung über die Shubnikov-de Haas-Oszillation . . . . .	20
3.2	Wechselstrommessung . . . . .	22
3.2.1	Näherung über die Hall-Spannung . . . . .	22
3.2.2	Näherung über die Shubnikov-de Haas-Oszillation . . . . .	22
3.3	Vergleich Gleich- und Wechselstrommessung . . . . .	24
3.4	Winkelabhängigkeit . . . . .	25
3.5	Temperaturabhängigkeit . . . . .	27
3.6	Gatespannungsabhängigkeit . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Fazit</b>	<b>31</b>
	<b>Literatur</b>	<b>A</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>A</b>

# 1 Theoretische Grundlagen

## 1.1 Zweidimensionales Elektronengas

Damit es zum Quanten-Hall-Effekt (QHE) kommen kann, müssen einige Bedingungen erfüllt sein. Eine davon ist die Existenz eines zweidimensionalen Elektronengases. In einem zweidimensionalen Elektronengas (2DEG) ist die Bewegung der freien Elektronen auf eine Ebene eingeschränkt. Es gibt verschiedene Möglichkeiten dies zu erreichen.

### 1.1.1 Aufbau der Probe

In diesem Versuch wird dazu eine AlGaAs-GaAs-Heterostruktur verwendet, siehe Abbildung 1. Die darin gestapelten, unterschiedlichen, einkristallinen Halbleitermaterialien sorgen aufgrund ihrer verschiedenen Bandlücken dafür, dass der Verlauf der Leitungs- bzw. Valenzbandkante in Stapelrichtung einen sehr kleinen Potentialtopf für die Leitungselektronen erzeugt. Der elektronische Transport ist so in Stapelrichtung stark eingeschränkt, während sich die Elektronen in den anderen beiden Raumrichtungen bewegen können. Dabei muss die Bandverbiegung so sein, dass der Bereich des Potentialtopfes nur wenige Nanometer zwischen den Schichten einnimmt [1, Kap.8 a].

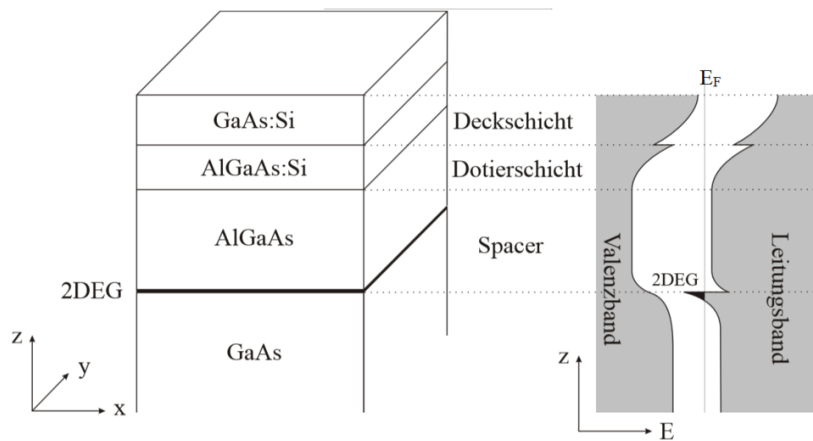


Abbildung 1: Vereinfachter Aufbau der GaAs-AlGaAs-Heterostruktur [2].

In Abbildung 1 ist der schematische Aufbau der in diesem Experiment untersuchten Probe dargestellt. Während sich die Gitterkonstanten der beiden Materialien um weniger als ein Prozent unterscheiden, liegt die Bandlücke des Silizium-dotierten GaAs höher als die des GaAs, sodass das Leitungsband des GaAs energetisch günstigere Zustände besitzt. Daher kommt es zum Elektronenfluss aus dem AlGaAs in das undotierte GaAs und so zu einem Verbiegen des Leitungs- und Valenzbandes, dargestellt in Abbildung 1, rechts. Der näherungsweise Potentialtopf, welcher sich im Leitungsband zwischen dem AlGaAs und dem GaAs ausbildet, besitzt ein Minimum unterhalb der Fermienergie  $E_F$  und aufgrund seiner energetisch günstigeren Lage, werden die Elektronen in diesem Potentialtopf gefangen. In der Abbildung wird das AlGaAs auch als Spacer bezeichnet, denn diese Schicht in der Probe dient hauptsächlich dazu, Streupotentiale zwischen GaAs und der Dotierschicht AlGaAs:Si zu reduzieren, um die mittlere freie Weglänge und damit die Beweglichkeit der

Elektronen zu erhöhen. Die Deckschicht GaAs:Si dient lediglich zum Schutz der Probe vor Oxidation und hat keine technische Bedeutung.

### 1.1.2 Quantenmechanische Beschreibung unter Einfluss eines Magnetfeldes

In der quantenmechanischen Beschreibung des 2DEGs findet man für die Energien der Elektronen aufgrund der Einschränkung ihrer Bewegung in  $z$ -Richtung quantisierte Werte.  $E_z$  nimmt die Werte  $i$  mit  $i = 1, 2, 3, \dots$  an, während die Bewegung der Elektronen in  $x$ - und  $y$ -Richtung uneingeschränkt bleibt. So setzt sich die Energie der Elektronen wie folgt zusammen:

$$E(k_x, k_y, i) = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m^*} + E_i^z \quad \text{mit } i = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Hier sind  $k_x$  und  $k_y$  die Wellenvektoren der Elektronen in  $x$ - und  $y$ -Richtung und  $m^*$  ist die effektive Masse.  $i = 1, 2, 3, \dots$  entspricht der Quantisierung in  $z$ -Richtung, welche zur Folge hat, dass sich für jedes Energieniveau ein zweidimensionales Leitungsband in  $x$ - und in  $y$ -Richtung ausbildet [3, Kap. 3.6]. Es ist für das hier durchgeführte Experiment zum Quanten-Hall-Effekt essentiell, die Energiereaktionen der Elektronen im zweidimensionalen Elektronengas zu bestimmen.

Die Zustandsdichte  $D$  in einem Band ergibt sich aus der Anzahl der Elektronenzustände  $N$  pro Energieintervall und Probenvolumen  $V$  und kann mit Gleichung (1) geschrieben werden als:

$$D(E) = \frac{1}{V} \frac{dN(E)}{dE} = g \frac{m^*}{2\pi\hbar^2} \quad (2)$$

Mit dem Probenvolumen  $V$  und der Teilchenzahl  $N$ . Der rechte Term folgt dabei aus der Zweidimensionalität des Probenvolumens und aus Gleichung 1. Die Zustandsdichte  $D(E)$  in dem Leitungsband eines 2DEGs ist also konstant mit dem Entartungsfaktor  $g$ . Für die Spinartung ist  $g_s = 2$ . Im senkrechten Magnetfeld ist die Bewegung der Elektronen auch in der  $xy$ -Ebene festgelegt.

Wenn nun ein Magnetfeld angelegt wird, werden die freien Elektronen klassisch durch die Lorentz-Kraft auf Kreisbahnen abgelenkt. Diese lässt sich durch die Überlagerung zweier senkrecht aufeinander stehenden harmonischen Schwingungen beschreiben, die senkrecht zueinander in der  $xy$ -Ebene schwingen. Der Abstand der Energiewerte ist durch  $\hbar\omega_c$  gegeben, mit der Kreisfrequenz:

$$\omega_c = \frac{eB}{m^*} \quad (3)$$

Diese Kreisfrequenz wird auch Zyklotronfrequenz genannt. Da die Energieniveaus eines solchen Oszillators äquidistant sind, folgt für die Elektronenenergie dispersion des 2DEG in einem in  $z$ -Richtung angelegten Magnetfeld

$$E = E_i^z + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + g_L^* \mu_B B s \quad \text{mit } n, i = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Mit dem effektiven Lande-Faktor  $g_L^*$ , dem bohrschen Magneton  $\mu_B$  und der Spinquantenzahl  $s = +/\frac{1}{2}$ . Die Energien  $E_n$  heißen Landau-Niveaus. Der mittlere Term der Gleichung

beschreibt die kinetische Energie der Elektronen in quantenmechanischer Betrachtung und der rechte Term berücksichtigt die Spin-Bahn-Wechselwirkung des Systems.

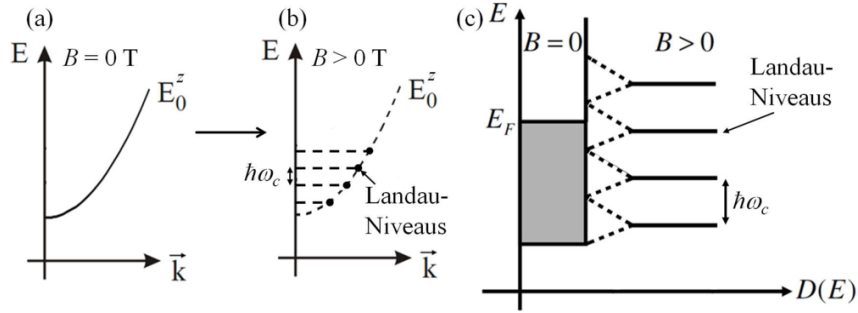


Abbildung 2: Vergleich der klassischen Beschreibung der Energieabhängigkeit (a) mit der Quantenmechanischen (b). (c) Vergleich des Zusammenhanges zwischen Zustandsdichte und Energie in klassischer und quantenmechanischer Beschreibung [2].

Abbildung 2 veranschaulicht das Annehmen diskreter Werte der Zustandsdichte im quantenmechanischen Fall. Das Magnetfeld wirkt auf die Bewegungsrichtung der Elektronen, nicht aber auf deren kinetische Energie, daher lässt sich die Anzahl der Elektronen pro Zustand mit der Zustandsdichte  $D(E)$  bei  $B = 0$  T ausdrücken mit

$$N_L = \frac{D(E)}{g} \hbar\omega_c = \frac{eB}{h} \quad (5)$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Anzahl der Elektronen pro Flächeneinheit, die ein Landauniveau aufnehmen kann, linear mit dem Magnetfeld zunimmt. Es wird ein Füllfaktor  $\nu$  eingeführt, welcher angibt, wie viele Spin aufgespaltenen Landau-Niveaus bei gegebener Ladungsträgerdichte  $n_s$  und einem Magnetfeld  $B$  zumindest teilweise besetzt sind:

$$\nu = \frac{n_s}{N_L} = \frac{\hbar n_s}{eB} \quad (6)$$

## 1.2 Klassischer Hall-Effekt

Beim klassischen Hall-Effekt liegt ein Magnetfeld  $B$  senkrecht zu einem stromdurchflossenen Leiter an. Das Magnetfeld wirkt durch die Lorentzkraft auf die bewegten Ladungsträger und es bildet sich die sogenannte Hallspannung  $U_{Hall}$  senkrecht zur Strom- und Magnetfeldrichtung aus. Die Hallspannung ist proportional zum angelegten Magnetfeld. Dieser Effekt wurde 1879 von dem amerikanischen Physiker Edwin H. Hall entdeckt [4, Kap. 10.7].

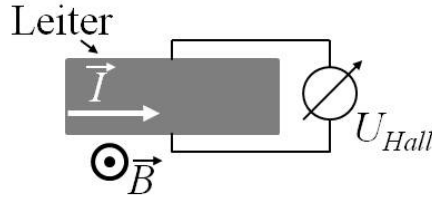


Abbildung 3: Schematischer Aufbau zur Beobachtung des klassischen Hall-Effekts [2].

Für das in diesem Versuch verwendete 2DEG lässt sich die Beweglichkeit der Ladungsträger mit der Drude-Transporttheorie annähern. Diese basiert auf der Tatsache, dass sich die Bewegung der Ladungsträger im Elektronengas mit den klassischen Newtonschen Bewegungsgleichungen beschreiben lässt. Man erhält die Bewegungsgleichung für Elektronen im E- und B-Feld im stationären Zustand:

$$\frac{m^*}{\tau} \vec{v}_D = -e(\vec{E} + \vec{v}_D \times \vec{B}) \quad (7)$$

Mit  $\tau$  als mittlere Stoßzeit zweier Elektronen und  $\vec{v}_D$  als Driftgeschwindigkeit der Elektronen. Diese erhält man für  $B = 0$  T aus:

$$\vec{v}_D = \frac{-e\tau}{m^*} \vec{E} = \mu \vec{E} \quad (8)$$

mit der Beweglichkeit

$$\mu = \frac{-e\tau}{m^*} \quad (9)$$

Die Stromdichte  $\vec{j}$  beschreibt die Anzahl der Ladungen pro Zeit und Fläche und lässt sich anhand von Gleichung 8 beschreiben durch:

$$\vec{j} = -en_s \vec{v}_D = en_s \mu \vec{E} = \sigma_0 \vec{E} \quad (10)$$

mit  $\sigma_0$  als spezifischer Leitfähigkeit des Systems

$$\sigma_0 = en_s \mu \quad (11)$$

Aufgrund der in z-Richtung eingeschränkten Elektronenbewegung innerhalb des 2DEGs, spielen nur die x- und y-Komponenten eine Rolle und Gleichung 10 kann als Produkt aus Tensor und Vektor geschrieben werden

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (12)$$

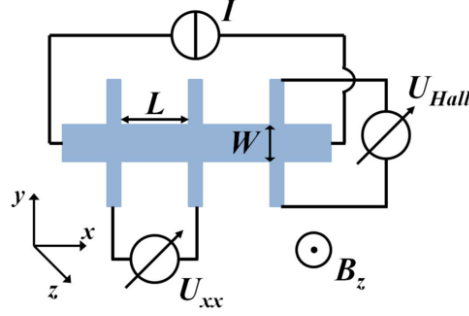


Abbildung 4: Schematische Darstellung der Hall-Streifen-Geometrie der Probe [2].

Hierbei entsprechen die Einträge auf der Diagonalen des Tensors der spezifischen Leitfähigkeit in Richtung des elektrischen Feldes [3, Kap.3.6]. Die Einträge auf der Nebendiagonalen sind nur für  $B \neq 0$  nicht Null. Den spezifischen Widerstandstensor erhält man Matrixinversion.

$$\rho = \sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}\sigma_{yx}} = \begin{pmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Im hier durchgeführten Experiment wurde die Richtung des Stroms festgelegt und aus den gemessenen Daten zunächst die Komponenten des spezifischen Widerstandstensors  $\vec{\rho}$  bestimmt. Diese erhält man aus

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{1}{e\mu n_s} \quad (14)$$

und

$$\rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{1}{\mu n_s} B \quad (15)$$

Die Komponenten des Leitfähigkeitstensors ergeben sich über Matrixinversion aus dem Widerstandstensor, sodass spezifische Leitfähigkeit und spezifischer Widerstand gleichzeitig Null werden können. Man erhält über die Stromdichte  $\vec{j}$  folgenden Zusammenhang von spezifischer Leitfähigkeit zu spezifischem Widerstand

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = \rho \cdot \vec{j} \quad (16)$$

bzw.

$$\rho_{xx} = \frac{E_x}{j_X} \quad (17)$$

und

$$\rho_{xy} = \frac{E_y}{j_X} \quad (18)$$

Zudem wurde im Experiment nicht die Stromdichte vorgegeben und das E-Feld gemessen, sondern es wurde die Spannung gemessen, indem der absolute Strom vorgegeben wurde. Die Probe entsprach hierzu der sogenannten Hall-Streifen-Geometrie.

Das hat den Vorteil, dass kein Strom durch die Kontakte fließt, an welchen die Hallspannung gemessen wird, sodass Kontaktwiderstände keine Rolle spielen, sondern nur die in der Probe abfallende Spannung. Der absolute Strom ist dann gegeben durch

$$I = j \cdot W \quad (19)$$

Mit der Breite des Hallstreifens  $W$ . Die Längsspannung  $U_{xx}$  ergibt sich aus

$$U_{xx} = E_x \cdot L \quad (20)$$

Mit der Probenlänge  $L$ . Mit den Zusammenhängen aus Gleichung 17 und 18 ergibt sich für die spezifischen Widerstände

$$\rho_{xx} = \frac{U_{xx}}{I} \frac{W}{L} \quad (21)$$

und

$$\rho_{xy} = \frac{U_{Hall}}{I} \quad (22)$$

Daraus und aus den Gleichungen 14 und 15 folgt für die Ladungsträgerdichte im Leiter:

$$n_s = \frac{I}{e} \cdot \left( \frac{dU_{Hall}}{dB} \right)^{-1} \quad (23)$$

Mit der Änderung der Hallspannung mit dem Magnetfeld  $\frac{dU_{Hall}}{dB}$ .

Anhand der Ladungsträgerdichte und der in Stromrichtung über den Leiter abfallenden Spannung, kann man zudem die Beweglichkeit der Ladungsträger ermitteln:

$$\mu = \frac{1}{n_s e} \frac{I}{U_{xx}} \frac{L}{W} \quad (24)$$

Ein alternativer Ansatz, welcher in diesem Versuch für die Auswertung verwendet wurde um die Ladungsträgerdichte zu bestimmen, ist der über die Shubnikov-de Haas-Oszillation. Hierzu wird die Längsspannung  $U_{xy}$  gegen das reziproke Magnetfeld  $1/B$  aufgetragen und jedem Minimum der Oszillation ein Füllfaktor  $\nu$  zugeordnet. Die Ladungsträgerdichte hängt wie folgt mit dem Füllfaktor zusammen

$$\nu = \frac{h n_s}{e B} \quad \Leftrightarrow \quad n_s = \frac{e b}{h} \quad (25)$$

Dabei ist  $h$  Plancksche Wirkungsquantum,  $e$  die Elementarladung und  $B$  die Stärke des Magnetfeldes.



### 1.3 Quanten-Hall-Effekt und Shubnikov-de Haas-Oszillation

Beim Quanten-Hall-Effekt bilden sich im Gegensatz zum klassischen Hall-Effekt waagerechte Plateaus für die Hallspannung aus. Diese sind materialunabhängig und ihre Werte sind durch Gleichung 26 gegeben. Die Plateaus bilden sich bei tiefen Temperaturen und bei Magnetfeldern ab einer Stärke von  $|B| > 2 \text{ T}$  aus. Unterhalb dieser B-Feldstärke stimmen die Werte des quantenmechanischen Regimes in etwa mit dem des Klassischen überein [3, Kap.3.6].

$$R_H = \frac{1}{\nu} \cdot 25812,8 \Omega = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2} \quad (26)$$

Dabei ist  $\nu$  ein Füllfaktor,  $h$  das Plancksche Wirkungsquantum und  $e$  die Elementarladung.

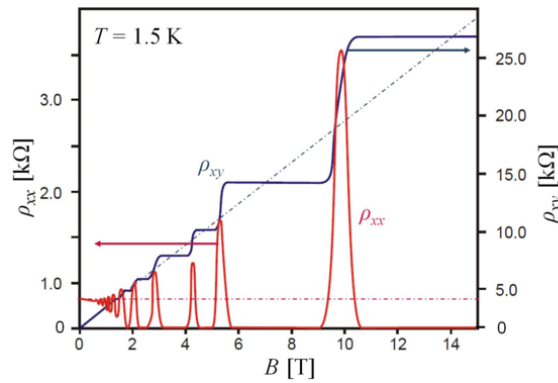


Abbildung 5: Beispielmessung des Quanten-Hall-Effekts und der Shubnikov-de Haas-Oszillation. Die gestrichelten Linien stellen die klassisch erwarteten Kurven dar. Es ist zu erkennen, dass sich spezifischer Längs- und Hallwiderstand bei kleinen Magnetfeldern verhalten wie klassisch zu erwarten. Mit steigendem B-Feld kommt es immer deutlicher zu Quanteneffekten. Der spezifische Hall-Widerstand folgt dabei Werten mit ausgeprägten Plateaus, während im spezifischen Längswiderstand Shubnikov-de Haas-Oszillationen auftreten [2].

Während sich unter den Bedingungen des Quanten-Hall-Effekt für den Hallwiderstand die oben beschriebenen Plateaus ausbilden, sind für den spezifischen Längswiderstand der Probe Oszillationen zu beobachten. Man spricht von der sogenannten Shubnikov-de Haas-Oszillation (SDHO). Bei einem sehr großen Magnetfeld nimmt der Längswiderstand im Minimum dieser Oszillation sogar den Wert Null an.

#### 1.3.1 Randkanalmodell

Um die beiden hier betrachteten Effekte erklären zu können, wird das sogenannte Randkanalmodell verwendet. Dabei handelt es sich um eine Näherung, bei der am Rand der Probe ein Potential erzeugt wird, welches zu einer Erhöhung der Landau-Niveaus führt. Obwohl die Fermi-Energie  $E_F$  im Inneren der Probe zwischen zwei Landau-Niveaus liegen, können so am Probenrand auch elektronische Zustände nahe der Fermi-Energie entstehen. Es bilden sich also eindimensionale Randkanäle zum Transport der Ladungsträger aus.

Diese können sich nur in eine Richtung bewegen, welche von der Orientierung des Magnetfelds abhängt. Die chiralen Zustände sind durch Einwirken des Magnetfeldes über die Lorentzkraft auf geladene Teilchen recht stabil und Ladungsträger können dadurch trotz eventueller Stöße mit Phononen wieder auf ihre Bahn finden. Dies ist in der folgenden Abbildung 6 dargestellt.

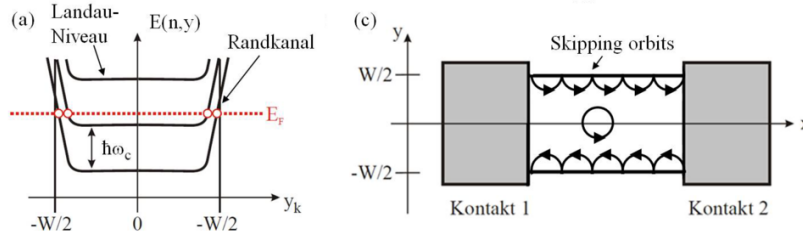


Abbildung 6: **Links:** Schematische Darstellung der Erzeugung von Randpotentialen [2].  
**Rechts:** Schema zur Darstellung der Bewegung von Elektronen im Randkanalmodell [2].

Zur anschaulichen Beschreibung des Ladungstransport in den Randkanälen kann der Landauer-Büttiker-Formalismus genutzt werden. Dabei werden Parallelen von der Optik zur Technik aufgezeigt, wie zum Beispiel der Vergleich der Transmission einer Elektronenwelle mit der einer elektromagnetischen Lichtwelle.

Die Anzahl  $M$  der Randkanäle hängt ab von der Lage der Fermienergie  $E_F$  und somit auch von der Stärke des Magnetfeldes, wie in Abbildung 6 (a) dargestellt. Die Hauptaussage des Landauer-Büttiker-Formalismus beruht auf der Annahme, dass die Elektronen mit einer Wahrscheinlichkeit  $T_{lm}$  vom Kontakt  $m$  zum Kontakt  $l$  transmittiert werden. Dabei sei nun die Anzahl der Kontakte an der Probe  $p = 2$ , diese liegen auf unterschiedlichen chemischen Potentialen  $\mu_p$ . Dann sei weiter am oberen Rand der Probe  $T_{12} = 1$  und  $T_{21} = 0$ , denn ein Elektron, welches an Kontakt 1 in den Randkanal transmittiert wird, kann die Probe nur über Kanal 2 wieder verlassen. Am unteren Rand der Probe drehen sich die Wahrscheinlichkeiten genau um. Die gemessene Spannung an den beiden Kontakten ist dann

$$U_{12} = U_1 - U_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{e} \quad (27)$$

Den entsprechenden Strom erhält man aus

$$I_0 = -e \left( \int_0^{\mu_1} T_{12} D(E) v(E) dE - \int_0^{\mu_2} T_{12} D(E) v(E) dE \right) \quad (28)$$

Mit der Transmissionswahrscheinlichkeit  $T$ , der Zustandsdichte  $D(E)$  und der Gruppengeschwindigkeit  $v(E)$  mit  $v(E) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k}$ .

Der gesamte Nettostrom setzt sich aus dem Strom des oberen und unteren Kanals zusammen und beträgt

$$I = I_0 + I_u = -e \int_{\mu_2}^{\mu_1} T_{12} D(E) v(E) dE = \frac{e^2}{h} (U_1 - U_2) \quad (29)$$

### 1.3.2 Erklärung der Hall-Plateaus und der SDH-Oszillation

Randkanalmodell und Landauer-Büttiker-Formalismus (oben beschrieben) sind zwei Ansätze zur Erklärung der Ursache für die Hall-Plateaus und die Shubnikov-de Haas-Oszillation (SDH-Oszillation). Betrachtet wird nun eine Vierpunkt-Messung, wie sie in Abbildung 7 dargestellt ist.

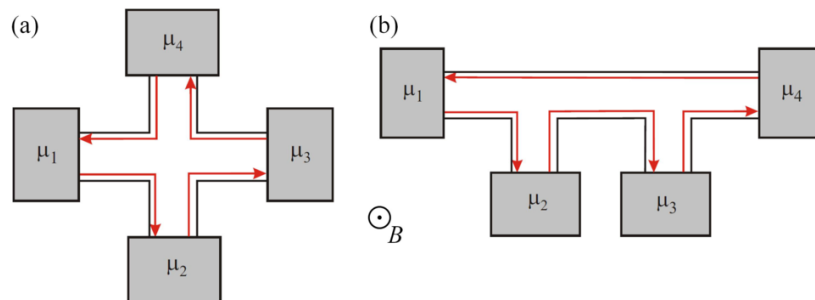


Abbildung 7: **Links:** Schema der sogenannten Hall-Kreuz-Geometrie zur Messung der Hall-Spannung zwischen  $\mu_2$  und  $\mu_4$  [2].

**Rechts:** Schema der Kontaktgeometrie zur Messung des Längswiderstandes zwischen  $\mu_2$  und  $\mu_3$  [2].

Die roten Pfeile in der Abbildung 7 zeigen die mögliche Richtung des Stromflusses in den Randzuständen an. Deren Anzahl sei  $M$ . Ströme, die in einen Kontakt hinein fließen, seien positiv. Anhand Gleichung 29 lassen sich in diesem Beispiel die vier Ströme berechnen und man erhält ein Gleichungssystem dessen Lösungen die Hallspannung  $U_{Hall} = U_4 - U_2$  liefern. Mithilfe des Ohmschen Gesetzes erhält man den Hallwiderstand über

$$R_H = \frac{U_H}{I} = \frac{1}{M} \frac{h}{e^2} \quad (30)$$

Anhand dieser Formel ist zu erkennen, dass der Hallwiderstand also von der Anzahl der Randkanäle abhängt. Die Anzahl der Randkanäle ändert sich, wenn ein Landau-Niveau die Fermienergie durchläuft. dies geschieht in den Übergangsbereichen zwischen zwei Plateaus. Infolgedessen ändert sich also auch der Wert für die den Hallwiderstand  $R_H$ . Dies erklärt das Erscheinen der Plateauwerte im Hallwiderstand. Die Übergangsbereiche werden im Unterkapitel 1.3.3 näher erläutert. Es wird erneut der Landauer-Büttiker-Formalismus zur Hand genommen, um das Verschwinden des Längswiderstandes im Bereich eines Plateaus zu erklären. Im Bereich eines Plateaus liegt die Fermienergie zwischen zwei Landau-Niveaus und dadurch liegen die Kontakte über welche die Längsspannung gemessen wird, auf dem selben Potential. Das führt dazu, dass die Längsspannung den Wert Null annimmt. Für eine ideale Probe ist dies allerdings nur bei singulären Magnetfeldwerten tatsächlich der Fall.

### 1.3.3 Lokalisierte Zustände

Die Fermienergie liegt per Definition zwischen dem höchsten besetzten und dem niedrigsten unbesetzten Elektronenniveau. Die Landau-Niveaus haben den Abstand  $\hbar\omega_c$ . Dieser wächst linear mit dem B-Feld. Das hat zur Folge, dass die teilweise gefüllten Landau-Niveaus zu größeren Energien hin verschoben werden und gleichzeitig entvölkert werden, da sich ihre

relative Höhe zur Fermienergie verändert. Besitzt das Niveau unterhalb der Fermienergie einen ausreichend hohen Entartungsgrad, ist das oberhalb der Fermienergie liegende Niveau vollständig entvölkert und im Verhältnis fällt so die Fermi-Energie auf das nächst kleinere Energieniveau ab. Dies ist schematisch in Abbildung 8 dargestellt.

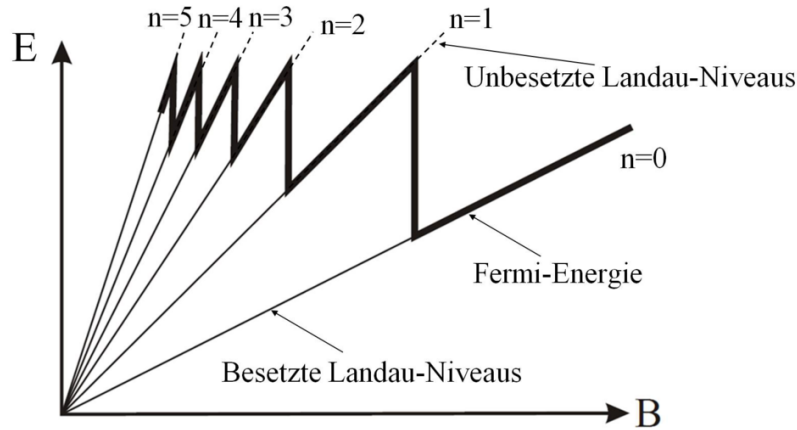


Abbildung 8: Abhängigkeit der Besetzung von Landau-Niveaus und der Fermi-Energie im Magnetfeld [2].

Eine ideale Probe zeichnet sich durch eine peak-förmige Zustandsdichte aus. Liegt ein singuläres Magnetfeld an, liegt die Fermienergie darin zwischen zwei Landau-Niveaus. Doch bei einer realen Probe treten Fluktuationen in der Zustandsdichte auf. Das liegt daran, dass die Landau-Niveaus im Inneren der Probe nicht konstant verlaufen, sondern durch Störstellen zu Verbreiterungen der Zustandsdichte führen.

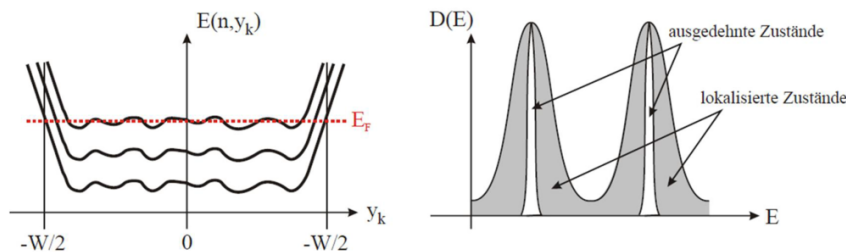


Abbildung 9: **Links:** Landau-Niveaus in einer realen Probe [2].

**Rechts:** Verbreiterung der Zustandsdichte durch Störquellen [2].

Die chiralen Zustände des Randkanalmodells verschwinden in den Übergangsbereichen, in welchen die Fermienergie exakt auf einem Landau-Niveau liegt. Dadurch kann es zu Rückstreuung kommen und der Längswiderstand ist nicht mehr Null. So lässt sich die Ursache der Ausdehnung der Hall-Plateaus, sowie die Minima der SDH-Oszillation mittels des Randkanalmodells zusammen mit dem Landauer-Büttiker-Formalismus und den lokalisierten Zuständen erklären.

## 1.4 Plattenkondensator

In der Auswertung des Versuchsteils zur Gatespannungsabhängigkeit wird näherungsweise von einem Plattenkondensator der Fläche  $A$  ausgegangen. Für die Anzahl der Ladungsträger

gilt mit  $N_s = n_s \cdot A$

$$N_s = C \cdot U_{Gate} \quad (31)$$

mit der Kapazität C des Kondensators. Diese ist definiert über

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 A}{d} \quad (32)$$

mit dem Abstand d der Platten, der Dielektrizitätskonstanten des Vakuums  $\epsilon_0$  und der Dielektrizitätskonstanten des Dielektrikums im Kondensator  $\epsilon$ . Aus 31 und 32 ergibt sich:

$$n_s = \frac{\epsilon \epsilon_0}{d} (U_{Gate} - U_{th}) \quad (33)$$

mit der Einsatzspannung  $U_{th}$ .

## 2 Experimentelle Durchführung und Beobachtungen

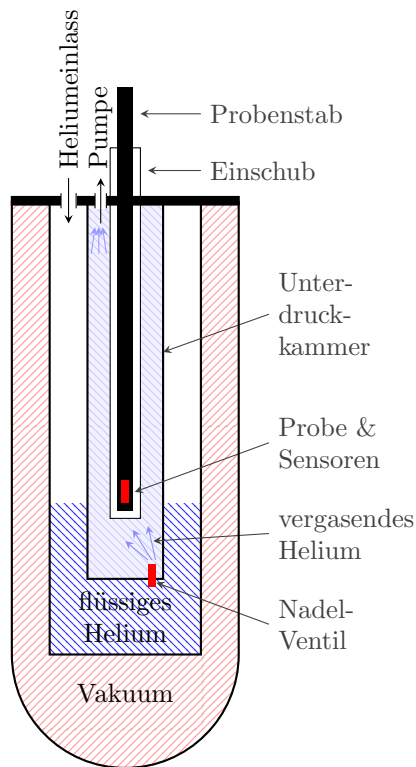


Abbildung 10: Schematische Zeichnung des im Text beschriebenen Kryostaten.

Der Versuchsaufbau besteht aus einem im Boden eingelassenen Kryostaten und sich in einem Rack befindlichen Steuerungs- und Messelectronik, welche mit Hilfe eines Computers gesteuert bzw. ausgelesen wird und deren Messdaten aufgezeichnet werden können. Der Kryostat ist ein Vakuumtank mit einer heliumgefüllten Kammer im Inneren. Darin befindet sich eine Kammer, in der wiederum ein Probeneinschub ist. Mit einer Pumpe wird der Druck in dieser Kammer auf wenigen Millibar gehalten. Durch die Verdunstungskälte kann die Innentemperatur und so auch die Probentemperatur auf etwa 1,5 K gehalten werden. Dieser Aufbau ist in Abbildung 10 schematisch dargestellt. Durch einige Sensoren und eine Heizung kann die Temperatur anschließend sehr genau geregelt werden. Um letztendlich den QHE und die SDHO beobachten zu können, sind sehr hohe Magnetfelder von Nöten, hierfür werden zwei supraleitende Magnetspulen genutzt.

Vor dem Versuch wurde der Tank über den Heliumeinlass an der Oberseite mit flüssigem Helium gefüllt. Die Probe wurde an der Spitze des Probenstabes montiert und in den Probeneinschub eingeführt. Anschließend wurde die den Einschub umgebende Kammer mehrfach mit Hilfe eines Nadelventils mit Helium geflutet und anschließend wieder abgepumpt, um Luftreste zu entfernen und Vereisungen an Probe und Nadelventil zu vermeiden. Anschließend wurde bei laufender Pumpe eine Einstellung für die Heliumzufuhr (Nadelventil) gesucht, sodass sich in der Kammer der gewünschte Unterdruck und somit die sehr tiefen Temperaturen einstellen.

Im Nachfolgenden werden in den ersten beiden Abschnitten zwei unterschiedliche Messmethoden erprobt und in den Anschließendenden werden Winkel, Temperatur und Elektronendichte variiert und die Folgen auf den Quanten-Hall Effekt und die Shubnikov-de Haas Oszillationen untersucht.

## 2.1 Gleichstrommessungen

In diesem Versuchsabschnitt wurden die Längs- und Querspannung gemessen und aufgezeichnet, während an der Probe ein Gleichstrom anlag. Gleichzeitig wurde das Magnetfeld verändert.

Um eine stabile Temperatur zu erhalten, wurde die Kammer von den 1,5 K auf 2 K geheizt und programmgesteuert auf dieser Temperatur gehalten. Der Strom in x-Richtung betrug  $1\text{ }\mu\text{A}$ . Das Magnetfeld wurde auf  $-7,7\text{ T}$  gefahren. Dies dauert rund sieben Minuten, da es sich um supraleitende Spulen handelt und das Anlegen eines Stroms eine Gegeninduktion verursacht. Sobald das Magnetfeld aufgebaut war, wurde die Hallspannung  $U_H$  sowie die Längsspannung  $U_{xx}$  aufgezeichnet, während das Magnetfeld mit der maximalen Geschwindigkeit von  $1\text{ T/min}$  auf  $+7,7\text{ T}$  gefahren wurde.

Die mit Hilfe der Formeln (21) und (22) aus den Spannungen berechneten Widerstände sind in Abbildung 11 zu sehen.

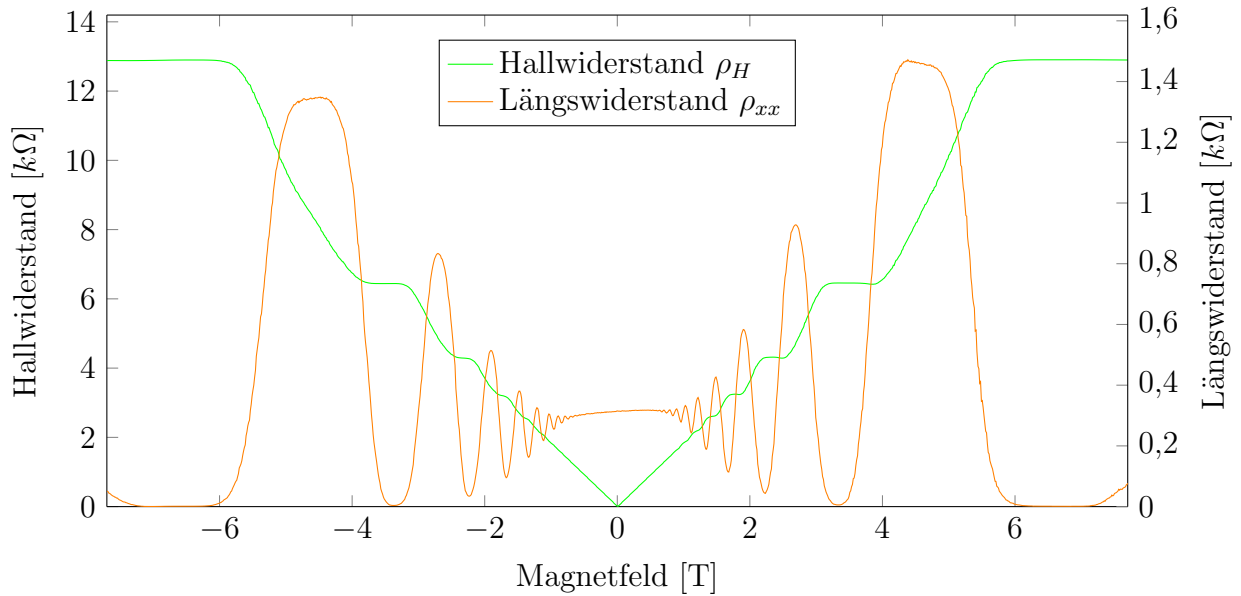


Abbildung 11: Plot des aus den gemessenen Längs- und Querspannungen berechneten Widerständen eines mit Gleichstrom durchflossenen 2DES im maximalen Magnetfeldbereich und maximaler Magnetfeldrampe. Die Hall-Spannung und somit der berechnete Hall-Widerstand nimmt bei negativen Magnetfeldern negative Werte an, Aus Platzgründen wurde diese jedoch in den positiven Bereich geklappt.

Um im Bereich von  $-2$  bis  $+2\text{ T}$  eine bessere Auflösung der sehr dicht beieinander liegenden Niveaus zu bekommen wurde eine zweite analoge Messung in diesem Bereich mit einer kleineren Magnetfeldrampe von  $0,2\text{ T/min}$  durchgeführt. Da das Fahren der Magnetfelder, wie bereits erwähnt, längere Zeiten in Anspruch nimmt, kann hier mit vorausschauendem Handeln viel Zeit gespart werden. Daher wurde das Magnetfeld von den  $+7,7\text{ T}$  aus dem letzten Versuchsteil erst auf  $+2,2\text{ T}$  gefahren und die Messung anschließend mit einer negativen Magnetfeldrampe durchgeführt.

Die aus den Messergebnissen berechneten Widerstandsverläufe sind in Abbildung 12

aufgetragen.

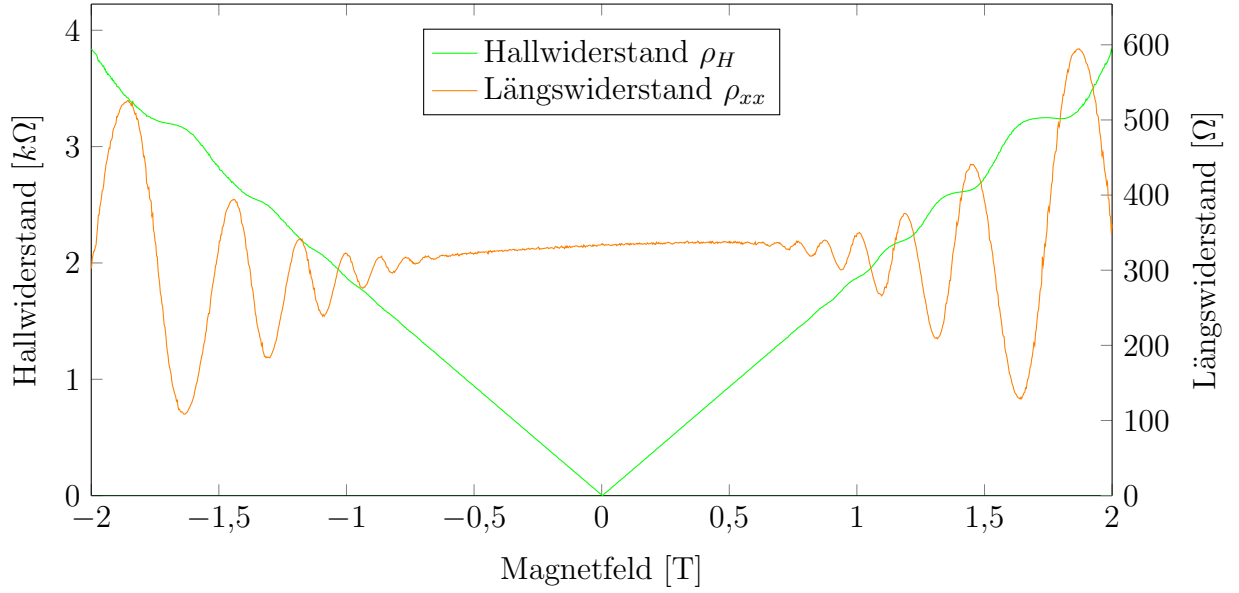


Abbildung 12: Plot des aus den gemessenen Längs- und Querspannungen berechneten Widerständen eines mit Gleichstrom durchflossenen 2DES im reduzierten Magnetfeldbereich und geringerer Magnetfeldrampe. Die Hall-Spannung und somit der berechnete Hall-Widerstand nimmt bei negativen Magnetfeldern negative Werte an, Aus Platzgründen wurde diese jedoch in den positiven Bereich geklappt.

Es sind deutlich die Plateaus des Hall-Widerstandes und die Oszillation des Shubnikov-de Haas-Widerstandes zu erkennen. Die Maxima der SDHO liegen bei den Übergängen zwischen den Plateaus des QHE. Ferner ist eine leichte Asymmetrie der Messergebnisse zwischen positiven und negativen Magnetfeldern zu erkennen.



## 2.2 Wechselstrommessung

Im folgendem Abschnitt wurden die Messungen des vorigen Versuchsteils im Wesentlichen wiederholt, mit dem Unterschied, dass anstatt eines Gleichstroms ein Wechselstrom die Probe durchfließt. Dieser wurde mit einem Funktionsgenerator mit der Amplitude  $U_{RMS} = 10\text{ V}$  erzeugt. Um den Strom unabhängig von dem Widerstand des Hall-Streifens zu halten, musste ein hinreichend großer Widerstand in Reihe geschaltet werden. Da der Eigenwiderstand des Hall-Streifens bei einigen Kiloohm lag, wurde ein  $9,95\text{ M}\Omega$  Widerstand verwendet. So kann in guter Näherung angenommen werden, dass der Strom allein durch den zusätzlich angelegten Vorwiderstand zu  $I = U/R = 10\text{ V}/9,95\text{ M}\Omega = 1,005\text{ }\mu\text{A}$  bestimmt wurde. Um die kleinen, dennoch auftretenden Schwankungen auszugleichen, wurde der Strom ebenfalls für jeden Datenpunkt aufgezeichnet. Die Berechnung des Widerstandes mit den Formeln (21) und (22) wurde entsprechend zeilenweise mit dem gemessenen Strom durchgeführt.

Die verwendeten Messgeräte für die Längs- und Querspannungen wurden mit dem Frequenzgenerator als Referenz verbunden.

Die aus den Messwerten gewonnen Widerstandswerte sind für die gesamte Magnetfeldreichweite bei maximaler Magnetfeldrampe in Abbildung 13 und für den detaillierten Ausschnitt in Abbildung 14 aufgetragen.

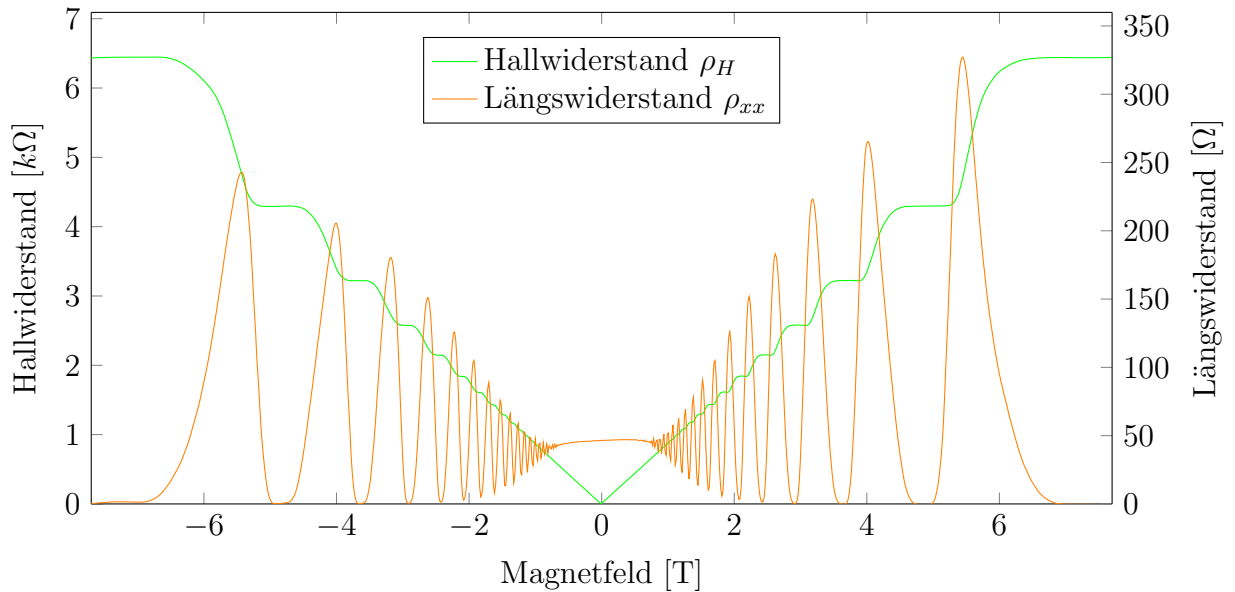


Abbildung 13: Plot des aus den gemessenen Längs- und Querspannungen berechneten Widerständen eines mit Wechselstrom durchflossenen 2DES im maximalen Magnetfeldbereich und maximaler Magnetfeldrampe. Die Hall-Spannung und somit der berechnete Hall-Widerstand nimmt bei negativen Magnetfeldern negative Werte an, Aus Platzgründen wurde diese jedoch in den positiven Bereich geklappt.

Auch bei diesen Messungen ist die Asymmetrie des positiven und negativen Magnetfeldes zu beobachten. Die

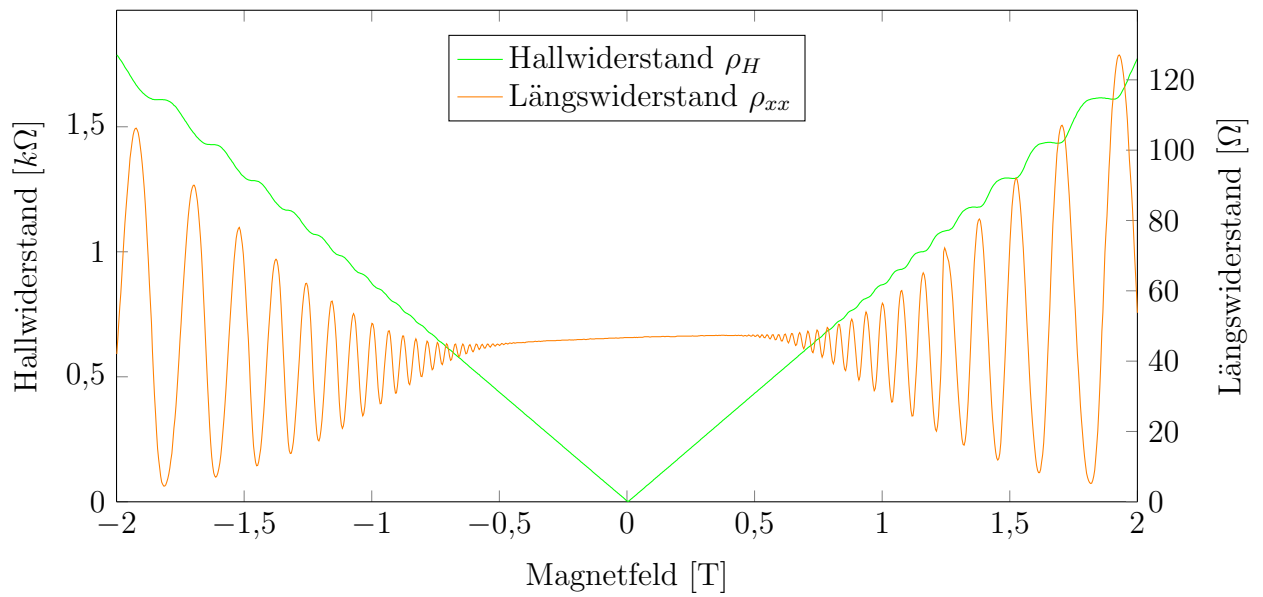


Abbildung 14: lot des aus den gemessenen Längs- und Querspannungen berechneten Widerständen eines mit Wechselstrom durchflossenen 2DES im reduzierten Magnetfeldbereich und geringerer Magnetfeldrampe. Die Hall-Spannung und somit der berechnete Hall-Widerstand nimmt bei negativen Magnetfeldern negative Werte an, Aus Platzgründen wurde diese jedoch in den positiven Bereich geklappt.

## 2.3 Winkelabhängigkeit

In diesem Versuchsteil wurde die Abhängigkeit des Quanten-Hall-Effekts, sowie des Shubnikov-de Haas-Effekts vom Einfallswinkel des Magnetfeldes auf die Probe untersucht. Hierzu wurde ausgenutzt, dass sich der Probenstab im Einschub drehen ließ, ohne sich dabei aus der Fixierung zu lösen. Mit Hilfe einer Winkelscheibe auf der Abdeckung des Kryostaten und einer Markierung am Probenstab, wurde nun eine Messreihe bestehend aus mehreren Messungen für verschiedene Winkeleinstellungen der Probe zum Magnetfeld durchgeführt. Für den Winkel wurden hierbei in  $10^\circ$ -Schritten Werte zwischen  $260^\circ$  und  $10^\circ$  gewählt, sodass insgesamt eine Drehung von  $90^\circ$  ausgeführt wurde. Dabei lag eine Temperatur von 2 K an der Probe an und für jede Messung wurde das Magnetfeld analog zu den ersten Messungen von  $+7,7$  bis  $-7,7$  T gefahren, mit der maximalen Geschwindigkeit von  $1\text{ T/min}$ . Aufgrund der deutlicheren Hall-Plateaus in den Graphen wurde für diese Messreihe weiterhin die Wechselstromquelle des vorangegangenen Versuchsteils genutzt.

Anhand der Messungen war zu erkennen, dass beide betrachteten Effekte immer weniger ausgeprägt waren und schließlich verschwanden, je weiter die Probe aus der Nullposition ausgelenkt wurde.

## 2.4 Temperaturabhängigkeit

Im Folgenden sollte nun die Temperaturabhängigkeit des Quanten-Hall- und des Shubnikov-de Haas-Effekts überprüft werden. Ziel dabei war es, die Grenztemperatur zu finden, bis zu welcher die beiden Effekte noch zu beobachten sind. Dazu wurden Messungen für unterschiedliche Temperaturwerte an der Probe aufgenommen. Begonnen wurde dabei bei der Ausgangstemperatur von 2 K und es wurden in unregelmäßigen Intervallen Temperaturen bis hin zu 40 K gewählt. Für jede Messung wurde analog zu den vorangegangenen Versuchsteilen das Magnetfeld mit einer Geschwindigkeit von 1 T/min hochgefahren, diesmal von jeweils 0 bis 7,7 T. Auch hier wurde aufgrund der deutlicheren Hall-Plateaus in den Graphen weiterhin die Wechselstromquelle genutzt.

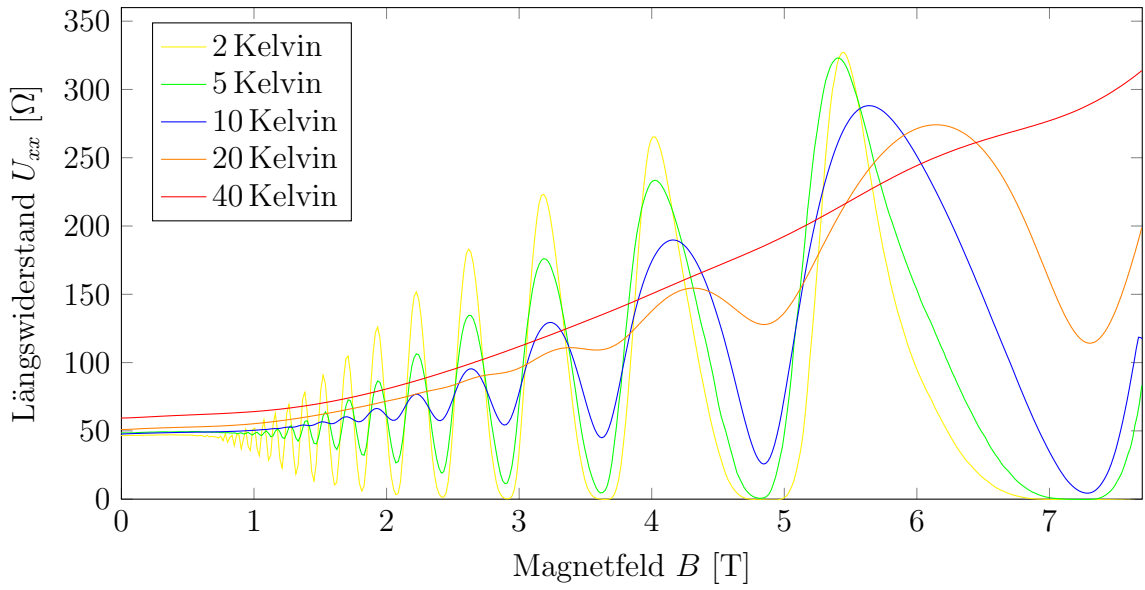


Abbildung 15: Teilverlauf des berechneten Längswiderstands bei Unterschiedlichen Temperaturen. Für die Übersichtlichkeit wurde die Hälfte mit negativen Magnetfeldern nicht dargestellt.

In Abbildung 15 ist die Hälfte der Messergebnisse mit positiven Magnetfeldern zu sehen.

## 2.5 Gatespannungsabhängigkeit

Im letzten Versuchsabschnitt wurde der Einfluss einer Gatespannung auf die beiden zu untersuchenden Effekte beleuchtet, mit dem Ziel, aus den dadurch erfassten Daten, den Abstand des 2DEG in der Probe zur Gateelektrode zu bestimmen.

Für die folgenden Messungen wurden in Schritten von 50 mV Gatespannungen von  $-200$  bis  $200$  mV gewählt. Dabei wurde eine Temperatur von  $2$  K an der Probe eingestellt und analog zu den obigen Versuchsteilen aufgrund der deutlicheren Hall-Plateaus in den Graphen die Wechselstromquelle genutzt.

Der aus der Hallspannung berechnete Hall-Widerstand ist in Abbildung 16 im Messbereich von  $0$  bis  $7.7$  T aufgetragen.

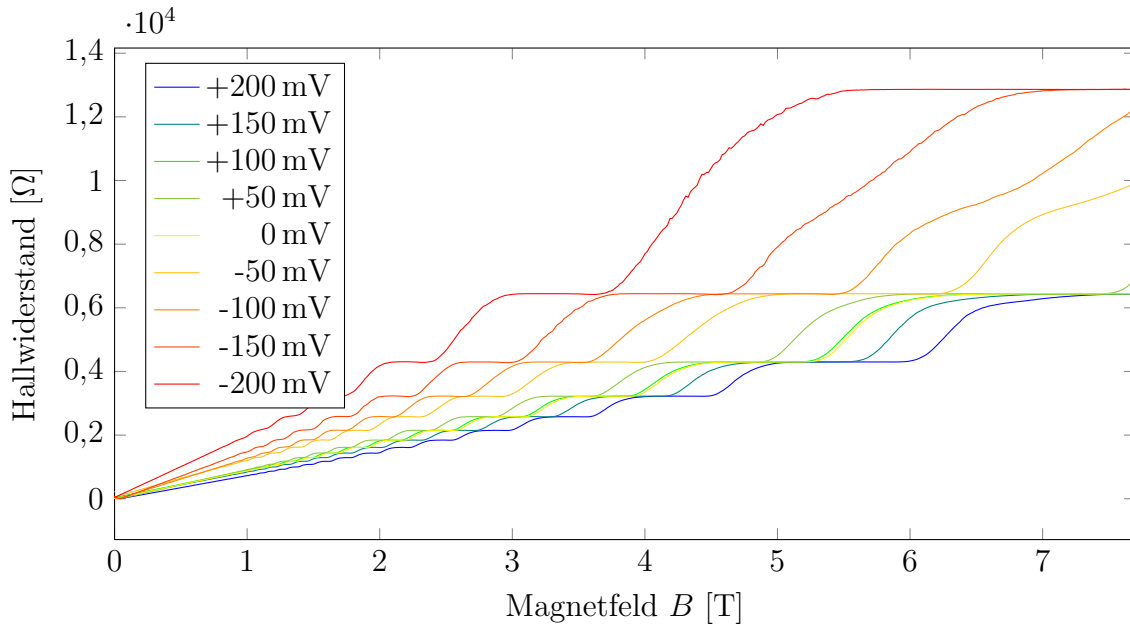


Abbildung 16: Berechnete Elektronendichte  $n_s$  und -beweglichkeit  $\mu$  in Abhängigkeit zu der Gatespannung.

## 3 Auswertung

Im Folgenden sind die Auswertungen der in den jeweiligen Versuchsteilen aufgenommenen Messdaten zu finden.

### 3.1 Gleichstrommessungen

Anhand der Messdaten aus der Gleichstrommessung, abgebildet in Graphik 11 und 12, wurde die Dichte der Ladungsträger im 2DEG, sowie deren Beweglichkeit bestimmt.

#### 3.1.1 Näherung über die Hall-Spannung

Zunächst wurde die Steigung der Hall-Spannung mittels linearer Regression aus dem klassischen Bereich der Messdaten zwischen -2 T und 2 T anhand der Formel  $U_{Hall} = a \cdot B$  bestimmt:

$$a = \frac{dU_{Hall}}{dB} = (1.876037 \pm 0,000305) \cdot 10^{-3} \cdot \text{m}^2/\text{s} \quad (34)$$

Hieraus ließ sich mit der Formel (23) und dem bekannten Strom von  $I = 100 \text{ nA}$  die Ladungsträgerdichte des 2DEG berechnen:

$$n_s = \frac{I}{e} \left( \frac{dU_{Hall}}{dB} \right)^{-1} = (3,33149 \pm 0,00054) \cdot 10^{17} \cdot 1/\text{cm}^2 \quad (35)$$

Mit den Bekannten Maßen der Probe wurde anschließend die Beweglichkeit der Ladungsträger bestimmt. Dies erfolgte anhand der Formel 24 und mit der Probenlänge  $L = 600 \mu\text{m}$  und -breite  $W = 100 \mu\text{m}$ .

$$\mu = (5,92433 \pm 0,00096) \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{Vs} \quad (36)$$

#### 3.1.2 Näherung über die Shubnikov-de Haas-Oszillation

Eine Alternative Möglichkeit, die Ladungsträgerdichte zu berechnen, erfolgt über die Shubnikov-de Haas-Oszillation. Hierzu wurde die Längsspannung über der Probe gegen  $1/B$  aufgetragen und jedem Minimum der Oszillation ein Füllfaktor  $\nu$  zugeordnet. Dies ist in Abbildung 17 zu sehen.

Mit der linearen Regression  $\mu = b/B$  kann die Steigung zu  $b = (13,1462 \pm 0,0190) \text{ T}$  bestimmt werden. Mit dieser ließ sich analog zur Näherung über die Hall-Spannung mit Gleichung (24) die Ladungsträgerdichte bestimmen:

$$n_s = (3,17874 \pm 0,00046) \cdot 10^{15} \text{ 1/m}^2 \quad (37)$$

So ergibt sich aus Gleichung (25) für die Beweglichkeit:

$$\mu = (6,20901 \pm 0,00896) \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{Vs} \quad (38)$$

In den Graphen 11 und 12 fiel eine leichte Asymmetrie der Messkurven auf. Da sich dies in allen folgenden Messungen ebenfalls bemerkbar machte, wurde hier auf einen Fehler an der Probe selbst geschlossen. So ist es zum Beispiel möglich, dass die Kontakte an der Probe zur Messung der Längs- und Hall-Spannungen eine leichte Asymmetrie aufweisen.

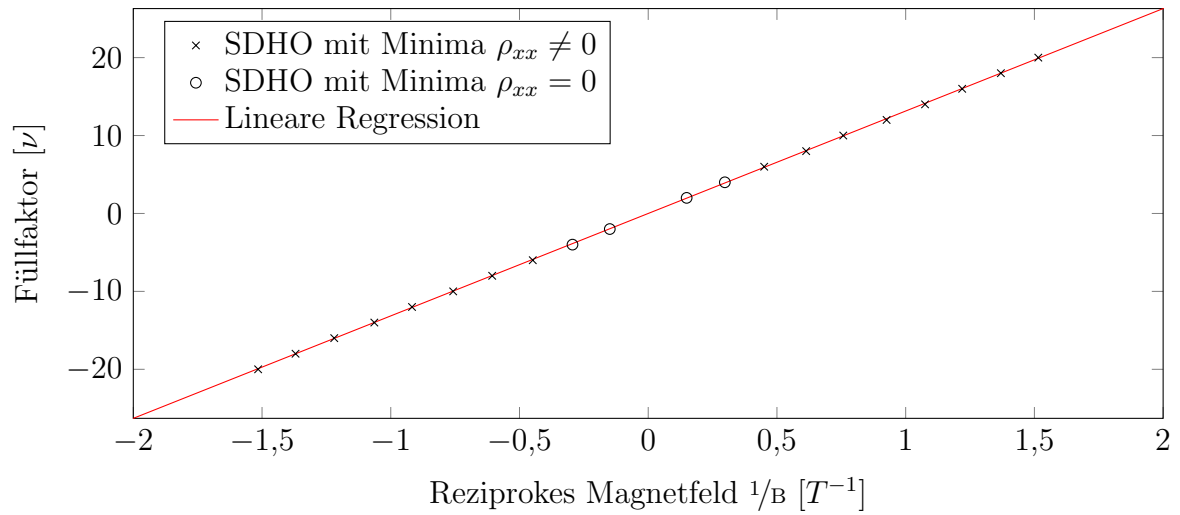


Abbildung 17: Lineare Regression über den Füllfaktor der QHE-Plateaus der Gleichstrommessung aufgetragen gegen das Reziproke Magnetfeld.

Wenn man über die Widerstandswerte des letzten Plateaus mit Füllfaktor  $\nu = 2$  mittelt, kann man den Kitzling-Faktor errechnen:

$$R_K = 12,882 \pm 0,022 \text{ k}\Omega \cdot 2 = 25,764 \pm 0,044 \text{ k}\Omega$$

Dieses Ergebnis liegt sehr dicht an dem Literaturwert von  $R_K = h/e = 25,812 \text{ k}\Omega$ .

## 3.2 Wechselstrommessung

Analog zur Auswertung der Gleichstrommessung wurde auch für die aufgenommenen Messdaten der Wechselstrommessung, abgebildet in Graphik 13 und 14, die Dichte der Ladungsträger im 2DEG, sowie deren Beweglichkeit bestimmt.

### 3.2.1 Näherung über die Hall-Spannung

Wie in der Auswertung der Gleichstrommessung wurden auch hier die beiden physikalischen Größen zunächst über die Steigung des klassischen Teils der Hallspannung zwischen -1 T und 1 T bestimmt.

$$\frac{dU_{Hall}}{dB} = (18,7604 \pm 0,0030) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} \quad (39)$$

Dabei wurde von den gemessene Strom der Mittelwert für diesen Bereich ermittelt:  $I = 0,978 \mu\text{A}$ . Analog zur Auswertung der Gleichstrommessdaten ergaben sich hier für die gesuchten Größen folgende Werte:

$$n_s = (7,15761 \pm 0,00015) \cdot 10^{15} \text{ 1/m}^2 \quad (40)$$

$$\mu = (26,19592 \pm 0,00533) \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{Vs} \quad (41)$$

### 3.2.2 Näherung über die Shubnikov-de Haas-Oszillation

Ebenfalls analog zur Gleichstrommessung wurden die gesuchten physikalischen Größen alternativ über die Shubnikov-de Haas-Oszillation berechnet. Dies ist in Abbildung 18 zu sehen. Es ergibt sich eine Steigung der Geraden von  $b = (28,9081 \pm 0,0358)\text{T}$  und daraus analog zum vorherigen Versuchsteil die physikalischen Größen:

$$n_s = (6,9899 \pm 0,0087) \cdot 10^{11} \cdot \text{1/m}^2 \quad (42)$$

$$\mu = (26,82425 \pm 0,03325) \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{Vs} \quad (43)$$

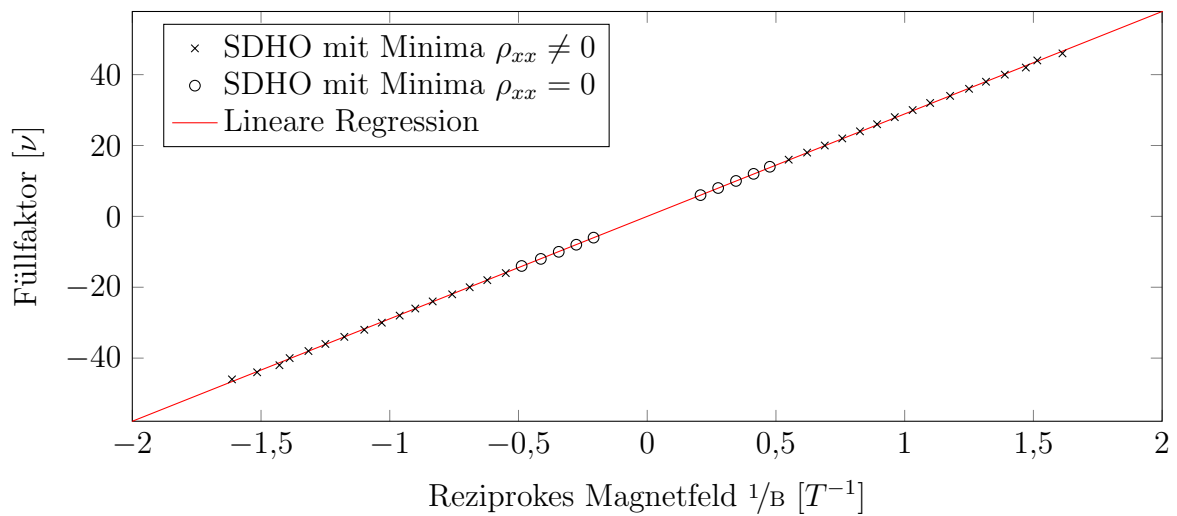


Abbildung 18: Lineare Regression über den Füllfaktor der QHE-Plateaus der Wechselstrommessung aufgetragen gegen das Reziproke Magnetfeld.



Die Plateaus mit den Füllfaktoren  $\nu = 2$  und  $4$  waren anscheinend nicht mehr im Messbereich enthalten, so wurde ein Offset von  $\nu_{offset} = 4$  für alle Füllfaktoren benutzt. Dies führt für die Kitzling-Konstante auf

$$R_K = 6,438 \pm 0,097 \text{ k}\Omega \cdot 4 = 25,752 \pm 0,388 \text{ k}\Omega$$

### 3.3 Vergleich Gleich- und Wechselstrommessung

Ein Vergleich der Auswertungen für Gleich- und Wechselstrommessungen zeigt, dass sich die Ergebnisse jeweils um mindestens Faktor 2 unterscheiden. Dabei handelt es sich offensichtlich um einen systematischen Fehler, welcher nicht vollständig erklärt werden kann. Die Grundlegende Ursache wird jedoch auf eine Änderung der Ladungsträgerdichte in der Probe, welche zwischen den beiden Messreihen, zurückzuführen sein. Dies ließ sich bereits anhand der Messdaten selbst erkennen, da sich die Kurven der Graphen für die beiden verschiedenen Messreihen bereits um den selben Faktor in ihrer Amplitude unterscheiden.

Es wurden verschiedene Theorien aufgestellt, um diese Abweichung zu erklären. Eine elektrostatische Ladung des Gates auf etwa 100 mV (vgl. Kapitel 3.6) würde ausreichen, um diesen Effekt zu erklären. Eine Spannung in diesem Bereich kann sehr leicht durch Berührung von statisch aufgeladenen Gegenständen (z.B. Bekleidung) oder selbst von der Haut hervorgerufen werden.

Es lässt sich jedoch festhalten, dass beide Messungen in sich konsistent gewesen zu sein scheinen, was sich an der in beiden Fällen recht sauberen linearen Regression zeigt. Die Näherung über die Hall-Spannung liefert in beiden Fällen einen kleineren Fehler für die zu berechnenden physikalischen Größen.

### 3.4 Winkelabhängigkeit

Anhand der aufgenommenen Messdaten des Versuchsteils zur Winkelabhängigkeit wurde nun die Abhängigkeit des Quanten-Hall-Effekts, sowie des Shubnikov-de Haas-Effekts vom Einfallswinkel des Magnetfeldes auf die Probe analysiert. Dazu wurden in Abbildung 19 die Magnetfeldwerte der Minima in Abhängigkeit des Winkels zur Probenormalen aufgetragen. Ein hier angegebener Winkel von  $300^\circ$  entspricht einer Auslenkung aus der Normalen der

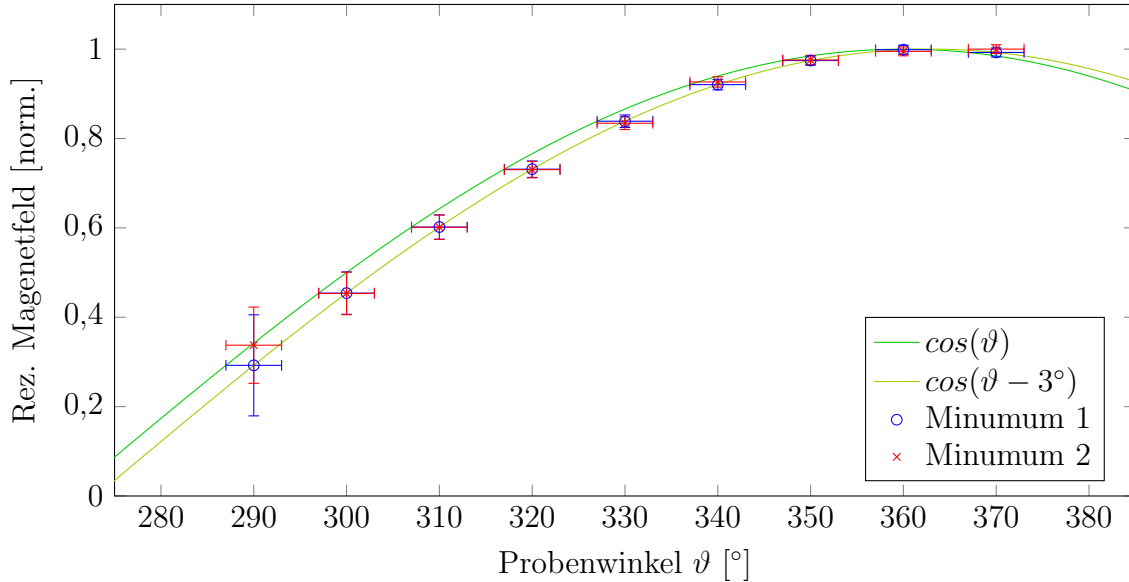


Abbildung 19: Normierte Reziproke Magnetfelder zweier Minima der SDHO, aufgetragen gegen den Winkel der Probe zum Magnetfeld. Als Referenz sind zusätzlich zwei Cosinus-Funktionen hinzugefügt worden (s. Text).

Probe zum Magnetfeld von  $70^\circ$ , da die Zahlen auf der Winkelscheibe übernommen wurden. Ein angegebener Winkel von  $360^\circ$  entspräche also einer tatsächlichen Auslenkung von  $10^\circ$ . In der Graphik wurden die Werte eines bestimmten Minimas bei unterschiedlichen Winkeleinstellungen gegen das reziproke Magnetfeld  $1/B$  aufgetragen. Zudem wurden hier die Positionen zweier verschiedener Minima (Minimum 1 in rot, Minimum 2 in blau dargestellt) verglichen und um in einem Graphen vergleichbar dargestellt zu werden, auf den jeweils Maximalen Wert zu 1 normiert. Zwischen den Einstellungen  $370$  bis  $320^\circ$  verläuft die Kurve Cosinusförmig. Bei Werten weiter links auf der x-Achse, welche hier einer größeren Auslenkung aus der Null-Position entsprechen, weicht die Kurve immer mehr von dieser Form ab. Für die Winkelabhängigkeit der beiden betrachteten Effekte wird theoretisch eine Cosinusfunktion erwartet, da bei einem Winkel von  $0^\circ$  das effektive Magnetfeld am stärksten und bei einem Winkel von  $90^\circ$  zur Probenfläche gleich Null ist. Ausgedrückt wird diese Beziehung durch das Skalarprodukt

$$\vec{B} = |\vec{B}| \cdot \cos(\vartheta) \quad (44)$$

Mit dem Winkel  $\alpha$  zwischen Magnetfeldlinien und Probennormalen. Das Abweichen der Kurve vom Verlauf einer Cosinusfunktion ab einem Winkelwert von  $320^\circ$ , also einer Auslenkung  $> 50^\circ$ , wird hier auf statistische Fehler zurückgeführt. Der Fehler des Probenwinkels wird auf einen Wert von  $\pm 3$  Grad geschätzt und folgt ebenso wie der

Fehler des reziproken Magnetfeldes, welcher pauschal auf  $\pm 0,01 \text{ T}$  geschätzt wird, aus Ablesefehlern. Aufgrund des reziproken Auftrags des Magnetfeldes auf der y-Achse sind deren einzelne Fehler der Messpunkte um einen Faktor von bis zu  $10^{-5}$  kleiner als die y-Werte selbst und wurden daher nicht im Graphen dargestellt. Verglichen mit dem Graphen liegen die theoretisch erwarteten Werte etwa um  $+3^\circ$  in Auslenkungsrichtung verschoben, das heißt, es liegt auch für die Werte geringerer Auslenkung ein leichtes Offset vor. Dies verdeutlichen die beiden Kurven der Funktionen  $\cos(\nu)$  und  $\cos(\nu - 3^\circ)$  im selben Graphen. Es ist gut zu erkennen, dass die Kurve der Funktion  $\cos(\nu - 3^\circ)$  näher an den aus den Messdaten erhaltenen Werten liegt.

Dies lässt vermuten, dass die Winkelscheibe, an welcher die relative Position der Probenormalen zu den Magnetfeldlinien abgelesen wurde, um  $3^\circ$  aus der Nullposition ausgelenkt angebracht ist. Die hier dargestellte Abhängigkeit zeigt dennoch deutlich, dass für zunehmende Auslenkung aus der Nullposition höhere Magnetfelder, also kleinere Werte für  $\frac{1}{B}$  notwendig sind, um für die SDH-Oszillation Minima zu erzeugen und es kann angenommen werden, dass diese bei einer Auslenkung von  $90^\circ$  vollständig verschwinden.

### 3.5 Temperaturabhängigkeit

Wie zu den Messdaten der Gleich- und Wechselstrommessungen wurden die Ladungsträgerdichten und -beweglichkeiten hier für alle verschiedenen aufgenommenen Temperaturwerte von 2 K bis 40 K bestimmt. In der Abbildung 15 ist der Hall-Spannungsverlauf zu verschiedenen Temperaturen abgebildet. Hierbei ist deutlich zu erkennen, wie die SDHO mit steigender Temperatur weniger stark ausgeprägt sind. Die Temperatur, ab welcher der Effekt nicht mehr zu erkennen ist, liegt zwischen 20 und 40 K.

Ladungsträgerdichte und -beweglichkeit wurden wie in den obigen Versuchsteilen über die Hall-Spannung berechnet und die Ergebnisse zu den verschiedenen Temperaturen in Tabelle 1 eingetragen. Die gleichen Ergebnisse sind zusätzlich in Abbildung 20 dargestellt.

$T$ [K]	$b$ [T]	$U_{xx}$ [V]	$n_s$ [1/m <sup>2</sup> ]	$\mu$ [m <sup>2</sup> /Vs]
2	$8,51422 \cdot 10^{-4}$	$2,73230 \cdot 10^{-4}$	$7,17948 \cdot 10^{15}$	$1,91166 \cdot 10^7$
5	$8,64040 \cdot 10^{-4}$	$2,84912 \cdot 10^{-4}$	$7,07464 \cdot 10^{15}$	$1,86044 \cdot 10^7$
10	$8,47763 \cdot 10^{-4}$	$2,80024 \cdot 10^{-4}$	$7,21046 \cdot 10^{15}$	$1,85726 \cdot 10^7$
20	$8,54649 \cdot 10^{-4}$	$2,99456 \cdot 10^{-4}$	$7,15237 \cdot 10^{15}$	$1,75085 \cdot 10^7$
40	$8,66678 \cdot 10^{-4}$	$3,48808 \cdot 10^{-4}$	$7,05310 \cdot 10^{15}$	$1,52428 \cdot 10^7$

Tabelle 1: Berechnete Elektronendichte  $n_s$  und -beweglichkeit  $\mu$  in Abhängigkeit zu der Proben temperatur, aus Platzgründen ohne Fehler.

Sowohl die Elektronenbeweglichkeit als auch die Ladungsträgerdichte ist nahezu konstant mit der Temperatur. Beide nehmen tendenziell mit der Temperatur ab. Eine mögliche Erklärung für dieses Verhalten wäre eine erhöhte thermische Streuung. Da der Effekt jedoch sehr klein ist, liegt die Vermutung nahe, dass bei der Messung ein Fehler unterlaufen ist.

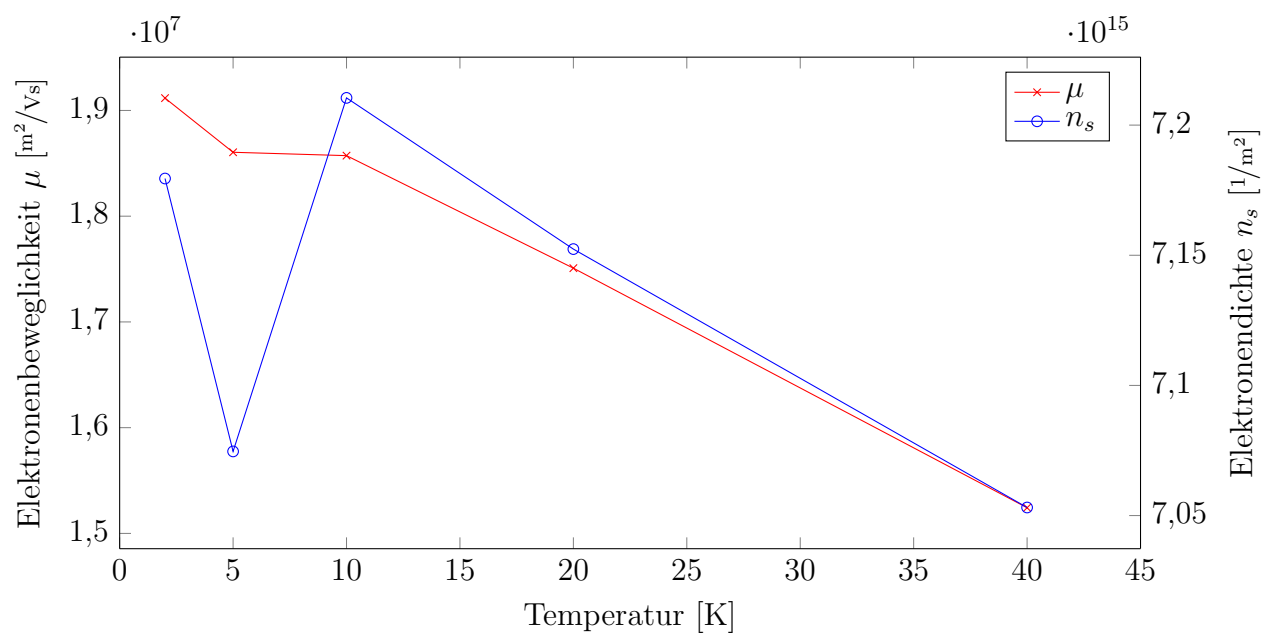


Abbildung 20: Berechnete Elektronendichte  $n_s$  und -beweglichkeit  $\mu$  in Abhängigkeit zu der Proben temperatur.

### 3.6 Gatespannungsabhängigkeit

Im abschließenden Versuchsteil sollte erst die Abhängigkeit der Ladungsträgerdichte von der Gatespannung ermittelt werden und dann daraus der Abstand des Gates zum 2DES.

Die Ladungsträgerdichten wurden analog zu den obigen Versuchsteilen aus der Näherung über die Hall-Spannung bestimmt und es ergaben sich die Werte in Tabelle 2. Wie bereits in den Messergebnissen selber (s. Abbildung 16) zu sehen, fällt der Punkt ohne Gatespannung aus der Systematik heraus. Es wurde hier keine eigene Messung gemacht, sondern die Messung aus dem Kapitel 2.2 weiterverwendet. Dies stärkt die Vermutung aus diesem Kapitel, dass die Abweichung zu der Gleichstrommessung des Kapitel 2.1 aus einer elektrostatischen Aufladung des Gates herrührt.

$U_{Gate}$ [V]	$b$ [T]	$U_{xx}$ [V]	$n_s$ [1/m <sup>2</sup> ]	$\mu$ [m <sup>2</sup> /Vs]
200	$7,41865 \cdot 10^{-4}$	$9,53682 \cdot 10^{-7}$	$8,23972 \cdot 10^{15}$	$4,77216 \cdot 10^9$
150	$7,86923 \cdot 10^{-4}$	$9,53682 \cdot 10^{-7}$	$7,76793 \cdot 10^{15}$	$5,06200 \cdot 10^9$
100	$8,52505 \cdot 10^{-4}$	$2,76567 \cdot 10^{-4}$	$7,17036 \cdot 10^{15}$	$1,89099 \cdot 10^7$
50	$9,34121 \cdot 10^{-4}$	$1,43052 \cdot 10^{-6}$	$6,54387 \cdot 10^{15}$	$4,00592 \cdot 10^9$
0	$8,52914 \cdot 10^{-4}$	$2,74183 \cdot 10^{-4}$	$7,16692 \cdot 10^{15}$	$1,90835 \cdot 10^7$
-50	$1,12890 \cdot 10^{-3}$	$2,86104 \cdot 10^{-6}$	$5,41482 \cdot 10^{15}$	$2,42060 \cdot 10^9$
-100	$1,26965 \cdot 10^{-3}$	$7,30876 \cdot 10^{-4}$	$4,81451 \cdot 10^{15}$	$1,06570 \cdot 10^7$
-150	$1,51940 \cdot 10^{-3}$	$4,52998 \cdot 10^{-6}$	$4,02315 \cdot 10^{15}$	$2,05764 \cdot 10^9$
-200	$1,87273 \cdot 10^{-3}$	$2,16796 \cdot 10^{-3}$	$3,26410 \cdot 10^{15}$	$5,29928 \cdot 10^6$

Tabelle 2: Berechnete Elektronendichte  $n_s$  und -beweglichkeit  $\mu$  in Abhängigkeit zu der Gatespannung, aus Platzgründen ohne Fehler. Ausgegraut sind die Werte, die mit einer positiven Magnetfeldrampe gemessen wurden, alle anderen wurden bei einer negativen gemessen.

Anhand der wie in Kapitel 2.5 beschrieben aufgenommenen Messdaten zur Gatespannung sollte der Abstand des 2DEG zur Probenoberfläche bestimmt werden. Dazu dient die Annahme, dass das 2DEG und das verwendete Titan-Gate einen Plattenkondensator bilden. Die beiden Schichten von GaAs und AlGaAs dazwischen bilden hierfür ein nicht-leitendes Dielektrikum. Durch das Anlegen der Gatespannung wurde die Ladungsträgerdichte im 2DEG verändert. Dies kann durch das Modell eines Plattenkondensators erklärt werden: In einem Plattenkondensator der Fläche  $A$  ist die Anzahl der Ladungsträger  $N_s = n_s \cdot A$  gegeben durch die Gleichung (31). Dabei kann  $\epsilon \approx 12$  angenommen werden, da die verwendete Probe im wesentlichen AlGaAs mit einem Aluminiumanteil von 33 % enthält. Anhand der beiden Gleichungen und der Einsatzspannung  $U_{th}$  kann nun die Abhängigkeit der Ladungsträgerdichte von der Gatespannung angegeben werden durch Gleichung (33).

Um den Abstand des Gates zu bestimmen, wurde eine Lineare Regression unter Auslassung des Messwertes bei  $U_{Gate} = 0$  mV über die Elektronendichte durchgeführt. Mit

der Regressionsformel  $n_s = a \cdot U_{Gate} + b$  wurden folgende Parameter errechnet:

$$a = (0,012326 \pm 0,00031) \cdot 10^{15} \text{ (m}^2 \cdot \text{mV)}^{-1} \quad (45)$$

$$b = (5,90481 \pm 0,04254) \cdot 10^{15} \text{ 1/m}^2 \quad (46)$$

Durch Umformung der erwähnten Gleichung (33) ergibt sich der Abstand zu

$$n_s = \frac{\epsilon\epsilon_0}{d} \cdot U_{Gate} - \frac{\epsilon\epsilon_0}{n_s} \cdot U_{th} = a \cdot U_{Gate} + b \quad (47)$$

$$\Rightarrow a = \frac{\epsilon\epsilon_0}{d} \quad (48)$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{\epsilon\epsilon_0}{a} \cong 50 \text{ nm} \quad (49)$$

Die Werte aus Tabelle 2 sind auch in Abbildung 21 aufgetragen. Da die Werte der Längsspannung  $U_{xx}$  bei hochfahrendem Magnetfeld stark von jenem bei herunterfahrendem abweichen, wurden diese mit dem Faktor 200 multipliziert und als  $\mu_{\uparrow} \cdot 200$  geplottet. Woher dieser Effekt kommt konnte nicht geklärt werden.

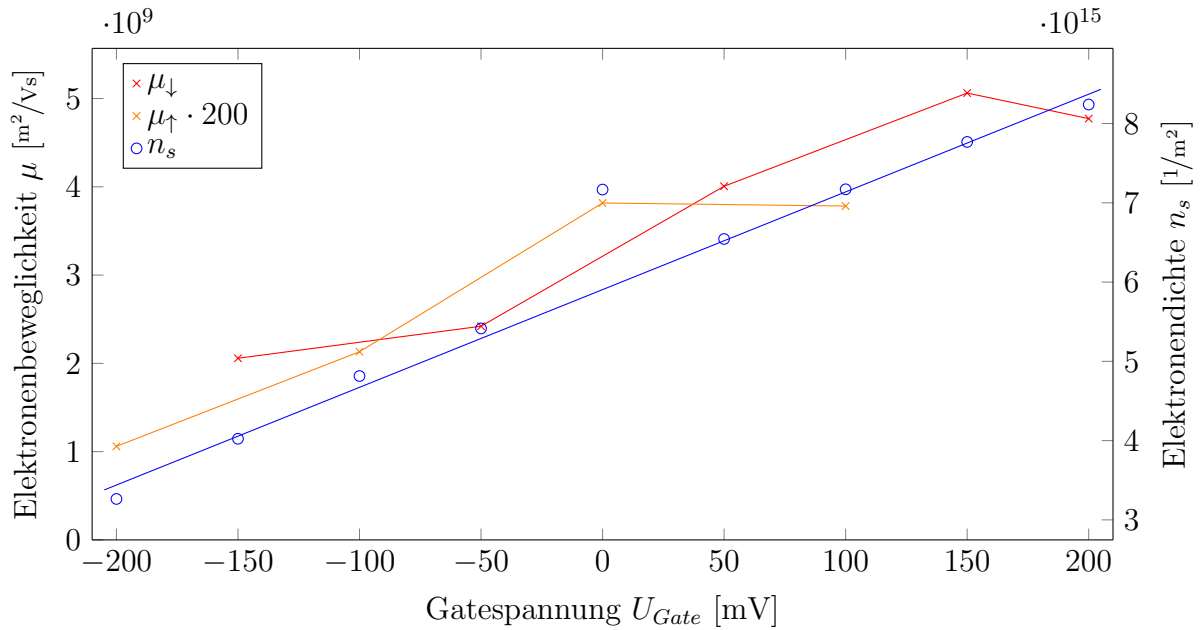


Abbildung 21: Berechnete Elektronendichte  $n_s$  und -beweglichkeit  $\mu$  in Abhängigkeit zu der Gatespannung.  $\mu_{\uparrow}$  entsprechen den Werten, die mit einer positiven Magnetfeldrampe gemessen wurden, die Werte  $\mu_{\downarrow}$  wurden bei einer negativen gemessen. Die blaue Linie ist die Lineare Regression der blauen Kreise unter Auslassung des  $U_{Gate} = 0 \text{ mV}$ -Wertes, siehe Text.



## 4 Fazit

In diesem Versuch konnten erfolgreich der Hall- und Shubnikov-de Hass-Effekt nachgewiesen werden. So konnte mit hoher Genauigkeit der Kitling-Faktor ermittelt werden. Aus dem asymmetrischen Verhalten der Messergebnisse konnte ein Rückschluss auf die Spule gezogen werden.

Über die Variation verschiedener Parameter konnte weiteres Verständnis gewonnen werden: Das Verhalten des Hall-Streifens unter Rotation konnte sehr anschaulich und in guter Übereinstimmung über eine Geometrische Beziehung verstanden werden. Auch die Variation der Gate-Spannung konnte mit dem Modell eines Kondensators sehr gut und anschaulich verstanden werden. So konnte Rückwirkend eine Theorie zu abweichenden Ergebnissen in den Messungen plausibel gemacht werden. Lediglich die Variation der Temperatur konnte mit ihren Ergebnissen nicht überzeugen.

# Literatur

- [1] C. Weisbuch und B. Vinter, *Quantum semiconductor structures: fundamentals and applications*. Boston: Academic Press, 1991.
- [2] T. Bartsch, *Anleitungsheft: Quanten-Hall-Effekt*. Universität Hamburg, 2015.
- [3] K. Kopitzki und P. Herzog, *Einführung in die Festkörperphysik*, 6. Aufl., Serie Studium. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2009.
- [4] P. A. Tipler und R. A. Llewellyn, *Modern physics*, 5. Aufl. New York, NY: W.H. Freeman, 2008.

# Abbildungsverzeichnis

1	2DEG Schicht . . . . .	1
2	Landau Niveaus . . . . .	3
3	Halleffekt klassisch . . . . .	4
4	Hallstreifengeometrie . . . . .	5
5	Beispiel-Messung Hall-Plateaus und SDH-Oszillation . . . . .	7
6	Schema Randkanalmodell . . . . .	8
7	Vierpunkt-Messung . . . . .	9
8	Fermi-Energie lokalisierter Zustände . . . . .	10
9	Struktur von Landau-Niveaus in realer Probe . . . . .	10
10	Schematischer Aufbau des Kryostaten . . . . .	12
11	Gleichstrommessung im maximalen Magnetfeldbereich . . . . .	13
12	Höher aufgelöste Gleichstrommessung in Magnetfeldteilbereich . . . . .	14
13	Wechselstrommessung im maximalen Magnetfeldbereich . . . . .	15
14	Höher aufgelöste Gleichstrommessung in Magnetfeldteilbereich . . . . .	16
15	Hall-Widerstand unter Temperaturvariation . . . . .	18
16	Auswertung der Gatespannungsvariation . . . . .	19
17	Lineare Regression Gleichstrommessung . . . . .	21
18	Lineare Regression Wechselstrommessung . . . . .	22
19	Auswertung der Winkelvariation . . . . .	25
20	Auswertung der Temperaturvariation . . . . .	28
21	Auswertung der Gatespannungsvariation . . . . .	30