### NMB -Oefenzitting 1

Hendrik Speleer:

Definitie:

Householde

Givens

Givens

χιτ

Kleinste kwadrate

Snelle Givens

# NMB - Oefenzitting 1: QR-factorisatie en kleinste kwadratenproblemen

Hendrik Speleers

## **Overzicht**

#### NMB -Oefenzitting 1

- **Definities**
- 2 Householdertransformatie
  - Givenstransformatie
  - QR-factorisatie
- 5 Kleinste kwadratenproblemen
- 6 Snelle Givenstransformatie

## **Definities**

NMB -Oefenzitting 1

> Hendril Speleer

### Definities

Householde

Given

Given

IZI da ara

Kleinste kwadrater

Snelle Given:

- Projectie  $P^2 = P$
- Complementaire projectie I P
- Orthogonale projectie  $P = P^T$
- Orthogonale matrix  $Q^TQ = I$
- Projectie op range $(\hat{Q})$  :  $P = \hat{Q}\hat{Q}^T$
- Rang 1 orthogonale projectie  $P = qq^T$

### Householdertransformatie

NMB -Oefenzitting 1

Hendrik

ofinition

Householder

Housenoid

Givens

Kleinste kwadrate

Snelle Given

- Doel : nullen introduceren in kolom via orthogonale transformatie
- Voorstelling :

$$F = I - 2 \frac{vv^T}{v^T v}$$
$$v = x \pm ||x||_2 e_1$$
$$Fx = \mp ||x||_2 e_1$$

- Grafisch
- Keuze teken
- Toepassen : nooit matrix F vormen

$$FA = A - vw^T$$
,  $w = \beta A^T v$ ,  $\beta = 2/(v^T v)$ 

## Householdertransformatie

NMB -Oefenzitting 1

> Hendrik Speleers

Definities

Householder

Givens

0.00...

Kleinste kwadrate

Snelle Givens

• Rekenkost :

$$2mn^2-\frac{2}{3}n^3$$

• Eigenschappen :

• 
$$Fv = v - 2v \frac{v^T v}{v^T v} = v - 2v = -v$$

• 
$$Fy = y - 2v \frac{v^T y}{v^T v} = y$$
  $\forall y : v^T y = 0$ 

• 
$$F = F^T$$
,  $F^{-1} = F^T$ 

• 
$$\lambda_1 = -1$$
,  $\lambda_i = 1$ ,  $i \neq 1$ 

• det 
$$F = \prod \lambda_i = -1$$

• 
$$\sigma_i = 1$$

## Givenstransformatie

NMB -Oefenzitting 1

> Hendrik Speleers

ofinition

Hausahalda

Householde

Givens

QR

Kleinste kwadrate

Snelle Given:

- Doel : nul introduceren via orthogonale transformatie
- Voorstelling :  $c = \cos(\theta)$ ,  $s = \sin(\theta)$

$$G(i, k, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- Rekenkost :  $3mn^2 n^3$
- Selectiever, maar duurder dan Householder (factor 3/2)

## QR-factorisatie

NMB -Oefenzitting 1

> Hendrik Speleers

Definitie:

Householde

..........

Given:

QR

Kleinste

Snelle Given

- Definitie A = QR, Q orthogonaal, R bovendriehoeks
- Bestaat en is 'enig' (op teken na)
- Triangulaire orthogonalisatie
  - Klassieke Gram-Schmidt
  - Gewijzigde Gram-Schmidt (2mn²)
- Orthogonale triangularisatie
  - Householder QR  $(2mn^2 2/3n^3)$
  - Givens QR  $(3mn^2 n^3)$

## Kleinste kwadratenproblemen

#### NMB -Oefenzitting 1

Hendrik Speleers

Definitie

Householde

Given:

٦٥

Kleinste kwadraten

Snelle Givens

• Definitie : x zodat  $||b - Ax||_2$  minimaal (m > n)

Grafisch

• Normaalvergelijkingen :  $n \times n$  stelsel oplossen met Cholesky

$$A^T A x = A^T b$$

• QR :  $A = \hat{Q}\hat{R}$ , driehoekig stelsel oplossen

$$\hat{R}x = \hat{Q}^Tb$$

• SWO :  $A = \hat{U}\hat{\Sigma}V^T$ , diagonaal stelsel oplossen

$$\hat{\Sigma}w = \hat{U}^T b, \qquad x = Vw$$

### Snelle Givenstransformatie

NMB -Oefenzitting 1

> Hendrik Speleers

Definitie

Householde

c.

Given:

...

Kleinste kwadrater

Snelle Givens

Variant op Givenstransformatie

• Slimme voorstelling van Q:

• 
$$Q = MD^{-1/2}$$

• 
$$M^TM = D = diag(d_i), d_i > 0$$

• 
$$Q^TQ = (MD^{-1/2})^T MD^{-1/2} = I$$

- Herhalen : stel  $M = N_1 N_2 \cdots N_k$ 
  - kies  $N_1$  zodat  $N_1^T N_1 = D_1$  diagonaal
  - kies  $N_2$  zodat  $N_2^T D_1 N_2 = D_2$  diagonaal
  - kies  $N_k$  zodat  $N_k^T D_{k-1} N_k = D_k$  diagonaal
  - dan  $M^TM = D_k$
  - bovendien nullen introduceren met  $N_i$

# Snelle Givenstransformatie: Type 1

NMB -Oefenzitting 1

> Hendrik Speleers

Definitie:

Householde

Given

Mainata Mainata

kwadrater

Snelle Givens

Type 1: 
$$M_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ 1 & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

- gegeven  $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ ,  $D = diag(d_1, d_2)$
- ullet als  $x_2 
  eq 0$  neem  $lpha_1 = -x_1/x_2$  en  $eta_1 = -lpha_1 d_2/d_1$

$$egin{align} M_1^{\mathcal T} x &= \left[egin{array}{c} x_2(1+\gamma_1) \ 0 \end{array}
ight] \ M_1^{\mathcal T} D M_1 &= \left[egin{array}{c} d_2(1+\gamma_1) & 0 \ 0 & d_1(1+\gamma_1) \end{array}
ight] =: D_1 \ \end{array}$$

• met  $\gamma_1 = -\alpha_1 \beta_1 = (d_2/d_1)(x_1/x_2)^2$ 

# Snelle Givenstransformatie: Type 2

NMB -Oefenzitting 1

> Hendrik Speleers

Onfinition

Householde

Householde

Given

OR

Kleinste kwadrate

Snelle Givens

Type 2: 
$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \beta_2 & 1 \end{bmatrix}$$

- gegeven  $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ ,  $D = diag(d_1, d_2)$
- ullet als  $x_1 
  eq 0$  neem  $lpha_2 = -x_2/x_1$  en  $eta_2 = -lpha_2 d_1/d_2$

$$M_2^T x = \begin{bmatrix} x_1(1+\gamma_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2^T D M_2 = \begin{bmatrix} d_1(1+\gamma_2) & 0 \\ 0 & d_2(1+\gamma_2) \end{bmatrix} =: D_2$$

• met  $\gamma_2 = -\alpha_2 \beta_2 = (d_1/d_2)(x_2/x_1)^2$ 

## Snelle Givenstransformatie

NMB -Oefenzitting 1

> Hendrik Speleer

Definities

Householde

......

Given

GIVCII

Kleinste

Snelle Givens

• Groeifactoren  $1 + \gamma_i$ 

$$\gamma_1 \gamma_2 = 1$$

- Kies type zodat  $1 + \gamma_i \le 2$
- Groeifactor beperken tot 2

## Snelle Givens QR

#### NMB -Oefenzitting 1

Hendrik Speleer

Definitie

Householde

Civono

Given

ųκ

Kleinste kwadrater

Snelle Givens

- Gegeven A
- Bereken (M, D) met M niet-singulier, D diagonaal zodat  $M^TA = T$  bovendriehoeks en  $M^TM = D$
- $Q = MD^{-1/2}$  orthogonaal en  $Q^T A = D^{-1/2} T \equiv R$  bovendriehoeks
- Analoog aan Givens QR (selectie van nullen)
- Rekenkost :  $2n^2(m-n/3)$  flops
- Rekening houden met overflow
- Erg interessant voor ijle matrices

### Snelle Givens kleinste kwadraten

NMB -Oefenzitting 1

> Hendrik Speleers

. . . . . .

Householde

riousenoide

Givens

0 D

Kleinste

Snelle Givens

$$M^T A = \begin{bmatrix} T_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad M^T b = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} n \\ m-n \end{cases}$$

$$||Ax - b||_2 = ||Q^T (Ax - b)||_2$$

$$= ||D^{-1/2} M^T (Ax - b)||_2$$

$$= ||D^{-1/2} \left( \begin{bmatrix} T_1 \\ 0 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \right) ||_2$$

$$T_1x = c_1 \rightarrow x_{KK}$$