Singuliere waardenontbinding (SWO)

$$
\begin{aligned}
\underbrace{A}_{m\times n} &= U\Sigma V^T \\
&= \underbrace{U}_{m\times m} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{m\times n} \underbrace{V^T}_{n\times n}
\end{aligned}
$$

met

- $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$

- U en V orthogonaal ($U^T U = I$ en $V^T V = I$)

Merk op: A hoeft niet vierkant te zijn!

Berekening via $A^T A$

$$
\begin{aligned}
A^T A &= (V\Sigma^T U^T)(U\Sigma V^T) \\
&= V(\Sigma^T\Sigma)V^T \\
&= V \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r^2 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} V^T
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ zoek dus de eigenwaardenontbinding van $A^T A$!

Je vindt:

- rechtse singuliere vectoren (kolommen van V) $=$ eigenvectoren van $A^T A$
- singuliere waarden (σ_i) $=$ wortels van de eigenwaarden van $A^T A$

Bepalen van de andere singuliere vectoren

$$
\begin{aligned}
A &= U\Sigma V^T \\
&\Downarrow \; V \text{ orthogonaal } (V^T V = I) \\
AV &= U\Sigma
\end{aligned}
$$

Voor 1 vector uitgeschreven geeft dit:

$$AV_i = \sigma_i U_i$$

zodat

$$U_i = \frac{1}{\sigma_i} AV_i \quad (i = 1, \ldots, r)$$

- Merk op: i loopt slechts van 1 tot r!
- $\Rightarrow$ Probeer aan te vullen tot je genoeg kolommen hebt voor je orthogonale matrix.
- $\Rightarrow$ Vergeet dus niet te orthogonaliseren en te normeren!