Differentiaalvergelijkingen
Lessenpakket 2016 - 2017

Uitkomsten – Extra oefenmateriaal – Hoofdstuk 2

nico.scheerlinck@cs.kuleuven.be

1 Eerste orde differentiaalvergelijkingen

1. (a) exponentiële toe- of afname naar een evenwicht $u(t) = T$.

   (b) $u(t) = T + (u_0 - T)e^{-kt}$

   (c)
$$\tau = \frac{\ln 2 + \ln(u_0 - T) - \ln(u_0 - 3T)}{k}$$

2. (a)

   (b)
$$y(t) = (y_0 - K)e^{-\frac{rt}{K}} + K$$

3. Gegeven het volgende beginwaardeprobleem

   (a)

   (b)
$$y(t) = \frac{Ky_0}{y_0 + (K - y_0)\exp(-rt)}$$

4. evolutie naar twee mogelijke evenwichten $y(t) = 0$ of $y(t) = K$, afhankelijk van de beginvoorwaarde y_0.

5. (a)
$$y(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12t^2}$$

   (b)
$$y(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{8 + 12\arcsin^2(x)}$$

6. $b = 3$

7. $y_0 = -\frac{5}{2}$

8. (a)

   (b)

$$y(t) = \pm \sqrt{\frac{5\ t}{2 + 5\ C\ t^5}} \text{ met } C \in \mathbb{R}$$

9. $a > 0$, $\lambda > 0$

10.

2 Vraagstukken

1. (a)

$$y(t) = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi y}{2000}\right)\right) - \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{20}\right)\right) = \frac{1000t}{\pi}$$

   Ja, er wordt een evenwicht bereikt: $y_{\text{evenwicht}} = 1000$.

   (b) Na 1 jaar zijn het aantal hamsters afgenomen. Aantal hamsters na 10 jaar ≈ 1000.

2. (a)

   (b)

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\frac{20}{8-t} - \frac{5}{8}\right)\frac{(40-5t)^2}{30+5t} \\ x(4) &= 35 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} u(t) &= 19e^{-\frac{\pi t}{12}} + 1 + \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{4}\right) \\ u(12) &= 1 + 19e^{-\pi} \approx 1.8 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \ln|x-2| &= \ln\left|\frac{2\sinh(y-1)}{\sinh(1)}\right| \\ y(x) &= 1 + \operatorname{arcsinh}\left(\frac{(x-2)\ \sinh(1)}{2}\right) \end{aligned}$$

5. Integraalcurve: $y^3 - 27y - x = C(x^2 + 81)$.
   Positie waar opa de bal uit het water kan lichten: $(x = 11.03, y = 3)$.

6. (a) $x(t) = \frac{1}{25}(1 - e^{-\frac{t}{12000}})$.
   (b) $t = 36.05$ minuten.
7. (a) $i(t) = 1 - e^{-4t}$.
   (b) $i(t) = \frac{20\sqrt{2}}{1+625\pi^2}(\sin 100\pi t - 25\pi \cos 100\pi t + 25\pi e^{-4t})$.