NMB: oefenzitting 1

Simon Telen

1 Benaderingstheorie

Opgave 1

Beschouw de vectorruimte $C[-1,1]$ van continue reële functies op het interval $[-1,1] \subset \mathbb{R}$. De L_p-norm, $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, is gegeven door de functionaal

$$\|\cdot\|_p : C[-1,1] \to \mathbb{R} : f \mapsto \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Voor welke waarden van $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ is de volgende functionaal een norm

$$\|\cdot\|'_p : C[-1,1] \to \mathbb{R} : f \mapsto \left| \int_{-1}^{1} f(x)^p dx \right|^{1/p}.$$

Bewijs je antwoord.

Opgave 2

Op een verzameling S van eindige verzamelingen definiëert men de *Silverman afstand* als

$$\rho(A,B) = \#(A \triangle B) = \#\{(A \cup B) \backslash (A \cap B)\}$$

met $A, B \in S$. De verzameling $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ wordt ook het *symmetrisch verschil* van A en B genoemd. Het symbool '#' staat voor *kardinaalgetal*, d.w.z. het aantal elementen in de verzameling.

- Waarom worden er enkel *eindige* verzamelingen beschouwd?
- Toon aan dat ρ inderdaad een afstand is.

Opgave 3

We beschouwen de vectorruimte $V = \mathbb{R}^{m \times n}$ van reële $m \times n$ matrices. Beschouw

$$(\cdot,\cdot)_F : V \times V \to \mathbb{R} : (A,B) \mapsto \text{trace}(A^\top B).$$

Dit wordt het *Frobenius inwendig product* genoemd.

- Toon aan dat $(\cdot,\cdot)_F$ een inwendig product is.
- Toon aan dat de norm op V geïnduceerd door het Frobenius inwendig product op V equivalent is met de 2-norm op $\mathbb{R}^{mn}$, of nog $\|A\|_F = \|\mathrm{vec}(A)\|_2$. Hierbij staat 'vec' voor de *vectorizatie-operatie*. Dit is een lineaire transformatie die de matrix A omzet tot een kolomvector, bestaande uit een verticale stapeling van de kolommen van A. Men noemt deze norm de *Frobeniusnorm* op V.
- Bereken de Frobenius norm van de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ en de Frobenius afstand tussen A en $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4+\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Opgave 4

Beschouw de verzameling W van 'woorden' waarbij we een woord definiëren als een eindige sequentie van karakters. De verzameling W is een metrische ruimte met de volgende, recursief gedefiniëerde afstandsfunctie. Voor $a, b \in W$, schrijf $|a|, |b|$ voor het aantal karakters in a, b respectievelijk. De afstand tussen a en b is recursief gedefiniëerd als $\rho(a,b) = \mathrm{lev}_{a,b}(|a|,|b|)$ met

$$\mathrm{lev}_{a,b}(i,j) = \begin{cases} \max(i,j) & \min(i,j) = 0 \\ \min \begin{cases} \mathrm{lev}_{a,b}(i-1,j)+1 \\ \mathrm{lev}_{a,b}(i,j-1)+1 \\ \mathrm{lev}_{a,b}(i-1,j-1)+(1-\delta_{a_i b_j}) \end{cases} & \text{anders} \end{cases}$$

waarbij $\delta_{a_i b_j} = \begin{cases} 1 & a_i = b_j \\ 0 & a_i \neq b_j \end{cases}$. Deze afstand noemt men de *Levenshtein afstand* en ze wordt gebruikt in onder andere spellingscontrole software.

- Schrijf een functie `lev(a,b,i,j)` in Matlab die als input twee strings en twee positieve integers neemt en het getal $\mathrm{lev}_{a,b}(i,j)$ teruggeeft.
- Gebruik je implementatie om het volgende na te gaan: de Levenshtein afstand geeft het minimum aantal toevoegingen, verwijderingen of vervangingen van karakters die nodig zijn om het woord a in het woord b te veranderen. Zo is bijvoorbeeld $\rho(\text{'kater'}, \text{'kat'}) = 2$ volgens deze metriek.
- Gebruik je implementatie om de afstand te berekenen tussen jouw achternaam en die van de docent van dit deel van het vak: 'Vandewalle'.

Opgave 5

- Gebruik de Gram-Schmidt orthogonalizatie procedure om het stel $\{1, x, x^2, x^3\}$ te orthogonalizeren tot het stel $\{T_0(x), T_1(x), T_2(x), T_3(x)\}$ ten opzichte van het scalair product

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)dx.$$

Start met $T_0(x) = 1$, ga na dat $\|T_0\|^2 = \pi$ (we gebruiken de geïnduceerde norm) en normalizeer $T_1(x), \ldots, T_3(x)$ zodat de coëfficiënt van $T_i(x)$ by x^i gelijk is aan 2^{i-1}.

- De veeltermen die je bekomt zijn de zogenaamde *Chebyshev veeltermen van de eerste soort*. Ze hebben uitzonderlijk goede benaderingseigenschappen. Men toont aan dat dit stel orthogonale veeltermen voldoet aan de recursiebetrekking

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x, \qquad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

  Vind nu op een eenvoudige manier $T_4(x)$ en $T_5(x)$.

- Leid met behulp van deze recursiebetrekking een matrix af waarvan de eigenwaarden de nulpunten zijn van $T_5(x)$. Controleer het resultaat met Matlab.

Opgave 6

Beschouw de vectorruimte $V = C^1[a,b]$ van continue functies met continue afgeleide op het interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Op $C^1[a,b]$ is het *Sobolev inwendig product* $(f,g)_{H^1}$ gedefiniëerd als

$$(f,g)_{H^1} = \int_a^b (f(x)g(x) + f'(x)g'(x))dx.$$

- Toon aan dat $(\cdot,\cdot)_{H^1}$ een scalair product is en leid een formule af voor de geïnduceerde norm $\|\cdot\|_{H^1}$.
- Is $(f,g) = \int_a^b f'(x)g'(x)dx$ een scalair product op V? Bewijs je antwoord.
- Bereken de Sobolev en de L^2-afstand tussen x en e^x op $[0,1]$.
- Toon aan dat $\|f\|_{H^1} \geq \|f\|_{L^2}, \forall f \in V$.

2 Kleinste kwadraten veeltermbenadering

De opgave bestaat erin een stel Matlab-functies te schrijven om een discrete kleinste-kwadraten-benadering te berekenen. Net als de meeste ingebouwde functies in Matlab nemen ze vector-parameters aan. Gebruik vectoroperaties waar mogelijk.

Opgave 1

Schrijf een functie `plotres(x,r,w)` om de residus r_i af te beelden samen met de gewichten w_i. De punten (x_i, r_i) moeten aangeduid worden met een rode '+' en verbonden met een volle rode lijn. De x-as is verticaal gecentreerd in het venster van de figuur en is aangeduid met een zwarte stippellijn over het hele interval bestreken door de abscissen in `x`. In dezelfde figuur wordt in groene streeplijn de vector van gewichten weergegeven, zo gescaleerd dat het grootste gewicht tegen de bovenrand van het venster komt.

Opgave 2

Schrijf een functie `c = kkb1(x,f,w,n)` die de discrete kleinste-kwadratenveeltermbenadering opstelt van graad n in de punten (x_i, f_i) met gewichten w_i voor $i = 1 \ldots N$. De functie krijgt de vectoren $[x_i]$, $[f_i]$ en $[w_i]$ als invoerparameters en geeft als uitvoer de vector van coëfficiënten $[c_k]$, $k = 0 \ldots n$ van de benaderende veelterm $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, bepaald als oplossing van het overgedetermineerd stelsel:

$$\left[\sqrt{w_i}\, x_i^k\right] \begin{bmatrix} \\ c_k \\ \\ \end{bmatrix} = \left[\sqrt{w_i}\, f_i\right]$$

Gebruik de ingebouwde functie van Matlab om dit stelsel op te lossen. Schrijf daarna een tweede functie `c = kkb2(x,f,w,n)` zodat $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ bepaald wordt als de oplossing van het normaalstelsel:

$$\left[\sum_{i=1}^{N} w_i\, x_i^{j+k}\right] \left[c_k\right] = \left[\sum_{i=1}^{N} w_i\, x_i^j\, f_i\right]$$

Opgave 3

Gebruik beide functies om benaderingen op te stellen voor de functie e^x op het interval $[-1, 1]$. Neem als gewichtsfunctie zowel $w(x) = 1$ als $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ en vergelijk het residu. Plot het maximale residu als functie van n voor $n = 1, \ldots, 20$. Bij welke graad krijg je het kleinste maximale residu? Om een veelterm te evalueren kan je de MATLAB-functie `polyval` gebruiken.