

NMB - Oefenzitting 2: Conditie van kleinste kwadratenprobleem en stabiliteit van kleinste kwadratenalgoritmes

Hendrik Speleers



Nota's

Overzicht

Singuliere waarden ontbinding

QR

Kleinste kwadratenprobleem

Conditie / Stabiliteit

Complexiteit



Nota's

Singuliere waarden ontbinding

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m > n, \quad \text{rang } n$$

$$U \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad U_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad U_2 \in \mathbb{R}^{m \times (m-n)}$$

$$\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$V \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$U^T U = I, \quad V^T V = I$$

$$A = U \Sigma V^T = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} V^T$$



Nota's

QR

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m > n, \quad \text{rang } n$$

$$Q \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad Q_2 \in \mathbb{R}^{m \times (m-n)}$$

$$R \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \text{bovendriehoeks}$$

$$Q^T Q = I$$

$$A = QR = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Nota's

Kleinste kwadratenprobleem

- ▶ Gegeven : A, b
- ▶ Gevraagd : x
- ▶ zodat : $\|Ax - b\|_2$ minimaal

Bijvoorbeeld op te lossen met QR of SWO

$$x = R_1^{-1} Q_1^T b, \quad x = V \Sigma_1^{-1} U_1^T b$$

Pseudoinverse van A

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = R_1^{-1} Q_1^T = V \Sigma_1^{-1} U_1^T$$

Projectie van b op range A

$$y = A^+ x = Pb$$



Nota's

Conditie van kleinste kwadratenprobleem

- ▶ **Conditie** van een **probleem**
- ▶ **Stabiliteit** van een **algoritme** voor een probleem

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\|y\|}{\|b\|}, \quad \eta = \frac{\|A\| \|x\|}{\|y\|}, \quad \kappa(A) = \|A\| \|A^+\|$$

	y	x
$\kappa_{KK}(A, b) \rightarrow (x, y) :$		
b	$\frac{1}{\cos \theta}$	$\frac{\kappa(A)}{\eta \cos \theta}$
A	$\frac{\kappa(A)}{\cos \theta}$	$\kappa(A) + \frac{\kappa(A)^2 \tan \theta}{\eta}$



Nota's

Stabiliteit van kleinste kwadratenalgoritmes

- ▶ *Conditie* van een *probleem*
- ▶ *Stabiliteit* van een *algoritme* voor een probleem
- ▶ **Normaalvgn** : onstabiel als $\kappa(A) \gg 1$ en
 - ▶ $\tan \theta \approx 0$ of
 - ▶ $\eta \approx \kappa(A)$
- ▶ **Gewijzigde GS QR** : stabiel indien juist gebruikt
- ▶ **Householder QR** : stabiel
- ▶ **SWO** : stabiel



Nota's

Complexiteit

Normaalvgn : $mn^2 + \frac{1}{3}n^3$

Gewijzigde GS : $2mn^2$

Householder : $2mn^2 - \frac{2}{3}n^3$



Nota's
