NMB - Oefenzitting 3
Trigonometrische benadering

Simon Telen

Opgave 1. We beschouwen het scalair product

$$(f,g)_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

op de vectorruimte $C[-\pi,\pi]$ van continue reële functies op $[-\pi,\pi]$.

1. Ga na dat het stel

   $$B_{M,N} = \{1, \sin(x), \sin(2x), \ldots, \sin(Mx), \cos(x), \cos(2x), \ldots, \cos(Nx)\}$$

   orthogonaal is ten opzichte van dit scalair product voor alle $M, N \in \mathbb{N}$. met behulp van Mupad, Wolfram Alpha, ...

2. Leidt hieruit via het normaalstelsel af dat de beste benadering voor $f \in C[-\pi,\pi]$ in $\text{Span}(B_{M,N})$ gegeven is door $\tilde{f}(x) = a_0/2 + \sum_{j=1}^{M} a_j \sin(jx) + \sum_{k=1}^{N} b_k \cos(kx)$ met

   $$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_j &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(jx)dx, 1 \le j \le M, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, 1 \le k \le N. \end{aligned}$$

   Je herkent dit als de coëfficiënten van de *Fourierreeks* van f, een periodische functie op $\mathbb{R}$ met periode 2π.

3. Gebruik dit om in Matlab een benadering $\tilde{f}$ op te stellen voor de *zaagtandfunctie* met voorschrift

   $$f(x) = \frac{x}{\pi}, -\pi \le x \le \pi, \qquad f(x+2k\pi) = f(x), \forall k \in \mathbb{Z},$$

   voor toenemende waarden van M en N. Plot je resultaten.

Oplossing.

1. Het volstaat om na te gaan dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \pi\delta_{mn}$$

   met $m, n \in \mathbb{N}$, $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$, en

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx = 0, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

2. De formules volgen uit $(\tilde{f} - f, \phi)_{L^2} = 0, \forall \phi \in B_{M,N}$ na invullen van $\tilde{f} = \tilde{a}_0 + \sum_{j=1}^{M} a_j \sin(jx) + \sum_{k=1}^{N} b_k \cos(kx)$. Bijvoorbeeld, voor $\phi = \sin(lx)$ vinden we met behulp van de orthogonaliteitseigenschappen

$$\begin{aligned} (f, \sin(lx))_{L^2} &= (\tilde{f}, \sin(lx))_{L^2} \\ (f, \sin(lx))_{L^2} &= (\tilde{a}_0 + \sum_{j=1}^{M} a_j \sin(jx) + \sum_{k=1}^{N} b_k \cos(kx), \sin(lx))_{L^2} \\ (f, \sin(lx))_{L^2} &= (a_l \sin(lx), \sin(lx))_{L^2} \\ a_l &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(lx)dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(lx)\sin(lx)dx} \end{aligned}$$

   en de formule voor a_l volgt uit de definitie van het scalair product en de resultaten uit deelvraag 1.

3. Zie `opgave1.m`. De resultaten worden geïllustreerd in Figuur 3. Merk op dat alle coefficienten $b_i = 0$ omdat $f(x)$ oneven is op $[-\pi, \pi]$.

Opgave 2. Bepaal de meest in het oog vallende frequentie en de overeenkomstige periode in de zonnevlekkencyclus met behulp van de snelle Fourier-transformatie.

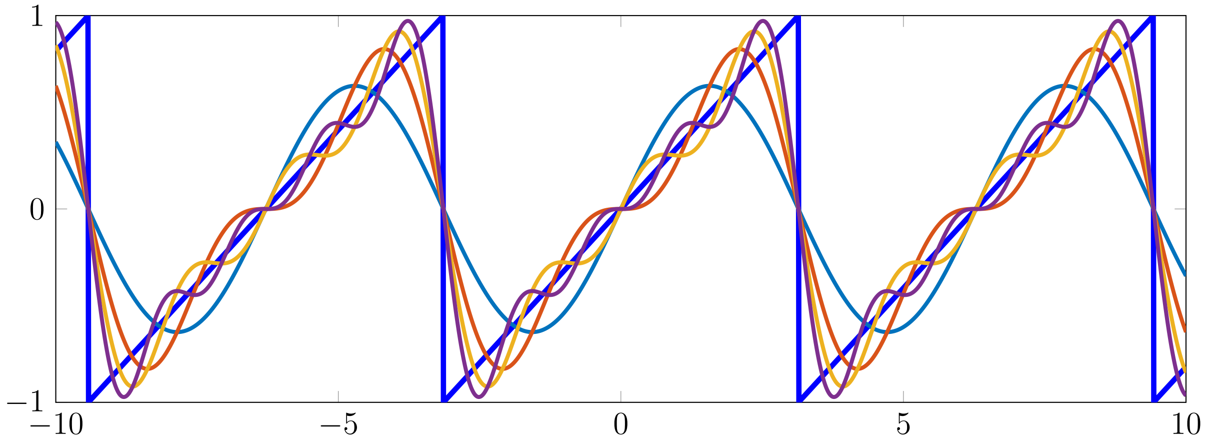
Meetgegevens zijn terug te vinden in de Matlab-bestanden `dayssn.dat` en `yearssn.dat` (zie Toledo). Om de snelle Fourier-transformatie uit te rekenen kan je het Matlab-commando `fft` gebruiken.

Oplossing. De periode is ongeveer 10 jaar. Zie `zonnevlek.m`.

Opgave 3. Comprimeer een foto.

Volgende Matlab-commando's kunnen van pas komen: `imread`, `imshow`, `fft2`, `ifft2`.

Oplossing. Zie `jpgread.m` en `jpgcompress.m`.



Figuur 1: De zaagtandfunctie (—) en haar afgekapte Fourierreeks voor $N = 0$ en $M = 1$ (—), $M = 2$ (—), $M = 3$ (—), $M = 4$ (—).

Opgave 4. Implementeer een DFT-vermenigvuldigingsalgoritme. Gebruik daarvoor de volgende voorstelling van positieve gehele getallen. Zij a een vector van lengte n met $a(i) \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $i = 1 \ldots n$ en $a(n) \neq 0$ als $n > 1$. De vector a stelt het geheel getal $\sum_{i=1}^{n} a(i) \times 10^{i-1}$ voor. Bereken met behulp van je routine $N!$, met $N = 50 + r$ waarbij r het natuurlijke getal is gegeven door de laatste twee cijfers van je r-nummer.

Oplossing. $100! = 9.332621544394415268169923885626670049071596826438162146859296 \cdot 10^{157}$. Zie `mult_int.m` en `facult.m`.