Oefeningen Numerieke Wiskunde

Oefenzitting 5: Numerieke integratie

Het doel van deze oefenzitting is de theorie over numerieke integratie inoefenen. Het bestreken deel van de cursus is *Hoofdstuk 6, Numerieke integratie*.

1 Interpolerende kwadratuurformule en nauwkeurigheidsgraad

Theorie

De bepaalde integraal van een functie f over een interval $[a, b]$ wordt benaderd door een **kwadratuurformule**. Dit is een gewogen som van de functiewaarden

$$\int_a^b f(x)dx \approx H_0 f(x_0) + H_1 f(x_1) + \cdots + H_n f(x_n). \tag{1}$$

De punten x_k worden de abscissen van de kwadratuurformule genoemd en de coëfficiënten H_k de gewichten.

De kwadratuurformule wordt **interpolerend** genoemd indien aan de volgende, onderling equivalente voorwaarden voldaan is:

1. Voor elke functie f geldt

$$H_0 f(x_0) + H_1 f(x_1) + \cdots + H_n f(x_n) = \int_a^b y_n(x)dx \tag{2}$$

waarbij $y_n(x)$ de interpolerende veelterm van graad $\leq n$ voorstelt door de punten $(x_k, f(x_k)),\ k = 0, 1, \ldots, n$.

2. Voor elke veelterm p van graad $\leq n$ geldt

$$H_0 p(x_0) + H_1 p(x_1) + \cdots + H_n p(x_n) = \int_a^b p(x)dx. \tag{3}$$

3. De gewichten van de kwadratuurformule zijn gelijk aan de integralen van de Lagrangeveeltermen

$$H_k = \int_a^b l_k(x)dx \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{4}$$

We zeggen dat de **nauwkeurigheidsgraad** van de kwadratuurformule (1) gelijk is aan d indien

$$H_0 p(x_0) + H_1 p(x_1) + \cdots + H_n p(x_n) = \int_a^b p(x)dx, \tag{5}$$

voor elke veelterm p van graad $\leq d$ en indien er een veelterm van graad $d+1$ bestaat waarvoor deze gelijkheid niet meer geldt. Vermits elke veelterm kan geschreven worden als een lineaire combinatie van de eentermen $1, x, x^2, \ldots$, komt dit neer op de voorwaarden

$$\begin{aligned}
H_0 + H_1 + \cdots + H_n &= \int_a^b dx \\
H_0 x_0 + H_1 x_1 + \cdots + H_n x_n &= \int_a^b x dx \\
&\cdots \\
H_0 x_0^d + H_1 x_1^d + \cdots + H_n x_n^d &= \int_a^b x^d dx \\
H_0 x_0^{d+1} + H_1 x_1^{d+1} + \cdots + H_n x_n^{d+1} &\neq \int_a^b x^{d+1} dx
\end{aligned}$$

Opgaven

Probleem 1. Toon de onderlinge equivalentie aan van de 3 voorwaarden opdat een kwadratuurformule interpolerend zou zijn. (Hint: 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 1.).

Probleem 2. Wat is het verband tussen de begrippen *interpolerende kwadratuurformule* en *nauwkeurigheidsgraad van een kwadratuurformule*?

Probleem 3. Bepaal de gewichten van de kwadratuurformule

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx H_0 f(-\frac{1}{2}) + H_1 f(\frac{1}{2}) \tag{6}$$

zo dat haar nauwkeurigheidsgraad zo hoog mogelijk is.
Hoe hoog is de nauwkeurigheidsgraad? Is de kwadratuurformule interpolerend?

Probleem 4. (Gauss kwadratuur) Bepaal de parameters a, b, c zodanig dat de kwadratuurformule

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx af(-c) + bf(c) \tag{7}$$

een zo hoog mogelijke nauwkeurigheidsgraad bezit. Hoe hoog is de nauwkeurigheidsgraad?

Probleem 5. Bepaal de gewichten $H_{-\frac{1}{2}}, H_0$ en $H_{\frac{1}{2}}$ zodanig dat de kwadratuurformule

$$\int_{a-h}^{a+h} f(x)dx \approx H_{-\frac{1}{2}} f(a - \frac{h}{2}) + H_0 f(a) + H_{\frac{1}{2}} f(a + \frac{h}{2})$$

een zo hoog mogelijke nauwkeurigheidsgraad heeft. Hoe hoog is de nauwkeurigheidsgraad? (Hint: gebruik i.p.v. de basis $1, x, x^2, \ldots$ de equivalente basis $1, (x-a), (x-a)^2, \ldots$. Waarom mag dit?)

2 Integratiefout

Probleem 6*. Toon aan dat

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi), \quad \xi \in (a,b). \tag{8}$$

De eerste term van het rechterlid is een kwadratuurformule, de tweede term haar integratiefout. (Hint: gebruik de Taylorontwikkeling van de functie

$$F(z) = \int_a^z f(x)dx$$

rond het punt $z = a$.) Wat is de nauwkeurigheidsgraad van deze kwadratuurformule?

3 Samengestelde integratieregel

Probleem 7*.

- Deel het interval $[a,b]$ op in n gelijke deelintervallen $[a_k, b_k]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. (Geef een expliciete formule voor a_k en b_k.)
- Geef de samengestelde regel bekomen door de integraal over elk deelinterval $[a_k, b_k]$ te benaderen m.b.v. de kwadratuurformule in (8). Pas voor deze samengestelde regel de afleiding aan in de cursus van de formule voor de integratiefout van de trapeziumregel.
- Convergeert de samengestelde integratieregel naar de integraal als $n \to \infty$, en zo ja hoe snel?
- Vergelijk met de andere samengestelde integratieregels die je kent. Is het zo dat een samengestelde integratieregel sneller convergeert als haar nauwkeurigheidsgraad hoger is?