NMB - Oefenzitting 2
Kleinste-kwadraten veeltermbenadering

Simon Telen

Opgave 1. Schrijf een functie `plotres(x,r,w)` om de residus r_i af te beelden samen met de gewichten w_i. De punten (x_i, r_i) moeten aangeduid worden met een rode '+' en verbonden met een volle rode lijn. De x-as is verticaal gecentreerd in het venster van de figuur en is aangeduid met een zwarte stippellijn over het hele interval bestreken door de abscissen in `x`. In dezelfde figuur wordt in groene streeplijn de vector van gewichten weergegeven, zo gescaleerd dat het grootste gewicht tegen de bovenrand van het venster komt.

Oplossing. Zie `plotres.m`.

Opgave 2. Schrijf een functie `c = kkb1(x,f,w,n)` die de discrete kleinste-kwadraten veeltermbenadering opstelt van graad n in de punten (x_i, f_i) met gewichten w_i voor $i = 1 \dots N$. De functie krijgt de vectoren $[x_i], [f_i]$ en $[w_i]$ als invoerparameters en geeft als uitvoer de vector van coëfficiënten $[c_k]$, $k = 0 \dots n$ van de benaderende veelterm $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, bepaald als oplossing van het overgedetermineerd stelsel:

$$\left[\sqrt{w_i}\, x_i^k\right] \begin{bmatrix} \\ c_k \\ \\ \end{bmatrix} = \left[\sqrt{w_i}\, f_i\right]$$

Gebruik de ingebouwde functie van MATLAB om dit stelsel op te lossen. Schrijf daarna een tweede functie `c = kkb2(x,f,w,n)` zodat $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ bepaald wordt als de oplossing van het normaalstelsel:

$$\left[\sum_{i=1}^{N} w_i\, x_i^{j+k}\right] \begin{bmatrix} c_k \end{bmatrix} = \left[\sum_{i=1}^{N} w_i\, x_i^j\, f_i\right]$$

Oplossing. Zie `kkb1.m` en `kkb2.m`.

Opgave 3. Gebruik beide functies om benaderingen op te stellen voor de functie e^x op het interval $[-1, 1]$. Neem als gewichtsfunctie zowel $w(x) = 1$ als $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ en vergelijk het residu. Plot het maximale residu als functie van n voor $n = 1, \dots, 20$. Bij welke graad krijg je het kleinste maximale residu? Om een veelterm te evalueren kan je de MATLAB-functie `polyval` gebruiken.

Oplossing. Zie `resdeg.m`. Wanneer het overgedetermineerde stelsel direct opgelost wordt, dan daalt het residu bij toenemende graad n tot op machineprecisie. Wanneer de kleinste-kwadratenveeltermbenadering opgelost wordt met behulp van het normaalstelsel, daalt het residu eerst bij toenemende graad n. Daarna begint het terug te stijgen door afrondingsfouten (ten gevolge van slechte conditie normaalstelsel).

Opgave 4. Gebruik de functie `c = kkb1(x,f,w,n)` om een benadering voor een kromme op te stellen. Een kromme in het vlak wordt gegeven door een parametrisatie van de vorm $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$. Een veeltermbenadering van een kromme wordt opgesteld als $(f_n(t), g_m(t))$, $t \in [a, b]$, waarbij f_n en g_m veeltermen zijn die de functies x en y benaderen. Zoek een benadering voor de kromme gegeven door het cijfer "6". Stel hiertoe eerst een parametervoorstelling op van de vorm (t_i, x_i, y_i). Met behulp van de routine `click` (zie Toledo) kan je geschikte waarden voor x_i en y_i bepalen door ze aan te klikken op een figuurtje. Kies dan bijvoorbeeld als parametrisatie `t = linspace(0,1,N)`.

Oplossing. Zie `opgave4.m`.

Opgave 5. In deze oefening onderzoeken we verschillende discrete kkb's voor de functie

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$$

waarbij $x > 0$ een positief reëel getal is (x mag kleiner zijn dan 1).

a) Om $f(x)$ te evalueren kan je gebruik maken van de ingebouwde Matlab-functie `expint`. Hoe doe je dit?

   Oplossing. `expint(1)-expint(x)`.

b) Kan vanaf een bepaalde benaderingsgraad het residu in elk punt (theoretisch) nul worden? Leg uit. Wat betekent dit?

   Oplossing. Als er N abscissen zijn, is de kkb van graad $N-1$ de interpolerende veelterm en dus is het residu dan nul in elk punt.

c) Vergelijk verschillende benaderingen voor $f(x)$ op het interval $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ met gewichtsfunctie $w(x) \equiv 1$ en een vast aantal abscissen N. Gebruik deze benaderingen om de integraal

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)dx$$

   te berekenen met 6 juiste beduidende cijfers. Leg uit hoe je te werk gaat en geef de waarde van de integraal.

   Oplossing. Een veeltermbenadering $y_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ voor $f(x)$ geeft de benadering

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)dx \approx \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} y_n(x)dx = \left[a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = Y_n(3/2)-Y_n(1/2).$$

Omdat de fout afneemt bij toenemende graad n zijn de cijfers die niet meer veranderen als de graad verhoogt juist.

d) Op dezelfde manier kan je ook de afgeleide $f'(x)$ op $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ benaderen. Leg uit hoe je te werk gaat. Vergelijk je resultaat met de exacte waarde

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

Geef voor een bepaalde graad n en aantal abscissen N de maximale relatieve fout op $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Vergelijk dit met de fout bij numerieke integratie. Wat is nauwkeuriger?

Oplossing.

- $y_n'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1}$
- Integreren is nauwkeuriger (zie numerieke wiskunde).

Opgave 6. Het bestand `abinbev.mat` geeft de dagelijkse evolutie weer van het aandeel van brouwerij AB Inbev over de periode van 24 november 2009 tot en met 23 november 2010 zoals het genoteerd werd op de Euronext beurs. Uitgezet is de prijs per stuk in Euro. Merk op dat niet voor elke dag een waarde beschikbaar is (dag 1 komt overeen met 24 november 2009).

Gebruik veeltermextrapolatie d.m.v. kleinste-kwadratenbenadering om de waarde van het aandeel te voorspellen op 3 december 2010 (10 dagen na de laatste notering). Wat gebeurt er op langere termijn met het aandeel?

Heb je veel vertrouwen in je eigen voorspelling? Leg uit.

Oplossing. Zeer onbetrouwbaar. Veeltermextrapolatie is geen goed idee voor beurskoersen, de basisfuncties gaan naar $\pm\infty$.

Opgave 7. Zoek een veeltermbenadering voor de functie bgsin(x) voor $x \in [0, 1]$. Probeer enkele gewichtsfuncties en eventueel verschillende liggingen van de meetpunten om je benadering zo nauwkeurig mogelijk te maken. Vergelijk je resultaten met een benadering van de vorm:

$$\frac{\pi}{2} - \sqrt{1-x}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots)$$

Geef aan hoe je te werk gaat. Welke benadering geeft het beste resultaat?

Oplossing. De functie bgsin(x) is niet veeltermachtig (de afgeleide wordt oneindig voor $x = 1$), hierdoor kan er moeilijk een veeltermbenadering opgesteld worden. Noch het verhogen van de graad, noch de keuze van de gewichtsfunctie $w(x)$, noch de ligging van de punten helpen om de nauwkeurigheid te verbeteren.

Het opstellen van een benadering $y_n \sim \frac{\frac{\pi}{2} - \mathrm{bgsin}(x)}{\sqrt{1-x}}$ laat toe om zelfs met een lage graad een zeer goede benadering te berekenen voor bgsin(x).