NMB -Oefenzitting 5

Hendrik Speleers

Algemee

Ruimte

Genormeerd Unitair

Kleinstekwadraten

NMB - Oefenzitting 5: Kleinste-kwadratenbenadering (deel 1)

Hendrik Speleers

Overzicht

NMB -Oefenzitting 5

> Hendrik Speleers

......

Algemee

Ruimte Metrisch

Metrisch Genormeerd Unitair

Kleinstekwadrater

- Algemeen
- 2 Ruimte
 - Metrische ruimte
 - Genormeerde ruimte
 - Unitaire ruimte
- 3 Kleinste-kwadratenbenadering

Algemeen

NMB -Oefenzitting 5

> Hendrik Speleer

Algemeen

Ruimte Metrisch Genormeerd

Kleinstekwadrater

• Benaderingsprobleem :

- Te benaderen functie
- Klasse van benaderingsfuncties
- Benaderingscriterium
- Benaderingsalgoritme

• Ruimtes:

- Metrische ruimte
- Genormeerde ruimte
- Unitaire ruimte
- Euclidische ruimte

Algemeen

NMB -Oefenzitting 5

Algemeen

Benaderingsprobleem :

- Te benaderen functie
- Klasse van benaderingsfuncties
- Benaderingscriterium
- Benaderingsalgoritme

Ruimtes :

- Metrische ruimte
- Genormeerde ruimte
- Unitaire ruimte
- Euclidische ruimte

Metrische ruimte

NMB -Oefenzitting 5

Hendrik Speleer

Algeme

Metrisch

Genormeero Unitair

Kleinstekwadrater ullet ho is een afstand of metriek als

Metrische ruimte : verzameling voorzien van een metriek

Genormeerde ruimte

NMB -Oefenzitting 5

Hendrik Speleer

Algeme

Ruimte Metrisch Genormeerd

Unitair Kleinste-

Kleinstekwadraten

- | · | is een norm op een vectorruimte als
 - **①** ||x|| ≥ 0
 - $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 - ||ax|| = |a|||x||
- Genormeerde ruimte : vectorruimte met een norm
- Geïnduceerde afstand : $\rho(x, y) = ||x y||$

Unitaire ruimte

NMB -Oefenzitting 5

Hendril Speleer

Algemee

Aigeme

Metrisch

Genormeero Unitair

Kleinstekwadrater \bullet (\cdot, \cdot) is een scalair product als

2
$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$$

$$(x,y) = \overline{(y,x)}$$

- Unitaire ruimte : vectorruimte met scalair product
- Euclidische ruimte : eindigdimensionale unitaire ruimte
- Geïnduceerde norm : $||x|| = \sqrt{(x,x)}$
- Elementen x en y zijn orthogonaal $(x \perp y)$ als (x, y) = 0

Kleinste-kwadratenbenadering

NMB -Oefenzitting 5

Hendrik Speleers

.....

Aigemee

Metrisch Genormeerd

Kleinstekwadraten

• Zoek benadering
$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x)$$
 voor

• continue KKB : f(x), $x \in [a, b]$

• discrete KKB : $\{(x_i, f_i)\}_{i=1}^N$

zodanig dat gewogen residu

• continue KKB :
$$r(x) = f(x) - y_n(x)$$

• discrete KKB :
$$r_i = f_i - y_n(x_i)$$

minimaal is

$$\min_{a_k} \int_a^b w(x) r^2(x) dx, \qquad \min_{a_k} \sum_{i=1}^N w_i r_i^2$$

$$\implies \min_{a_k} \langle wr^2 \rangle$$

Kleinste-kwadratenbenadering

NMB -Oefenzitting 5

Hendrik Speleers

Aigeille

Metrisch Genormeerd

Kleinstekwadraten • $\langle wr^2 \rangle$ minimaal

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial a_s} \langle wr^2 \rangle = 0 , s = 0, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow \langle wr\phi_s \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \langle w\phi_s\phi_k \rangle = \langle w\phi_s f \rangle$$

- Normaalstelsel
- Meetkundige interpretatie
- Bijvoorbeeld: orthogonale veeltermen