Teste 1

Métodos Numéricos – Turma H1

1ª Questão

Sobre o número $(2021)_{dez}$ que representa o ano do curso, responda:

k	a_k	b_k		K	a_k	b_k			
0	2021	1		6	31	1			
1	1010	0		7	15	1			
2	505	1		8	7	1			
3	252	0		9	3	1			
4	126	0		10	1	1			
5	63	1			0	Fim			

2021 ➔ 11111100101

a) Para ser escrito na base dois quantos dígitos são necessários? 11 dígitos

b) Quais são o primeiro e o último dígitos da sua representação binária?

- Primeiro: 1
- Último: 1

c) A partir de 2021, quantos anos deverão transcorrer até que um dígito adicional seja necessário para escrever o nº binário que representa o ano

Menor binário de 12 dígitos ➔ $1\underbrace{00000000000}_{11\ zeros}$

100000000001 ➢ Maior

000000000001 ➢ Zeros a esquerda

➔ $(2^{11}x1 + 2^{10}x0 + 2^{9}x0 .... + 2^{0}x0) = 2048$

Logo, para representar 2048 será necessário e terão transcorridos 27 anos

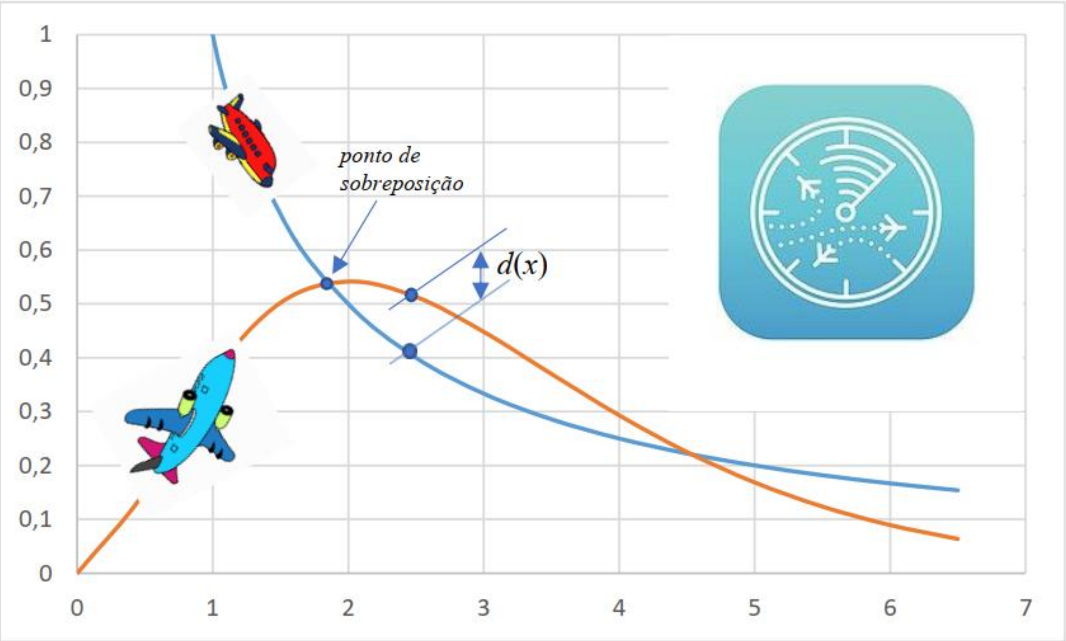
2ª Questão – item a

a) as coordenadas (x,y) do ponto na tela do radar em que os aviõezinhos se sobrepõem pela 1a vez;

$f_1(x) = \frac{1}{x}$; $f_2(x) = x^2 e^{-x}$

- ✓ $f_2(x) = f_1(x)$
- ✓ $f_2(x) - f_1(x) = 0$

$$\boxed{d(x) = x^2 e^{-x} - \frac{1}{x}}$$



Resolvendo pelo Método de Newton:

Valor inicial: 2.0
Tol: $0{,}5 \times 10^{-3}$

$$\boxed{d'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} \frac{1}{x^2}}$$

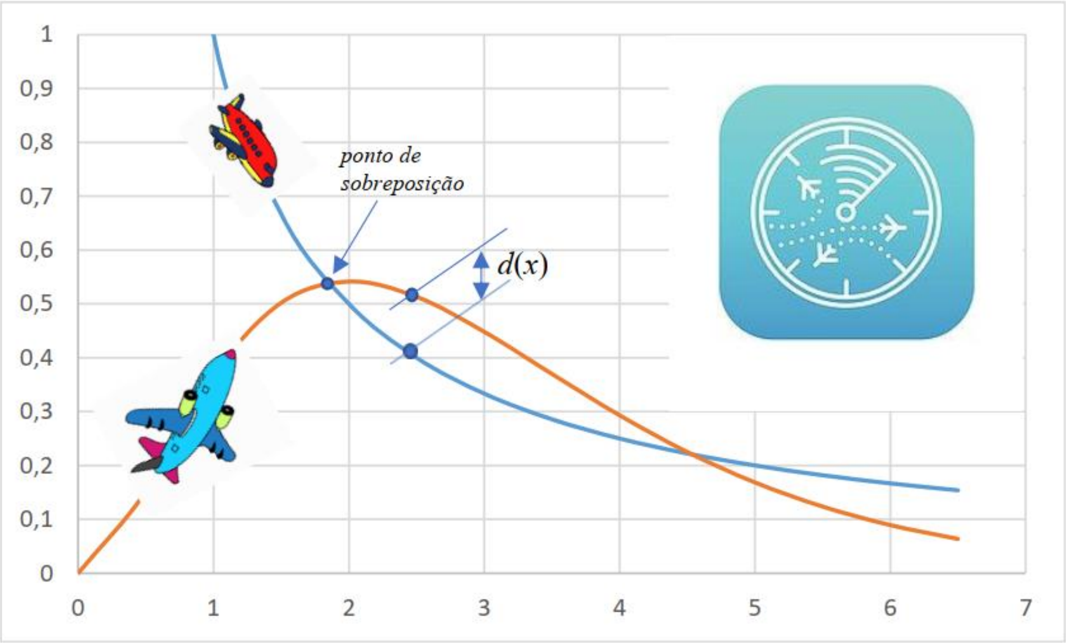
$$\boxed{x^{(k+1)} = x^k - \left[\frac{d(x)}{d'(x)}\right]}$$

iterações	0	1	2	3
x	2	1,834635	1,856718	1,857184
d(x)	0,041341	-0,00763	-0,00015	-6,7E-08
d´(x)	0,25	0,34554	0,331624	0,331335
delta_x	-0,16536	0,022083	0,000465	2,03E-07

Coordenadas:
x = 1,857
y = $f_1(x) = \frac{1}{1{,}857}$ =0,5385

2ª Questão – item b

b) o valor máximo da distância vertical d(x) entre os aviõezinhos no intervalo [2; 4].



Encontrar ponto máximo, onde $d'(x) = 0$

$$d'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x}\frac{1}{x^2}$$

Resolvendo pelo Método de Newton:

Valor inicial: 3.0
Tol: $0,5 \times 10^{-3}$

$$d''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x} - \frac{2}{x^3}$$

$$x^{(k+1)} = x^k - \left[\frac{d'(x)}{d''(x)}\right]$$

iterações	0	1	2	3
x	3	2,691186	2,749284	2,752019
d'(x)	-0,03825	0,011958	0,000515	1,09E-06
d''(x)	-0,12386	-0,20582	-0,18827	-0,18747
delta_x	-0,30881	0,058098	0,002735	5,84E-06

$$d(x) = x^2e^{-x} - \frac{1}{x}$$

Valor máximo: $d(2{,}752) = 0{,}12$

3ª Questão – item a

$$\begin{bmatrix} 24 & 4 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & 12 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 7 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} \\ x_5^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a)Verificar se o processo de **G-J** apresenta condições suficientes para a convergência

Pelo critério das linhas, a matriz não é diagonal dominante.

A 3ª e 5ª linhas não atendem ao critério. Logo, não há condições suficientes para a convergência.

3ª Questão – item b

$$\begin{bmatrix} 24 & 4 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & 12 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 7 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} \\ x_5^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Com o processo iterativo de G-S, obter os seguintes valores da primeira e segunda iterações, x2(1) e x5(2)

GS

$$x_1^{(k+1)} = \frac{15 - 4x_2^{(k)} - 6x_5^{(k)}}{24}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{7 - 4x_1^{(k+1)} - 2x_4^{(k)}}{12}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{7 - 3x_5^{(k)}}{3}$$

$$x_4^{(k+1)} = \frac{4 - 2x_1^{(k+1)}}{3}$$

$$x_5^{(k+1)} = \frac{8 - 4x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k+1)}}{6}$$

iter	#0	#1	#2
x1	0	0,625	0,527778
x2	0	0,375	0,25463
x3	0	2,333333	2,194444
x4	0	0,916667	0,981481
x5	0	0,138889	0,25
	delta x		
		0,625	-0,09722
		0,375	-0,12037
		2,333333	-0,13889
		0,916667	0,064815
		0,138889	0,111111

3ª Questão – item c

$$\begin{bmatrix} 24 & 4 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & 12 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 7 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} \\ x_5^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Verificar se 3 iterações do processo de **G-S** são suficientes para se obter o valor da solução com duas casas decimais de precisão ($tol = 0{,}5 \times 10^{-2}$).

GS

$$x_1^{(k+1)} = \frac{15 - 4x_2^{(k)} - 6x_5^{(k)}}{24}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{7 - 4x_1^{(k+1)} - 2x_4^{(k)}}{12}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{7 - 3x_5^{(k)}}{3}$$

$$x_4^{(k+1)} = \frac{4 - 2x_1^{(k+1)}}{3}$$

$$x_5^{(k+1)} = \frac{8 - 4x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k+1)}}{6}$$

iter	#0	#1	#2	#3
x1	0	0,625	0,527778	0,520062
x2	0	0,375	0,25463	0,246399
x3	0	2,333333	2,194444	2,083333
x4	0	0,916667	0,981481	0,986626
x5	0	0,138889	0,25	0,292181
	delta x			
		0,625	-0,09722	-0,00772
		0,375	-0,12037	-0,00823
		2,333333	-0,13889	-0,11111
		0,916667	0,064815	0,005144
		0,138889	0,111111	0,042181

Não são suficientes, os desvios não atendem à tolerância.

$> 0{,}5 \times 10^{-2}$

4ª Questão

As calouras foram juntas ao mercado e realizaram as seguintes compras:

- Irene pagou R$2,00 para trazer 2 bananas e 3 laranjas;
- Joana gastou R$2,20 em 12 maçãs e 2 laranjas;
- Carla levou 3 maçãs, 12 bananas e 1 laranja que saíram a R$3,80;
- Roberta trouxe 3 laranjas e 3 peras que custaram R$1,65.

➢ Traduzir o problema para o sistema

A=	Ban.	Lar.	Maçã	Pera	b =
Irene	2	3	0	0	2.00
Joana	0	2	12	0	2.20
Carla	12	1	3	0	3.80
Roberta	0	3	0	3	1.65

4ª Questão

a) Obtenha os elementos L(4,1), D(3,3) e U(2,3) resultantes da fatoração da matriz de coeficientes do sistema linear que representa o problema.

$$A = \begin{matrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & 0 \\ 12 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{matrix}$$

```
for i in range(n-1):
        #Elemento pivô
        piv =  A[i,i]
        for j in range(i+1,n):
            #Multiplicador
            m = (A[j,i]/piv)
            L[j,i] = m
            A[j,:] = A[j,:] - m*A[i,:]
```

$$L = \begin{matrix} 1, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 1, & 0, & 0, \\ 6, & -8,5 & 1, & 0, \\ 0, & 1,5 & 0,17 & 1, \end{matrix}$$

$$A = \begin{matrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 105 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{matrix}$$

```
for i in  range(n):
        D[i,i]=A[i,i]
        A[i,i]=A[i,i]/D[i,i]
```

$$D = \begin{matrix} 2, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 2, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 105, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 3, \end{matrix}$$

$$A = \begin{matrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

```
for i in  range(n):
        U[i,:]=A[i,:]/D[i,i]
```

$$U = \begin{matrix} 1, & 1,5 & 0, & 0, \\ 0, & 1, & 6, & 0, \\ 0, & 0, & 1, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 1, \end{matrix}$$

4ª Questão

A =	Ban.	Lar.	Maçã	Pera	b =
Irene	2	3	0	0	2.00
Joana	0	2	12	0	2.20
Carla	12	1	3	0	3.80
Roberta	0	3	0	3	1.65

b) A fruta de menor valor unitário

```
for j in range(n-1):
    for i in range(j+1,n):
        b[i] = b[i] - L[i,j]*b[j]
y=b
for i in range(n):
        y[i]=y[i]/D[i,i]
z=y
x = np.linalg.inv(U)@z
```

Ban. = 0,25

Lar. = 0,50

Maçã. = 0,10

Pera = 0,05

c) Se Carla tivesse arrecadado R$4,00, quantas peras no máximo poderia acrescentar ao lote de frutas que comprou?

Linha 3: $12*0{,}25 + 1*0{,}50 + 3*0{,}10 + p*0{,}05 = 4$

$p = (4 - 3 - 0{,}50 - 0{,}30)/0{,}05 = \boxed{4 \text{ peras}}$

d) Se uma outra aluna se juntasse às calouras e pretendesse comprar uma dúzia de bananas, quanto precisaria ter arrecadado?

$12 \times 0{,}25 = \boxed{3{,}00 \text{ reais}}$

5ª Questão

Uma das formas de se obter as raízes complexas de $z^3 - 2z - 5 = 0$ consiste em se substituir $z = a + jb$ (sendo j a unidade imaginária) nesta equação e, nela tomando-se a parte real $f_1(a,b)$ e imaginária $f_2(a,b)$, formar e resolver o sistema:

$$\begin{cases} f_1(a,b) = 0 \\ f_2(a,b) = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} a^{(0)} \\ b^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,000 \\ +1,000 \end{bmatrix}$$

Assim sendo, usando como solução inicial os valores de a(0) e b(0) indicados, pede-se:

a) $f1(a,b)$ e $f2(a,b)$

$$z^3 - 2z - 5 = 0 \rightarrow \quad (a + jb)^3 - 2(a + jb) - 5 = 0$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$$

$$j^2 = -1$$
$$j^3 = -j$$

$$\overbrace{a^3 - ab^2 + j2a^2b + ja^2b - jb^3}^{(a+jb)^3} \; \overbrace{-2ab^2 - 2a - j2b - 5}^{-2(a+jb)-5} = 0$$

$$a^3 - 3ab^2 - 2a - 5 + j(-b^3 + 3a^2b - 2b) = 0$$

$$\boxed{\begin{cases} f_1(a,b) = a^3 - 3ab^2 - 2a - 5 = 0 \\ f_2(a,b) = -b^3 + 3a^2b - 2b = 0 \end{cases}}$$

5ª Questão

b) A solução do sistema, com 3 casas decimais de precisão (tol = $0{,}5 \times 10^3$)

$$\begin{cases} f_1(a,b) = a^3 - 3ab^2 - 2a - 5 = 0 \\ f_2(a,b) = -b^3 + 3a^2b - 2b = 0 \end{cases}$$

Usando fsolve no Scilab:

```
function y=funcao(x)
 y(1)=x(1)*x(1)*x(1)-3*x(1)*x(2)*x(2)-2*x(1)-5
 y(2)=-x(2)*x(2)*x(2)+3*x(1)*x(1)*x(2)-2*x(2)
endfunction
//definição do valor inicial
x0=[-1;1]
solucao=fsolve(x0,funcao)
disp(solucao)
```

a = - 1,0472757

b = 1,1359399

c) Todas as Raizes da equação:

Raízes imaginárias

$$x_1 = -1{,}0472 + j1{,}1359$$
$$x_2 = -1{,}0472 - j1{,}1359$$

Raiz Real

$$x_3 = 2{,}095$$

Usando fsolve no Scilab

$$x_0 = [1;0]$$
$$x_3 = fsolve(x_0, funcao)$$