NMB - Oefenzitting 3: Eigenwaardenproblemen

Hendrik Speleers

Nota's

Overzicht

Weetjes

Ontbindingen

Methodes
- Methode van de machten
- Inverse iteratie
- Rayleigh quotiënt iteratie
- QR
- Andere

Nota's

Weetjes

- $Ax = \lambda x$
  - x eigenvector (ev)
  - λ eigenwaarde (ew)
- Geometrische meervoudigheid : dimensie eigenruimte ew (aantal ev horende bij ew)
- Algebraïsche meervoudigheid : meervoudigheid als wortel van de karakteristieke veelterm
- gm $\leq$ am (gm $<$ am $\Rightarrow$ defectieve matrix)
- Gelijkvormigheidstransformatie : $A \rightarrow X^{-1}AX$

Nota's

Weetjes

- Hermitisch : $A^* = A$ (symmetrisch : $A^T = A$) reëele ew, orthogonale ev

$$Ax = \lambda x \Rightarrow x^*Ax = \lambda x^*x$$
$$x^*A^* = \lambda^*x^* \Rightarrow x^*Ax = \lambda^*x^*x$$
$$\lambda^* = \lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

- SPD matrix : $\lambda = \frac{x^TAx}{x^Tx} > 0$
- Unitair : $A^*A = I$ (orthogonaal : $A^TA = I$) alle ew modulus 1

$$\|Ax\|_2^2 = x^*A^*Ax = x^*\lambda^*\lambda x = x^*x$$
$$\lambda^*\lambda = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = 1$$

Nota's

Ontbindingen

Ontbindingen die eigenwaarden onthullen :

Structuur	Ontbinding	Voorwaarden
Diagonalisatie	$A = V\Lambda V^{-1}$	A is niet defectief
Unitaire diag.	$A = Q\Lambda Q^*$	A is normaal ($A^*A = AA^*$)
Schur factorisatie (Unitaire triangul.)	$A = QTQ^*$	–

A hermitisch $\rightarrow$ unitaire diagonalisatie

Nota's

Methodes

- Steeds iteratief
  - cfr. nulpunten veelterm ($m \geq 5$)
- Twee fasen aanpak:
  - Reductie naar Hessenberg/tridiagonale vorm
  - Iteratief proces op gestructureerde matrix

Nota's

Methodes

- Methode van de machten (lineair)
  $w \leftarrow Av$; $v \leftarrow \frac{w}{\|w\|}$; $\lambda = v^* A v$
  - enkel de eigenvector bij de grootste eigenwaarde
- Inverse iteratie (lineair)
  $(A - \mu I)w = v \rightarrow w$; $v \leftarrow \frac{w}{\|w\|}$; $\lambda = v^* A v$
  - keuze μ bepaalt gevonden eigenwaarden
- Rayleigh quotiënt iteratie (kwadratisch, kubisch)
  $(A - \lambda I)w = v \rightarrow w$; $v \leftarrow \frac{w}{\|w\|}$; $\lambda = v^* A v$
  - EV via inverse iteratie
  - EW via Rayleigh quotiënt
  - Voordeel : snelle convergentie
  - Nadeel : telkens stelsel oplossen

Nota's

Methodes

- QR
  - Hessenberg, tridiagonaal
  - Zonder shift (lineair)
    $QR = A \rightarrow (Q, R)$; $A \leftarrow RQ$
  - Met shift (kwadratisch, kubisch)
    $QR = A - \mu I \rightarrow (Q, R)$; $A \leftarrow RQ + \mu I$
  - Keuze shift
    - Rayleigh-quotiënt shift ($a_{m,m}$)
    - Wilkinson shift
- Andere : Jacobi, bisectie, verdeel en heers, Arnoldi, Lanczos

Nota's