NMB - Oefenzitting 2
Kleinste-kwadraten veeltermbenadering

Simon Telen

Opgave 1. Schrijf een functie `plotres(x,r,w)` om de residus r_i af te beelden samen met de gewichten w_i. De punten (x_i, r_i) moeten aangeduid worden met een rode '+' en verbonden met een volle rode lijn. De x-as is verticaal gecentreerd in het venster van de figuur en is aangeduid met een zwarte stippellijn over het hele interval bestreken door de abscissen in `x`. In dezelfde figuur wordt in groene streeplijn de vector van gewichten weergegeven, zo gescaleerd dat het grootste gewicht tegen de bovenrand van het venster komt.

Opgave 2. Schrijf een functie `c = kkb1(x,f,w,n)` die de discrete kleinste-kwadraten veeltermbenadering opstelt van graad n in de punten (x_i, f_i) met gewichten w_i voor $i = 1 \dots N$. De functie krijgt de vectoren $[x_i], [f_i]$ en $[w_i]$ als invoerparameters en geeft als uitvoer de vector van coëfficiënten $[c_k]$, $k = 0 \dots n$ van de benaderende veelterm $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, bepaald als oplossing van het overgedetermineerd stelsel:

$$\left[\sqrt{w_i}\, x_i^k\right] \begin{bmatrix} \\ c_k \\ \\ \end{bmatrix} = \left[\sqrt{w_i}\, f_i\right]$$

Gebruik de ingebouwde functie van MATLAB om dit stelsel op te lossen. Schrijf daarna een tweede functie `c = kkb2(x,f,w,n)` zodat $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ bepaald wordt als de oplossing van het normaalstelsel:

$$\left[\sum_{i=1}^{N} w_i\, x_i^{j+k}\right] \left[c_k\right] = \left[\sum_{i=1}^{N} w_i\, x_i^{j}\, f_i\right]$$

Opgave 3. Gebruik beide functies om benaderingen op te stellen voor de functie e^x op het interval $[-1, 1]$. Neem als gewichtsfunctie zowel $w(x) = 1$ als $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ en vergelijk het residu. Plot het maximale residu als functie van n voor $n = 1, \dots, 20$. Bij welke graad krijg je het kleinste maximale residu? Om een veelterm te evalueren kan je de MATLAB-functie `polyval` gebruiken.

Opgave 4. Gebruik de functie `c = kkb1(x,f,w,n)` om een benadering voor een kromme op te stellen. Een kromme in het vlak wordt gegeven door een parametrisatie van de vorm $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$. Een veeltermbenadering van een kromme wordt opgesteld als $(f_n(t), g_m(t))$, $t \in [a, b]$, waarbij f_n en g_m veeltermen zijn die de functies x en y benaderen. Zoek een benadering voor de kromme gegeven door het cijfer "6". Stel hiertoe eerst een parametervoorstelling op van de vorm (t_i, x_i, y_i). Met behulp van de routine `click` (zie Toledo) kan je geschikte waarden voor x_i en y_i bepalen door ze aan te klikken op een figuurtje. Kies dan bijvoorbeeld als parametrisatie `t = linspace(0,1,N)`.

Opgave 5. In deze oefening onderzoeken we verschillende discrete kkb's voor de functie

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$$

waarbij $x > 0$ een positief reëel getal is (x mag kleiner zijn dan 1).

a) Om $f(x)$ te evalueren kan je gebruik maken van de ingebouwde Matlab-functie `expint`. Hoe doe je dit?

b) Kan vanaf een bepaalde benaderingsgraad het residu in elk punt (theoretisch) nul worden? Leg uit. Wat betekent dit?

c) Vergelijk verschillende benaderingen voor $f(x)$ op het interval $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ met gewichtsfunctie $w(x) \equiv 1$ en een vast aantal abscissen N. Gebruik deze benaderingen om de integraal

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x) dx$$

te berekenen met 6 juiste beduidende cijfers. Leg uit hoe je te werk gaat en geef de waarde van de integraal.

d) Op dezelfde manier kan je ook de afgeleide $f'(x)$ op $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ benaderen. Leg uit hoe je te werk gaat. Vergelijk je resultaat met de exacte waarde

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

Geef voor een bepaalde graad n en aantal abscissen N de maximale relatieve fout op $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Vergelijk dit met de fout bij numerieke integratie. Wat is nauwkeuriger?

Opgave 6. Het bestand `abinbev.mat` geeft de dagelijkse evolutie weer van het aandeel van brouwerij AB Inbev over de periode van 24 november 2009 tot en met 23 november 2010 zoals het genoteerd werd op de Euronext beurs. Uitgezet is de prijs per stuk in Euro. Merk op dat niet voor elke dag een waarde beschikbaar is (dag 1 komt overeen met 24 november 2009).

Gebruik veeltermextrapolatie d.m.v. kleinste-kwadratenbenadering om de waarde van het aandeel te voorspellen op 3 december 2010 (10 dagen na de laatste notering). Wat gebeurt er op langere termijn met het aandeel?

Heb je veel vertrouwen in je eigen voorspelling? Leg uit.

Opgave 7. Zoek een veeltermbenadering voor de functie $\mathrm{bgsin}(x)$ voor $x \in [0, 1]$. Probeer enkele gewichtsfuncties en eventueel verschillende liggingen van de meetpunten om je benadering zo nauwkeurig mogelijk te maken. Vergelijk je resultaten met een benadering van de vorm:

$$\frac{\pi}{2} - \sqrt{1-x}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots)$$

Geef aan hoe je te werk gaat. Welke benadering geeft het beste resultaat?