**Capítulo 9**

**Solução Numérica de  
Equações Diferenciais Ordinárias**

**9.1 Introdução**

Muitos modelos de sistemas que representam fenômenos dinâmicos observados no mundo real descrevem *variações* de diversas grandezas ao longo do tempo, sendo alguns exemplos: o movimento de satélites em órbita ao redor de algum corpo celeste; a oscilação de um pêndulo; a troca de calor entre um corpo e o meio ambiente onde este se encontra; o crescimento populacional; o decaimento de isótopos radioativos; a trajetória de mísseis.

Um dos problemas que motivaram inicialmente o desenvolvimento do *Cálculo Diferencial* foi a necessidade de se descrever o movimento de corpos celestes. Com a prática da agricultura, veio a necessidade de se identificar melhor as épocas do ano para plantio e colheita. Ao observar o céu, percebeu-se que alguns astros apresentam uma trajetória regular, o que levou a se aperfeiçoar a determinação do tempo. Neste sentido, o cientista alemão Johannes Kepler (Figura 9.1) foi responsável por algumas das mais importantes descobertas da Astronomia de sua época; notadamente, as três leis do movimento dos planetas, que vieram a alicerçar os trabalhos de Isaac Newton para construir a Mecânica Clássica. A mais conhecida lei de Kepler estabelece que: *cada planeta descreve órbita elíptica em torno do Sol, que ocupa um dos focos da elipse*. Interessante mencionar que Kepler viveu em uma época na qual não se fazia uma distinção clara entre Astronomia e Astrologia, mas se percebia uma divisão entre a Astronomia (vinculada à Matemática, no escopo das Artes Liberais) e a Física (associada à Filosofia Natural). Conforme mencionado no Capítulo 8, o inglês Isaac Newton (1640-1727) e o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) desenvolveram no século XVII, entre 1670 e 1684, de forma simultânea e independente, as bases do *Cálculo Integral* e *Diferencial*.

Fig. 9.1 – Johannes Kepler   
(1571 - 1630)

O estímulo para a continuidade do desenvolvimento do *Cálculo* no século XVIII veio da necessidade de se resolver problemas físicos (notadamente, na Mecânica e Astronomia), cuja formulação matemática frequentemente se dava por meio de *equações diferenciais*.

Os irmãos suíços Jakob (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748) foram os primeiros na Europa a entender as técnicas de Leibniz e aplicá-las para resolver uma ampla gama de problemas. Em 1690, Jakob Bernoulli propôs a determinação da catenária (curva estabelecida por um cabo flexível, inelástico, suspenso pelas extremidades, sob ação de seu próprio peso). O italiano Galileo Galilei pensava que esta curva fosse uma parábola. No ano seguinte, Johann (e também Leibniz e Huygens) apresentou a solução deste problema, partindo de uma *equação diferencial*. Cabe aqui lembrar que o holandês Christiaan Huygens (1629-1695) foi o idealizador do relógio de pêndulo, tomando por base sua descoberta (publicada no livro *Horologium oscillatorium*, em 1673), de que a cicloide é uma curva isocrônica. Chama-se cicloide a curva descrita por um ponto situado em uma circunferência que rola, sem deslizar, sobre uma reta.

O italiano Jacopo Francesco Ricatti (1676-1754) destacou-se por seus estudos sobre *equações diferenciais* no período de 1715 a 1723, em que adotava métodos para a redução de ordem das equações e fazia separação de variáveis. Ricatti considerou diversas classes de *equações diferenciais*, tornando-se conhecido principalmente pela equação que leva seu nome, sobre a qual se deteve e apresentou soluções para alguns casos especiais. Os seus trabalhos sobre Hidráulica foram muito importantes para a cidade de Veneza, tendo ele próprio ajudado a projetar barreiras de contenção para prevenir inundações ao longo de vários canais.

Ao longo de vários anos, os Bernoulli formularam problemas envolvendo *equações diferenciais* e, em conjunto com Leibniz, alcançaram grande progresso no desenvolvimento de métodos de solução. Entre as contribuições de Leibniz, destacam-se o método de separação de variáveis e a notação *dy*/*dx*, utilizada até os dias de hoje.

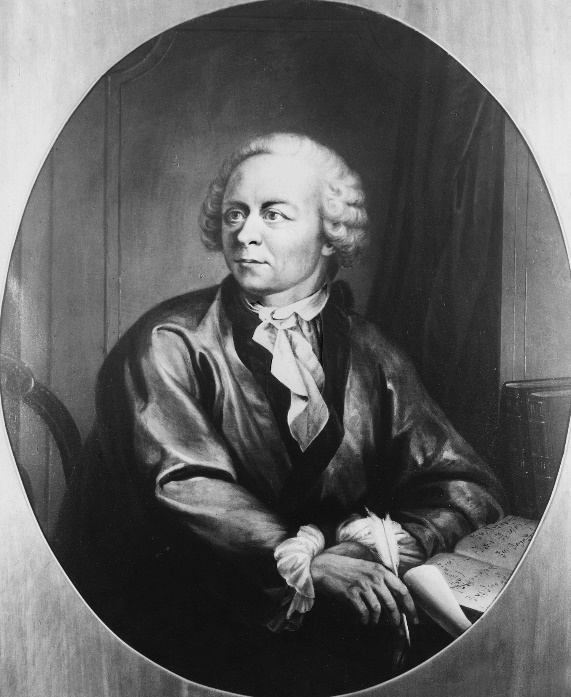
Gradualmente, o estudo de curvas geométricas (que ocupava parte central na Matemática de Newton e Leibniz) foi recebendo menos ênfase, passando-se à análise de expressões envolvendo uma ou mais quantidades variáveis, bem como certas constantes. Isto levou também à descoberta de novas classes de funções, realizada por meio das *equações diferenciais* que tais funções satisfaziam. Destacam-se aqui as contribuições do assaz produtivo e completo matemático, o eminente suíço Leonhard Paul Euler (1707-1783), retratado na Figura 9.2, que permitiram uma visão mais analítica do *Cálculo Diferencial* de [Leibniz](https://pt.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Leibniz) e Newton. Um de seus importantes trabalhos foi [*Institutiones Calculi Differentialis*](https://pt.wikipedia.org/wiki/Institutiones_calculi_differentialis), publicado em 1755. Entre livros e artigos, Euler publicou mais de cinco centenas de trabalhos em vida, que passaram a ser compilados a partir de 1909 pela Academia Suíça de Ciências Naturais. Tal capacidade produtiva tornou-se especialmente notável, levando-se em conta que Euler passou os derradeiros dezessete anos de sua vida, apesar de completamente cego, em plena atividade. Vale registrar que se deve a Euler a bem-sucedida implantação, entre outras, das seguintes notações: para representar funções; *e* como base dos logaritmos neperianos; Σ para somatórios; *i* como a unidade imaginária . Cabe também a Euler mérito pela expressão, que em , se transforma em . Mais adiante, no presente capítulo será apresentado o método de Euler para resolver *equações diferenciais ordinárias*.

Fig. 9.2 – Leonhard Euler   
(1707-1783)

Neste retrospecto aqui apresentado [Eves04], [Katz09], [Pick09], deve-se mencionar a matemática italiana Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), autora de *Instituzioni Analitiche*, primeiro livro a cobrir amplamente o *Cálculo Diferencial* e *Integral*. Assinala-se também que este se constitui no primeiro trabalho escrito por uma mulher que sobreviveu ao tempo, uma vez que de Hypatia de Alexandria (século V) restaram apenas referências sobre suas aulas e escritos matemáticos.

Além de Euler, destacou-se no século XVIII o italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) que publicou em 1788, seu mais importante trabalho, *Analytical Mechanics*, que estendia o que fora estabelecido por Newton, irmãos (Jakob e Johann) Bernoulli e Euler. Neste trabalho, enfatizava que os problemas em Mecânica poderiam ser resolvidos geralmente reduzindo-os à teoria das *equações diferenciais* ordinárias e parciais. Entre as contribuições de Lagrange está a definição da função derivada, para a qual usou a notação *f’*(*x*). Lagrange foi provavelmente o primeiro matemático que dispunha de conhecimento teórico e ferramentas suficientes para analisar as *equações diferenciais*. Em 1788, ele introduziu equações gerais de movimento para sistemas dinâmicos, hoje conhecidas como equações de Lagrange.

Juntam-se a Lagrange como matemáticos notáveis deste século, os franceses Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) e Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Os trabalhos de Laplace nas áreas de mecânica celeste (notadamente sobre a estabilidade de longo prazo do sistema solar), probabilidades e *equações diferenciais* (com fortes bases nas ideias de Euler) são notáveis. Com justiça, tornaram-no conhecido como o “Newton da França”. Curiosamente, Laplace morreu exatamente um século após o falecimento de Newton. Já Legendre voltou-se principalmente para a teoria dos números, funções elípticas, método dos mínimos quadrados e integração. Seu nome aprece ligado a uma *equação diferencial* de importância considerável na matemática aplicada, cujas soluções são conhecidas por funções de Legendre. O trabalho de Legendre sobre *equações diferenciais* foi motivado pelo movimento de projéteis, em que introduziu fatores tais como resistência do ar e velocidades iniciais.

Outro registro relevante diz respeito ao trabalho do francês Jean-le-Rond D’Alembert (1717-1783) intitulado *Traité de Dynamique*, publicado em 1743, onde se encontram problemas formulados por meio de *equações diferenciais* parciais, importantes para a Mecânica. O conhecido Princípio de D’Alembert formulado neste Tratado estabelece que as ações internas de um sistema de corpos rígidos em movimento estão em equilíbrio. D’Alembert pode ser considerado um dos pioneiros no estudo das *equações diferenciais*. Assim como Euler e os Bernoulli, D’Alembert era culto, conhecendo Direito, Medicina, Ciência e Matemática, tendo sido um dos que abriram caminho para a Revolução Francesa.

O francês Alexis Claude Clairaut (1713-1765) foi um matemático dos mais precoces, tendo ingressado na Academia de Ciências da França, com apenas 18 anos de idade. Clairaut trabalhou em uma vasta gama de problemas matemáticos, incluindo as *equações diferenciais*. Interessante mencionar que Clairaut era o segundo de uma família de 20 filhos e um dos poucos que atingiram a idade adulta.

Já o britânico Brook Taylor (1685-1731), graduado em Cambridge e grande admirador de Newton, publicou em seu livro *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* de 1715, a representação de uma função através de uma série que mais adiante ficou associada a seu nome. Emprega-se a série de Taylor no desenvolvimento de métodos numéricos para a solução de *equações diferenciais*. Vale assinalar que esta série, muito antes de Taylor, por volta de 1671, já era conhecida por James Gregory (1638-1675) e também por alguns outros matemáticos. O escocês Colin Maclaurin (1698-1746), importante matemático da geração posterior a de Newton, publicou em 1742, no *Treatise of Fluxions*, um caso especial da série de Taylor, que se tornou conhecida como série de Maclaurin.

Seguem-se alguns registros notáveis deixados na história do desenvolvimento das *equações diferenciais* e suas aplicações: o matemático francês Sylvestre François Lacroix (1765-1843) resumiu, principalmente no *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, de 1797-1798, muitos dos resultados de Euler, Lagrange, Laplace e Legendre; o francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) através de *equações diferenciais parciais* estudou o problema da difusão de calor; o francês Augustin Louis Cauchy (1789-1857) aplicou equações diferenciais para modelar a propagação de ondas sobre a superfície de um líquido; o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) usou *equações diferenciais* para melhorar as teorias das órbitas planetárias e gravitação; o francês Siméon-Denis Poisson (1781-1840) aplicou seu conhecimento de *equações diferenciais* aos problemas de elasticidade e vibrações; o inglês George Green (1793-1841) publicou em 1828 *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to Electricity and Magnetism* em que foram estabelecidas as bases para a construção da teoria atual do Magnetismo pelas mãos do britânico Joseph John Thomson (1856-1940), do irlandês George Gabriel Stokes (1819-1903), do inglês John William Strutt (1842-1919), do escocês James Clerk Maxwell (1831-1879); as investigações teóricas e experimentais de Stokes cobriram a Hidrodinâmica, Elasticidade, Luz, Gravitação, Som, Calor, Meteorologia, tendo usado modelos de *equações diferenciais* em todos estes campos de estudo; o alemão Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), amigo de Gauss, aplicou seu conhecimento sobre *equações diferenciais* à Astronomia; o russo Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky (1801-1862) colaborou com Laplace, Legendre, Fourier, Poisson e Cauchy enquanto usava *equações diferenciais* para desenvolver teorias sobre a condução do calor; o francês Joseph Liouville (1809-1882), com a teoria de integrais de funções elementares, contribuiu substancialmente para a solução de *equações diferenciais*; o alemães Carl David Tolmé Runge (1856-1927) e Martin Wilhelm Kutta (1867-1944) desenvolveram por volta de 1900 um método numérico utilizado para resolver *equações diferenciais ordinárias*, a ser abordado mais adiante no presente capítulo.

Fig. 9.3 – Carl Runge   
(1856-1927)

Fig. 9.4 – Martin Kutta   
(1867-1944)

Diversos métodos elementares para resolver *equações diferenciais ordinárias* já haviam sido descobertos até o final do século XVIII. Assim, no século seguinte, o interesse no assunto voltou-se para aspectos teóricos da existência e unicidade da solução, conjugado com o desenvolvimento de técnicas menos elementares (e.g., representação de funções em série de potências).

As muitas *equações diferenciais* que não puderam ser resolvidas analiticamente até então levaram ao estudo de métodos numéricos para a aproximação da solução. Em torno do ano de 1900, embora métodos de integração numérica estivessem efetivamente desenvolvidos, a realização de cálculos executados *à mão* (ou por meio de implementos computacionais muito simples) restringia suas aplicações. A partir do fim da década de 1960, a computação digital tem experimentado expressivos avanços, permitindo a abordagem de uma boa gama de problemas por meio de métodos numéricos.

Ao leitor interessado em informações históricas complementares ao presente texto indica-se o vasto arquivo encontrado no endereço eletrônico *Mac Tutor History of Mathematics* [Mac16].

Como anteriormente mencionado ao apresentar este livro, os autores acreditam que a inserção de informações históricas humaniza o conhecimento e facilita o ensino. As coisas parecem ter mais sentido quando são apresentadas suas origens, necessidades de criação e dificuldades encontradas, até que se obtenham os resultados almejados.

**9.2 Aspectos Gerais**

Antes de se ingressar na apresentação dos métodos numéricos destinados à solução de equações diferenciais, alguns fundamentos, conceitos e terminologia próprios deste assunto devem ser colocados. Assume-se que o leitor possua alguma familiaridade com aspectos básicos da teoria de *equações diferenciais* [Boyc15]. Essencialmente, tais equações são aquelas usadas para modelar problemas que dizem respeito a *mudanças* experimentadas por uma variável com relação a outra.

Em uma equação algébrica, busca-se determinar incógnitas que representam valores numéricos. Já na equação diferencial, o que não se conhece são funções cujas derivadas também fazem parte da referida equação. Inicialmente, de forma genérica, em uma equação diferencial a incógnita será aqui designada por uma função *y*(*x*), sendo *x* a variável independente e *y* a variável dependente.

De modo a organizar as linhas de estudo sobre equações diferenciais, torna-se útil estabelecer uma classificação em termos do seu *tipo*, *linearidade* e *ordem*.

Começando pelo *tipo*, uma equação diferencial pode ser *ordinária* ou *parcial*. Em linguagem matemática, uma *equação diferencial ordinária* (EDO) caracteriza-se por envolver derivadas de uma função (desconhecida) que contenha uma única variável independente. Já a equação diferencial que envolver uma função de duas ou mais variáveis independentes e algumas de suas derivadas parciais denomina-se *equação diferencial parcial*. Este tipo de equação não será abordado no presente capítulo.

Diz-se que uma equação diferencial é *linear*, se esta for composta por uma combinação linear da função envolvida e suas derivadas. Portanto, sendo a função *y* dependente da variável *x* e suas derivadas representadas por , uma EDO *linear* pode ser escrita na seguinte forma padronizada (canônica):

 (9.1)

Repare que todos os coeficientes que multiplicam as derivadas em (9.1) são dependentes apenas da variável independente *x*. Para os casos em que o segundo membro de 9.1 (lado direito da equação) for nulo, i.e. , a EDO denomina-se *homogênea*. Contrariamente, quando , diz-se que a EDO é *não homogênea*.

Define-se como *ordem* de uma equação diferencial a mais alta ordem de derivação encontrada na equação.

A seguir, veja exemplos bem simples de EDOs e suas classificações.

1. linear, não homogênea, de 1ª ordem: 
2. linear, homogênea, de 2ª ordem: 
3. não linear, não homogênea, de 2ª ordem:  ou

 ou  ou 

Considerando (9.1), note que uma EDO *não linear* será aquela que apresentar coeficientes que dependam de *y* ou de suas derivadas, ou então *g*(*x*) pode ser uma função *não linear* de *y*, ou por fim em substituição ao termo *a*0(*x*)*y* pode haver uma função *não linear* de *y*.

A solução de uma EDO de primeira ordem caracteriza-se pela determinação da expressão analítica da função *y*(*x*) que satisfaça a *equação diferencial* para todos os valores *x* pertencentes a um certo intervalo *I*. Esta solução, denominada *analítica*, pode ser alcançada em alguns casos especiais através de técnicas relativamente simples [Boyc15], como por exemplo, aquelas aplicáveis a equações: *lineares*; com *variáveis separáveis*; *exatas*. Entretanto, em muitas EDOs que não comportam o tratamento analítico, torna-se necessário recorrer a *métodos* *numéricos* de solução, através dos quais determina-se um conjunto discreto de pontos que representam *y*(*x*) de forma aproximada, como será visto nas próximas seções deste capítulo.

Aqui, será apresentado o problema de se obter a *solução numérica* de uma EDO de *primeira ordem*, expresso por:

 (9.2)

O processo de solução de (9.2) envolve a operação de integração que traz em si uma constante arbitrária (usualmente denotada por *c*), cujos diversos valores caracterizam uma família de infinitas soluções. Chama-se de *solução geral* a expressão obtida para a função *y*, contendo *c*, que represente todas as soluções possíveis da EDO. A representação geométrica da *solução geral* constitui uma família das chamadas *curvas integrais*, cada uma destas associada a um valor de *c*.

No campo científico, os problemas que envolvem fenômenos físicos (do mundo real), o interesse se volta frequentemente para a determinação de uma solução específica, que deve satisfazer a uma dada condição (restrição), referida como *valor inicial*. Usa-se tal restrição para se obter *c*. A equação diferencial (9.2) e a exigência de que a solução contenha o ponto (*x*0,*y*0) formam o que se conhece por *problema de valor inicial* (PVI).

 e condição inicial *y*(*x*0) = *y*0 (9.3)

A denominação PVI advém de problemas que tipicamente têm a grandeza *tempo* como variável independente. Em tais problemas, estuda-se a evolução da variável dependente do tempo a partir de uma condição inicial especificada.

Uma abordagem qualitativa (sem resolver a equação diferencial) sobre o comportamento da solução do problema expresso por (9.2) pode ser feita através da construção do gráfico de *f*(*x*,*y*), em diversos pares de pontos (*xi*,*yi*) do intervalo *I*, o que corresponde ao *campo de direções* de *y*(*x*). Note que a função *f*(*x*,*y*) fornece a *inclinação* de *y*(*x*) em função de *x* e *y* nos diversos pontos do intervalo *I* (domínio de *x*).

Para desenhar o *campo de direções* de uma EDO basta proceder da seguinte forma:

(a) Constrói-se uma malha retangular de pontos (*xi*,*yi*) igualmente espaçados;

(b) Em cada ponto (*xi*,*yi*) da malha, desenha-se um curto segmento de reta que tenha *inclinação* dada por *f*(*xi*,*yi*), i.e., corresponde à reta *tangente* ao gráfico de uma das curva-solução no referido ponto. Este segmento de reta pode ser orientado, ou seja, ter a direção e sentido de , como será ilustrado mais adiante. Desejando tornar seu comprimento unitário basta fazer .

**Exemplo 9.1**

Para facilitar o entendimento sobre a construção de um campo de direções, a título de ilustração apenas, considere a seguinte EDO linear, escrita inicialmente na forma padronizada (9.1) e em seguida como em (9.2):

 (9.4)

 (9.5)

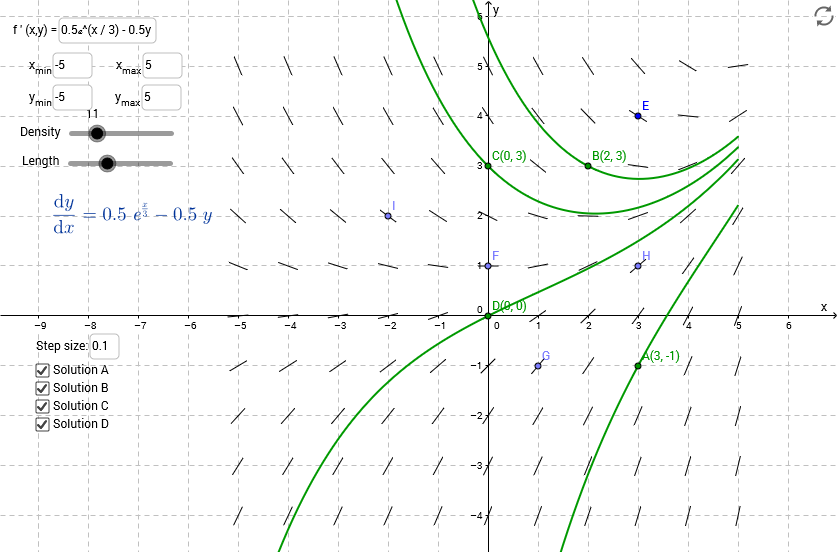
Usando a equação (9.5), para valores de *x* no intervalo [-5,5] e *y* em [-5,5], o campo direções da Fig. 9.5 a seguir foi obtido através da ferramenta *Slope Field Plotter – GeoGebra* (de uso livre, encontrada na Internet). A densidade de representação dos segmentos de reta e os seus respectivos comprimentos foram ajustados conforme indica a referida figura. A Tabela 9.1 apresenta alguns dos valores relativos ao campo de direções nos pontos de A até I. As curvas integrais são tangentes aos segmentos de reta do campo, que indicam de forma qualitativa seus comportamentos. Note a variação das inclinações dos segmentos selecionados na Tabela 9.1. Por exemplo: em B, C, E, G e I apresentam valores negativos, sendo mais acentuadamente em C; em A, D, e H os valores são positivos, sendo de maior inclinação a tangente em A (superior a 45º); em F o valor calculado é nulo (segmento horizontal).

Da família de infinitas soluções da EDO usada como exemplo, foram selecionadas na Fig. 9.5 as curvas-solução dos PVI correspondentes aos valores iniciais caracterizados pelos pontos de A até D. Mais adiante, o leitor encontrará como obter analiticamente a solução geral desta EDO.

Desenhar o *campo de direções* de uma EDO constitui uma tarefa simples, porém bastante trabalhosa, já que deve-se calcular *f*(*x*,*y*) muitas vezes. Assim sendo, recomenda-se realizá-la com o auxílio de um computador. Diversos aplicativos computacionais existem para este fim, facilmente encontrados na Internet usando-se a busca com a palavra-chave *slope fields*.

**Tabela 9.1 – Valores do campo de direções da EDO apresentada em (9.5)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Pontos | (*x*,*y*) |  |
| A | (3,-1) | 1,86 |
| B | (2,3) | -0,53 |
| C | (0,3) | -1 |
| D | (0,0) | 0,5 |
| E | (3,4) | -0,64 |
| F | (0,1) | 0 |
| G | (1,-1) | 1,20 |
| H | (3,1) | 0,86 |
| I | (-2,2) | -0,74 |



**Fig. 9.5 - Campo de direções da equação (9.5) criado com *Slope Field Plotter – GeoGebra***

Embora não seja o objetivo deste capítulo tratar de métodos que conduzam à solução analítica de EDOs, de modo a compor didaticamente o estudo da equação adotada como exemplo em (9.4), considere o desenvolvimento apresentado a seguir, destinado à obtenção de sua solução geral.

Inicialmente, com o objetivo de tornar (9.4) facilmente integrável, adote a função auxiliar , ainda desconhecida, usada para multiplicar ambos os membros de (9.4), o que resulta em:

  (9.6)

Para uma função  diferenciável, ao derivar o produto , obtém-se:

 (9.7)

Comparando o primeiro membro de (9.6) com o segundo membro de (9.7), estes serão idênticos desde que:

 (9.8)

Para obter  que satisfaça (9.8), deve-se reescrever esta equação e usar a derivada da função logaritmo neperiano:

 ⇒  ⇒  ⇒ 

⇒ 

Ou ainda:

 (9.10)

sendo . A função  obtida em (9.10), conhecida como fator integrante de (9.4), torna possível a obtenção da solução analítica procurada, bastando para isto substituir (9.10) em (9.6) e efetuar algumas simplificações:





 (9.11)

Integrando (9.11), vem:

 (9.12)

Finalmente, usando (9.12), chega-se à solução geral de (9.4), dada por:

 (9.13)

Resolvendo-se os PVIs representados pelas curvas integrais que passam pelos pontos A até D da Fig. (9.5), vem:

A(*x*,*y*) = (3,-1) ⇒  ⇒ = - 11,79

⇒ 

B(*x*,*y*) = (2,3) ⇒  ⇒ = 4,98

⇒ 

C(*x*,*y*) = (0,3) ⇒  ⇒ *k*3 = 12/5 = 2,4

⇒ 

D(*x*,*y*) = (0,0) ⇒  ⇒ *k*3 = - 3/5 = - 0,6

⇒ 

Em continuação à prática da construção de campos de direções, sugere-se ao leitor adotar outras EDOs que, tal como a anterior, tenham solução analítica [Boyc15]. Por exemplo, as que são conhecidas como *equações separáveis*, pois assumem a forma , podendo ser resolvidas integrando-se as funções *M*(*x*) e *N*(*y*), ao serem colocadas em lados opostos do sinal de igualdade.

**9.3 Método de Euler**

Para dar início ao tratamento numérico do PVI caracterizado em (9.3), adota-se aqui o **método de Euler**, por ser considerado um dos mais antigos (introduzido por volta de 1768) e simples para resolver uma EDO de primeira ordem. A simplicidade de construção deste método contribui para o desenvolvimento de técnicas mais apuradas que serão introduzidas mais adiante neste capítulo.

A *solução numérica* buscada consiste na determinação de um conjunto discreto de pontos (*x*1,*y*1), (*x*2,*y*2), ..., (*xn*+1,*yn*+1) que representem aproximadamente a solução exata *y*(*x*). Assim, adota-se a notação , para valores da *solução exata* da EDO, nos pontos . E, em correspondência a tais pontos, os valores da solução aproximada, obtida por meio de um método numérico, são representados por .

Na abordagem do problema, de *passo simples* (um passo à frente), *progride-se* para o ponto de índice (*i*+1), a partir da solução aproximada atual, referente ao ponto de índice (*i*).

O raciocínio que norteia a construção do **método de Euler** parte de uma aproximação da derivada contida em (9.2), usando-se *diferenças progressivas*, como segue:

 ⇒ 

Substituindo *y*(*xi*+1) e *y*(*xi*) por seus correspondentes valores aproximados *yi*+1 e *yi* na expressão anterior, e denotando *xi*+1 – *xi* = *h*, vem:



A forma geral do **método de Euler**, em que se obtém a solução aproximada no ponto (*xi*+1,*yi*+1) conhecendo-a em (*xi*,*yi*), fica estabelecida pelas seguintes expressões:

 (9.14)

 (9.15)

sendo *h* a largura do passo de integração. A equação (9.5) representa uma reta de coeficiente angular, que contém os pontos (*xi*,*yi*) e (*xi*+1,*yi*+1). Vale mencionar que tal reta e aquela tangente à curva *y*(*x*) em *xi* são aproximadamente paralelas.

A Fig. 9.6 ilustra graficamente do **método de Euler** (**explícito** ou **progressivo**) estabelecido por (9.14) e (9.15). As diferenças entre os valores de *yi*, *yi*+1 e *yi*+2 calculados pelo referido método e aqueles (verdadeiros) que estão sobre a curva *y*(*x*) correspondem aos erros cometidos na obtenção de pontos da solução aproximada. Note que, embora o método seja simples e a tendência de comportamento da solução verdadeira seja capturada, erros consideráveis podem ocorrer. Claro está que a reta tangente constitui aproximação razoável da curva-solução em um intervalo *h* suficientemente pequeno. Ao se adotar um método numérico tal como o de **Euler**, deve-se ter sempre presente a preocupação com o grau de precisão da solução aproximada obtida, para que esta possa ser considerada como válida para o problema em estudo.

*yi*+1

*yi*+2

*yi*

*y*(*x*)

*h*

*h*

*xi*

*xi*+1

*xi*+2

curva-solução

*y*

*x*

*y*(*xi*)

*y*(*xi+*1)

*y*(*xi+*2)

**Fig. 9.6 – Método de Euler (explícito)**

A fim de explorar um pouco mais o tratamento numérico trazido pelo **método de Euler explícito**, estabelecido por (9.14) e (9.15), considere o desenvolvimento a seguir, que conduz à obtenção de tais expressões.

A equação (9.2) pode caracterizar um problema de integração, se ambos os seus membros forem multiplicados por *dx*:

 ⇒ 

Efetuada a integração no primeiro membro da equação anterior obtém-se:

 ⇒  ⇒ 

Resta então resolver a integral do segundo membro da equação. A forma mais simples de fazê-lo funda-se em considerar o método de integração numérica dos retângulos, em que se adota uma reta horizontal para representar no intervalo  
[*xi*, *xi*+1] a função. Neste caso, o retângulo cuja área representará a referida integral será aquele de base *h* = (*xi*+1- *xi*) e alturatomada no início do intervalo de integração. Consequentemente:

 ⇒  ⇒  ⇒

 ⇒ 

A seguir, apresenta-se o algoritmo para a implementação computacional do **método de Euler explícito**, i.e., aquele que apresenta uma expressão explícita para o cálculo do próximo valor da solução aproximada *yi*+1.

**Defina** a função ;

**Informe** os dados de entrada:

- valores iniciais para *x*(1) e *y*(1); os vetores *x* e *y* contêm os valores dos pontos em que a solução aproximada será calculada;

- tamanho do passo *h* e número *n* de pontos em que serão obtidos valores para a solução; alternativamente, *n* pode ser calculado através da expressão *n* = (*b* - *a*)/*h* e neste caso deve-se informar o intervalo [*a*,*b*] em que solução será obtida; note que *x*(1) = *a* e *x*(*n*+1) = *b*;

**Faça** o índice *i* variar desde 1 até *n* e calcule:

*xi*+1 = *xi* + *h*

*deriv* = 



**Exiba** os valores da solução aproximada, calculada nos pontos contidos nos vetores *x* e y;

**Encerre** o algoritmo.

**Exemplo 9.2**

Retornando ao Exemplo 9.1, considere agora que se deseja obter a solução da EDO () pelo **método de Euler explícito**, para *x* pertencente ao intervalo [0,5], com valores iniciais *x*0 = 0 e *y*0 = 3. Adote *h* = 1.

Usando (9.14) e (9.15), a Tabela 9.2 apresenta os valores obtidos com o método numérico, a partir das seguintes expressões:

 ⇒ 

 ⇒  ⇒ 

Para efeito de comparação, apresentam-se também na Tabela 9.2 os valores correspondentes à solução analítica (PVI que passa pelo ponto C, no Exemplo 9.1), obtidos através de:



Na tabela, também estão os erros relativos cometidos com o método numérico adotado, calculados por: .

A Fig. 9.7 exibe o gráfico da solução analítica e daquela obtida pelo **método de Euler explícito**, nos pontos indicados na Tabela 9.2.

**Tabela 9.2 – Solução numérica (Exemplo 9.2) com o método de Euler explícito,  
passo *h* = 1**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | | *yi*  sol. numérica | *y*(*xi*)  sol. analítica | *e*rel (%) |
| *x*0 | 0 | 3 | 3 | 0,0 |
| *x*1 | 1 | 2,0000 | 2,2930 | 12,8 |
| *x*2 | 2 | 1,6978 | 2,0516 | 17,2 |
| *x*3 | 3 | 1,8228 | 2,1665 | 15,9 |
| *x*4 | 4 | 2,2705 | 2,6010 | 12,7 |
| *x*5 | 5 | 3,0321 | 3,3737 | 10,1 |

**Fig 9.7 – Solução analítica e numérica (método de Euler explícito) – Exemplo 9.2**

Os erros apresentados na Tabela 9.2 dependem do tamanho do passo *h*, sendo natural esperar que tais erros diminuam, à medida que valores cada vez menores de *h* sejam adotados. Isto pode ser constatado, através dos resultados dispostos na Tabela 9.3, em que se assumiu *h* = 0,5.

**Tabela 9.3 – Método de Euler explícito com passo *h* = 0,5 – Exemplo 9.2**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | | *yi*  sol. numérica | *y*(*xi*)  sol. analítica | *e*rel (%) |
| *x*0 | 0 | 3,0000 | 3,0000 | 0,0 |
| *x*1 | 0,5 | 2,5000 | 2,5779 | 3,0 |
| *x*2 | 1,0 | 2,1703 | 2,2930 | 5,4 |
| *x*3 | 1,5 | 1,9767 | 2,1229 | 6,9 |
| *x*4 | 2,0 | 1,8947 | 2,0516 | 7,6 |
| *x*5 | 2,5 | 1,9079 | 2,0682 | 7,7 |
| *x*6 | 3,0 | 2,0062 | 2,1665 | 7,4 |
| *x*7 | 3,5 | 2,1842 | 2,3438 | 6,8 |
| *x*8 | 4,0 | 2,4410 | 2,6010 | 6,2 |
| *x*9 | 4,5 | 2,7792 | 2,9420 | 5,5 |
| *x*10 | 5,0 | 3,2048 | 3,3737 | 5,0 |

Até aqui, descreveu-se o **método de Euler** tipificado como *explícito* ou *progressivo*. Portanto, o leitor deve estar curioso agora em conhecer a forma *implícita* ou *regressiva* deste método. Para tanto, basta agora adotar uma aproximação da derivada conhecida como *diferença regressiva*. Define-se a reta que liga os pontos (*xi*,*yi*) e (*xi+*1,*yi*+1) como sendo aproximadamente paralela à reta tangente calculada no ponto *xi*+1 (como se vê na Fig. 9.8), ou seja:

 ⇒  ⇒ 

Acrescentando uma unidade ao índice de discretização:



Assim, o **método de Euler implícito** fica estabelecido por:

 (9.16)

 (9.17)

A Fig. 9.8 ilustra graficamente do **método de Euler implícito** estabelecido por (9.16) e (9.17). Note que, nesta forma, a solução aproximada *yi*+1 calculada em *xi*+1 passa a depender implicitamente de *yi*+1, o que traz alguma dificuldade para sua aplicação. Como *yi*+1 está em ambos os membros de (9.17), a menos que haja nesta equação uma dependência simples a *yi*+1 (e.g., linear, quadrática, etc.) ─ estabelecida por─ a solução procurada será mais difícil (ou até mesmo impossível) de ser alcançada explicitamente. Em termos gerais, a determinação de *yi*+1 em (9.17) será obtida através de um método numérico para obtenção da solução de uma equação algébrica não linear, tal como tratado no Capítulo 3 deste livro. Para avaliar a computação adicional na implementação do **método de Euler implícito** recomenda-se consultar [Gila14].

Caso o leitor queira obter (9.17) por meio da integração de ambos os membros de (9.2), basta que, analogamente ao que se fez no método explícito, utilize no método dos retângulos o ponto final do intervalo de integração. Assim, o retângulo cuja área se aproxima do valor da integral de terá base *h* = (*xi*+1- *xi*) e altura.

*y*(*x*)

*xi*

*xi*+1

*yi*

*yi*+1

*yi*+2

*xi*+2

*h*

*h*

curva-solução

*x*

*y*

*y*(*xi+*2)

*y*(*xi*)

*y*(*xi*+1)

**Fig. 9.8 – Método de Euler (implícito)**

**Exemplo 9.3**

Adotando o problema exposto nos exemplos anteriores, considere mais uma vez que se deseja obter a solução da EDO (), mas agora pelo **método de Euler implícito**, com os mesmos dados de entrada, ou seja: *x* no domínio [0,5]; valores iniciais *x*0 = 0 e *y*0 = 3; *h* = 1. Sabe-se que a solução analítica (anteriormente obtida) é dada por: .

Usando (9.16) e (9.17), a Tabela 9.4 sintetiza os valores obtidos com o método numérico, a partir das seguintes expressões:

 ⇒ 

 ⇒  ⇒ 

**Tabela 9.4 – Solução numérica (Exemplo 9.3) com o método de Euler implícito,  
passo *h* = 1**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | | *yi*  sol. numérica | *y*(*xi*)  sol. analítica | *e*rel % |
| *x*0 | 0 | 3,0000 | 3,0000 | 0,0 |
| *x*1 | 1 | 2,4652 | 2,2930 | 7,5 |
| *x*2 | 2 | 2,2927 | 2,0516 | 11,8 |
| *x*3 | 3 | 2,4346 | 2,1665 | 12,4 |
| *x*4 | 4 | 2,8876 | 2,6010 | 11,0 |
| *x*5 | 5 | 3,6899 | 3,3737 | 9,4 |

Destaca-se também que a aplicação da *forma implícita* do **método de Euler**, muitas vezes, requer um método numérico para resolver (9.17), que se torna uma equação não linear dependente da incógnita *yi*+1. No presente exemplo, a obtenção de *yi*+1 em (9.17) foi simples e os resultados mostrados na Tabela 9.4 indicaram erros um pouco menores do que os equivalentes obtidos no Exemplo 9.2.

Até aqui, algumas questões podem emergir da leitura atenta deste capítulo, notadamente aquelas que estejam relacionadas à aceitação da solução numérica (aproximada) para o PVI estabelecido por (9.3), no que concerne ao nível de precisão dos resultados obtidos. Como se constatou no Exemplo 9.2, os erros cometidos dependem do tamanho de passo *h* adotado. Espera-se que, com *h* cada vez menores, os valores da solução numérica tendam a se igualar, dentro de um nível de precisão especificado, aos correspondentes valores da solução exata. Assim sendo, deve-se buscar um valor adequado de *h* para que isto ocorra. Fundamentalmente, há que avaliar os erros cometidos.

Ao se aproximar numericamente um PVI, cometem-se erros de duas naturezas:

* *truncamento* – originários da técnica empregada para a obtenção dos valores *yi*;
* *arredondamento* - causados pelos cálculos de precisão finita (aritmética de ponto flutuante) realizados em computadores digitais e afetados pela ordem em que são feitos, modo de programar, etc.

Embora os erros de *truncamento* e *arredondamento* surjam de fontes distintas, tais erros são correlacionados. Sabe-se que o de *truncamento* (*discretização*) usualmente reduz-se pela adoção de valores pequenos do passo *h*. Entretanto, ao fazê-lo, o erro de *arredondamento* pode crescer pelo aumento da quantidade de cálculos realizados. Em outras palavras, o *arredondamento*, não tão sério em uma etapa qualquer do método numérico de cálculo da solução de uma EDO, propaga-se após um grande de número (e.g., centenas, milhares) de etapas, podendo se acumular e contaminar de forma indesejada a solução obtida.

Em boa parte das situações práticas, o erro de *truncamento* apresenta-se como fator dominante para a determinação da precisão da solução numérica de EDOs. Sendo assim, o erro de *arredondamento* não será considerado no presente estudo.

Os erros de *truncamento* podem ser decompostos em:

* *local –* aquele inerente ao método numérico adotado, tomando-se um único passo e supondo que não foram cometidos erros em passos anteriores, sendo assim, de natureza local;
* *propagado ou acumulado –* causado pelo acúmulo dos erros de truncamento locais resultantes dos passos anteriores.

Unificados, os erros de *truncamento local* e *propagado* formam o erro de *truncamento global* (*total*) da solução numérica produzida.

Da análise dos erros cometidos pelasformas **explícita e implícita** **do** **método de Euler**, verifica-se que estas apresentam erros de *truncamento local* proporcionais a *h*2, enquanto o erro de *truncamento* *global* limita-se a *h*, o que faz o método ser classificado como de ordem 1 (expoente de *h*), i.e., *O* (*h*), conforme indicam [Atki04], [Heat02], [Boyc15].

**9.4 Método de Euler Modificado**

A principal hipótese adotada pelo **método de Euler explícito** diz respeito a se considerar a derivada de *y*(*x*) entre os pontos (*xi*,*yi*) e (*xi+*1,*yi*+1) como constante. Isto pode acarretar, em diversos problemas que requeiram soluções aproximadas de elevada precisão, a adoção de um tamanho de passo de integração muito pequeno, o que onera o cômputo da solução do problema em foco.

Assim sendo, tal hipótese pode ser revista, tomando-se no intervalo entre os referidos pontos a reta que tenha uma *inclinação média*, função das inclinações calculadas nos pontos inicial e final do intervalo. No início do intervalo, ou seja, em (*xi*,*yi*), obtém-se a inclinação. Para ter a inclinação no final do intervalo, calcula-se em primeira aproximação, de acordo com o **método de Euler explícito**, . Em seguida, calcula-se uma estimativa da inclinação em , dada por . Estas duas inclinações são usadas para se calcular a inclinação média (aritmética) no intervalo, o que leva à formulação do **método de Euler modificado**,de acordo com as seguintes equações:

 (9.18)

 (9.19)

 (9.20)

As equações (9.19) e (9.20) são conhecidas como *preditora* (obtém uma estimativa de *yi*+1 *a priori*) e *corretora* (atua para melhorar a estimativa de *yi*+1). Em várias referências, encontra-se o **método de Euler modificado** como **método de Heun**, assim denominado em homenagem ao matemático alemão Karl Heun (1859-1929).

Tal como foi feito no desenvolvimento das duas versões apresentadas anteriormente (formas *explícita* e *implícita*), o **método de Euler** pode ser *modificado* a partir da substituição da regra dos retângulos pela Regra dos Trapézios (veja Capítulo 8), para realizar a integração de. De fato, em (9.20) calcula-se a área de um trapézio retângulo de bases  e , altura *h*.

**Exemplo 9.4**

Considere novamente o problema dos exemplos anteriores, em que se deseja obter a solução da EDO (), mas agora através **método de Euler modificado**. Use os mesmos dados de entrada: *x* ∈ [0,5]; valores iniciais *x*0 = 0 e *y*0 = 3; *h* = 1. Lembre-se que a solução analítica é: .

Constrói-se a Tabela 9.5, cujos valores foram computados de acordo com (9.18), (9.19) e (9.20), através das seguintes expressões:

 ⇒ 

 ⇒  ⇒ 

 ⇒ 

**Tabela 9.5 – Solução numérica (Exemplo 9.4) com o método de Euler modificado,  
passo *h* = 1**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | | *yi*  sol. numérica | *y*(*xi*)  sol. analítica | |erro| % |
| *x*0 | 0 | 3,0000 | 3,0000 | 0,0 |
| *x*1 | 1 | 2,3489 | 2,2930 | 2,4 |
| *x*2 | 2 | 2,1294 | 2,0516 | 3,8 |
| *x*3 | 3 | 2,2539 | 2,1665 | 4,0 |
| *x*4 | 4 | 2,6969 | 2,6010 | 3,7 |
| *x*5 | 5 | 3,4834 | 3,3737 | 3,3 |

Observando os resultados contidos nas Tabelas 9.2 até 9.5, verifica-se que os erros cometidos com o **método de Euler modificado** são bem menores do que aqueles obtidos com as versões anteriores do método.

Sabe-se que os erros de *truncamento local* do **método de Euler modificado** são proporcionais a *h*3 e o de *truncamento global* a *h*2, o que o faz em um método de segunda ordem, *O* (*h*2) [Boyc15].

**9.5 Método de Runge-Kutta**

Com as seções anteriores, pode-se perceber que os métodos numéricos explícitos, de passo simples, empregados para a obtenção da solução aproximada de EDOs, estabelecem equações com a seguinte estrutura:

 (9.21)

sendo *inclinação* o valor obtido a partir do cálculo de em alguns pontos do intervalo [*xi*, *xi*+1]. Assim, diferentes métodos numéricos deste tipo podem ser construídos, classificados de acordo com sua *ordem*, o que em termos práticos indica o número de pontos em que se calcula a *inclinação*.

Nesta seção, apresenta-se o método desenvolvido pelos matemáticos alemães Carl David Tolmé Runge (1856-1927) e Martin Wilhelm Kutta (1867-1944), por volta de 1895, e estendido em 1901. Este método recebe a denominação de método clássico de Runge-Kutta de quarta ordem, ou simplesmente **método de Runge-Kutta**, ou ainda mais abreviadamente, **RK4**.

As equações que estabelecem o método de **Runge-Kutta** são:

 (9.22)

sendo:











(9.23)

A soma entre parênteses em (9.23) pode ser interpretada como uma inclinação usada no cálculo de *yi*+1 que corresponde à média ponderada das inclinações *k*1, *k*2, *k*3 e *k*4, sendo que:

*k*1 − inclinação no extremo esquerdo do intervalo; *k*2 − inclinação no ponto médio, obtida pela aplicação do **método de Euler** para ir de *xi* a *xi* + *h*/2; *k*3 − segunda aproximação da inclinação no ponto médio; *k*4 − inclinação em *xi* + *h* usando o **método de Euler** com a inclinação *k3* para ir de *xi* a *xi* + *h.* A Figura 9.9 ilustra esquematicamente os quatro estágios do método **RK4**.

*h*

*xi + h*/2

*xi*

*xi*+1= *xi* + *h*

*x*

*y*

*yi* + *k*1*h*/2

*yi*

*inclinação k1*

*inclinação k2*

*h*

*xi + h*/2

*xi*

*xi*+1= *xi* + *h*

*x*

*y*

*yi* + *k*2*h*/2

*inclinação k2*

*inclinação k3*

*h*

*xi*

*xi*+1= *xi* + *h*

*x*

*y*

*yi* + *k*3*h*

*inclinação k4*

*h*

*xi*

*xi*+1= *xi* + *h*

*x*

*y*

*yi* + *k*média*h*

*inclinação k*média

**Fig. 9.9 – Método de Runge-Kutta de quarta ordem**

Vale destacar que, em (9.23), se *f* não depender de *y*, então:

; ; 

Logo, (9.22) pode ser escrita como:

 ⇒  ⇒

⇒ 

Note que a equação anterior se assemelha a Regra 1/3 de Simpson, apresentada no Capítulo 8, para o cálculo aproximado da integral de , em [*xi*, *xi* +*h*].

Os erros de *truncamento local* do **método RK4** são proporcionais a *h*5 e o de *truncamento global* a *h*4, o que justifica sua denominação como um método de quarta ordem, *O* (*h*4). A demonstração destes resultados por ser considerada longa e enfadonha [Boyc15], o que a torna fora de escopo para o presente texto.

Embora mais elaborado do que as versões do **método de Euler** contidas nas seções anteriores, o método **RK4** mantém a facilidade de implementação e apresenta maior precisão. Nada melhor do que fazer um exemplo de aplicação do **RK4** para confirmar estas afirmações.

**Exemplo 9.5**

Considere de novo o problema em que se deseja obter a solução da EDO . Aplique agora o **método RK4**, adotando como dados de entrada: *x* ∈ [0,5]; valores iniciais *x*0 = 0 e *y*0 = 3; *h* = 1. Lembre-se que a solução analítica pôde ser obtida.

Vê-se na Tabela 9.6 a seguir os valores que foram calculados usando (9.22) e (9.23), através das seguintes expressões:

 ⇒ 

 ⇒ 

 ⇒ 

 ⇒ 

 ⇒ 



 ⇒ 

**Tabela 9.6 – Solução numérica do Exemplo 9.5 - método RK4,  
passo *h* = 1**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | | *yi*  sol. numérica | *y*(*xi*)  sol. analítica | |erro| % |
| *x*0 | 0 | 3 | 3,0000 | 0,00 |
| *x*1 | 1 | 2,2937 | 2,2930 | 0,03 |
| *x*2 | 2 | 2,0525 | 2,0516 | 0,05 |
| *x*3 | 3 | 2,1675 | 2,1665 | 0,05 |
| *x*4 | 4 | 2,6021 | 2,6010 | 0,04 |
| *x*5 | 5 | 3,3749 | 3,3737 | 0,04 |

Confirma-se então que os erros cometidos com o **método RK4** são bem menores do que aqueles obtidos com os métodos numéricos anteriores, mantidos os dados de entrada nos exemplos considerados.

**9.6 Exercícios Propostos**

**1)** Use o método de Euler Modificado para obter um valor aproximado para a solução de em . Adote e o passo de integração igual a 0,2. Assinale a opção que melhor representa o valor procurado:

**A)** 1,2069200 **B)** 0,8260000 **C)** 0,8292933 **D)** 1,1520000 E**)** 0,8000000

**2)** Resolva o problema anterior, agora pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem, obtendo um valor aproximado para. Marque a melhor opção para o valor procurado:

**A)** 1,2140762 **B)** 0,8260000 **C)** 0,8292933 **D)** 1,2113600  **E)** 0,8000000

**3)** Deseja-se obter a solução numérica de , adotando e a condição inicial . Afirma-se:

1. O valor obtido para , em , pelo Método de Euler é 24;
2. O erro cometido com o Método de Euler para a obtenção de , em , é de aproxima­damente 14%;
3. O valor obtido para , em , pelo Método de Runge-Kutta de 4ª ordem é 21.

Escolha a opção correta:

**A)** apenas (II) é ***F*** **B)** todas são ***F*** **C)** apenas (I) é ***V*** **D)** apenas (III) é ***V*** **E)** NRA

**4)** Sobre a solução de EDOs, afirma-se que:

1. A função é a solução da EDO , com  
   ;
2. Pelo método de Euler Explícito com obtém-se para aproximada-mente ;
3. O erro cometido em (II) e de aproximadamente 21,4%.

Escolha a opção correta:

**A)** todas são V **B)** todas são ***F*** **C)** apenas (I) é ***V*** **D)** (III) é ***F*** **E)** NRA

**5)** Considere a equação com , valor inicial e passo de integração . Sobre o valor aproximado da solução afirma-se que:

1. Adotando o Método de Euler, em obtém-se 1,120422;
2. Com o Método de Euler Modificado, em encontra-se 0,560211;
3. Pelo Método de Runge-Kutta de 4ª ordem, em obtém-se 0,296997.

Avaliando tais afirmativas, selecione a opção correta:

**A**) todas são ***F* B**) apenas I é ***V* C**) III é ***F* D**) todas são ***V* E**) NRA

**6)** Considere a seguinte equação e os valores iniciais  e . O valor da solução numérica da EDO através do método de Euler explícito em  com passo de integração é aproximadamente:

**A**) 1,2304**B**) 1,5763**C**) 1,1152**D**) 1,0958**E**) NRA

**7)** Resolva o problema anterior, agora adotando o método de Euler Modificado, em  
 , com passo de integração .

**A**) 1,2304**B**) 1,5763**C**) 1,1152**D**) 1,0958**E**) NRA

**8)** Deseja-se resolver numericamente a EDO . Admita que *y*(0) = 1 e *h* = 0,5.

O valor aproximado da solução *y*(*x*) em *x* = 1, com o Método de Euler Modificado é:

**A**) 0,7500**B**) 0,7812**C**)0,7135**D**) 0,7098**E**) NRA

**9)** Para a EDO do problema anterior, o valor aproximado da solução *y*(*x*) em *x* = 0,5, adotando o Método de Runge-Kutta de 4ª ordem é:

**A**) 0,7500**B**) 0,7812**C**)0,7135**D**) 0,7098**E**) NRA

**10)** Deseja-se obter a solução numérica de , adotando e a condição inicial . Afirma-se sobre o valor obtido para *y*:

1. Em , pelo Método de Euler é - 0,7969;
2. Com o Método de Euler Modificado em é - 1,3984;
3. Em , pelo Método de Runge-Kutta de 4ª ordem é - 1,3677.

Escolha a opção correta:

**A)** apenas (II) é *F* **B)** todas são *F* **C)** apenas (I) é *V* **D)** todas são *V* **E)** NRA

**9.7 Programas Computacionais**

****

Nesta seção, convida-se o leitor a explorar o ambiente **Scilab**, através da função intrínseca denominada ODE, que obtém valores numéricos da solução de equações diferenciais ordinárias, representadas por , . Além disto, são apresentadas as implementações em linguagem de programação **Python** para os métodos de Euler e RK4 tratados neste Capítulo.

A *chamada* mais simples da referida função interna ao **Scilab** corresponde a:

y=ode(y0,x0,x,f)

onde: — ponto inicial; — valor inicial da função-solução, a partir do qual são calculados ;—função externa especificada através da sintaxe do ambiente **Scilab**.

Para ilustrar o uso da função intrínseca ODE, veja o problema a seguir.

**11)**

Considere que, em um tanque com 5.000 litros de água, 20 kg de sal foram completamente dissolvidos. Suponha que este tanque esteja sendo alimentado com água salgada (cuja concentração é de 0,03 kg de sal por litro) a uma taxa de 25 litros/min. A mistura resultante sai do tanque também com uma vazão de 25 litros/min. Para modelar matematicamente o problema, considere que represente a quantidade de sal presente no tanque no instante (minutos). Portanto, em , kg. A variação de sal (em função do tempo) no tanque pode ser obtida por:

sendo:

Assim, chega-se a seguinte EDO:

ou

Pergunta-se: Que quantidade de sal (kg) permanece no tanque ao fim de 30 minutos?



*//Programa para resolver uma EDO*

clc *// limpa o console*

clear all *// limpa a memória*

funcprot(0);

*//definição da função externa (lado direito da EDO)*

function **ydot**=f(**t**, **y**)

**ydot**=[150-**y**]/200

endfunction

t0=0; *//tempo inicial*

y0=20; *//valor inicial da função y(t)*

t=0 *//variável independente no intervalo [0;30]*

i=1 *//contador*

while t<=30

y=ode(y0,t0,t,f);

y1(i)=y;

t1(i)=t

disp(y)

disp(t)

t=t+1

i=i+1

end

printf("FIM ======\n")

Usando a função ODE, intrínseca ao **Scilab**, com passo de integração de 1 minuto, pode-se afirmar corretamente que:

**A)** em 30 minutos, cerca de 38,108 kg de sal estão no tanque.

**B)** em 15 minutos, 40,350 kg estão no tanque.

**C)** em 30 minutos, cerca de 18,250 kg de sal permanecem no tanque.

**D)** em 1 minuto, aproximadamente 15 kg estão no tanque.

**E)** NRA

**12)**

A disciplina de Computação Numérica conta com 92 alunos. Inicialmente, um grupo de 10 alunos resolveu disseminar a informação de que a Prova Final seria cancelada. Sabe-se que em média cada aluno propaga tal notícia para 2 colegas/hora, ignorando se já tenham conhecimento ou não da novidade. Representando por o número de alunos que sabem da notícia no instante de tempo (horas), caracteriza-se a taxa de propagação da notícia pela seguinte EDO:

Obtenha a solução da EDO apresentada, calculando aproximadamente o número de alunos que após 3 horas estejam informados sobre o cancelamento da Prova. Use como passo de integração *h* = 1 (hora).

Para praticar, adote diferentes métodos numéricos de solução da EDO. Escolha a opção correta dentre as apresentadas a seguir. (Sugestão: utilize os programas Python abaixo.)

**A)** pelo método de Euler explícito, havia cerca de 43 alunos na 1ª hora.

**B)** com o método de Euler modificado, estima-se em 50 alunos na 2ª hora.

**C)** adotando o método RK4, chega-se aproximadamente a 88 alunos, decorridas 3 horas.

**D)** com qualquer um dos métodos anteriores, obtém-se aproximadamente o mesmo número de alunos informados, transcorridas 3 horas do início da propagação da notícia de cancelamento da Prova.

**E)** NRA



#Importações das bibliotecas nativas e

#declaração da função referente ao problema

import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

**def** func(x,y):

    dy\_dx = (2\*y)\*((92-y)/92)

    return dy\_dx



**# Método de Euler**

**def** euler(y0,x0,h,I):

    n = (I[1] - I[0])/h

    x= []

    y= []

    x.append(x0)

    y.append(y0)

    print(**f**"y{0} = {y0}")

    for i in range(int(n)):

        yk = y0+ h\*func(x0,y0)

        print(**f**"y{i+1} = {yk}")

        y0 = yk

        x0 = x0 + h

        x.append(x0)

        y.append(y0)

    return



**# Método de Euler Modificado**

**def** euler\_modif(y0,x0,h,I):

    n = (I[1] - I[0])/h

    x= []

    y= []

    x.append(x0)

    y.append(y0)

    print(**f**"y{0} = {y0}")

    for i in range(int(n)):

        yk\_til = y0 + func(x0,y0)\*h

        f\_xy = func(x0,y0)

        f\_til\_xy = func(x0+h,yk\_til)

        k = (f\_xy + f\_til\_xy)/2

        yk = y0+ k\*h

        print(**f**"y{i+1} = {yk}")

        y0 = yk

        x0 = x0 + h

        x.append(x0)

        y.append(y0)

    return



#Programa Principal

if \_\_name\_\_ == '\_\_main\_\_':

*#Pvi*

    y0= 10

    x0= 0

*#intervalo*

    I = [0,3]

*# Passo*

    h = 1

    euler(y0,x0,h,I)

    euler\_modif(y0,x0,h,I)

    rk4(y0,x0,h,I)

**# Método de Runge-Kutta de 4ª Ordem**

**def** rk4(y0,x0,h,I):

    n = (I[1] - I[0])/h

    x= []

    y= []

    x.append(x0)

    y.append(y0)

    print(**f**"y{0} = {y0}")

    for i in range(int(n)):

        k1= func(x0,y0)

        k2= func(x0 + (1/2)\*h, y0 + (1/2)\*k1\*h)

        k3= func(x0 + (1/2)\*h, y0 + (1/2)\*k2\*h)

        k4= func(x0 + h, y0 + k3\*h)

        kmedia = (k1 + 2\*k2 + 2\*k3 + k4)/6

        yk = y0 + kmedia\*h

        print(**f**"y{i+1} = {yk}")

        y0 = yk

        x0 = x0 + h

        x.append(x0)

        y.append(y0)

#Construção do gráfico da solução numérica

    \_,ax = plt.subplots()

    ax.set(xlabel ='X', ylabel ='Y',

       xlim =(0,5.5), ylim =(0, 5),

       title ='Método Rk4')

    ax.grid()

    plt.plot(x, y, marker = '\*')

    plt.show()

    return

**13)**

**** Repita o exercício anterior, agora com um passo de integração menor, por exemplo, de 10 minutos (1/6 da hora) e adote o método RK4. Para os cálculos necessários, faça um programa Scilab ou Python. Compare os resultados com aqueles obtidos com a função intrínseca ODE do Scilab. Escolha a melhor opção dentre as apresentadas a seguir, no que diz respeito ao número aproximado de alunos informados sobre o cancelamento da Prova, após 1, 2 e 3 horas do início da propagação da notícia.

A) 80 alunos, após 1h B) 80 alunos, após 2h C) 100 alunos, após 3h   
D) 110 alunos, após 1h E) 120 alunos, após 3h

**14)**

Desenho de um cachorro

Descrição gerada automaticamenteUma preocupação da sociedade moderna diz respeito à propagação de doenças contagiosas. Suponha que todos de um grupo de indivíduos tenham igual chance de se contaminar e, seja o número de infectados em determinado instante . Assuma que a taxa de variação de contaminados no tempo seja dada pela EDO:

,

sendo uma constante obtida empiricamente. Considerando que inicialmente 1.000 indivíduos estejam contaminados, i.e., , obtenha aproximadamente o número de infectados neste grupo em 30 dias, através da função intrínseca do **Scilab** ODE. Adote os parâmetros: . Sobre o número de infectados, escolha a opção correta dentre as apresentadas a seguir.

**A)** não atinge 80% da população

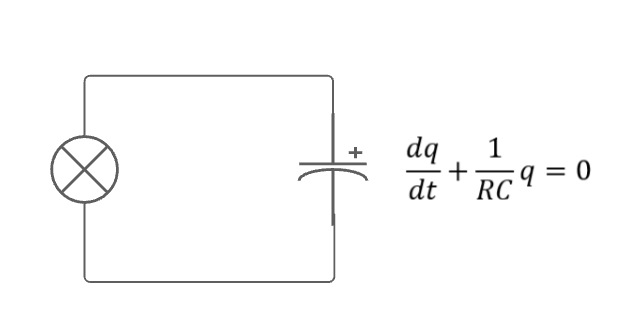
**B)** encontra-se entre 50 e 60% da população

**C)** no 4º dia, supera o dobro do número inicial de contaminados

**D)** corresponde a cerca da metade da população **E)** NRA



**15)**  João**,** um aluno muito curioso, resolveu realizar um experimento no laboratório da sua escola técnica. Para tal organizou em sua bancada alguns componentes eletrônicos: uma lâmpada, um capacitor e uma bateria. A princípio João carregou o capacitor com essa bateria e, logo em seguida, conectou-o na lâmpada. Após o fechamento do circuito cronometrou o tempo no qual a lâmpada permaneceu emitindo algum sinal luminoso. Esse experimento pode ser representado pelo circuito abaixo e sua respectiva EDO:



Onde q é a carga do capacitor em Coulombs, R é a resistência da lâmpada em Ω e C é capacitância do capacitor em F.

Sabe-se que no momento em que a chave foi fechada o capacitor estava carregado com q(0) = 1 C, sendo que sua capacitância é de 0.01 F. Isto posto, pede-se o tempo em que a lâmpada permaneceu emitindo luz, sendo que para tal uma corrente de no mínimo 200 mA deve percorrê-la.

Dica:

Converter a equação para evidenciar a corrente e adaptar um dos algoritmos da questão 12 para determinar o tempo (não se sabe o número de iterações).

Sol analítica: