



Numerieke modellering en benadering (B-KUL-H01P4a)

Professoren

S. Vandewalle, M. Van Barel

Auteurs

Seppe Duwé

Bijdragers

Xavier Dejager

Inhoudsopgave

1	Inleiding (les 1)	1
1.1	Situering	1
1.1.1	Voorbeeld: benadering van een continue functie	3
1.1.2	Voorbeeld: benaderen discrete functie	5
1.1.3	Keuze benaderingsfuncties	6
2	Benaderingstheorie (les 1 en 2)	7
2.1	Overzicht	7
2.2	Metrische ruimte $\rho(x, y)$	8
2.2.1	Voorbeelden	9
2.3	Genormeerde ruimte $ \vec{x} $	10
2.3.1	Voorbeelden	10
2.3.2	Beste benadering	11
2.3.3	Convexiteit	11
2.4	Unitaire ruimte (\vec{x}, \vec{y})	12
2.4.1	Verband met vorige ruimte	13
2.4.2	Voorbeelden	13
2.4.3	Orthogonaliteit	14
2.5	Euclidische ruimte	15
2.5.1	Orthogonale vectoren	16
2.5.2	Gram-Schmidt	17
3	Veeltermbenadering (les 3)	19
3.1	Continue benadering	19
3.2	Discrete benadering	19
3.3	Klassieke basis	20
4	xx	23
4.1	x	23
5	xx	25
5.1	x	25
6	xx	27
6.1	x	27

7 Oefenzittingen	29
7.1 Oefenzitting 1 - Benaderingstheorie	30
7.1.1 Oplossingen	37

Voorwoord

Dit document bevat een beknopte samenvatting van het boek en de notities van de jaren 2016-2018. Voor de Harry Potter fans, ooit als eens in het boek van de half-bloed prins willen lezen..., of voor de 'Wat als' fans → https://www.youtube.com/watch?v=eiz0d7_d9pA. Dit document bevat handige info voor het examen. De cursus wordt gedoceerd door 2 docenten, Prof. Van Barel Marc & Prof. Vandewalle Stefan. En bestaat uit 16 lessen, 8 oefenzittingen en 2 opgaves (Matlab of Python), eerste 8 lessen worden gegeven door Prof. Vandewalle, de laatste 8 lessen door Prof. Van Barel.

De broncode en de laatste versie van dit document bevinden zich op <https://github.com/seppeduwe/NMEB>. We moedigen toekomstige lezers aan bij te dragen aan de ontwikkeling van dit document.

De proffen

Beiden behoren ze tot NUMA (Numerieke analyse en toegepaste wiskunde) afdeling van het departement computerwetenschappen, Prof. Vandewalle houdt zich bezig met ontwikkelen van rekentechnieken in het domein van numerieke wiskunde. Prof. Vandewalle zijn expertise is vooral in numerieke methodes voor het oplossen van differentiaal vergelijken alsook in de wiskunde van computergesteund design. Prof. Van Barel gespecialiseerd in de numerieke wiskunde en dan vooral in de numerieke lineaire algebra, oplossen van stelsel, eigen waarde problemen, kleinste kwadraten problemen. Voor het deel van Prof. Vandewalle is er een cursus beschikbaar in de Acco, geen slides en notities op het bord. Voor het deel van Prof. Van Barel zijn slides beschikbaar op Toledo en wordt het boek "Numerical Linear Algebra - Lloyd N. Trefethen David Bau" aangeraden.

Evaluatie

Klassiek examen, 2 docenten tegelijk aanwezig, 1 examen voor de 2 delen. 4 tal vragen (bestaande uit 1 bewijs en overzichtsvragen), schriftelijke voorbereiding, bij beiden docenten langsgaan. Practica's tellen voor 4/20 punten mee. Moet voor het praktisch en theoretisch gedeelte slagen.

Syllabus

De syllabus bevindt zich op <https://onderwijsaanbod.kuleuven.be/syllabi/n/H01P3AN.htm>

Doelstellingen

Deze cursus behandelt een aantal belangrijke numerieke methoden en algoritmen die toepassing vinden in verschillende ingenieursdisciplines. De student krijgt een overzicht in de numerieke eigenschappen van deze algoritmen, hun complexiteit, nauwkeurigheid en betrouwbaarheid. De student leert zo het kritisch evalueren van algoritmen zodat hij een gefundeerd oordeel kan vormen over voor- en nadelen van alternatieve algoritmen. De cursus besteedt ook aandacht aan het gebruik van deze algoritmen in toepassingen. De student leert hierdoor numerieke resultaten correct te interpreteren. De student verwerft hierdoor de nodige kritische wetenschappelijke houding binnen dit onderzoeksdomein. In de practica en in de oefenzittingen gebruikt de student de programmeeromgeving Matlab. De resultaten die de student bekomen heeft in de practica worden via een verslag gerapporteerd. Dit is een oefening in schriftelijk rapporteren. Door in de hoorcolleges en oefenzittingen een aantal voorbeelden te geven, wordt de link gelegd met het desbetreffende onderzoek.

Onderwijsleeractiviteiten

4 sp. Numerieke modellering en benadering: hoorcollege (B-KUL-H01P3a)

1. Basisbegrippen

opfrissen en verder uitwerken van begrippen uit de (numerieke) wiskunde: vector-en matrix-norm, scalair product, orthogonaliteit, stabiliteit, conditie.

2. Matrix-factorisatie-algoritmen

- toepassingen: opstellen van kleinste-kwadraten-benaderingen, multilineaire regressie, tijdreeksanalyse, numerieke voorspelling
- herhaling van begrippen uit de cursus numerieke wiskunde: factorisatie van algemene en symmetrisch positief-definiete matrices (LU- en Cholesky-decompositie)
- orthogonale factorisatie: QR-decompositie, Gram-Schmidt orthogonalisatie
- oplossen van overgedetermineerde stelsels

3. De snelle Fourier-transformatie

- toepassingen: signaalverwerking (digitale filters, spectrale analyse), beeldverwerking (ruisverwijdering, compressie met JPEG en MPEG)
- definitie en eigenschappen van de discrete Fourier-transformatie (DFT)
- de snelle Fourier-transformatie (FFT): afleiding, complexiteit, implementatie
- varianten: discrete cosinustransformatie (DCT), DST, meerdimensionale DFT.

4. Benaderen en ontwerpen met splines

- toepassingen: reverse-engineering, modelleren van meetwaarden, computergesteund geometrisch ontwerp van krommen en oppervlakke
- definitie, eigenschappen, voorstelling van splinefuncties en B-spline basisfuncties

- benaderen met behulp van splines: interpolatie en vereffening volgens verschillende criteria (kleinste kwadraten, smoothing)
- computergesteund geometrisch ontwerp: Bzier-, spline- en NURBS-krommen en oppervlakken.

5. Krylov deelruimtemethoden

- toepassingen: oplossen van grote ijle stelsels in numerieke simulatie
- iteratieve methoden: lineaire en niet-lineaire technieken
- het begrip Krylov-deelruimte
- twee basismethoden: toegevoegde gradint-methode (CG = Conjugatie Gradient) en GMRES (Generalised Minimal Residual Method)
- preconditionering: doel, principes.

6. Eigenwaarden- en singuliere waarden-ontbinding

- toepassingen: stabiliteitsanalyse, modale analyse, modelreductie, bewerkingen op grafen (partitionering, ordening, PageRank)
- enkele eigenschappen (multipliciteit, Schurvorm, sensitiviteit)
- berekening van enkele geselecteerde eigenwaarden van (grote) matrices: deelruimte-iteratie, inverse iteratie, Rayleigh quotient.
- QR-algoritme
- berekenen van de singulierewaardenontbinding (beknopt).

1.2 sp. Numerieke modellering en benadering: oefeningen (B-KUL-H01P4a)

In elke zitting wordt Matlab gebruikt. Daarbij wordt de nadruk gelegd op de ontwikkeling van efficiënte Matlab code (bv. door het vermijden van de inverse te berekenen, gebruik maken van vectorbewerkingen, ...) en het schrijven van uitbreidbare/herbruikbare code.

Een mogelijke invulling van de oefenzittingen is als volgt: Zittingen 1, 2 en 4 bevatten telkens een 'pen en papier' gedeelte waarbij er meer theoretische oefeningen uitgewerkt worden.

1. Zitting 1: QR-factorisatie en kleinste-kwadratenproblemen

- hoort bij deel 2 uit 'Numerical Linear Algebra' van L.N. Trefethen, D. Bau
- inhoud/doelstellingen:
 - doorgronden algoritmes voor het opstellen van een QR-factorisatie met behulp van Householder en Givens transformaties
 - problemen met numerieke afrondingsfouten bij Householder reflecties en normaalvergelijkingen
 - een toepassing uitwerken op een uitbreiding van de theorie uit de cursus naar snelle Givenstransformaties

2. Zitting 2: Conditie van kleinste-kwadratenproblemen en stabiliteit van kleinste-kwadratenalgoritmes

- hoort bij deel 3 uit 'Numerical Linear Algebra' van L.N. Trefethen, D. Bau
- inhoud/doelstellingen:
 - opfrissing SVD
 - begrip van theorem 18.1:
 - * theoretische uitwerking & illustratie van de betekenis van de parameters (conditiegetal, η , $\cos(\theta)$) uit theorem 18.1
 - * ontwikkeling van een Matlab programma om de conditie van verschillende soorten matrixproblemen te onderzoeken
 - onderscheid tussen conditie en stabiliteit

3. Zitting 3: Eigenwaardenproblemen

- hoort bij deel 5 uit 'Numerical Linear Algebra' van L.N. Trefethen, D. Bau
- inhoud/doelstellingen:
 - convergentiesnelheid QR-methode numeriek onderzoeken
 - inverse iteratie (algoritme 27.2) uitwerken, conditie en stabiliteit praktisch onderzoeken
 - probleem conditie van defectieve matrices

4. Zitting 4: Iteratieve methoden

- hoort bij deel 6 uit 'Numerical Linear Algebra' van L.N. Trefethen, D. Bau
- inhoud/doelstellingen:
 - betekenis theoretische convergentiesnelheid CG (formules 38.9 en 38.9) onderzoeken (theoretisch + in Matlab)
 - uitwerking van de methode van de steilste helling (theoretische eigenschappen bewijzen, praktische vergelijking in Matlab met CG)
 - implementatie Arnoldi iteraties

Opmerking: zitting 3 en 4 kunnen omgewisseld worden naargelang het onderwerp van het practicum.

5. Zitting 5: Kleinste-kwadratenbenaderingen, deel 1

- hoort bij hoofdstukken 2-3 uit Acco cursus
- inhoud/doelstellingen:
 - grafische illustratie kleinste-kwadratenbenaderingen
 - implementatie van kleinste-kwadratenbenaderingen als oplossing van een normaalstelsel en als oplossing van een overgedetermineerd stelsel
 - toepassing: benaderen van een kromme

6. Zitting 6: Kleinste-kwadratenbenaderingen, deel2

- Deze oefenzitting maakt gebruik van de code ontwikkeld in oefenzitting 5. Daarnaast hoort er bij deze oefenzitting een invulblad waarop de studenten hun resultaten noteren. Bij de volgende oefenzittingen krijgen de studenten hun verbeterde resultaten terug en worden de meest voorkomende fouten besproken.
- inhoud/doelstellingen:
 - onderscheid tussen kleinste-kwadratenbenaderingen en interpolerende veeltermbenadering
 - toepassing van kleinste-kwadratenbenaderingen op enkele niet-triviale problemen met onderzoek van de nauwkeurigheid

7. Zitting 7: FFT en DFT

- hoort bij hoofdstuk 4 uit Acco cursus
- inhoud/doelstellingen:
 - betekenis Fourier frequenties
 - uitwerking compressie van een foto m.b.v. FFT
 - implementatie van een DFT-vermenigvuldigingsalgoritme

8. Zitting 8: Geometrische modellering

- hoort bij hoofdstuk 6 uit Acco cursus
- inhoud/doelstellingen:
 - onderzoek en vergelijking van de eigenschappen van de verschillende soorten curven die gebruikt worden voor geometrische modellering

Oefenzitting 8 maakt geen gebruik van Matlab, maar gebruikt een Java-pakket voor de visualisatie van de verschillende types curven.

Bij oefenzittingen 7 en 8 worden de aanwezigheden genoteerd.

0.8 sp. Numerieke modellering en benadering: practica (B-KUL-H01Z3a)

Algemene doelstellingen:

- dieper inzicht in theorie verwerven
- ontwikkeling van een efficiënte Matlab implementatie
- ontwerp van nieuwe, gelijkaardige numerieke algoritmen als gezien in de theorie
- schrijven van wetenschappelijk verslag

Voorbeeld van mogelijke planning en onderwerpen:

- Eerste practicum (+- 20 u, 4 weken): thema iteratieve methoden of eigenwaardenproblemen (opgave: 5de week)
- Tweede practicum (+- 10u, 2 weken): thema interpolerende of kleinste-kwadratenbenaderingen met splines of trigonometrische veeltermen (opgave: 11de week)

Dit document valt onder de MIT licentie.

Copyright (c) 2018 Seppe Duwé Xavier Dejager

Permission is hereby granted, free of charge, to any person obtaining a copy of this software and associated documentation files (the "Software"), to deal in the Software without restriction, including without limitation the rights to use, copy, modify, merge, publish, distribute, sublicense, and/or sell copies of the Software, and to permit persons to whom the Software is furnished to do so, subject to the following conditions:

The above copyright notice and this permission notice shall be included in all copies or substantial portions of the Software.

THE SOFTWARE IS PROVIDED "AS IS", WITHOUT WARRANTY OF ANY KIND, EXPRESS OR IMPLIED, INCLUDING BUT NOT LIMITED TO THE WARRANTIES OF MERCHANTABILITY, FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE AND NONINFRINGEMENT. IN NO EVENT SHALL THE AUTHORS OR COPYRIGHT HOLDERS BE LIABLE FOR ANY CLAIM, DAMAGES OR OTHER LIABILITY, WHETHER IN AN ACTION OF CONTRACT, TORT OR OTHERWISE, ARISING FROM, OUT OF OR IN CONNECTION WITH THE SOFTWARE OR THE USE OR OTHER DEALINGS IN THE SOFTWARE.

Lijst van figuren

1.1	Situering	2
1.2	Fout van de Maclaurin-benadering van graad 4 voor e^x	4
1.3	Fout van een interpolerende benadering van graad 4 voor e^x	5
1.4	Fout van een kleinste-kwadraten benadering van graad 4 voor e^x met $w(x) \equiv 1$. . .	5
1.5	Fout van een kleinste-kwadraten benadering van graad 4 voor e^x met $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.	6
2.1	Benaderingstheorie	7
2.2	Onion ruimtes	8
2.3	Chordale afstand tussen punten p_1 en, p_2	9
2.4	Translatie-invariantie en homogeniteit van een afstand in een vectorruimte	11
2.5	Beste benadering voor het punt \vec{f} volgens de 1-norm,2-norm, ∞ -norm.	11
2.6	Eenheidscirkels in het vlak	12
2.7	Meervoudigheid van de beste benadering in de 1-norm	12
2.8	Parallelogramgelijkheid in het vlak	13
2.9	Loodrecht	15
2.10	e^x (uit oneindig dimensionale deelruimte) benaderen door een veelterm van graad 4 (5 dimensionale deelruimte)	16
2.11	Euclidische ruimte loodrecht	16
2.12	SPD Matrix	17
3.1	Benaderingstheorie	19
3.2	Max residu met een monomiale basis	20
3.3	Max residu met een orthogonale MonomialeBasis	21
3.4	Bewijs k enkelvoudige nulpunten	22

Hoofdstuk 1

Inleiding (les 1)

1.1 Situering

De cursus situeert zich in het domein: Technisch wetenschappelijk rekenen, in het Engels Scientific Computing/Computational science and engineering.

Technologische vraag \rightarrow wiskundig model \rightarrow Numeriek model \rightarrow Algoritme keuze \rightarrow Software implementatie

Technologische vraag wat zijn de krachten die inwerken op een gebouw bij een bepaalde windbelasting, wat is de vervorming van een wagen als hij inrijdt tegen een muur, wat staat er op digitaal ingescand beeld.

Wiskundig model een differentiaal vergelijking, groot stelsel, optimalisatieprobleem.

Numeriek model wiskundig model in het algemeen niet oplosbaar, van zo een aard dat wiskundige formules inzicht geven maar niet analytisch kan uitgerekend worden, een numeriek model worden opgesteld, een heel groot stelsel.

Algoritme keuze gericht op het probleem

Software implementatie laat uitvoeren op computer, krijgt veel getallen, aan de hand hiervan probleem oplossen.

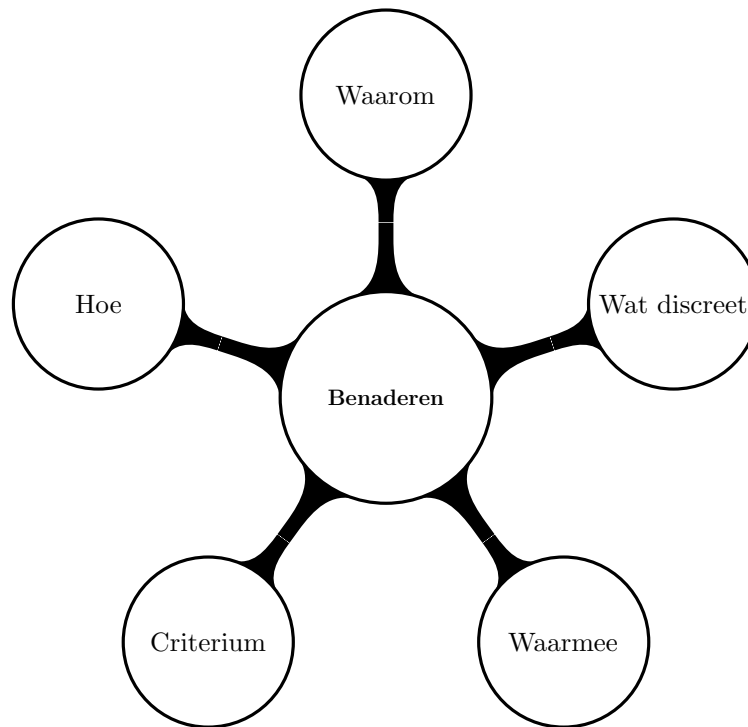
Numeriek modellering gaan we in eerste deel van de cursus doen. Hoe van wiskundig model naar numeriek problem. Vaak dingen die geformaliseerd zijn in oneindig dimensionale ruimte, functie-ruimte. De computer rekt met getallen, dus discretiseren, dan kom je bij de algebra terecht, bij de numerieke modellen (matrices, vectoren). Voor dat numeriek model kiest men een algoritme dit is deel 2 van de cursus.

Toepassingen (de wiskunde) die we gaan bekijken:

- signaal verwerking
- beeld verwerking / restoratie / herkenning / compressie

- datamining (scanner beelden vergelijken met databank)
- CAD (Computer-aided design)

Benaderen algemene aspecten



Figuur 1.1: Situering

Wat functies continu, discreet 1D/2D/3D

Waarmee Veeltermen, trigonometrische functies, splines (veeltermen die aan elkaar vastgangeren) basis van tekenprogramma's/tekenfilms, rationale functies, wavelets (compressie in de digitale beeldverwerking, wordt niet besproken in deze cursus), neurale netwerken, support vector machine.

Criterium Hoe ga je de kwaliteit van zo een benadering evalueren. Een maatstaf nodig, om te zeggen welk van de 2 benadering beter is (= de kwaliteit van de benadering). Bv kleinste kwadratenbenadering, minimax, Tayler expantie, interpolatie,...

Hoe

Waarom Compressie beeld, dominante periode te herkennen, beeld restoratie, ruis reductie, parameters in wiskunde model te identificeren.

1.1.1 Voorbeeld: benadering van een continue functie

”Bepaal een veeltermbenadering van graad 4 voor de functie e^x over $[-1, 1]$.”

Examen 1.1.1. Bespreek het opstellen van een n -de graads Taylor-, interpolatie- en kleinste kwadraten veelterm benadering voor een continue functie $f(x)$ op het interval $[a, b]$. Hoe stel je de benadering op? Hoe ziet de foutenkromme er uit? Wat zijn de voor- en nadelen van de methodes? Bewijs de stelling over het aantal en de ligging van de nulpunten van de foutenkromme bij de kleinste kwadratenbenadering. Waarom is de kennis van de nulpunten nuttig? Welk van die methodes zijn bruikbaar voor het benaderen van een discrete functie? Bijvragen: Geef andere voorbeelden van interpolatieveeltermen? (Newton, Vandermonde) Op welke manier wordt de kleinste kwadratenvergelijking opgelost voor continue functies? (Normaalstelsel) Hoe evalueer je de nulpunten van de benaderende fout $r_n = \phi_{n+1}(x)$? (Eigenwaarden van tridiagonaal matrix α , ν , λ)

Taylor-ontwikkeling in $x = 0$ (dus Maclaurin) Functiewaarden in punt 0 alsook van 1 tot 4de orde afgeleide. Onder alle veeltermen is dit de veelterm die het meeste afgeleiden gemeenschappelijk

$$\text{heeft. } f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

$$y_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$$

$$r(s)(\text{residu}) = e^x - y_4(x)$$

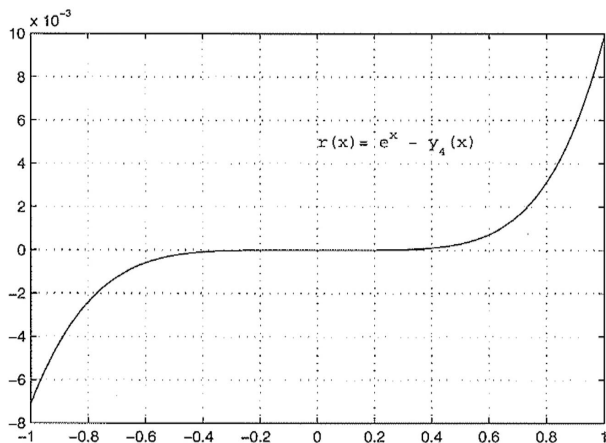
Nadeel

- Exact in 0, een fout die heel traag stijgt en het grootst aan de randen, Foutenkromme ongelijkmatig verdeelt, randen 10^{-2} en in center 10^{-7} . Liever foutenkromme evenwichtiger.
- Fout kleiner maken door meer termen te nemen, maar dan ben je nog nauwkeuriger in het midden waar je al nauwkeurig genoeg bent.
- Echt veel termen moet meenemen, bij e^x wordt het snel heel klein, elke bijkomende term is veel kleiner als de laatste term, de fout die gemaakt wordt is gelijk aan de eerste term die verwaarloost wordt. Bij $\ln(1+x)$ is een Taylor ontwikkeling die heel traag converteert, echt veel termen (termen blijven lang groot) nodig om een bepaalde nauwkeurigheid te bekomen. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$

Interpolatie kies een aantal punten, veelterm graad 4 \rightarrow 5 punten nodig van x_1 tot x_5 , mag equidistant liggen of meer geclusterd. Deze punten berekenen op 1 of andere manier (natuurlijk niet met de routine die we nu aan het opstellen zijn), bv Taylor ontwikkeling met 100 termen, veel werk maar niet erg. Belangrijk dat het gebruik heel snel kan. Zodat de veelterm $y_4(x)$ de juiste functiewaarden aanneemt in deze 5 punten (unieke oplossing). Keuze: hoe veeltermen voorstellen? Welk rekenwerk je hebt. Methode:

Vandermonde (monomiale basis) $y_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ en eis dat $y_4(x_1) = e^{x_1}, y_4(x_2) = e^{x_2}, y_4(x_3) = e^{x_3}, y_4(x_4) = e^{x_4}, y_4(x_5) = e^{x_5} \rightarrow$ stelsel

$$\text{Matrix: } \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$



Figuur 1.2: Fout van de Maclaurin-benadering van graad 4 voor e^x

Newton $y_4(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + a_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$ Voordeel a_k zonder stelsel op te lossen, via gedeelde differenties.

Lagrange

Formularium 1.1.1. $y_4(x) := \sum_{k=1}^5 e^{x_k} l_k(x)$

Geeft een expliciete oplossing, geen rekenwerk meer. Gemakkelijk op te stellen moeilijk te evalueren. Veelterm wordt geschreven als een lineaire combinatie van de functiewaarden e^{x_k} (gekende getallen) met de basisfuncties (functies veelterm van graad 4 zodat $l_i(x_j) = 0$ indien $i \neq j$ en 1 indien $i = j$)

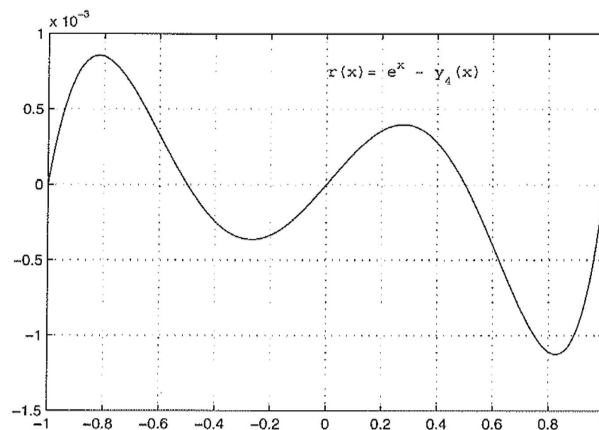
Formularium 1.1.2. $l_k(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_k-x_0)} \cdots \frac{(x-x_{k-1})}{(x_k-x_{k-1})} \frac{(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k+1})} \cdots \frac{(x-x_N)}{(x_k-x_N)}$

$r(s)(\text{residu}) = e^x - y_4(x)$ Residu 0 in de meetpunten. Punten wat verschuiven verandert de foutencurve. Foutencurve overall even groot. Nadeel, moeilijk om de punten te selecteren. Waar kies je de punten? Functie ergens lokaal vreemde vorm? Wat als we hier geen punten zetten, dan mist men deze vorm. Nog een nadeel opstellen zorgt voor afrondingsfouten. Veeltermcoëfficiënten gevoelig voor afrondingsfouten.

Minimax verschil met vorige, hier houdt men rekening met volledige functie/interval, waardoor we geen lokale pieken/singulariteiten missen. $y_4(x) = \arg \min_{y_4 \in P_4[-1,1]} \max_{x \in [-1,1]} |e^x - y_4(x)|$ Veelterm van

graad 4, 5 coëfficiënten, element van 5 dimensionale ruimte, zoek maximum in absolute waarde in interval $[-1; 1]$, is een getal dat we willen minimaliseren, zoek minimum in de verzameling van alle veeltermen van y_4 die behoren tot de ruimte van de veelterm die gaat van $[-1; 1]$. De gezochte veelterm is waar het maximum geminimaliseerd wordt. Is een optimalisatiecriterium in een 5 dimensionale ruimte.

Kleinste kwadraten Ook een optimalisatie probleem, maar nu afwijking tussen benadering en de te benaderen functie anders formuleren. Verschil met mini max, nu wel makkelijk uit te



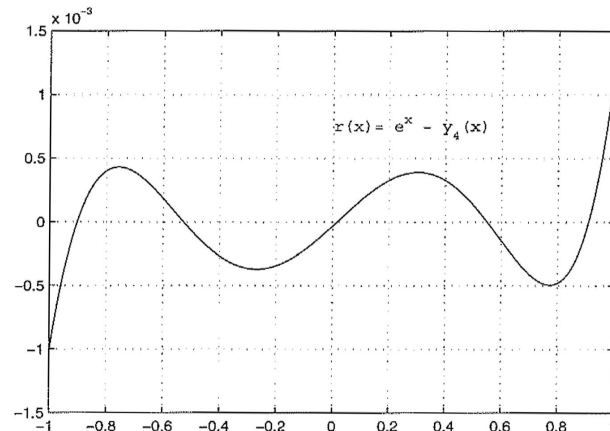
Figuur 1.3: Fout van een interpolerende benadering van graad 4 voor e^x

rekenen $y_4(x) = \arg \min_{y_4 \in P_4[-1,1]} \int_{-1}^1 w(x)(e^x - y_4(x))^2 dx$

Keuze $w(x)$ geeft aan waar je fout liefst kleinst wilt hebben, gewichtsfunctie

$w(x) \equiv 1 \rightarrow$ legendre

$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \rightarrow$ chebyshev, randen oneindig veel gewicht



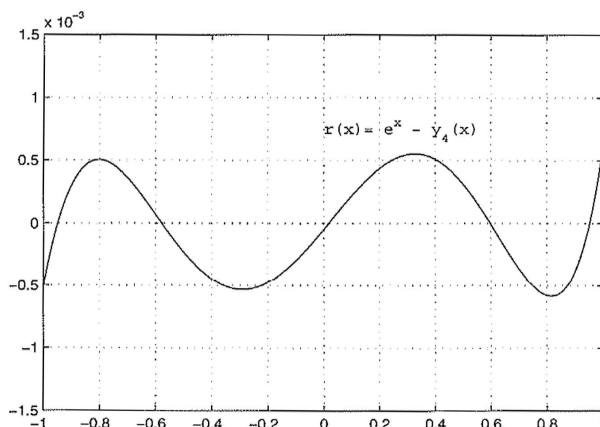
Figuur 1.4: Fout van een kleinste-kwadraten benadering van graad 4 voor e^x met $w(x) \equiv 1$

1.1.2 Voorbeeld: benaderen discrete functie

Zoek een veelterm die goed aansluit bij de dingen je opgemeten hebt.

Taylor-ontwikkeling NIET Afgeleide nodig, van continue functie hier niet

Interpolatie NIET Geen reden om exact door de punten te gaan. Of als je miljoen punten hebt dan benadering van veelterm graad miljoen, niet te evalueren. Welke punten selecteren en hoeveel?



Figuur 1.5: Fout van een kleinste-kwadraten benadering van graad 4 voor e^x met $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

Minimax $y_n(x) = \arg \min_{y \in P_n} \max_{i=1, \dots, N} |f_i - y(x_i)|$ Als meetwaarden vrij nauwkeurig is, anders vermengvuldigen met $\frac{1}{\text{meetfout}}$

Kleinste kwadraten $y_4(x) = \arg \min_{y \in P_n} \sum_{-1}^1 w(x)(f_i - y(x))^2 dx$

1.1.3 Keuze benaderingsfuncties

Waarmee ga je benaderen? Veelterm niet altijd geschikt, altijd oneindig links en rechts dan komt ie naar de oorsprong schommelt een paar keer en dan naar oneindig. Niet alles wat we willen benaderen heeft deze vorm. Onze (lineaire) benadering zal altijd combinatie zijn van gekende functies en de coëfficiënten. $y(x) = \sum_{k=0} a_k \phi_k(n)$ waar $\phi_k(n)$ gekend is.

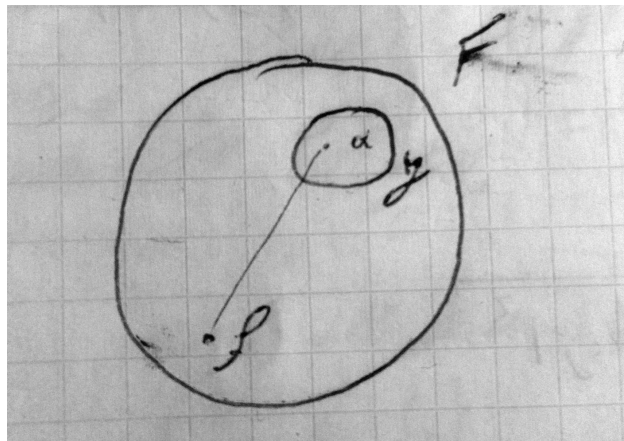
Waarom andere basissen:

- eenvoudig
- vorm
- fysische toepassing
- numeriek, nauwkeurigheid (afrondingsfouten, conditiegetal bij veeltermen, zeker bij monomiale basis zeer slecht)

Hoofdstuk 2

Benaderingstheorie (les 1 en 2)

2.1 Overzicht



Figuur 2.1: Benaderingstheorie

$F = C[-1, 1]$ verzameling continue functies op $-1, 1$ en $y = P_4[-1, 1]$ verzameling van veeltermen met graad 4 of minder op $-1, 1$. f functie dat we willen benaderen.

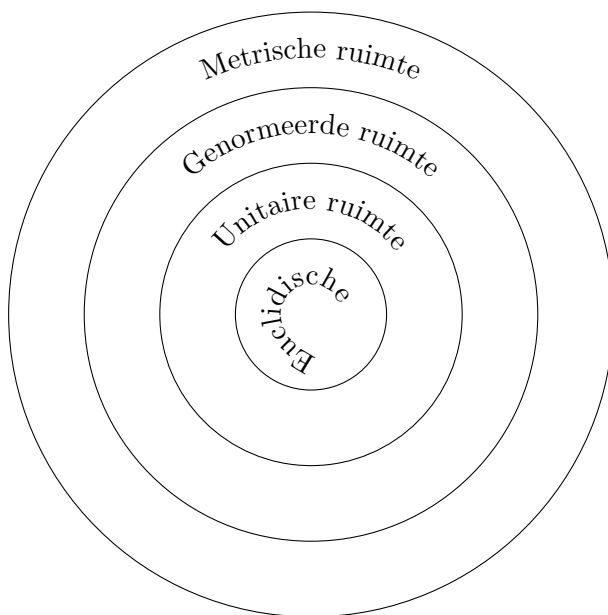
Examen 2.1.1 (Geef de definitie van een metrische, genormeerde, strikt genormeerde, unitaire en euclidische ruimte. Geef het verband tussen deze verschillende ruimten. Wat zijn de verbanden hiertussen? Welke ruimte wordt $C[a, b]$ met de L2-afstand, de triviale afstand, de max-afstand. Bespreek het belang van deze ruimten in de benaderingstheorie). *Aan de verzameling F een bepaalde structuur/eigenschappen opleggen. Hoe meer eigenschappen hoe meer dingen aantonen/analyseren:*

Metrische ruimte $\rho(x, y)$ afstand meten tussen 2 punten. Beste benadering definiëren alsook de existentie / bestaans vraag.

Genormeerde ruimte $\|\vec{x}\|$ definiëren we norm / grootte, spreken we van grootte van de fout. Alsook aantal benaderingen, de uniciteit (= zijn er 1 of meer oplossingen).

Unitaire ruimte (\vec{x}, \vec{y}) ruimte met scalair product, loodrechte stand (orthogonaliteit) en strict genormeerd. Uitspraak over karakteristiek, weet je waar beste benadering ligt? Naarlaten van een loodlijn op de benaderingsruimte (de orthogonale projectie).

Euclidische ruimte is een unitaire ruimte met een eindige dimensie, je hebt een basis, je kan een punt kenmerken door een paar getallen. Algoritme / berekening.



Figuur 2.2: Onion ruimtes

2.2 Metrische ruimte $\rho(x, y)$

Metriek / afstandsfunctie $\rho(x, y)$ met $\rho : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$

1. $\rho(x, y) \geq 0$ positief
2. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ definit
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ symmetrie
4. $\rho(x, y) \leq \rho(z, x) + \rho(z, y)$ driehoeksongelijkheid

De eerste en derde kunnen afgeleid worden uit de anderen.

De afstand gedefinieerd als: $\rho(x, D) = \inf \{\rho(x, y) | y \in D\}$ Infimum omdat kleinste niet altijd bestaat.

d is 'een' (er kan meer als 1 bestaan, bv cirkel) beste benadering in d voor x als: $\rho(x, d) = \rho(x, D)$. Een beste benadering bestaat niet altijd.

2.2.1 Voorbeelden

Niet-klassieke Chordale afstand in \mathbb{C} De riemann bol, door de noordpool te verbinden met punt z , verkrijgt men een nieuw punt waar het de bol snijdt, de chordale afstand is de afstand tussen de nieuwe verkregen punten op de bol.

$$\rho(0, \text{noordpool}) = \infty$$

$$\rho(0, \text{zuidpool}) = \text{oorsprong}$$

$$\rho(0, \infty) = 2$$

$$\rho(0, 1) = \sqrt{2}$$

Triviale afstand Altijd 1 behalve als deze 0 moet zijn. Enkel in theorie gebruikt, om stellingen te ontkrachten.

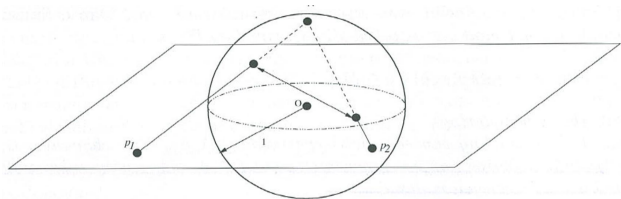
$$\rho(x, y) = 1 \text{ als } x \neq y \quad \rho(0, \infty) = 1$$

$$\rho(x, y) = 0 \text{ als } x = y \quad \rho(0, 0(0, 1)) = 1$$

Silvermanafstand $\rho(A, B) = \#A \Delta B = \#(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ Geeft de mate nabijheid van 2 groepen van studenten. 0 als groepen volledig overlappen.

Hamming afstand $\rho(0|0|, |00|) = 2$

Frobenius afstand Geeft de mate van nabijheid tussen 2 matrixen weer. $\sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij} - b_{ij}|^2}$



Figuur 2.3: Chordale afstand tussen punten p_1 en p_2

in continue functieruimten $C[a, b]$

L_∞ -afstand of max-afstand (gebruikt in minimax benadering): $\max_{x \in [a; b]} |f(x) - g(x)| = \rho(f, g)$

Check voorwaarden afstand:

$$f(x) - g(x) = f(x) - h(x) + h(x) - g(x)$$

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$$

$$\max |f(x) - g(x)| \leq \max |f(x) - h(x)| + \max |h(x) - g(x)|$$

$$\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$$

L_p afstand

Examen 2.2.1. $L_2[0, 1]$ $L_p[a, b]$ verzameling van functieklassen (functies die bijna overal gelijk zijn) die ook discontinue functies toelaat uitbreiding van $C[a, b]$. Verzameling van alle functies, waarvoor geldt dat $\sqrt[p]{\int_a^b w(x) |f(x) - g(x)|^p dx}$ aan alle voorwaarden voor een afstand voldoet, met $p \geq 1$ om aan laatste voorwaarde te voldoen.

$f = g \iff f(x) = g(x)$ b.o. (bijna overal of a.e. almost everywhere) $\rho(f, g) = 0$ en toch $f \neq g$. We maken geen onderscheid tussen functie f en g die bijna overal gelijk zijn. Wat is bijna overal? Dit is een term afkomstig uit de maattheorie, waarmee bedoeld

*wordt: overal behalve op een voor de theorie verwaarloosbaar deel, een verzameling van maat nul. Dit kan men zien als een lintje nemen van ϵ lengte, kunnen we dit verknippen en elk van deze punten bedekken? Bv rationale punten, dit is oneindig aftelbaar (men kan ze opsommen, oneindig veel) waardoor we steeds een kleiner stukje lint kunnen nemen $\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{4}, \frac{\epsilon}{8}, \dots$
(We moeten integraal ook aanpassen van Rieman naar Lebesgue integraal.) L_2 kleinste kwadratenbenadering*

in discrete functieruimten Eindige dimensie Aantal losse punten, x_1, x_2, \dots, x_n Verzameling van al discrete functies, vectoren van functiewaarden. \mathbb{R}^N of \mathbb{C}^N , Vectoren van lengte N

Oneindige dimensie $l_p(\mathbb{R}), l_p(\mathbb{C})$

$$l_p = \sum_{i=1}^N w_i |f_i - g_i|^p < \infty$$

$$l_\infty = \max_{i=1, \dots, N} |f_i - g_i|$$

2.3 Genormeerde ruimte $\|\vec{x}\|$

1. $\|\vec{x}\| \geq 0$ positief definitie functionaal
2. $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$ positief definitie functionaal
3. $\|a\vec{x}\| = |a| \cdot \|\vec{x}\|$ homogeniteitseigenschap
4. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ driehoeksongelijkheid

Door $\vec{y} = -\vec{x}$ bekomt men van 4de voorwaarde ook de 1ste voorwaarde. $\|\vec{x} - \vec{x}\| \leq \|\vec{x}\| + \|-\vec{x}\|$
 $\|0\| \leq \|\vec{x}\| + \|-\vec{x}\|$

1. Een genormeerde ruimte is ook metrisch
 $\|\vec{x} - \vec{y}\|$ is een afstand $\rho(x, y)$
2. Zij (a, ρ) een metrische vector ruimte dan is $\rho(\vec{0}, \vec{x})$ een norm \iff
 - (a) $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \rho(\vec{x} + \vec{z}, \vec{y} + \vec{z})$ translatie-invariantie
 - (b) $\rho(a\vec{x}, a\vec{y}) = a\rho(\vec{x}, \vec{y})$ voor $a \in \mathbb{R}^+(a \geq 0)$ homogeen

De triviale afstand is niet homogeen. $\rho(x, y) = 1, x \neq y, \rho(x, y) = 0, x = y$ Wordt niet 2 indien we $a\rho(x, y)$ met $x \neq y$.

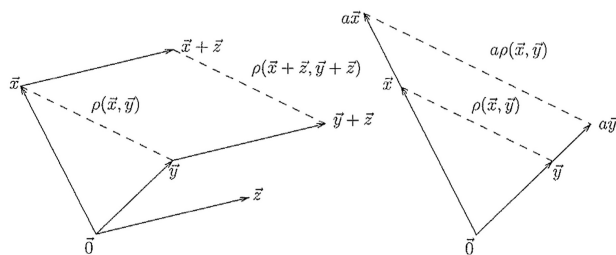
2.3.1 Voorbeelden

B[a, b] dit is de norm van de verzameling van continue functies op $[a, b]$, $\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| + |f(x) + g(x)| \leq$

$$\begin{aligned} & |f(x)| + |g(x)| \\ \max |f(x) + g(x)| & \leq \max |f(x)| + \max |g(x)| \end{aligned}$$

$$L_p[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \quad \sqrt[p]{\int_a^b w(x) |f(x)|^p dx} = \|f\|_p$$

$$\mathbb{R}^N, \mathbb{C}^N \quad \sqrt[p]{\sum_{i=1}^N w_i |f_i|^p} = \|f\|_p$$



Figuur 2.4: Translatie-invariantie en homogeniteit van een afstand in een vectorruimte

2.3.2 Beste benadering

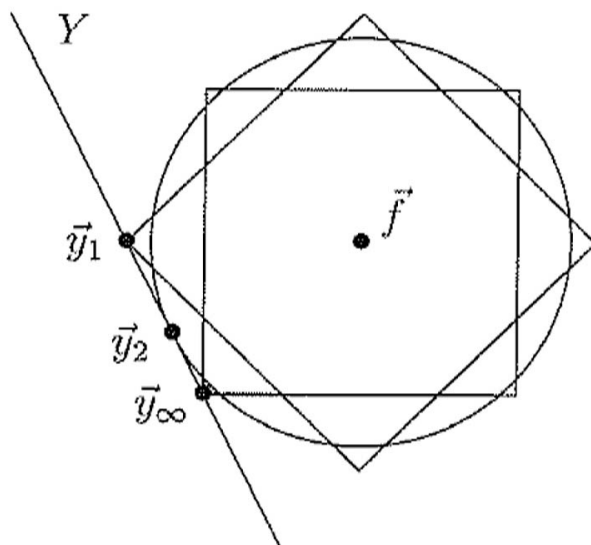
$$\tilde{B}(\vec{0}, 1) = \{(x, y) \mid \|(x, y)\| = 1\} \text{ of } \{\vec{x} \mid \|\vec{x}\| = 1\}$$

Al de punten liggen even ver naargelang de norm.

$$l_2 \quad \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

$$l_1 \quad |x| + |y| = 1$$

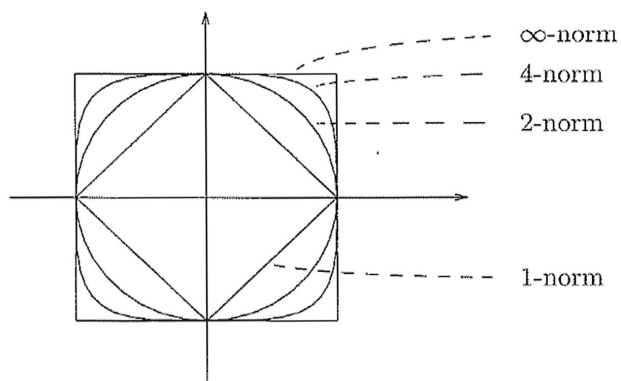
$$l_\infty \quad \max\{|x|, |y|\} = 1$$

Figuur 2.5: Beste benadering voor het punt \vec{f} volgens de 1-norm, 2-norm, ∞ -norm.

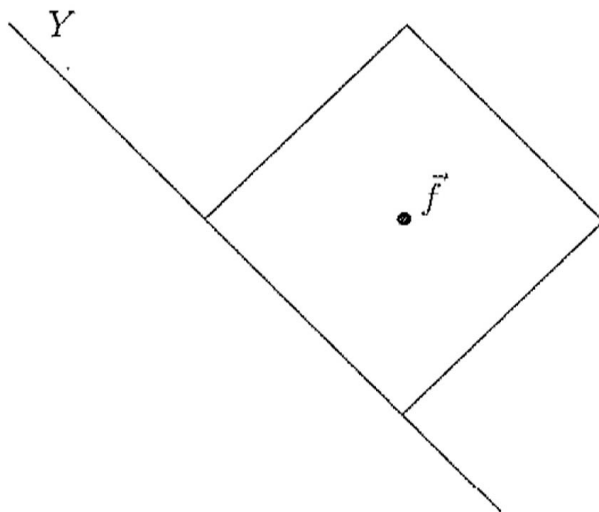
Altijd maar 1 oplossing/punt als de bol strict convex is. Anders zou het kunnen zijn dat we oneindig veel oplossingen hebben.

2.3.3 Convexiteit

Examen 2.3.1 (Genormeerde ruimte, strikt genormeerde ruimte). C is convex $\forall x_1, x_2 \in C : L(\text{lijnstuk})(x_1, x_2) \in C$



Figuur 2.6: Eenheidscirkels in het vlak



Figuur 2.7: Meervoudigheid van de beste benadering in de 1-norm

Waarom moet p steeds groter zijn als 1? C is strict convex met $L(x_1, x_2) = \{\vec{x} | \vec{x} = \lambda \vec{x}_1 + (1 - \lambda) \vec{x}_2$ met $\lambda \in ((0, 1))\}$

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in B(\vec{a}, 1)$$

$$\|\vec{a} - (\lambda \vec{x}_1 + (1 - \lambda) \vec{x}_2)\| = \|\lambda \vec{a} - \lambda \vec{x}_1 + (1 - \lambda) \vec{a} - (1 - \lambda) \vec{x}_2\| \leq |\lambda|$$

$$\lambda \|\vec{a} - \vec{x}_1\| + (1 - \lambda) \|\vec{a} - \vec{x}_2\| \leq r$$

$$\|\vec{x}_1\| = 1 = \|\vec{x}_2\| \rightarrow \left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| < 2 \rightarrow \|x_1 + x_2\| < 2$$

2.4 Unitaire ruimte (\vec{x}, \vec{y})

$$(\cdot, \cdot) : V * V \rightarrow \mathbb{R}$$

1. $(a\vec{x}, \vec{y}) = a(\vec{x}, \vec{y})$
2. $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$
3. $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$ symmetrie
4. $(\vec{x}, \vec{x}) > 0 \iff \vec{x} \neq \vec{0}$ definit

Aantal voorwaarden bij elkaar: $(\vec{x}, a\vec{y}) = \bar{a}(\vec{x}, \vec{y})$

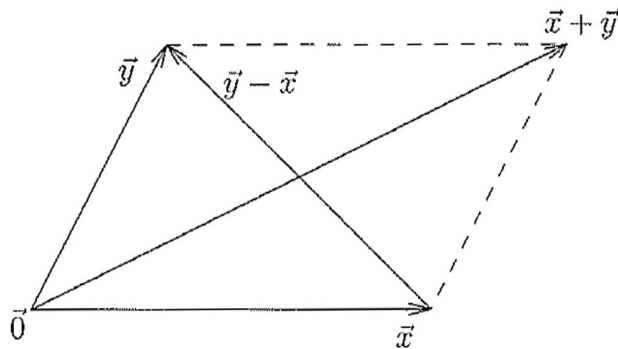
2.4.1 Verband met vorige ruimte

Cauchy-Schwarz $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} * \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})}$

Te bewijzen: $\sqrt{(x+y, x+y)} \leq \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}$

1. Een unitaire ruimte is genormeerd $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$ is een norm.
2. Zij $(A, \|\cdot\|)$ een genormeerde ruimte dan geldt dat het unitair is als de norm voldoet aan de parallellogram gelijkheid.

Formularium 2.4.1. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$
 $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$ $(\vec{x}, \vec{y}) = 1/4\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\}$ is een scalair product.



Figuur 2.8: Parallellogramgelijkheid in het vlak

3. Elke unitaire ruimte is strikt genormeerd. Uniciteit is een unitaire ruimte.
 $\left\{ \begin{array}{l} \|\vec{x}_1\| = \|\vec{x}_2\| = 1 \\ \vec{x}_1 \neq \vec{x}_2 \end{array} \right\} \rightarrow \|\vec{x}_1 + \vec{x}_2\| < 2$
 $\|\vec{x}_1 + \vec{x}_2\|^2 = 2\|\vec{x}_1\|^2 + 2\|\vec{x}_2\|^2 - \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|^2 = 4 - \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|^2 \rightarrow \|\vec{x}_1 + \vec{x}_2\|^2 < 4$
Unitair \rightarrow strikt genormeerd

2.4.2 Voorbeelden

Ruimtes die overblijven:

$$\mathbb{R}^N \mathbb{C}^N \text{ met } l_2\text{-norm} \quad (a\vec{x}, y) = a(\vec{x}, \vec{y})$$

$$(x, a\vec{y}) = \overline{(a\vec{y}, \vec{x})} = \bar{a}(\vec{y}, x) = \bar{a}(x, y)$$

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j \vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = X^T G \bar{Y}$$

$$\text{Fundamentele metrische matrix: } G = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \dots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \dots & \langle e_2, e_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \langle e_n, e_2 \rangle & \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

Controleren voor welke p aan de parallelogram gelijkheid voldoet: 2 vectoren $(1,1)$ en $(1,-1)$.

$$\|\vec{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$$

$$(x, y) = X^T G \bar{Y}$$

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x - y)^T G (x - y)} \text{ klopt dit wel?}$$

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &\stackrel{?}{=} 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \\ \|(2, 0)\|^2 + \|(0, 2)\|^2 &\stackrel{?}{=} 2\|(1, 1)\|^2 + 2\|(1, -1)\|^2 \\ (\sqrt[2]{2^2 + 0^2})^2 + (\sqrt[2]{0^2 + 2^2})^2 &\stackrel{?}{=} 2(\sqrt[2]{1^2 + 1^2})^2 + 2(\sqrt[2]{1^2 + (-1)^2})^2 \\ 4 + 4 &\stackrel{?}{=} 2 * 2^{2/p} + 2 * 2^{2/p} \\ 8 &\stackrel{?}{=} 4 * 2^{2/p} \\ 2 &\stackrel{?}{=} 2^{2/p} \rightarrow p = 2 \end{aligned}$$

Alleen $p = 2$ voldoet aan de parallelogram gelijkheid voldoet, aan al de andere is geen scalair product mee geassocieerd.

$$L_p[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \text{ met } p=2 \text{ met } L_2\text{-norm} \quad (f, g) = \int_a^b w(x) f(x) \bar{g}(x) dx$$

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_a^b w(x) f^2(x) dx}$$

$$l_2(\mathbb{R}), l_2(\mathbb{C}) \text{ met } l_2\text{-norm}$$

Ruimte die afvalt:

$$\mathbf{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \max |f(x)| \quad f(x) = x \text{ op } [0, 1]$$

$$g(x) = 1 \text{ op } [0, 1]$$

$$\begin{aligned} \max |1 + x|^2 + \max |x - 1|^2 &\neq 2 \max |x|^2 + 2 \max |1|^2 \\ 2^2 + 1 &\neq 2 + 2 \end{aligned}$$

2.4.3 Orthogonaliteit

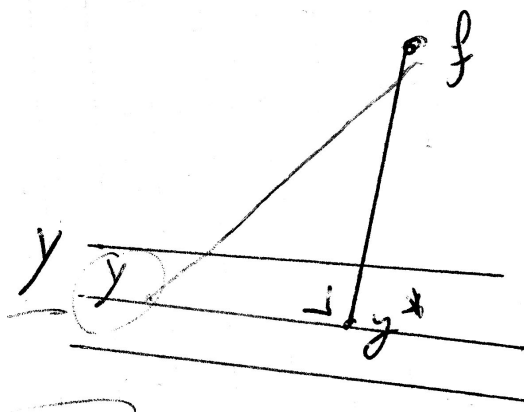
1. $\vec{x} \perp \vec{y}$ als $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$
2. $\sin \perp \cos$ als $(\sin, \cos) = 0$
3. $\sin \perp 1$

4. $x \perp D$ als $x \perp y$ met $y \in D$

5. Pythagoras als $\vec{x} \perp \vec{y} \rightarrow \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$

$$(x + y, x + y) = (x, x + y) + (y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = (x, x) + (y, y)$$

Karakterisatie van beste benadering: Zij u een deelvectorruimte van een unitaire ruimte F en zij $y^* \in y$ zodat $f - y^* \perp y$ dan is y^* de beste benadering voor f in y . $\|f - y\|^2 = \|f - y^*\|^2 + \|y - y^*\|^2$



Figuur 2.9: Loodrecht

$$\|f - y\|^2 \geq \|f - y^*\|^2$$

$$\rho(f, y) \geq \rho(f, y^*)$$

2.5 Euclidische ruimte

Euclidische ruimte = unitair + eindige dimensionaal, er bestaat een basis, elk element in de ruimte kunnen voorstellen door een aantal getallen (coördinaten). Elke vector kan geschreven worden in de benaderingsruimte plus wat overschiet. $\vec{x} = \vec{x}_d + \vec{x}_t$ met \vec{x}_t residu, benaderingsfout met \vec{x}_d in D_m

$$\vec{x}_t \perp D_m$$

$\vec{x}_d = \sum_{k=0}^m a_k \vec{e}_k$ stel $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$ en basis voor D_m (tip: basis kan gaan van k gelijk aan 0 (jaar 2017) of 1 (jaar 2018), is enkel notatie) Eis: $\vec{x} - \vec{x}_d \perp \vec{e}_i \forall i$

$$(\vec{e}_1, \vec{x} - \vec{x}_d) = 0 \quad a_1(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + a_2(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + \dots + a_m(\vec{e}_m, \vec{e}_1) = (x, \vec{e}_1) = \sum_{k=1}^m a_k(\vec{e}_1, \vec{e}_k) = (\vec{e}_1, x)$$

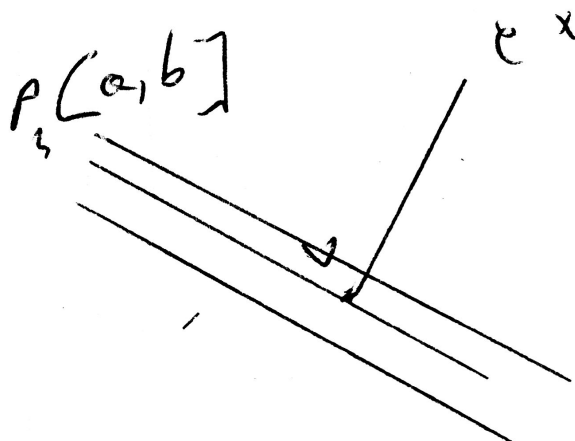
$$(\vec{e}_2, \vec{x} - \vec{x}_d) = 0 \quad \sum_{k=1}^m a_k(\vec{e}_2, \vec{e}_k) = (\vec{e}_2, x)$$

\vdots

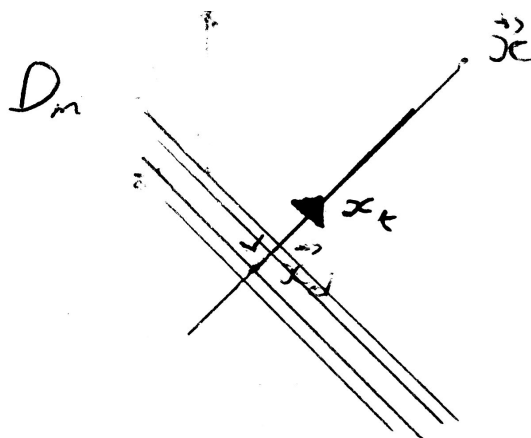
$$(\vec{e}_m, \vec{x} - \vec{x}_d) = 0 \quad \sum_{k=1}^m a_k(\vec{e}_m, \vec{e}_k) = (\vec{e}_m, x)$$

$Ga = b$ (normaalstelsel) met G gramiaanmatrix

$$\begin{bmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \dots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \dots & \langle e_2, e_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \langle e_n, e_2 \rangle & \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x, e_1) \\ (x, e_2) \\ \vdots \\ (x, e_n) \end{bmatrix}$$



Figuur 2.10: e^x (uit oneindig dimensionale deelruimte) benaderen door een veelterm van graad 4 (5 dimensionale deelruimte)



Figuur 2.11: Euclidische ruimte loodrecht

Gramiaanmatrix is symmetrisch positief definit, als reël scalair product dat hermetisch positief definit.

Symmetrisch: alleen maar positieve eigenwaarden. $V^T G V = \|v_1 \vec{x}_1 + v_2 \vec{x}_2 + \dots + v_m \vec{x}_m\|^2$

Positief: $V^T G V > 0$ als $V \neq 0$

Definit: $V^T G V = 0$ als $V = 0$ Betekent dat de matrix altijd inverteerbaar is (een reguliere matrix), alle eigenwaarden zijn strict positief. Stelsel altijd een oplossing heeft. Oplossing altijd uniek.

2.5.1 Orthogonale vectoren

$$\vec{e}_i \perp \vec{e}_j \quad i \neq j$$

$$a_k = \frac{(\vec{e}_k, \vec{x})}{(\vec{e}_k, \vec{e}_k)}$$

$$(\underbrace{v_1, \dots, v_m}_{\substack{\text{orthonormale basis} \\ \text{van } V}}) \begin{pmatrix} & & \\ & G & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{e_1, \dots, e_m}_{\substack{\text{orthonormale basis} \\ \text{van } V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Figuur 2.12: SPD Matrix

$$\vec{x} \approx \vec{x}_d = \sum_{k=1}^m \frac{(\vec{e}_k, \vec{x})}{(\vec{e}_k, \vec{e}_k)} \vec{e}_k$$

Benader e^x in $P_4[-1, 1]$

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f \cdot g dx$$

$$y_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

$$\begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle x, 1 \rangle & \dots & \langle x^4, 1 \rangle \\ \langle 1, x \rangle & \langle x, x \rangle & \dots & \langle x^4, x \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle 1, x^4 \rangle & \langle x^2, x^4 \rangle & \dots & \langle x^4, x^4 \rangle \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (e^x, 1) \\ (e^x, x) \\ \vdots \\ (e^x, x^4) \end{bmatrix}$$

2.5.2 Gram-Schmidt

Opstellen van een orthogonale basis.

Vertrekt van een schuine basis $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \rightarrow \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m$ orthogonale basis.

$$\vec{x}_1 : \vec{y}_1 = \vec{x}_1 \lambda_1 \text{ normalisatie}$$

$$\vec{x}_2 : \vec{y}_2 = \lambda_2 (\vec{x}_2 - a_1 \vec{y}_1) \text{ met } (\vec{y}_2, \vec{y}_1) = 0$$

$$a_1 = \frac{(\vec{x}_2, \vec{y}_1)}{(\vec{y}_1, \vec{y}_1)}$$

3 vergelijkingen waar je de 3 getallen kunt halen.

$$x_i : \vec{y}_i = \lambda (\vec{x}_i - a_1 \vec{y}_1 \dots a_{i-1} \vec{y}_{i-1})$$

$$\rightarrow a_1 = \frac{(\vec{x}_i, \vec{y}_1)}{(\vec{y}_1, \vec{y}_1)}$$

$$\rightarrow a_2 = \frac{(\vec{x}_i, \vec{y}_2)}{(\vec{y}_2, \vec{y}_2)}$$

$$\vec{y}_2 \perp \vec{y}_1$$

$$\vec{y}_i \perp \vec{y}_{i-1}$$

Waar $\|y_2\| = (\vec{y}_2, \vec{y}_2) = 1$ en $(\vec{y}_i, \vec{y}_{i-1}) = 0$

Voorbeeld

$P_4[-1, 1]$ met $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ (L_2)
 $1, x, x^2, x^3, x^4 \rightarrow P_0(x), P_1(x), \dots, P_4(x)$

$$\begin{aligned} 1. P_0(x) &= \lambda_0.1 \text{ eis } (P_0, P_0) = 1 \\ \int_{-1}^1 \lambda_0^2 dx &= 1 \rightarrow [\lambda_0^2 * x]_{-1}^1 \rightarrow 2\lambda_0^2 = 1 \rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ P_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x : P_1(x) &= \lambda_1(x - a_0 P_0(x)) \\ a_0 &= \frac{(x, P_0)}{(P_0, P_0)} = \int_{-1}^1 x \frac{1}{\sqrt{2}} dx = [\frac{x^2}{2\sqrt{2}}]_{-1}^1 = 0 \\ P_1 &= \lambda_1 x \\ \text{Eis } (P_1, P_0) &= 0 \\ \int \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_1 x dx &= 0 \\ \text{Eis}(P_1, P_1) &= 1 \\ \int \lambda_1 x \lambda_1 x &= 1 \rightarrow \int \lambda_1^2 x^2 dx = 1 \\ \frac{2\lambda_1^2}{3} &= 1 \rightarrow \lambda_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Voor P_2 en verder zie boek p34

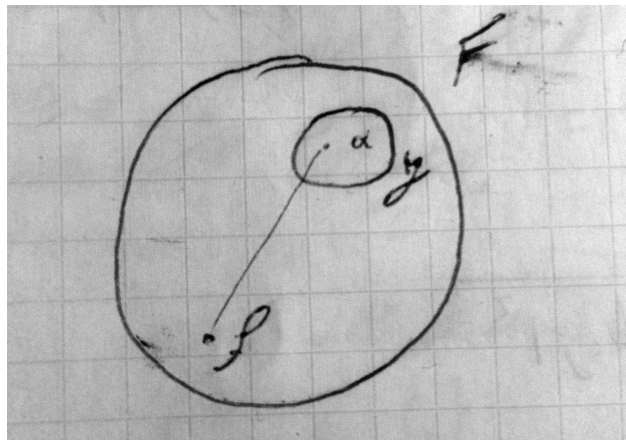
Voorbeeld:

$$\begin{aligned} e^x &\approx y_4(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_4 x^4 \\ &= b_0 P_0(x) + b_1 P_1(x) + \dots + b_4 P_4(x) \end{aligned}$$

$$b_k = \frac{\int_{-1}^1 e^x P_k(x) dx}{\int_{-1}^1 P_k^2(x) dx}$$

Hoofdstuk 3

Veeltermbenadering (les 3)



Figuur 3.1: Benaderingstheorie

3.1 Continue benadering

$$F = C[a, b] \text{ of } F = L_2[a, b]$$

$$Y \subset F$$

$$y = P_n[a, b] \text{ (veelterm van graad } n)$$

$$(f, g) = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx, \quad w(x) > 0 \text{ a.e.}$$

$$w(x) \text{ mag niet te moeilijk zijn } \int_a^b w(x) x^k dx < \infty$$

3.2 Discrete benadering

$$F = \mathbb{R}^N, \mathbb{C}^N, l_2$$

$$y = P_n[a, b]$$

$$(f, g) = \sum_{i=1}^N w_i f_i g_i \text{ } l_2\text{-scalair product.}$$

$Y \subset F$ Een veelterm is een continu iets, niet echt een deelverzameling van \mathbb{R}^N maar dat is oplosbaar.

Je kunt die \mathbb{R}^N , zijn N getallen, je kan dit interpreteren, door elke vector van N getallen gaat precies 1 veelterm van graad $N-1$. Dit is isomorf aan de hogere dimensionale veelterm ruimte.

3.3 Klassieke basis

$$f \approx y_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \phi^k$$

$$w(x) \equiv 1$$

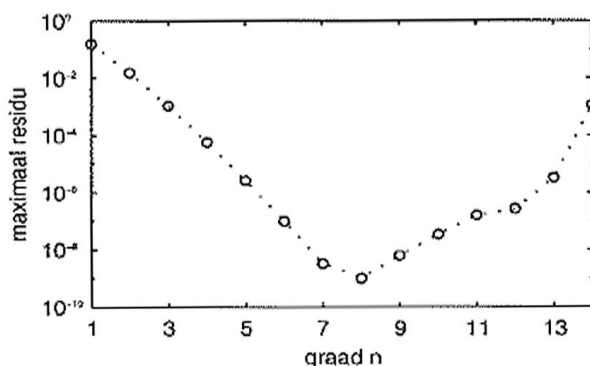
$$[a, b] = [0, 1]$$

1. Klassieke keuze $\phi_k(x) = x^k$ (monomiale basis)

$$\begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle x, 1 \rangle & \dots & \langle x^4, 1 \rangle \\ \langle 1, x \rangle & \langle x, x \rangle & \dots & \langle x^4, x \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle 1, x^4 \rangle & \langle x^2, x^4 \rangle & \dots & \langle x^4, x^4 \rangle \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (e^x, 1) \\ (e^x, x) \\ \vdots \\ (e^x, x^4) \end{bmatrix}$$

$$\text{Continu: } (f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx \rightarrow (x^i, x^j) = \int_a^b x^{i+j}dx = \frac{1}{i+j+1}$$

$$\text{Discreet: } (f, g) = \sum_{k=1}^N f_k g_k \rightarrow (x^i, x^j) = N \sum_{k=1}^N w_k x_k^{i+j} \frac{1}{N} \approx N \int_0^1 x^{i+j} dx$$



Figuur 3.2: Max residu met een monomiale basis

Ergens wordt de afwijking tussen benadering en de te benaderen functie (e^x) maximaal, deze afwijking is weergegeven per graad. Er is een merkwaardig effect dat de fout plots gaat stijgen, de benadering wordt niet beter zelf slechter, wat eigenlijk niet zou mogen zijn, want de benaderingsruimte als je de graad ophoogt dan wordt de benaderingsruimte maar groter en groter en zou de benadering beter moeten worden. Het stijgen dit komt door voortplanting van afrondingsfouten. $Ga = b$ hieruit a zoeken, dan doe je dat met een numerieke methode. De mate van toename komt overeen met de conditie van de matrix. $K(G) = \|G\| \|G^{-1}\|$. Voorbeeld: $n = 4$ $K(G) \sim 47000 = 1$ Verliezen 5 aantal decimale cijfers
 $n = 10$ $K(G) \sim 10^{13}$

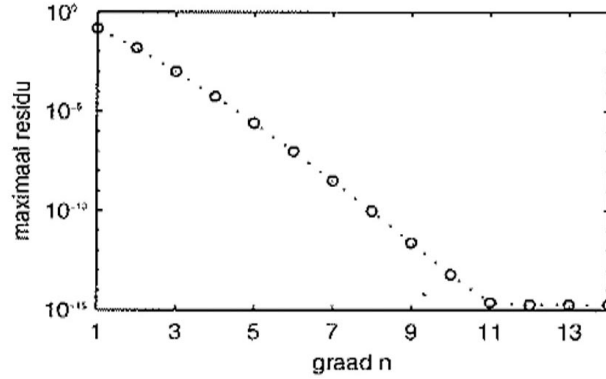
Moest je de inverse van G berekenen (wat normaal niet expliciet wordt gedaan), kan je zien dat

er afwisselend grote negatief en positieve getallen. Als je grote getallen met elkaar combineert en je komt iets klein uit, dan verliest men nauwkeurigheid.

2. Orthogonale basis

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \phi^k$$

$$a_k = \frac{(e^x, P_k)}{(P_k, P_k)}$$



Figuur 3.3: Max residu met een orthogonale MonomialeBasis

Eigenschappen

- (a) $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_k(x)$ $\phi_k \perp \phi_{k-1} \in \phi_{k-1}[a, b]$ of $\phi_k \perp \phi_{k-1}, \phi_{k-2}, \dots, \phi_0$ Alsook tot alle lineaire combinaties van $\phi \rightarrow \phi_k \perp \phi_{k1}[a, b]$

Er is een gemakkelijkere manier om ϕ_k op te stellen dan de gramm-schmidt methode. Er bestaat een recursiebetrekking, deze zegt dat ϕ_k kan berekend worden aan de hand van zijn 2 voorgangers ϕ_{k-1} en ϕ_{k-2} . Deze recursie moet natuurlijk opgestart worden: $\phi_0(x) = \lambda_0$ en $\phi_1(x) = \lambda_1(x - \alpha_1)\phi_0$ met $\alpha_1 = \frac{(x, 1)}{(1, 1)}$.

$$\{1, x\} \rightarrow \{\phi_0, \phi_1\}$$

$$x \rightarrow \phi_1 = \lambda_1 \frac{(x - \phi_0)}{(\phi_0 - \phi_0)} = \lambda_1 \left(x - \frac{(x-1)}{(1-1)} \right)$$

Om formule mooi te laten overeenkomen met de recursiebetrekking voegt men nog ϕ_0 toe. $x \rightarrow \phi_1 = \lambda_1 \frac{(x - \phi_0)}{(\phi_0 - \phi_0)} \phi_0 = \lambda_1 \left(x - \frac{(x-1)}{(1-1)} \right) \phi_0$

Bewijs recursiebetrekking: $x\phi_{k-1} = b_0\phi_0 + b_1\phi_1 + \dots + b_k\phi_k$

$$b_0 = \frac{(x\phi_{k-1}, \phi_0)}{(\phi_0, \phi_0)} = \frac{(\phi_{k-1}, x\phi_0)}{(\phi_0, \phi_0)} = 0$$

Hoge graads veelterm ϕ_{k-1} staat loodrecht op alles lager dan ϕ_{k-1} dus ook op $\phi_0 \rightarrow 0$

$$b_1 = \frac{(x\phi_{k-1}, \phi_1)}{(\phi_1, \phi_1)} = \frac{(\phi_{k-1}, x\phi_1)}{(\phi_1, \phi_1)} = 0$$

\vdots

$$b_{k-3} = \frac{(x\phi_{k-1}, \phi_{k-3})}{(\phi_{k-3}, \phi_{k-3})} = \frac{(\phi_{k-1}, x\phi_{k-3})}{(\phi_{k-3}, \phi_{k-3})} = 0$$

$$b_{k-2} = \frac{(x\phi_{k-1}, \phi_{k-2})}{(\phi_{k-2}, \phi_{k-2})} = \frac{(\phi_{k-1}, x\phi_{k-2})}{(\phi_{k-2}, \phi_{k-2})}$$

$$b_{k-1} = \frac{(x\phi_{k-1}, \phi_{k-1})}{(\phi_{k-1}, \phi_{k-1})} = \frac{(\phi_{k-1}, x\phi_{k-1})}{(\phi_{k-1}, \phi_{k-1})}$$

$$b_k = \frac{(x\phi_{k-1}, \phi_k)}{(\phi_{k-3}, \phi_k)} = \frac{(\phi_{k-1}, x\phi_k)}{(\phi_k, \phi_k)}$$

$$x\phi_{k-1} = b_{k-2}\phi_{k-2} + b_{k-1}\phi_{k-1} + b_k\phi_k$$

$$\phi_k(x) = \frac{1}{b_k}(x - b_{k-1})\phi_{k-1} - \frac{b_{k-2}}{b_k}\phi_{k-2}$$

$$\phi_k(x) = \lambda_k(x - \alpha_k)(\phi_{k-1}(x) - \beta_k\alpha_{k-2}(x))$$

$$\lambda_k = \frac{1}{b_k}$$

$$\alpha_k = b_{k-1} = \frac{(x\phi_{k-1}, \phi_{k-1})}{(\phi_{k-1}, \phi_{k-1})}$$

$$\beta_k = \frac{b_{k-2}}{b_k} = \lambda_k b_{k-2} = \lambda_k \frac{(x\phi_{k-1}, \phi_{k-2})}{(\phi_{k-2}, \phi_{k-2})}$$

λ kan niet uitgerekend worden, in de formule gebruik je al ϕ_k , die λ is een normalisatie constante, die zal de lengte van de vector bepalen, in een orthogonale basis doet het er niet toe welke lengte je geeft aan de vectoren, meestal zetten $\lambda = 1$, dan hebben we geen extra rekenwerk maar zijn niet alle vectoren even lang.

Voorbeeld:

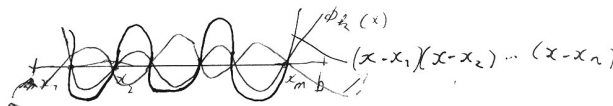
$$w(x) \equiv 1$$

$$[a, b] = [-1, 1], \text{ Legendre-veeltermen } P_k(x)$$

$$P_k(x) = \lambda_k(x - \alpha_k)P_{k-1}(x) - \beta_k P_{k-2}(x)$$

- (b) $\phi_k(x)$ heeft juist k enkelvoudig nulpunten in het open interval (a, b) . Betekent buiten dit interval gaat men naar $+$ of $-$ oneindig.

Bewijs stel $m < k$ enkelvoudige nulpunten (tekenwisselingen) in het open interval (a, b) (bewijs uit het ongerijmde)



Figuur 3.4: Bewijs k enkelvoudige nulpunten

$$\Psi_k(x) = \phi_k(x)(x - x_1) \dots (x - x_m)$$

Elke tekenverandering van ϕ_k wordt teniet gedaan door een tekenverandering van de gewone functie. Dit betekent dat het product van deze altijd hetzelfde teken moet hebben. Ψ_k is overal positief of negatief dus $\int_a^b w(x)\Psi_k(x)dx \neq 0$. Is in tegenspraak met $\phi_k(x) \perp \Psi(x)$.

Hoofdstuk 4

XX

4.1 x

Hoofdstuk 5

XX

5.1 x

Hoofdstuk 6

XX

6.1 x

Hoofdstuk 7

Oefenzittingen

7.1 Oefenzitting 1 - Benaderingstheorie

NMB: oefenzitting 1

Simon Telen

1 Benaderingstheorie**Opgave 1**

Beschouw de vectorruimte $C[-1, 1]$ van continue reële functies op het interval $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$. De L_p -norm, $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, is gegeven door de functionaal

$$\|\cdot\|_p : C[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Voor welke waarden van $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ is de volgende functionaal een norm

$$\|\cdot\|'_p : C[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \left| \int_{-1}^1 f(x)^p dx \right|^{1/p}.$$

Bewijs je antwoord.

Opgave 2

Op een verzameling S van eindige verzamelingen definiëert men de *Silverman afstand* als

$$\rho(A, B) = \#(A \triangle B) = \#\{(A \cup B) \setminus (A \cap B)\}$$

met $A, B \in S$. De verzameling $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ wordt ook het *symmetrisch verschil* van A en B genoemd. Het symbool ' $\#$ ' staat voor *kardinaalgetal*, d.w.z. het aantal elementen in de verzameling.

- Waarom worden er enkel *eindige* verzamelingen beschouwd?
- Toon aan dat ρ inderdaad een afstand is.

Opgave 3

We beschouwen de vectorruimte $V = \mathbb{R}^{m \times n}$ van reële $m \times n$ matrices. Beschouw

$$(\cdot, \cdot)_F : V \times V \rightarrow \mathbb{R} : (A, B) \mapsto \text{trace}(A^T B).$$

Dit wordt het *Frobenius inwendig product* genoemd.

- Toon aan dat $(\cdot, \cdot)_F$ een inwendig product is.
- Toon aan dat de norm op V geïnduceerd door het Frobenius inwendig product op V equivalent is met de 2-norm op \mathbb{R}^{mn} , of nog $\|A\|_F = \|\text{vec}(A)\|_2$. Hierbij staat ‘vec’ voor de *vectorizatie-operatie*. Dit is een lineaire transformatie die de matrix A omzet tot een kolomvector, bestaande uit een verticale stapeling van de kolommen van A . Men noemt deze norm de *Frobeniusnorm* op V .
- Bereken de Frobenius norm van de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ en de Frobenius afstand tussen A en $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 + \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Opgave 4

Beschouw de verzameling W van ‘woorden’ waarbij we een woord definiëren als een eindige sequentie van karakters. De verzameling W is een metrische ruimte met de volgende, recursief gedefiniëerde afstandsfunctie. Voor $a, b \in W$, schrijf $|a|, |b|$ voor het aantal karakters in a, b respectievelijk. De afstand tussen a en b is recursief gedefiniëerd als $\rho(a, b) = \text{lev}_{a,b}(|a|, |b|)$ met

$$\text{lev}_{a,b}(i, j) = \begin{cases} \max(i, j) & \min(i, j) = 0 \\ \min \begin{cases} \text{lev}_{a,b}(i-1, j) + 1 \\ \text{lev}_{a,b}(i, j-1) + 1 \\ \text{lev}_{a,b}(i-1, j-1) + (1 - \delta_{a_i b_j}) \end{cases} & \text{anders} \end{cases}$$

waarbij $\delta_{a_i b_j} = \begin{cases} 1 & a_i = b_j \\ 0 & a_i \neq b_j \end{cases}$. Deze afstand noemt men de *Levenshtein afstand* en ze wordt gebruikt in onder andere spellingscontrole software.

- Schrijf een functie `lev(a,b,i,j)` in Matlab die als input twee strings en twee positieve integers neemt en het getal $\text{lev}_{a,b}(i, j)$ teruggeeft.
- Gebruik je implementatie om het volgende na te gaan: de Levenshtein afstand geeft het minimum aantal toevoegingen, verwijderingen of vervangingen van karakters die nodig zijn om het woord a in het woord b te veranderen. Zo is bijvoorbeeld $\rho(\text{‘kater’}, \text{‘kat’}) = 2$ volgens deze metriek.
- Gebruik je implementatie om de afstand te berekenen tussen jouw achternaam en die van de docent van dit deel van het vak: ‘Vandewalle’.

Opgave 5

- Gebruik de Gram-Schmidt orthogonalizatie procedure om het stel $\{1, x, x^2, x^3\}$ te orthogonaliseren tot het stel $\{T_0(x), T_1(x), T_2(x), T_3(x)\}$ ten opzichte van het scalair product

$$(f, g) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)dx.$$

Start met $T_0(x) = 1$, ga na dat $\|T_0\|^2 = \pi$ (we gebruiken de geïnduceerde norm) en normalizeer $T_1(x), \dots, T_3(x)$ zodat de coëfficiënt van $T_i(x)$ by x^i gelijk is aan 2^{i-1} .

- De veeltermen die je bekomt zijn de zogenaamde *Chebyshev veeltermen van de eerste soort*. Ze hebben uitzonderlijk goede benaderingseigenschappen. Men toont aan dat dit stel orthogonale veeltermen voldoet aan de recursiebetrekking

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Vind nu op een eenvoudige manier $T_4(x)$ en $T_5(x)$.

- Leid met behulp van deze recursiebetrekking een matrix af waarvan de eigenwaarden de nulpunten zijn van $T_5(x)$. Controleer het resultaat met Matlab.

Opgave 6

Beschouw de vectorruimte $V = C^1[a, b]$ van continue functies met continue afgeleide op het interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Op $C^1[a, b]$ is het *Sobolev inwendig product* $(f, g)_{H^1}$ gedefinieerd als

$$(f, g)_{H^1} = \int_a^b (f(x)g(x) + f'(x)g'(x))dx.$$

- Toon aan dat $(\cdot, \cdot)_{H^1}$ een scalair product is en leid een formule af voor de geïnduceerde norm $\|\cdot\|_{H^1}$.
- Is $(f, g) = \int_a^b f'(x)g'(x)dx$ een scalair product op V ? Bewijs je antwoord.
- Bereken de Sobolev en de L^2 -afstand tussen x en e^x op $[0, 1]$.
- Toon aan dat $\|f\|_{H^1} \geq \|f\|_{L^2}, \forall f \in V$.

2 Kleinste kwadraten veeltermbenadering

De opgave bestaat erin een stel Matlab-functies te schrijven om een discrete kleinste-kwadraten-benadering te berekenen. Net als de meeste ingebouwde functies in Matlab nemen ze vector-parameters aan. Gebruik vectoroperaties waar mogelijk.

Opgave 1

Schrijf een functie `plotres(x,r,w)` om de residus r_i af te beelden samen met de gewichten w_i . De punten (x_i, r_i) moeten aangeduid worden met een rode '+' en verbonden met een volle rode lijn. De x -as is verticaal gecentreerd in het venster van de figuur en is aangeduid met een zwarte stippellijn over het hele interval bestreken door de abscissen in `x`. In dezelfde figuur wordt in groene streeplijn de vector van gewichten weergegeven, zo gescaleerd dat het grootste gewicht tegen de bovenrand van het venster komt.

Opgave 2

Schrijf een functie `c = kkb1(x,f,w,n)` die de discrete kleinste-kwadratenveeltermbenadering opstelt van graad n in de punten (x_i, f_i) met gewichten w_i voor $i = 1 \dots N$. De functie krijgt de vectoren $[x_i]$, $[f_i]$ en $[w_i]$ als invoerparameters en geeft als uitvoer de vector van coëfficiënten $[c_k]$, $k = 0 \dots n$ van de benaderende veelterm $y_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$, bepaald als oplossing van het overgedetermineerd stelsel:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{w_i} x_i^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{w_i} f_i \end{bmatrix}$$

Gebruik de ingebouwde functie van Matlab om dit stelsel op te lossen. Schrijf daarna een tweede functie `c = kkb2(x,f,w,n)` zodat $y_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ bepaald wordt als de oplossing van het normaalstelsel:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N w_i x_i^{j+k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N w_i x_i^j f_i \end{bmatrix}$$

Opgave 3

Gebruik beide functies om benaderingen op te stellen voor de functie e^x op het interval $[-1, 1]$. Neem als gewichtsfunctie zowel $w(x) = 1$ als $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ en vergelijk het residu. Plot het maximale residu als functie van n voor $n = 1, \dots, 20$. Bij welke graad krijg je het kleinste maximale residu? Om een veelterm te evalueren kan je de MATLAB-functie `polyval` gebruiken.

<p>NMB - Oefenzitting 5 Hendrik Speleers</p> <p>Algemeen Ruimte Metrisch Genormeerd Unitair Kleinste-kwadraten</p>	<p>NMB - Oefenzitting 5: Kleinste-kwadratenbenadering (deel 1)</p> <p>Hendrik Speleers</p>	<p>Overzicht</p> <p>1 Algemeen</p> <p>2 Ruimte</p> <ul style="list-style-type: none"> • Metrische ruimte • Genormeerde ruimte • Unitaire ruimte <p>3 Kleinste-kwadratenbenadering</p>
<p>NMB - Oefenzitting 5 Hendrik Speleers</p> <p>Algemeen Ruimte Metrisch Genormeerd Unitair Kleinste-kwadraten</p>	<p>Algemeen</p> <ul style="list-style-type: none"> • Benaderingsprobleem : <ul style="list-style-type: none"> • Te benaderen functie • Klasse van benaderingsfuncties • Benaderingscriterium • Benaderingsalgoritme • Ruimtes : <ul style="list-style-type: none"> • Metrische ruimte • Genormeerde ruimte • Unitaire ruimte • Euclidische ruimte 	<p>Algemeen</p> <ul style="list-style-type: none"> • Benaderingsprobleem : <ul style="list-style-type: none"> • Te benaderen functie • Klasse van benaderingsfuncties • Benaderingscriterium • Benaderingsalgoritme • Ruimtes : <ul style="list-style-type: none"> • Metrische ruimte • Genormeerde ruimte • Unitaire ruimte • Euclidische ruimte
<p>NMB - Oefenzitting 5 Hendrik Speleers</p> <p>Algemeen Ruimte Metrisch Genormeerd Unitair Kleinste-kwadraten</p>	<p>Metrische ruimte</p> <ul style="list-style-type: none"> • ρ is een afstand of metriek als <ol style="list-style-type: none"> 1 $\rho(x, y) \geq 0$ 2 $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ 3 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ 4 $\rho(x, y) \leq \rho(z, x) + \rho(z, y)$ • Metrische ruimte : verzameling voorzien van een metriek 	<p>Genormeerde ruimte</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\ \cdot\$ is een norm op een vectorruimte als <ol style="list-style-type: none"> 1 $\ x\ \geq 0$ 2 $\ x\ = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 3 $\ ax\ = a \ x\$ 4 $\ x + y\ \leq \ x\ + \ y\$ • Genormeerde ruimte : vectorruimte met een norm • Geïnduceerde afstand : $\rho(x, y) = \ x - y\$

Unitaire ruimte	Kleinste-kwadratenbenadering
<div data-bbox="250 491 310 659"> NMB - Oefenzitting 5 Hendrik Speleers Algemeen Ruimte Algemeen Gemeen Unitair Kleinste- kwadraten </div> <ul style="list-style-type: none"> (\cdot, \cdot) is een scalair product als <ol style="list-style-type: none"> $(ax, y) = a(x, y)$ $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ $(x, y) = \overline{(y, x)}$ $x \neq 0 \Rightarrow (x, x) > 0$ Unitaire ruimte : vectorruimte met scalair product Euclidische ruimte : eindigdimensionale unitaire ruimte Geïnduceerde norm : $\ x\ = \sqrt{(x, x)}$ Elementen x en y zijn orthogonaal ($x \perp y$) als $(x, y) = 0$ 	<div data-bbox="820 491 880 659"> NMB - Oefenzitting 5 Hendrik Speleers Algemeen Ruimte Algemeen Gemeen Unitair Kleinste- kwadraten </div> <ul style="list-style-type: none"> Zoek benadering $y_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x)$ voor <ul style="list-style-type: none"> continue KKB : $f(x), x \in [a, b]$ discrete KKB : $\{(x_i, f_i)\}_{i=1}^N$ zodanig dat gewogen residu <ul style="list-style-type: none"> continue KKB : $r(x) = f(x) - y_n(x)$ discrete KKB : $r_i = f_i - y_n(x_i)$ <p>minimaal is</p> $\min_{a_k} \int_a^b w(x) r^2(x) dx, \quad \min_{a_k} \sum_{i=1}^N w_i r_i^2$ $\Rightarrow \min_{a_k} \langle wr^2 \rangle$
Kleinste-kwadratenbenadering	
<div data-bbox="250 921 310 1089"> NMB - Oefenzitting 5 Hendrik Speleers Algemeen Ruimte Algemeen Gemeen Unitair Kleinste- kwadraten </div> <ul style="list-style-type: none"> $\langle wr^2 \rangle$ minimaal $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial a_s} \langle wr^2 \rangle = 0, s = 0, \dots, n$ $\Leftrightarrow \langle wr \phi_s \rangle = 0$ $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n a_k \langle w \phi_s \phi_k \rangle = \langle w \phi_s f \rangle$ Normaalstelsel Meetkundige interpretatie Bijvoorbeeld: orthogonale veeltermen 	

7.1.1 Oplossingen