NMB - Oefenzitting 8: Geometrische Modellering

Hendrik Speleers

Overzicht

Begrippen

- Parametervoorstelling van een curve
- Segmentatie : curve/oppervlak opdelen in meerdere stukken door het parameterdomein op te splitsen
  - knooppunten $a = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = b$
    $\Rightarrow$ segment $\overrightarrow{x}(u)$ met $u \in [u_{i-1}, u_i]$
  - lokale parameter $t \in [0, 1]$
- Affiene combinatie :
  - $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{p}_i$ met $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$
  - invariant onder affiene transformatie
- Convexe combinatie :
  - affien met positieve gewichten
  - convex omhullende

Interpolerende veeltermcurven

$$\boxed{\vec{x}(u) = \sum_{i=0}^{n} \vec{p}_i L_i^n(u)}$$

- Affiene combinatie van punten $\vec{p}_i$
- Gewichten zijn Lagrange-veeltermen
- Eigenschappen :
  - interpolatie in $\vec{p}_i$
  - doorgaans sterk oscillerende curven (zeker bij toenemende graad)
  - kleine wijziging van $\vec{p}_i$ leidt vaak tot grote veranderingen
- Beperk gebruik tot veeltermen van lage graad

Bézier curven

$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{i=0}^{n} \vec{b}_i B_i^n(t)} \qquad \text{met} \quad t \in [0,1]$$

- Controlepunten $\vec{b}_i$ $\Rightarrow$ controleveelhoek
- Bernstein-veeltermen $B_i^n(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i$
- Eigenschappen Bernstein-veeltermen :
  - sommatie-tot-1 : $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1$ $\Rightarrow$ affiene combinatie
  - positiviteit : $B_i^n(t) \geq 0$ $\Rightarrow$ convexe combinatie
  - symmetrie-eigenschap
  - recursiebetrekking

Bézier curven

- Eigenschappen Béziercurven :
  - Bézier curve = veeltermcurve van graad n
  - zachtverlopend karakter
  - interpoleert in eindpunten $\vec{x}(0) = \vec{b}_0$ en $\vec{x}(n) = \vec{b}_n$
  - evaluatie met het de Casteljau-algoritme
  - graadverhoging :
    controleveelhoek convergeert naar curve $\vec{x}(t)$
  - subdivisie :
    samengestelde controleveelhoeken convergeren naar $\vec{x}(t)$

Splinecurven

$$\boxed{\vec{s}(u) = \sum_{i=-k}^{n-1} \vec{d}_i N_{i,k+1}(u)} \quad \text{met} \quad u \in [u_0, u_n]$$

- Knooppunten $u_0 \leq \ldots \leq u_n$
- de Boor-punten (controlepunten) $\vec{d}_i$
- Genormaliseerde B-spline van graad k $N_{i,k+1}(u)$
- Enkele eigenschappen genormaliseerde B-splines :
  - lokaliteit : $N_{i,k+1} = 0$ als $u \notin (u_i, u_{i+k+1})$
    $\Rightarrow$ lokale afhankelijkheid splinecurven
  - sommatie-tot-1 : $\sum_{i=-k}^{n-1} N_{i,k+1}(u) = 1$
    $\Rightarrow$ affiene combinatie
  - positiviteit : $N_{i,k+1} \geq 0$
    $\Rightarrow$ elk splinepunt binnen convex omhullende van $k+1$ de Boor-punten

Splinecurven

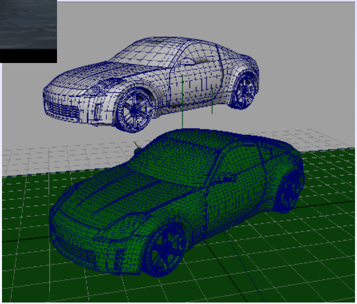
- Eigenschappen spline-curven :
  - splinecurve van lage graad dicht bij controleveelhoek
  - evaluatie met het de Boor-algoritme
  - als k de Boor-punten $\vec{d}_{j-k+1}, \ldots, \vec{d}_j$ samenvallen, dan interpolatie in dat punt $\vec{s}(u_{j+1}) = \vec{d}_j$
  - interpolatie in begin- en eindpunt : samenvallende knooppunten $u_{-k} = \ldots = u_0$
  - verminderde continuïteit bij samenvallende knooppunten
  - toevoegen van knooppunten : controleveelhoek convergeert naar curve $\vec{s}(u)$

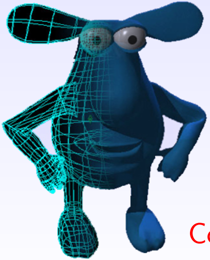
Rationale curven

- Exacte voorstelling van kegelsneden
- Rationale Béziercurven
- Rationale splinecurven
  - NURBS = Niet-Uniforme Rationale B-Splines
  - $\vec{x}(u) = \dfrac{\sum_{i=-k}^{n-1} \vec{d}_i w_i N_{i,k+1}(u)}{\sum_{i=-k}^{n-1} w_i N_{i,k+1}(u)}$
  - $\vec{x}(u)$ convexe en lokale combinatie van controlepunten $\vec{d}_i$

Toepassingen

CAD/CAM





Computeranimatie