Oefeningen Numerieke Wiskunde

Oefenzitting 8: Stelsels niet-lineaire vergelijkingen

Probleem 1. Pas Algoritme 2.5 voor Newton-Raphson van één niet-lineaire vergelijking aan voor stelsels van niet-lineaire vergelijkingen. Veronderstel dat de functie $f(x)$ en de Jacobiaan van deze functie $J(x)$ gegeven zijn, zodat je deze in het algoritme kunt evalueren. Welke fouten zou je kunnen gebruiken voor het stopcriterium? Schrijf naast het algoritme de dimensies van alle variabelen, bvb. scalar, $n \times 1$ vector, $n \times n$ matrix, enz.

Probleem 2. Beschouw het stelsel

$$\begin{cases} x^2 + x - y^2 - 1 & = & 0 \\ y - \sin(x^2) & = & 0 \end{cases}$$

(a) Bereken de Jacobiaan van dit stelsel.

(b) Het algoritme uit Probleem 1 wordt uitgevoerd met verschillende startwaarden. Het resultaat van de iteraties wordt grafisch weergegeven in Figuur 1 evanals de 2-norm van de relatieve fout van de iteratiepunten van een convergerende rij punten. Deze relatieve fout wordt berekend t.o.v. een referentie oplossing berekend in hogere precisie. Tabel 1 toont de iteratiepunten van deze rij. Wat is de orde van convergentie? Wat is de convergentiefactor? Hoe zie je dit aan de iteratiepunten in Tabel 1?

(c) Leid uit de Jacobiaan die je in (a) berekend hebt, de orde van convergentie af. (Hint: bekijk Opmerking 3 op p. 262 van het handboek.)

(d) Wat kan je in het algemeen afleiden uit de figuur omtrent de keuze van de startwaarde van de Newton Raphson methode voor stelsels niet-lineaire vergelijkingen?

Probleem 3. Beschouw het stelsel

$$x^2 + 4y^2 - 16 = 0$$
$$xy^2 - x - 4 = 0$$

met als oplossingen $(2, \pm\sqrt{3})$ en $(-4, 0)$.

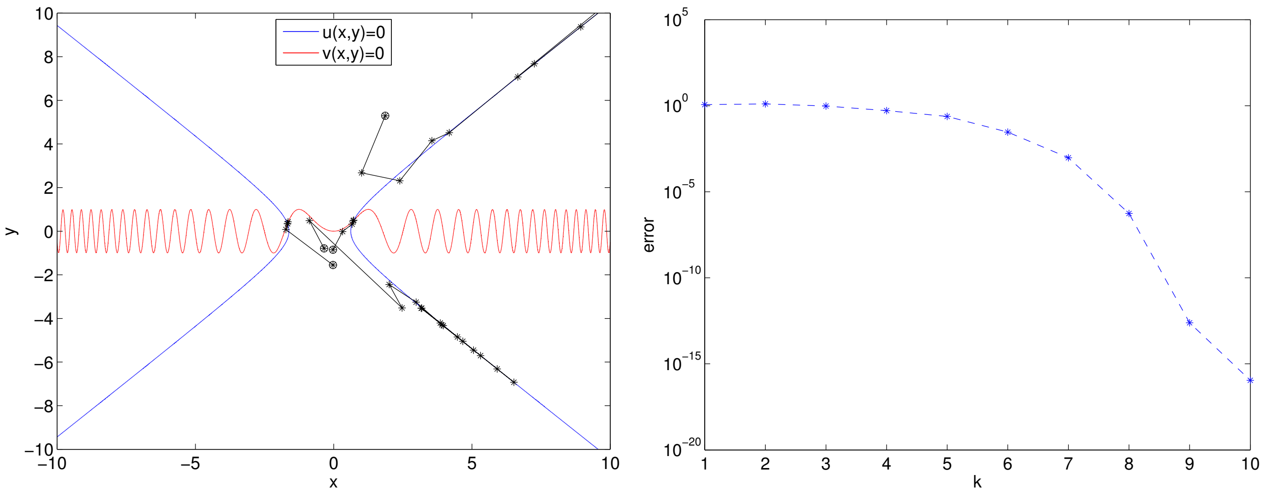
(a) Bereken de Jacobiaan van dit stelsel.

(b) Het algoritme uit Probleem 1 wordt uitgevoerd met de startwaarde $(4, 4)$. Het resultaat van de iteraties wordt grafisch weergegeven in Figuur 2 evanals de 2-norm van de relatieve fout van de iteratiepunten (t.o.v. een referentie oplossing berekend in hogere precisie). Tabel 2 toont de iteratiepunten van deze rij. Wat is de orde van convergentie? Wat is de convergentiefactor? Hoe zie je dit aan de iteratiepunten in Tabel 2?

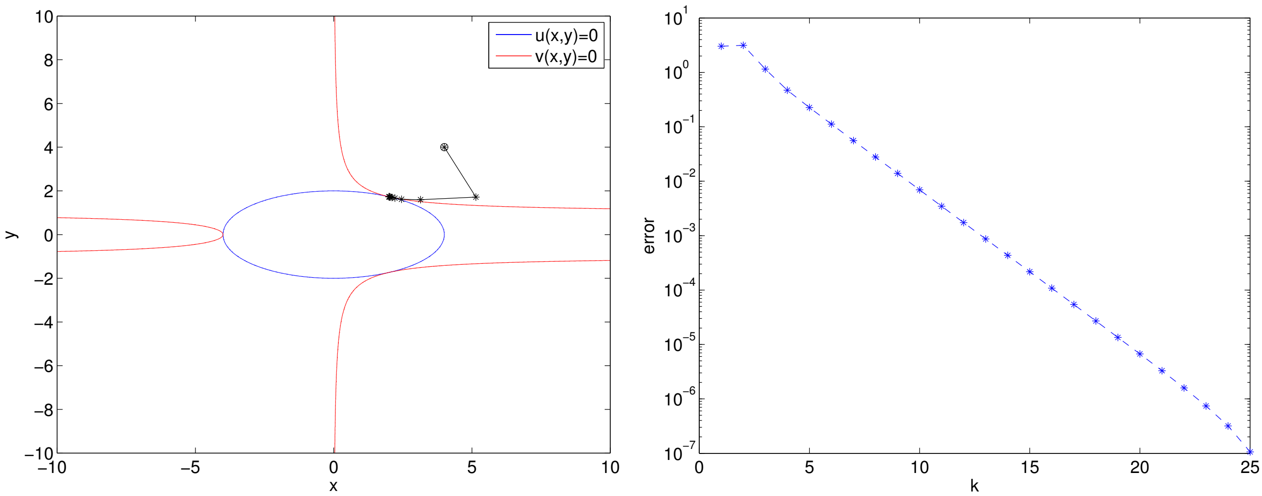
(c) Evalueer de Jacobiaan in het nulpunt waarnaar de methode convergeert. Wat kan je zeggen over de Jacobiaan en wat is het verband met de convergentie-orde? Hoe zie je dit ook aan de grafiek van de twee krommen?

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
1	7.6036866359446620e-01	1.6666666666666643e+00
2	1.5111331325429989e+00	1.5026360900263263e+00
3	1.2321741830888697e+00	1.3078763881079765e+00
4	9.6062004482353225e-01	9.6347404648365309e-01
5	5.5959998404791311e-01	3.3224417286278374e-01
6	7.1655089903159652e-01	4.7517566358048569e-01
7	7.2537904572941048e-01	5.0220141452690092e-01
8	7.2595044187617486e-01	5.0294603478122302e-01
9	7.2595072614305434e-01	5.0294650106230854e-01
10	7.2595072614319200e-01	5.0294650106250838e-01

Tabel 1: Newton Raphson Probleem 2



Figuur 1: Newton Raphson Probleem 2



Figuur 2: Newton Raphson Probleem 3

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
1	4.0000000000000000e+00	4.0000000000000000e+00
2	5.1428571428571423e+00	1.7142857142857144e+00
3	3.1423404804959958e+00	1.5956255920089555e+00
4	2.4552290895289555e+00	1.6159850096045763e+00
5	2.2168012409335196e+00	1.6699002600533723e+00
6	2.1075302011977848e+00	1.7010390282638144e+00
7	2.0535903269181404e+00	1.7165840255422320e+00
8	2.0267536289666963e+00	1.7243281169512277e+00
9	2.0133666713454845e+00	1.7281922334432744e+00
10	2.0066808291350657e+00	1.7301222247238226e+00
11	2.0033397915418467e+00	1.7310866935943789e+00
12	2.0016697404625843e+00	1.7315687951157588e+00
13	2.0008348314600086e+00	1.7318098124972439e+00
14	2.0004174060442890e+00	1.7319303128244170e+00
15	2.0002087006023777e+00	1.7319905608945905e+00
16	2.0001043496969459e+00	1.7320206844060908e+00
17	2.0000521746952660e+00	1.7320357460317017e+00
18	2.0000260873057409e+00	1.7320432768123817e+00
19	2.0000130436481811e+00	1.7320470421919831e+00
20	2.0000065218042851e+00	1.7320489248861475e+00
21	2.0000032608742067e+00	1.7320498662355768e+00
22	2.0000016304864339e+00	1.7320503368879867e+00
23	2.0000008153854134e+00	1.7320505721873833e+00
24	2.0000004072705941e+00	1.7320506899999837e+00
25	2.0000002037286335e+00	1.7320507487574865e+00
26	2.0000001027308829e+00	1.7320507779130259e+00

Tabel 2: Newton Raphson Probleem 3

Probleem 4. Beschouw het stelsel

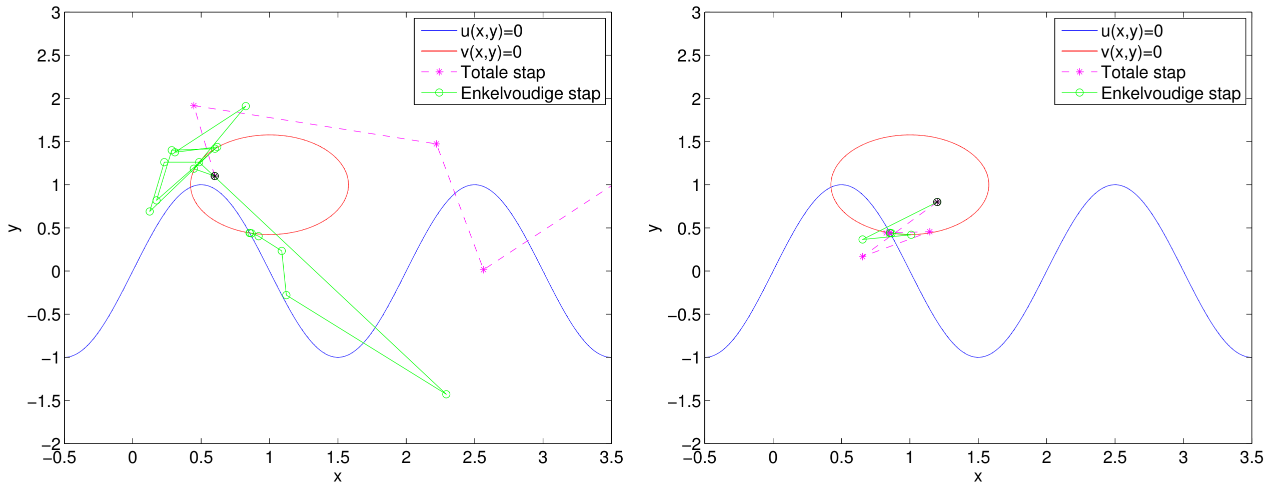
$$\begin{aligned} y - \sin(\pi x) &= 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

1. Leid formules af voor de vereenvoudigde Newton-Raphson methodes met totale stap en met enkelvoudige stap. Los steeds x op uit de eerste verglijking.
2. De vereenvoudigde Newton-Raphson methodes worden uitgevoerd met twee verschillende startwaarden. Figuur 3 illustreert het iteratieproces. Beide methoden divergeren duidelijk weg van de oplossing $(0.423\ldots, 0.971\ldots)$, terwijl de oplossing $(0.854\ldots, 0.441\ldots)$ wel een aantrekkingspunt is. Figuur 4 toont de 2-norm van de relatieve fout van de iteratiepunten voor respectievelijk de totale stap en de enkelvoudige stap methode Wat is de orde van convergentie voor beide methodes en wat zijn de convergentiefactoren?
3. Hoe verklaar je dat de oplossing $(0.854\ldots, 0.441\ldots)$ een aantrekkingspunt is en wat kan je doen om ervoor te zorgen dat er convergentie is naar de oplossing $(0.423\ldots, 0.971\ldots)$?
4. Voor welke startwaarden verwacht je numerieke problemen of zelfs foutmeldingen?

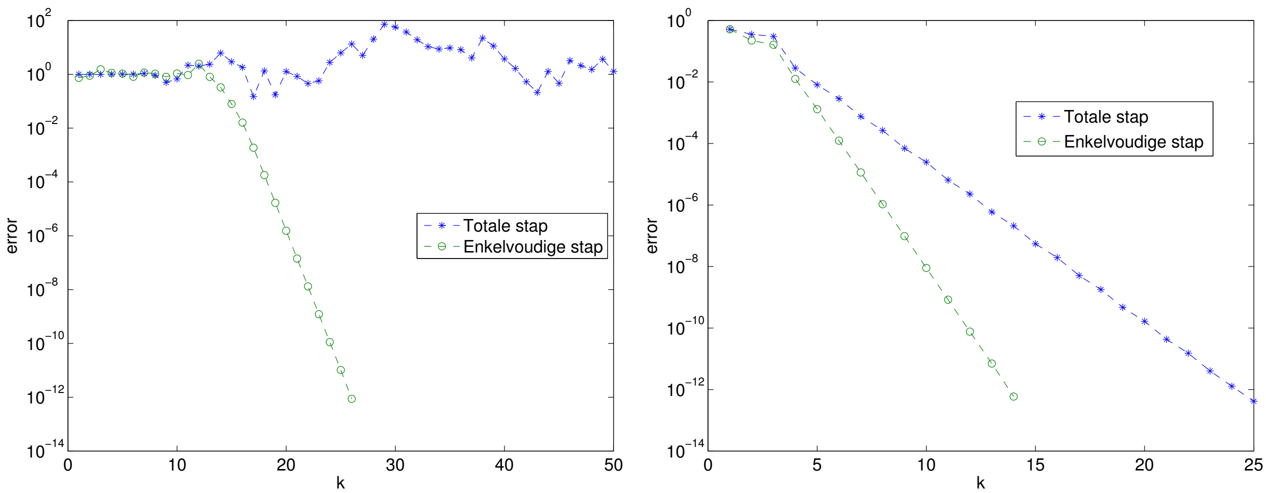
Probleem 5*. De inverse van een 2×2 matrix voldoet aan de volgende formule

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Maak hiervan gebruik om de formules (3.13) aan te tonen in het handboek bij "Bijzonder geval $n = 2$".



Figuur 3: Vereenvoudigde Newton Raphson Probleem 4



Figuur 4: Vereenvoudigde Newton Raphson Probleem 4