

# NMB - Oefenzitting 2: Conditie van kleinste kwadratenprobleem en stabiliteit van kleinste kwadratenalgoritmes

Hendrik Speleers

# Overzicht

NMB -  
Oefenzitting 2

Hendrik  
Speleers

SWO

QR

KK

Conditie /  
Stabiliteit

Complexiteit

- 1 Singuliere waarden ontbinding
- 2 QR
- 3 Kleinste kwadratenprobleem
- 4 Conditie / Stabiliteit
- 5 Complexiteit

# Singuliere waarden ontbinding

NMB -  
Oefenzitting 2

Hendrik  
Speleers

SWO

QR

KK

Conditie /  
Stabiliteit

Complexiteit

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m > n, \quad \text{rang } n$$

$$U \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad U_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad U_2 \in \mathbb{R}^{m \times (m-n)}$$

$$\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$V \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$U^T U = I, \quad V^T V = I$$

$$A = U \Sigma V^T = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} V^T$$

# QR

NMB -  
Oefenzitting 2

Hendrik  
Speleers

SWO

QR

KK

Conditie /  
Stabiliteit

Complexiteit

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m > n, \quad \text{rang } n$$

$$Q \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad Q_2 \in \mathbb{R}^{m \times (m-n)}$$

$$R \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \text{bovendriehoeks}$$

$$Q^T Q = I$$

$$A = QR = \left[ \begin{array}{c|c} Q_1 & Q_2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} R_1 \\ 0 \end{array} \right]$$

# Kleinste kwadratenprobleem

NMB -  
Oefenzitting 2

Hendrik  
Speleers

SWO

QR

KK

Conditie /  
Stabiliteit

Complexiteit

- Gegeven :  $A, b$
- Gevraagd :  $x$
- zodat :  $\|Ax - b\|_2$  minimaal

Bijvoorbeeld op te lossen met QR of SWO

$$x = R_1^{-1} Q_1^T b, \quad x = V \Sigma_1^{-1} U_1^T b$$

Pseudoinverse van  $A$

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = R_1^{-1} Q_1^T = V \Sigma_1^{-1} U_1^T$$

Projectie van  $b$  op range  $A$

$$y = A^+ x = Pb$$

# Conditie van kleinste kwadratenprobleem

NMB -  
Oefenzitting 2

Hendrik  
Speleers

SWO

QR

KK

Conditie /  
Stabiliteit

Complexiteit

- *Conditie* van een *probleem*
- *Stabiliteit* van een *algoritme* voor een probleem

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\|y\|}{\|b\|}, \quad \eta = \frac{\|A\| \|x\|}{\|y\|}, \quad \kappa(A) = \|A\| \|A^+\|$$

		$y$	$x$
$\kappa_{KK}(A, b) \rightarrow (x, y) :$	$b$	$\frac{1}{\cos \theta}$	$\frac{\kappa(A)}{\eta \cos \theta}$
	$A$	$\frac{\kappa(A)}{\cos \theta}$	$\kappa(A) + \frac{\kappa(A)^2 \tan \theta}{\eta}$

# Stabiliteit van kleinste kwadratenalgoritmes

NMB -  
Oefenzitting 2

Hendrik  
Speleers

SWO

QR

KK

Conditie /  
Stabiliteit

Complexiteit

- *Conditie* van een *probleem*
- *Stabiliteit* van een *algoritme* voor een probleem
- **Normaalvgn** : onstabiel als  $\kappa(A) \gg 1$  en
  - $\tan \theta \approx 0$  of
  - $\eta \approx \kappa(A)$
- **Gewijzigde GS QR** : stabiel indien juist gebruikt
- **Householder QR** : stabiel
- **SWO** : stabiel

# Complexiteit

NMB -  
Oefenzitting 2

Hendrik  
Speleers

SWO

QR

KK

Conditie /  
Stabiliteit

Complexiteit

Normaalgln :  $mn^2 + \frac{1}{3}n^3$

Gewijzigde GS :  $2mn^2$

Householder :  $2mn^2 - \frac{2}{3}n^3$