N-de orde differentiaalvergelijkingen

1 Homogene vergelijkingen met constante coëfficiënten

Deze zijn van de vorm

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{1}$$

Om de oplossing te vinden zoekt men de wortels van de karakteristieke vergelijking

$$Z(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

Noem deze wortels $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Indien ze allemaal verschillend zijn, wordt de oplossing van (1) gegeven door

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \cdots + c_n e^{r_n t}$$

met $c_1, c_2, \ldots, c_n$ willekeurige constanten.

Indien r_j en r_{j+1} complex toegevoegd zijn, dus $r_j = \lambda + i\mu$ en $r_{j+1} = \lambda - i\mu$, dan vervangt men het stel $e^{r_j t},\ e^{r_{j+1} t}$ door $e^{\lambda t} \cos \mu t,\ e^{\lambda t} \sin \mu t$.

Indien er een wortel r met meervoudigheid s is, dan vormen

$$e^{rt},\ te^{rt},\ t^2 e^{rt},\ \ldots,\ t^{s-1} e^{rt}$$

een stel oplossingen voor (1).

2 Methode van de onbepaalde coëfficiënten

Een particuliere oplossing Y van de niet-homogene n-de orde lineaire vergelijking met constante coëfficiënten

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = g(t)$$

kan men vinden indien $g(t)$ een speciale vorm heeft, namelijk een exponentiële, een veelterm, sinus of cosinus of een som of product van deze functies. In dat geval veronderstelt men dat de oplossing Y van dezelfde vorm is als de functie $g(t)$, maar met nog nader te bepalen coëfficiënten. Deze worden gevonden door de vooropgestelde oplossing Y in te vullen in de vergelijking. Enige aandacht bij het construeren van de vooropgestelde oplossing Y is vereist: soms is nodig het voorstel van een extra factor t^i te voorzien!

3 Variatie van de parameters

Indien een algemene oplossing van de homogene vergelijking gegeven wordt door

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t)$$

dan veronderstellen we dat de particuliere oplossing gegeven wordt door

$$Y(t) = u_1(t) y_1(t) + u_2(t) y_2(t) + \cdots + u_n(t) y_n(t),$$

waarin de functies $u_i(t)$ nog nader te bepalen zijn. Bereken de afgeleide van $Y(t)$ en leg als voorwaarde op dat deze alleen termen met $u_i(t)$ bevat en geen afgeleiden van $u_i(t)$. Doe hetzelfde voor de hogere orde afgeleiden van $Y(t)$ tot en met $Y^{(n-1)}(t)$. Leg als laatste voorwaarde op dat $Y(t)$ een oplossing is van de niet-homogene vergelijking. Samen met de vorige voorwaarden levert dit een stelsel in de onbekenden $u_i'(t)$. De uiteindelijke oplossing vindt men dan door deze te integreren.