NLA4: QR en iteratieve methoden

Nico Vervliet, *KU Leuven* *17 mei 2018*

1 De QR-methode

Opgave 1

Construeer drie testmatrices:

- $A_1 = P_1 \Lambda_1 P_1^T$ met P_1 orthogonaal en

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- $A_2 = P_2 \Lambda_2 P_2^{-1}$ met $\kappa(P_2) = 100$ en $\Lambda_2 = \Lambda_1$.
- $A_3 = P_3 \Lambda_3 P_3^{-1}$ met $P_3 = P_2$ en

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Om de QR-methode uit te voeren, gebruik je het commando

```
[e, res] = nlaqr(A);
```

dat je op Toledo kan vinden. Deze routine drukt voor iedere stap de matrix A en de bekomen residunorm af. Deze normen worden ook bijgehouden in `res`. Bepaal voor de drie testmatrices:

- Naar welke eigenwaarde convergeert de methode?
- Hoe snel is de convergentie?
- Verklaar.

2 Eigenwaarden bepalen met de Arnoldi iteratie

We gaan met enkele matlab-experimenten de eigenschappen van de Arnoldi-methode bestuderen. Je kan de volgende Matlab-functies gebruiken. Gebruik `help <naam>` voor extra informatie.

Naam	Info
`linspace.m`	`N` reële getallen uniform verdeeld in [`rmin`, `rmax`]
`eigint.m`	`N` willekeurige reële getallen uniform verdeeld in [`rmin`, `rmax`)
`eigcirc.m`	`N` willekeurige complexe getallen λ met $\lvert\lambda - c\rvert < R$
`willglv.m`	past een willekeurige gelijkvormigheidstransformatie toe op de diagonaalmatrix met opgegeven waarden
`willorth.m`	pas een willekeurige orthogonale transformatie toe op de diagonaalmatrix met opgegeven waarden

Opgave 2

Implementeer de Arnoldi iteratie. De iteratie hoeft geen rekening te houden met 'breakdown' (deling door 0). Bepaal bij elke iteratie de grootste en kleinste Ritz-eigenwaarden (efficiëntie is niet belangrijk, gebruik de standaard Matlab-functie). Construeer een matrix met 10 eigenwaarden in het interval $(4, 5)$. Maak een grafiek van de absolute waarde van het verschil tussen de grootste Ritz-eigenwaarde en de grootste eigenwaarde. Idem voor de kleinste Ritz-eigenwaarde en de kleinste eigenwaarde. Doe nu hetzelfde maar vervang een van de eigenwaarden door 8 en vervolgens ook een door 2. Wat stel je vast? Wat zou je hieruit kunnen besluiten?

Opgave 3

Iteratieve methoden zijn in het bijzonder geschikt wanneer de matrix een ijle structuur heeft. Genereer een random, ijle matrix $A \in \mathbb{R}^{1000\times1000}$ met het commando `sprand`. Pas een aantal Arnoldi-iteratiestappen toe op deze matrix (bv. 100). Bereken per iteratiestap de Ritz waarden. Daarbij mag je gebruik maken van het ingebouwde Matlab-commando `eig`. Maak een grafiek waarin je toont hoe de Ritz waarden per iteratiestap convergeren naar de eigenwaarden van A. Toon daarbij enkel de reële delen. Bespreek bondig het convergentiegedrag.