NMB - Oefenzitting 5: Kleinste-kwadratenbenadering (deel 1)

Hendrik Speleers

De opgave bestaat erin een stel MATLAB-functies te schrijven om een discrete kleinste-kwadratenbenadering te berekenen. Net als de meeste ingebouwde functies in MATLAB nemen ze vectorparameters aan. Gebruik vectoroperaties waar mogelijk.

Opgave 1. Schrijf een functie `plotres(x,r,w)` om de residus r_i af te beelden samen met de gewichten w_i. De punten (x_i, r_i) moeten aangeduid worden met een rode '+' en verbonden met een volle rode lijn. De x-as is verticaal gecentreerd in het venster van de figuur en is aangeduid met een zwarte stippellijn over het hele interval bestreken door de abscissen in `x`. In dezelfde figuur wordt in groene streeplijn de vector van gewichten weergegeven, zo gescaleerd dat het grootste gewicht tegen de bovenrand van het venster komt.

Oplossing. *Zie* `plotres.m`*.*

Opgave 2. Schrijf een functie `c = kkb1(x,f,w,n)` die de discrete kleinste-kwadratenveeltermbenadering opstelt van graad n in de punten (x_i, f_i) met gewichten w_i voor $i = 1 \dots N$. De functie krijgt de vectoren $[x_i], [f_i]$ en $[w_i]$ als invoerparameters en geeft als uitvoer de vector van coëfficiënten $[c_k]$, $k = 0 \dots n$ van de benaderende veelterm $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, bepaald als oplossing van het overgedetermineerd stelsel:

$$\left[\sqrt{w_i}\, x_i^k\right] \left[c_k\right] = \left[\sqrt{w_i}\, f_i\right]$$

Gebruik de ingebouwde functie van MATLAB om dit stelsel op te lossen. Schrijf daarna een tweede functie `c = kkb2(x,f,w,n)` zodat $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ bepaald wordt als de oplossing van het normaalstelsel:

$$\left[\sum_{i=1}^{N} w_i\, x_i^{j+k}\right] \left[c_k\right] = \left[\sum_{i=1}^{N} w_i\, x_i^j\, f_i\right]$$

Oplossing. *Zie* `kkb1.m` *en* `kkb2.m`*.*

Opgave 3. Gebruik beide functies om benaderingen op te stellen voor de functie e^x op het interval $[-1, 1]$. Neem als gewichtsfunctie zowel $w(x) = 1$ als $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ en vergelijk het residu. Plot het maximale residu als functie van n voor $n = 1, \dots, 20$. Bij welke graad krijg je het kleinste maximale residu? Om een veelterm te evalueren kan je de MATLAB-functie `polyval` gebruiken.

Oplossing. *Zie* `resdeg.m`*. Wanneer het overgedetermineerde stelsel direct opgelost wordt, dan daalt het residu bij toenemende graad n tot op machineprecisie. Wanneer de kleinste-kwadratenveeltermbenadering opgelost wordt met behulp van het normaalstelsel, daalt het residu eerst bij toenemende graad n. Daarna begint het terug te stijgen door afrondingsfouten (ten gevolge van slechte conditie normaalstelsel).*

Opgave 4. Gebruik de functie `c = kkb1(x,f,w,n)` om een benadering voor een kromme op te stellen. Een kromme in het vlak wordt gegeven door een parametrisatie van de vorm $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$. Een veeltermbenadering van een kromme wordt opgesteld als $(f_n(t), g_m(t))$, $t \in [a, b]$, waarbij f_n en g_m veeltermen zijn die de functies x en y benaderen. Zoek een benadering voor de kromme gegeven door het cijfer "6". Stel hiertoe eerst een parametervoorstelling op van de vorm (t_i, x_i, y_i). Met behulp van de routine `click` (zie Toledo) kan je geschikte waarden voor x_i en y_i bepalen door ze aan te klikken op een figuurtje. Kies dan bijvoorbeeld als parametrisatie `t = linspace(0,1,N)`.

Oplossing. *Zie* `opgave4.m`.