NMB Oefenzitting 3: oplossingen

Nico Vervliet, *KU Leuven* *April 27, 2018*

Opgave 1

Er zijn twee manieren om dit aan te tonen: via de oplossing van een kleinstekwadratenprobleem en via het argument dat de doelfunctie minimaliseert:

1. Het minimalisitieprobleem

$$\min_{\rho \in \mathbb{R}} ||\mathbf{Ax} - \rho\mathbf{x}||_2$$

kan gezien worden als een kleinstekwadratenprobleem

$$\min_{\bar{\mathbf{x}}} ||\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{b}}||_2$$

dat als oplossing

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{A}}^\dagger \bar{\mathbf{b}}$$

heeft, door te stellen dat $\bar{\mathbf{x}} = \rho$, $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{x}$ en $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{Ax}$.

2. Het optimum van een minimalizatieprobleem kan gevonden worden door de gradiënt gelijk te stellen aan nul. Het minimalisitieprobleem

$$\min_{\rho \in \mathbb{R}} ||\mathbf{Ax} - \rho\mathbf{x}||_2$$

is equivalent aan

$$\min_{\rho \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} ||\mathbf{Ax} - \rho\mathbf{x}||_2^2 = \min_{\rho} f(\rho).$$

Dus

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\frac{1}{2}(\mathbf{Ax} - \rho\mathbf{x})^T(\mathbf{Ax} - \rho\mathbf{x}) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} - \rho\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{x}\right) \\
&= -\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} + \rho\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 0.
\end{aligned}$$

In beide gevallen vinden we als oplossing het Rayleigh-quotiënt:

$$\rho = \frac{\mathbf{x}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}}.$$

Opgave 2

```
% A1
L1 = diag(1:4);
P1 = orth(rand(4));
A1 = P1 * L1 * P1';
A = A1;

% mu
mu = 2 + 1e-5;
```

```
cond(A - mu*eye(size(A)))
```

```
ans =

   2.0000e+05
```

Stel we doen 1 iteratie van het algoritme:

```
Am = A - mu*eye(size(A));
b = rand(4, 1);
x = b/norm(b);
y = Am\x
x = y/norm(y)
```

```
y =

   5.4715e+03
   1.3395e+04
  -1.9560e+04
   6.6989e+03
x =

   2.1682e-01
   5.3079e-01
  -7.7510e-01
   2.6546e-01
```

We kunnen dit vergelijken met de echte eigenvector behorende bij de eigenwaarde 2.

```
eigvec = P1(:, 2);
[norm(x - eigvec) norm(x + eigvec)]
```

```
ans =

   2.0000e+00   3.6925e-05
```

Stel we perturberen $A - \mu I$:

```
xp = b/norm(b);
Ap = Am + (rand(4)*2 - 1) * 1e-8;
yp = Ap \ xp
xp = yp / norm(yp)
```

```
yp =

   5.4700e+03
   1.3391e+04
  -1.9555e+04
   6.6971e+03
xp =

   2.1682e-01
   5.3079e-01
  -7.7510e-01
   2.6546e-01
```

```
norm(y-yp)
norm(x-xp)
```

```
ans =

   6.7769e+00
ans =

   7.9131e-09
```

We zien dat y sterk veranderd is (fout van orde 1), terwijl x goed blijft (fout van orde 10^{-9}). We kunnen besluiten dat de oplossing van het geperturbeerde stelsel y_p inderdaad sterk verandert, wat te verwachten is aangezien het stelsel slecht geconditioneerd is. De richting van de y en y_p blijft echter nagenoeg gelijk, wat we te zien krijgen als we de oplossing normaliseren (x). De fout en de perturbaties worden immers vooral versterkt in de richting die we zoeken en verzwakt in de andere richtingen. (Door matrix $A - \mu I$.)

Opgave 3

```
n = 10;
A = eye(n) + diag(ones(9,1), 1)
```

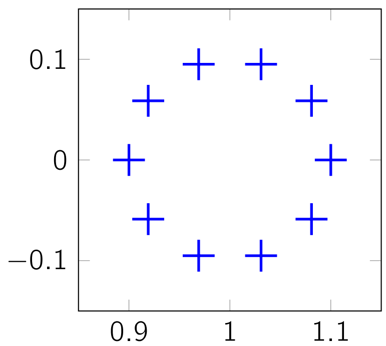
```
[V, E] = eig(A);
ew = diag(E)'
rank(V)
```

```
ew =

     1     1     1     1     1     1     1     1     1     1
ans =

     1
```

De geometrische multipliciteit is gelijk aan 1, terwijl de algebraische multipliciteit gelijk is aan n. De matrix is defectief.

```
epsilon = 1e-10;
A(n,1) = epsilon;
ewp = eig(A);
plot(ewp, '+')
axis([1-0.15 1+0.15 -0.15 0.15])
epsilon^(1/n)
```

```
ans =

   1.0000e-01
```



De eigenwaarden liggen op een cirkel in het complexe vlak met centrum 1 en straal $\epsilon^{1/n}$.

Besluit: Eigenwaarden met te weinig eigenvectoren (lange Jordanketting) zijn slecht geconditioneerd.