NMB - Oefenzitting 3: Eigenwaardenproblemen

Hendrik Speleers, Simon Telen

1 De QR-methode

Opgave 1. Construeer drie testmatrices:

- $A_1 = P_1 \Lambda_1 P_1^T$ met P_1 orthogonaal en

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- $A_2 = P_2 \Lambda_2 P_2^{-1}$ met $\kappa(P_2) = 10^5$ en $\Lambda_2 = \Lambda_1$
- $A_3 = P_3 \Lambda_3 P_3^{-1}$ met $P_3 = P_2$ en

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Om de QR-methode uit te voeren, gebruik je het commando

```
[e,res] = nlaqr(A)
```

dat je op Toledo kan vinden. Deze routine drukt voor iedere stap de matrix A en de bekomen residunorm af. Deze normen worden ook bijgehouden in `res`. Bepaal voor de 3 testmatrices:

a) Naar welke eigenwaarde convergeert de methode?

Oplossing. *Hangt af van de keuze van de matrix. Zie* `opgave1.m`.

b) Hoe snel is de convergentie?

Oplossing. *Meestal*

- *kubisch*
- *kwadratisch*
- *lineair*

c) Verklaar.

Oplossing. *De matrices zijn*

- *symmetrisch*
- *niet-symmetrisch, niet-defectief*
- *defectief*

2 Inverse iteratie

Opgave 2. De inverse iteratie-methode laat toe een benadering x te vinden voor een eigenvector van de matrix A indien een goede benadering μ van de eigenwaarde λ gekend is, door de iteratie

$$\begin{aligned} & x = \tfrac{b}{\|b\|} \\ & for\ \ k = 1, 2, \ldots \\ & \quad (A - \mu I)y = x \\ & \quad x = \tfrac{y}{\|y\|} \end{aligned}$$

een of meerdere keren uit te voeren, waarbij b een willekeurige vector is.

Theoretisch gezien is de benadering x voor de eigenvector des te beter naarmate μ een betere benadering is voor de eigenwaarde λ. Indien μ echter een erg goede benadering is voor de eigenwaarde λ, is de matrix van het stelsel bijna singulier (m.a.w. het stelsel is slecht geconditioneerd). We verwachten dan grote relatieve fouten op de oplossing y veroorzaakt door afrondingsfouten. Nochtans blijkt de berekende x in dit geval steeds een goede benadering te zijn voor de eigenvector. Verklaar deze schijnbare tegenspraak. Voer hiervoor volgend experiment uit.

Neem $A = A_1$ en $\mu = 2 + 10^{-5}$.

a) Wat is het conditiegetal van $A - \mu I$?

Oplossing. $\kappa(A - \mu I) = 2 \cdot 10^5$

b) Voer een iteratiestap uit van de inverse machtsmethode met een willekeurig rechterlid voor het stelsel.

Oplossing. *Zie* `opgave2.m`*.*

c) Bepaal $\|x - \text{eigvec}\|_2$.

Oplossing. *Orde* 10^{-5}.

d) Breng een perturbatie van grootte-orde 10^{-8} aan op de matrix $A - \mu I$. Bepaal $\|y - y_{\text{pert}}\|_2$ en $\|x - x_{\text{pert}}\|_2$. Wat besluit je?

Oplossing. $\|y - y_{\text{pert}}\|_2 \approx 1$, $\|x - x_{\text{pert}}\|_2 \approx 10^{-8}$. *Om y te vinden moet een zeer slecht geconditioneerd stelsel opgelost worden. De oplossing is zoals verwacht volkomen anders na perturbatie. De richting waarin beide vectoren liggen is echter wel nagenoeg identiek zoals blijkt uit vergelijking van x en x_{pert}. Dit komt omdat de matrix $A - \mu I$ eender welke fout versterkt in de richting die we zoeken (ook perturbaties) en alle andere richtingen verzwakt.*

3 Defectieve matrices

Opgave 3. Beschouw de $n \times n$-matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

a) Wat zijn de eigenwaarden van deze matrix en wat is de multipliciteit ervan?

> **Oplossing.** *De matrix heeft slechts één eigenwaarde, namelijk $\lambda = 1$, met algebraïsche multipliciteit gelijk aan n. De geometrische multipliciteit is gelijk aan het aantal onafhankelijke eigenvectoren. Er is slechts 1 onafhankelijke eigenvector, $[1\,0\cdots 0]^T$, de geometrische multipliciteit is dus 1. Aangezien de algebraïsche multipliciteit groter is dan de geometrische, is de matrix defectief.*

b) Perturbeer het element $a_{n,1}$ van deze matrix. Wat zijn de eigenwaarden?

> **Oplossing.** *Stel $a_{n,1} = \epsilon$. De eigenwaarden liggen op een cirkel in het complexe vlak met centrum 1 en straal $\epsilon^{1/n}$.*

c) Wat is je besluit?

> **Oplossing.** *Eigenwaarden met te weinig eigenvectoren (lange Jordanketting) zijn slecht geconditioneerd.*

4 Stelling van Bauer-Fike

Opgave 4. In deze oefening gaan we na wat de invloed is van een additieve perturbatie op een matrix A op het spectrum van A. We gaan er vanuit dat A diagonalizeerbaar (of niet defectief) is. Stel $\tilde{A} = A + \delta A$ en noem $\Lambda(A)$ het spectrum van A. We bestuderen volgende stelling.

Stelling 1 (Bauer-Fike) *Beschouw een eigenwaarde $\tilde{\lambda}$ van $\tilde{A}$ en noem V de matrix met als kolommen de eigenvectoren van A. Er bestaat een $\lambda \in \Lambda(A)$ zodanig dat*

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| \leq \kappa_p(V)\|\delta A\|_p$$

met $p \geq 1$ en κ_p het conditiegetal ten opzichte van de p-norm.

a) Genereer een random niet defectieve 7×7 matrix A in Matlab met eigenwaarden $0, 1, \ldots, 6$ en matrix van eigenvectoren V met $\kappa_2(V) = 7$. Bereken ook de geperturbeerde matrices $\tilde{A}_k = A + \delta A_k$ waarbij δA_k random matrices zijn met $\|\delta A_k\|_2 = 10^k \cdot \epsilon_{\text{mach}}$, $1 \leq k \leq 10$. Plot het verloop van de absolute verandering van de grootste eigenwaarde ten opzichte van k tesamen met de bovengrens van Bauer-Fike voor de 2-norm.

> **Oplossing.** *Zie `opgave4.m`.*

b) Vervang de matrix A uit de eerste deelvraag door een matrix met eigenwaarden $1, 10, \ldots 10^6$ en maak op dezelfde manier een figuur. Wat gebeurt er en hoe valt dit te verklaren?

> **Oplossing.** *De bovengrens lijkt onjuist voor $k < 6$. Dit is te wijten aan afrondingsfouten door eindige precisie berekeningen. Matlab berekent de eigenwaarden van een matrix A op een achterwaarts stabiele manier. Dat wil zeggen dat de berekende eigenwaarden de eigenwaarden zijn van $A + \Delta A$ met $\|\Delta A\| \approx \|A\| \epsilon_{\text{mach}} \approx 10^{-10}$. Dit betekent dat als we een perturbatie opleggen die veel kleiner is dan 10^{-10} (of $k < 6$), dan blijven de berekende eigenwaarden de exacte eigenwaarden van een sterker geperturbeerde matrix en dan geldt de Bauer Fike bovengrens voor $\|\delta A\| \approx 10^{-10}$.*

c) Bewijs dat voor een normale matrix ($A^\top A = AA^\top$) de waarde van $|\lambda - \tilde{\lambda}|$ begrensd is door $\|\delta A\|_2$ en ga dit na op dezelfde manier als in de vorige deelvragen.

> **Oplossing.** *Normale matrices zijn orthogonaal diagonalizeerbaar, dus $\|V\|_2 = 1$.*