Часть I
Теоретическая

1 Задание №1

Предположим, что вам необходимо предсказать последовательность $Y_1, Y_2, \ldots \in 0, 1$ независимых и одинаково распределенных случайных величин с неизвестным распределением. Пусть $D = [0, 1]$, $l(x, y) = |x - y|$. Придумайте свой алгоритм для решения этой задачи. Оцените средний ожидаемый регрет своего алгоритма по сравнению с двумя экспертами, один из которых всегда выбирает исход 0, а другой — исход 1. Сравните результат со средним ожидаемым регретом алгоритма взвешенного большинства, который не обладает информацией о том, что исходы независимы и одинаково распределены. Можно ли с течением времени для алгоритма взвешенного большинства сделать средний ожидаемый регрет сколь угодно малым? Какой алгоритм оказался лучше в итоге?

1.1 Решение

Для решения задачи мы можем использовать следующий алгоритм:

- Сгенерировать случайное число R из диапазона $[0, 1]$.
- Если R меньше 0.5, выбрать исход 0, иначе выбрать исход 1.

Такой алгоритм не зависит от распределения случайных величин Y_1, Y_2, ... и является случайным предсказанием, которое не учитывает никаких особенностей данных.

Оценим средний ожидаемый регрет данного алгоритма по сравнению с двумя экспертами, один из которых всегда выбирает исход 0, а другой — исход 1. Пусть p — вероятность того, что исход 1 является правильным ответом. Тогда средний ожидаемый регрет данного алгоритма равен:

$$E\left[R\right] = p \cdot \left|0 - \frac{1}{2}\right| + (1-p) \cdot \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2} - p\right|$$

В то же время, если мы всегда выбираем эксперта, который правильно угадывает исход, то средний ожидаемый регрет равен:

$$E[R] = min\left(p, 1-p\right)$$

Теперь рассмотрим алгоритм взвешенного большинства. Пусть w_i — вес, который мы присваиваем эксперту i ($i = 0, 1$). Тогда мы можем предсказать исход с наибольшей вероятностью как:

$$\arg\max_i \left\{w_i\right\}$$

Если мы не знаем распределение случайных величин, то мы можем задать веса равными 1 и получить алгоритм равных голосов. Тогда средний ожидаемый регрет алгоритма взвешенного большинства равен:

$$E[R] = \min(p, 1-p) + 1/2 - \max(p, 1-p)$$

Как видим, этот алгоритм обладает меньшим регретом, чем случайное предсказание.

Отметим, что взвешенное большинство может иметь произвольно малый регрет с течением времени, если мы сможем точно определить вероятности p и присвоить веса экспертам в соответствии с этими вероятностями. В этом случае алгоритм взвешенного большинства становится оптимальным.

Таким образом, мы можем сделать вывод, что алгоритм взвешенного большинства обладает меньшим регретом, чем случайное предсказание, и что с течением времени его регрет может быть сколь угодно малым при определении вероятностей и правильной настройке весов экспертов. Поэтому, в данном случае, алгоритм взвешенного большинства является лучшим выбором.

Используя неравенство Хефдинга, мы можем оценить средний ожидаемый регрет для каждого из алгоритмов. Для алгоритма, который всегда выбирает 0 или 1, средний ожидаемый регрет равен:

$$R_{\text{exp}} = E[\max(p, 1-p)] = \max(p, 1-p)$$

где p - вероятность правильного ответа.

Для алгоритма взвешенного большинства, который не знает, что исходы независимо и одинаково распределены, средний ожидаемый регрет можно оценить следующим образом:

$$R_{\text{maj}} = E\left|p - \hat{p}\right| \leq \sqrt{\frac{\ln(2/\delta)}{2n}}$$

где $\hat{p}$ - доля правильных ответов, n - количество предсказаний, а δ - параметр доверительного интервала.

Для алгоритма, который выбирает случайное значение с вероятностью 0.5, средний ожидаемый регрет также можно оценить с помощью неравенства Хефдинга:

$$R_{\text{rand}} = E[\max(p, 1-p, 0.5)] \leq \frac{1}{2}$$

В итоге, наилучшим алгоритмом оказался алгоритм взвешенного большинства, который может достичь произвольно маленького среднего ожидаемого регрета при настройке весов и определении вероятностей правильных ответов.