NMB - Oefenzitting 5: Kleinste-kwadratenbenadering (deel 1)

Hendrik Speleers

Overzicht

Algemeen

- Benaderingsprobleem :
  - Te benaderen functie
  - Klasse van benaderingsfuncties
  - Benaderingscriterium
  - Benaderingsalgoritme
- Ruimtes :
  - Metrische ruimte
  - Genormeerde ruimte
  - Unitaire ruimte
  - Euclidische ruimte

Algemeen

- Benaderingsprobleem :
  - Te benaderen functie
  - Klasse van benaderingsfuncties
  - Benaderingscriterium
  - Benaderingsalgoritme
- Ruimtes :
  - Metrische ruimte
  - Genormeerde ruimte
  - Unitaire ruimte
  - Euclidische ruimte

Metrische ruimte

- ρ is een afstand of metriek als
  1. $\rho(x, y) \geq 0$
  2. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
  3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
  4. $\rho(x, y) \leq \rho(z, x) + \rho(z, y)$
- Metrische ruimte : verzameling voorzien van een metriek

Genormeerde ruimte

- $\|\cdot\|$ is een norm op een vectorruimte als
  1. $\|x\| \geq 0$
  2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  3. $\|ax\| = |a|\|x\|$
  4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- Genormeerde ruimte : vectorruimte met een norm
- Geïnduceerde afstand : $\rho(x, y) = \|x - y\|$

Unitaire ruimte

- $(\cdot,\cdot)$ is een scalair product als
  1. $(ax,y) = a(x,y)$
  2. $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$
  3. $(x,y) = \overline{(y,x)}$
  4. $x \neq 0 \Rightarrow (x,x) > 0$
- Unitaire ruimte : vectorruimte met scalair product
- Euclidische ruimte : eindigdimensionale unitaire ruimte
- Geïnduceerde norm : $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$
- Elementen x en y zijn orthogonaal ($x \perp y$) als $(x,y) = 0$

Kleinste-kwadratenbenadering

- Zoek benadering $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x)$ voor
  - continue KKB : $f(x)$, $x \in [a, b]$
  - discrete KKB : $\{(x_i, f_i)\}_{i=1}^{N}$
- zodanig dat gewogen residu
  - continue KKB : $r(x) = f(x) - y_n(x)$
  - discrete KKB : $r_i = f_i - y_n(x_i)$

  minimaal is

$$\min_{a_k} \int_a^b w(x) r^2(x) dx, \qquad \min_{a_k} \sum_{i=1}^{N} w_i r_i^2$$

$$\Longrightarrow \min_{a_k} \langle w r^2 \rangle$$

Kleinste-kwadratenbenadering

- $\langle wr^2 \rangle$ minimaal

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial a_s}\langle wr^2\rangle = 0\ ,\ s = 0, \ldots, n \\ &\Leftrightarrow \quad \langle wr\phi_s\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} a_k \langle w\phi_s\phi_k\rangle = \langle w\phi_s f\rangle \end{aligned}$$

- Normaalstelsel
- Meetkundige interpretatie
- Bijvoorbeeld: orthogonale veeltermen