# Oefenzitting 2

Nico Vervliet

1 maart 2016

# Outline

## QR van een bandmatrix

$$\begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

Figuur : Bovenbandbreedte $q = 2$ en onderbandbreedte $p = 2$.

**Merk op**

We hanteren hier de definitie dat bovenbandbreedte de diagonaal meetelt, terwijl de onderbandbreedte deze niet meetelt (i.t.t. de opgave).

## Vorm QR van bandmatrix

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

### Conclusie

- $Q$ heeft onderband van $p$, bovenband van $n$
- $R$ is bovendriehoeks, bovenband van $p + q$

# Vorm QR van bandmatrix (2)

## Vorm van $Q$

- Elke kolom $q_i$ is som van $q_j$ met $j \leq i$

## Vorm van $R$

- $r_{ij} = q_i^* a_j$
- $q_i$ heeft $p + i$ niet-nullen bovenaan
- $a_j$ heeft $max\{0, j - q\}$ nullen bovenaan
- $r_{ij} \neq 0$ als $j - q < p + i$ of $j - i < p + q$

## Complexiteit Householder

**for** $k = 1, \ldots, n$ **do**

$x = A_{k:m,k}$

$v_k = \text{sign}(x_1)\|x\|e_1 + x$

$v_k = v_k / \|v_k\|$

$A_{k:m,k:n} = A_{k:m,k:n} - 2v_k(v_k^* A_{k:m,k:n})$

## Complexiteit Householder

**for** $k = 1, \ldots, n$ **do**

$x = A_{k:m,k}$

$v_k = \text{sign}(x_1)\|x\|e_1 + x$

$v_k = v_k / \|v_k\|$

$A_{k:m,k:n} = A_{k:m,k:n} - 2v_k(v_k^* A_{k:m,k:n})$

| $+-$ | $*/$ | $\surd$ |
|---|---|---|
| $2pn$ | $3pn$ | **2n** |
| $2p(p+q)n$ | $\mathbf{2p(p+q)n}$ | |

## Complexiteit Givens

**for** *elke* $a_{ji} \neq 0$ *met* $i < j$ **do**

Voorbereidende stappen:

$r = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}$

$c = a_{ii}/r$

$s = -a_{ji}/r$

Matrixtransformatie:

$a_{i,i:n} = ca_{i,i:n} - sa_{j,i:n}$

$a_{j,i:n} = sa_{i,i:n} + ca_{j,i:n}$

## Complexiteit Givens

**for** *elke* $a_{ji} \neq 0$ *met* $i < j$ **do**

Voorbereidende stappen:

$r = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}$

$c = a_{ii}/r$

$s = -a_{ji}/r$

Matrixtransformatie:

$a_{i,i:n} = ca_{i,i:n} - sa_{j,i:n}$

$a_{j,i:n} = sa_{i,i:n} + ca_{j,i:n}$

| $+-$ | $*/$ | $\sqrt{}$ |
|---|---|---|
| $pn$ | $4pn$ | $\mathbf{pn}$ |
| $2p(p+q)n$ | $\mathbf{4p(p+q)n}$ | |

## a) Kolom verwijderen

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

# a) Kolom verwijderen

$$\begin{bmatrix} \times & \color{red}{\times} & \times & \times \\ \times & \color{red}{\times} & \times & \times \\ \times & \color{red}{\times} & \times & \times \\ \times & \color{red}{\times} & \times & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times & \color{red}{\times} & \times & \times \\ 0 & \color{red}{\times} & \times & \times \\ 0 & \color{red}{0} & \times & \times \\ 0 & \color{red}{0} & 0 & \times \end{bmatrix}$$

## a) Kolom verwijderen

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

## a) Kolom verwijderen

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

### Givens rotaties om nullen te maken

- $Q^\mathsf{T} \tilde{A} = H$ ($H$ is in Hessenbergvorm)
- $Q_1 = Q G_k \cdots G_{n-1}$
- $R_1 = G_{n-1}^\mathsf{T} \cdots G_k^\mathsf{T} H$
- $\tilde{A} = Q_1 R_1$

## b) Kolom toevoegen

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## b) Kolom toevoegen

$$\begin{bmatrix} \times & \color{red}{\times} & \times & \times \\ \times & \color{red}{\times} & \times & \times \\ \times & \color{red}{\times} & \times & \times \\ \times & \color{red}{\times} & \times & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times & \color{red}{\times} & \times & \times \\ 0 & \color{red}{\times} & \times & \times \\ 0 & \color{red}{\times} & 0 & \times \\ 0 & \color{red}{\times} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### Extra kolom

- $Q^\mathsf{T}\tilde{A} = H$
- $w = Q^\mathsf{T}z$ ($w$ is de extra kolom in $H$)

## b) Kolom toevoegen

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & 0 & \times \\ 0 & \times & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### Extra kolom en Givens Rotaties

- $Q^{\mathsf{T}}\tilde{A} = H$
- $w = Q^{\mathsf{T}}z$
- $Q_1 = QG_{k+1} \cdots G_{m-1}$
- $R_1 = G_{k+1}^{\mathsf{T}} \cdots G_{m-1}^{\mathsf{T}} H$
- $\tilde{A} = Q_1 R_1$
- Let op volgorde van de rotaties: van onder naar boven zodat enkel op de diagonaal niet-nullen geïntroduceerd worden.

## c) Rij toevoegen

$$\begin{bmatrix} \color{red}{\times} & \color{red}{\times} & \color{red}{\times} & \color{red}{\times} \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \color{red}{\times} & \color{red}{\times} & \color{red}{\times} & \color{red}{\times} & \color{red}{\times} \\ \color{red}{\times} & \times & \times & \times & \times \\ \color{red}{\times} & \times & \times & \times & \times \\ \color{red}{\times} & \times & \times & \times & \times \\ \color{red}{\times} & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \color{red}{\times} & \color{red}{\times} & \color{red}{\times} & \color{red}{\times} \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

### Uitbreiden $Q$ en $R$

- $Q_d = \begin{bmatrix} 1 & \\ & Q \end{bmatrix}$
- $Q_d^\mathsf{T} \tilde{A} = \begin{bmatrix} w^\mathsf{T} \\ R \end{bmatrix} = H$

## Matlab

```
format short e;
% Matrix
X = rand(5,2); X(2:5,1) = X(2:5,1)*1.e-8;
% Beide reflecties toepassen op X
U1 = X(:,1) + norm(X(:,1))*eye(size(X,1),1)
U2 = X(:,1) - norm(X(:,1))*eye(size(X,1),1)
H1X = X  - 2 / (U1'*U1) * U1 * U1' * X
H2X = X  - 2 / (U2'*U2) * U2 * U2' * X
```

## Bespreking

- `H1X` is zoals het hoort: enkel eerste element van kolom 1 is niet nul, andere zijn zeer klein (ongeveer `1e-20` tot `1e-30`)
- `H2X` is niet zoals het hoort: de nullen zijn niet echt nul (ongeveer `1e-10`)
- Het probleem is de slechte conditie van de aftrekking.

## Opgave 4

- Voorbeeld:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \epsilon \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

met $\epsilon = 10^{-12}$.

## Opgave 4

- Voorbeeld:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \epsilon \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

met $\epsilon = 10^{-12}$.

## Opgave 4

- Normaalstelsel $A^\mathsf{T}Ax = A^\mathsf{T}b$:

$$A^\mathsf{T}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\epsilon^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

  Op een computer is $1 + \epsilon^2 = 1$ vanwege de beperkte machinenauwkeurigheid
- Householder $Rx = Q^\mathsf{T}b$:
  - $Q = I$
  - $R = A$

# Opgave 4

```
e = 1e-12;
A = [1 1; 0 e; 0 0];
b = rand(3,1);

x1 = (A'*A) \ (A'*b)
R  = A
x2 = R \ b
```

a)

```
function [d,T,ds]=fastgivensQR1d(A)
...
ds=zeros(m,n);
...
for j=1:n
    for i=m:-1:j+1
        %nieuwe alfa,beta en d bepalen
        [alfa,beta,type,newd]=fastgivens1(T(i-1:i,j),d(i-
        % we willen dit weten
        d(i-1:i)=newd;
        ...
    end
    % opslaan
    ds(:,j) = d';
end
```

a)

```
%% Opgave 5a
figure(1)
A = randn(100,50);
[d,~,ds] = fastgivensQR1d(A);
subplot(1,2,1)
plot(ds(end,:)')
```

## b) Oude versie (fastgivens.m)

```
type=1;
tau=d(1);
newd(1)=(1+gamma)*d(2);
newd(2)=(1+gamma)*tau;
```

## b) Nieuwe versie (`fastgivens.m`)

```
if gamma <= 1
    type=1;
    tau=d(1);
    newd(1)=(1+gamma)*d(2);
    newd(2)=(1+gamma)*tau;
else
    type=2;
    alfa=1/alfa;
    beta=1/beta;
    gamma=1/gamma;
    newd(1)=(1+gamma)*d(1);
    newd(2)=(1+gamma)*d(2);
end
```

c)

```
%% Opgave 5a
figure(1)
A = randn(100,50);
[d,~,ds] = fastgivensQR1d(A);
subplot(1,2,1)
plot(ds(end,:)')
lim = ylim;

%% Opgave 5c
subplot(1,2,2)
[d,~,ds] = fastgivensQRd(A);
plot(ds(end,:)')
ylim(lim)
```

c)

- Pieken zijn vaak lager (niet altijd zo!)
- Aangezien de laatste `d` een combinatie is van twee `d` waarden, kan de piek terug ongedaan gemaakt worden.

d)

- Met aanpassing nog steeds groei
- Observeer $M$, $D$ en $T$ en herschaal indien overflow dreigt
- Nog steeds probleem bij niet-volle rang: pivoteer.

e)

```
A = rand(m,n);
b = rand(m,1);
[d,T] = fastgivensQR([A,b]);
x = T(1:n,1:n)\T(1:n,n+1);
norm(A*x - b) - norm(A*(A\b) - b)
```