NMB - Oefenzitting 1
Benaderingstheorie

Simon Telen

Opgave 1. Beschouw de vectorruimte $C[-1,1]$ van continue reële functies op het interval $[-1,1] \subset \mathbb{R}$. De L_p-norm, $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, is gegeven door de functionaal

$$\|\cdot\|_p : C[-1,1] \to \mathbb{R} : f \mapsto \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Voor welke waarden van $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ is de volgende functionaal een norm

$$\|\cdot\|'_p : C[-1,1] \to \mathbb{R} : f \mapsto \left| \int_{-1}^{1} f(x)^p dx \right|^{1/p}.$$

Bewijs je antwoord.

Oplossing. Voor even waarden van p is $|f(x)|^p = f(x)^p$ en

$$0 \leq \int_{-1}^{1} f(x)^p dx = \left| \int_{-1}^{1} f(x)^p dx \right|.$$

Daaruit volgt dat voor even p, $\|f(x)\|'_p = \|f(x)\|_p$ en $\|\cdot\|'_p$ is gelijk aan de L_p-norm. Voor p oneven kan $\|\cdot\|'_p$ geen norm zijn. Als tegenvoorbeeld, neem de functie $f(x) = x \in C[-1,1]$. We hebben

$$\|f(x)\|'_p = \left| \int_{-1}^{1} x^p dx \right|^{1/p} = 0,$$

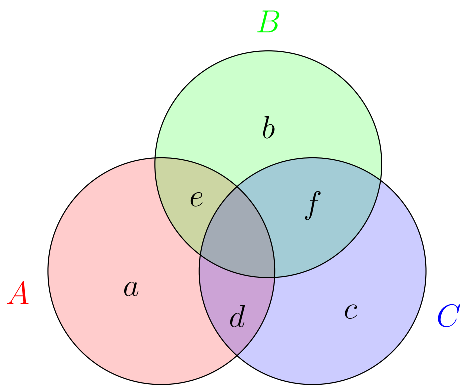
terwijl x niet de nulfunctie is. Dit is in tegenspraak met het tweede axioma.

Opgave 2. Op een verzameling S van eindige verzamelingen definiëert men de *Silverman afstand* als

$$\rho(A,B) = \#(A \triangle B) = \#\{(A \cup B) \backslash (A \cap B)\}$$

met $A, B \in S$. De verzameling $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ wordt ook het *symmetrisch verschil* van A en B genoemd. Het symbool '#' staat voor *kardinaalgetal*, d.w.z. het aantal elementen in de verzameling.

- Waarom worden er enkel *eindige* verzamelingen beschouwd?



Figuur 1: Venndiagram ter illustratie van Opgave 2.

- Toon aan dat ρ inderdaad een afstand is.

Oplossing.

- Een afstand gedefiniëerd op een verzameling S is per definitie een functionaal $\rho : S \times S \to \mathbb{R}$ waarvan het beeld een deelverzameling is van de reële getalen. Als $A \in S$ een oneindige verzameling is en $B \in S$ is eindig, dan is $A \cup B$ oneindig en $A \cap B$ eindig, bijgevolg is $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$ een oneindige verzameling. De operator $\#$ geeft voor een oneindige set een zogenaamd *transfiniet kardinaalgetal*, hetgeen buiten de verzameling van de reële getallen valt.

- Neem $A, B, C \in S$.

  1. $\rho(A, B) \geq 0$ volgt uit $\emptyset \subset A \triangle B$ en dus $0 \leq \#(A \triangle B)$.
  2. $\rho(A, B) = 0$ impliceert dat $A \triangle B = \emptyset$ en dus $A = B$.
  3. $\rho(A, B) = \rho(B, A)$ want $\cup, \cap$ zijn symmetrisch.
  4. Beschouw het Venndiagram in Figuur 4. We hebben de formules

$$\begin{aligned}
\#(C \triangle A) &= \#\{(C \cup A) \backslash (C \cap A)\} = \#a + \#e + \#c + \#f, \\
\#(C \triangle B) &= \#\{(C \cup B) \backslash (C \cap B)\} = \#b + \#e + \#c + \#d, \\
\#(A \triangle B) &= \#\{(A \cup B) \backslash (A \cap B)\} = \#a + \#d + \#b + \#f.
\end{aligned}$$

  Er volgt
$$\rho(A, B) + 2\#c + 2\#e = \rho(C, A) + \rho(B, A)$$
  en dus geldt de driehoeksongelijkheid $\rho(A, B) \leq \rho(C, A) + \rho(B, A)$.

Opgave 3. We beschouwen de vectorruimte $V = \mathbb{R}^{m \times n}$ van reële $m \times n$ matrices. Beschouw
$$(\cdot, \cdot)_F : V \times V \to \mathbb{R} : (A, B) \mapsto \operatorname{trace}(A^\top B).$$
Dit wordt het *Frobenius inwendig product* genoemd.

- Toon aan dat $(\cdot,\cdot)_F$ een inwendig product is.
- Toon aan dat de norm op V geïnduceerd door het Frobenius inwendig product op V equivalent is met de 2-norm op $\mathbb{R}^{mn}$, of nog $\|A\|_F = \|\mathrm{vec}(A)\|_2$. Hierbij staat 'vec' voor de *vectorizatie-operatie*. Dit is een lineaire transformatie die de matrix A omzet tot een kolomvector, bestaande uit een verticale stapeling van de kolommen van A. Men noemt deze norm de *Frobeniusnorm* op V.
- Bereken de Frobenius norm van de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ en de Frobenius afstand tussen A en $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4+\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Oplossing.

- Dit volgt uit
  1. $(aA, B)_F = \mathrm{trace}((aA)^\top B) = \mathrm{trace}(a(A^\top B)) = a\mathrm{trace}(A^\top B) = a(A,B)_F$,
  2. $(A + A', B)_F = \mathrm{trace}((A + A')^\top B) = \mathrm{trace}(A^\top B + A'^\top B) = \mathrm{trace}(A^\top B) + \mathrm{trace}(A'^\top B) = (A,B)_F + (A',B)_F$,
  3. $(A,B)_F = \mathrm{trace}(A^\top B) = \mathrm{trace}(B^\top A) = (B,A)_F$ want het spoor is invariant onder $\cdot^\top$ (het is de som van de eigenwaarden),
  4. $(A,A)_F = \mathrm{trace}(A^\top A) > 0$ wanneer $A \neq 0$. Inderdaad, er geldt $\mathrm{trace}(A^\top A) = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2$ (de eigenwaarden van $A^\top A$ zijn de singuliere waarden in het kwadraat). Daaruit volgt dat $\mathrm{trace}(A^\top A) \geq 0$ en als de gelijkheid geldt, dan zijn alle singuliere waarden van A gelijk aan 0 en dus $A = 0$.
- De geïnduceerde norm wordt gegeven door $\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{trace}(A^\top A)}$. Een eenvoudige berekening geeft dat
$$\mathrm{trace}(A^\top A) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$$
met a_{ij} het element op de i-de rij en j-de kolom van A. Dus
$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$
Dit komt overeen met de 2-norm van de vector verkregen door de elementen van A op gelijk welke manier te ordenen in een mn-vector.
- $\|A\|_F = 4$, $\rho_F(A,B) = \|B - A\|_F = 5$.

Opgave 4. Beschouw de verzameling W van 'woorden' waarbij we een woord definiëren als een eindige sequentie van karakters. De verzameling W is een metrische ruimte met de volgende, recursief gedefiniëerde afstandsfunctie. Voor $a, b \in W$, schrijf $|a|, |b|$ voor het aantal karakters in a, b respectievelijk. De afstand tussen a en b is recursief gedefiniëerd als $\rho(a, b) = \mathrm{lev}_{a,b}(|a|, |b|)$ met

$$\mathrm{lev}_{a,b}(i,j) = \begin{cases} \max(i,j) & \min(i,j) = 0 \\ \min \begin{cases} \mathrm{lev}_{a,b}(i-1,j) + 1 \\ \mathrm{lev}_{a,b}(i,j-1) + 1 \\ \mathrm{lev}_{a,b}(i-1,j-1) + (1 - \delta_{a_i b_j}) \end{cases} & \text{anders} \end{cases}$$

waarbij $\delta_{a_i b_j} = \begin{cases} 1 & a_i = b_j \\ 0 & a_i \neq b_j \end{cases}$. Deze afstand noemt men de *Levenshtein afstand* en ze wordt gebruikt in onder andere spellingscontrole software.

- Schrijf een functie `lev(a,b,i,j)` in Matlab die als input twee strings en twee positieve integers neemt en het getal $\mathrm{lev}_{a,b}(i,j)$ teruggeeft.
- Gebruik je implementatie om het volgende na te gaan: de Levenshtein afstand geeft het minimum aantal toevoegingen, verwijderingen of vervangingen van karakters die nodig zijn om het woord a in het woord b te veranderen. Zo is bijvoorbeeld ρ('kater', 'kat') = 2 volgens deze metriek.
- Gebruik je implementatie om de afstand te berekenen tussen jouw achternaam en die van de docent van dit deel van het vak: 'Vandewalle'.

Oplossing. Zie `lev.m`.

Opgave 5.

- Gebruik de Gram-Schmidt orthogonalizatie procedure om het stel $\{1, x, x^2, x^3\}$ te orthogonalizeren tot het stel $\{T_0(x), T_1(x), T_2(x), T_3(x)\}$ ten opzichte van het scalair product
$$(f, g) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)dx.$$
Start met $T_0(x) = 1$, ga na dat $\|T_0\|^2 = \pi$ (we gebruiken de geïnduceerde norm) en normalizeer $T_1(x), \ldots, T_3(x)$ zodat de coëfficiënt van $T_i(x)$ by x^i gelijk is aan 2^{i-1}.
- De veeltermen die je bekomt zijn de zogenaamde *Chebyshev veeltermen van de eerste soort.* Ze hebben uitzonderlijk goede benaderingseigenschappen. Men toont aan dat dit stel orthogonale veeltermen voldoet aan de recursiebetrekking
$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x, \qquad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$
Vind nu op een eenvoudige manier $T_4(x)$ en $T_5(x)$.

- Leid met behulp van deze recursiebetrekking een matrix af waarvan de eigenwaarden de nulpunten zijn van $T_5(x)$. Controleer het resultaat met Matlab.

Oplossing.

- We gaan na dat $\|T_0\|^2 = \pi$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arcsin(x)]_{-1}^{1} = \pi/2 - (-\pi/2) = \pi.$$

  De (nog niet genormalizeerde) veelterm $\tilde{T}_1(x)$ is gegeven door

$$\tilde{T}_1(x) = x - \frac{(x, T_0)}{(T_0, T_0)} T_0(x) = x - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x$$

  want de integrand is oneven. De coefficient bij x^1 is $1 = 2^{1-1}$ dus $T_1(x) = \tilde{T}_1(x) = x$. Op een analoge manier vinden we

$$\begin{aligned} \tilde{T}_2(x) &= x^2 - \frac{(x^2, T_0)}{(T_0, T_0)} T_0(x) - \frac{(x^2, T_1)}{(T_1, T_1)} T_1(x) \\ &= x^2 - \frac{1}{\pi} \left(\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) T_0(x) - \frac{2}{\pi} \left(\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) T_1(x) \\ &= x^2 - 1/2. \end{aligned}$$

  Merk op dat de derde term opnieuw wegvalt omdat de integrand oneven is. Normalizeren geeft $T_2(x) = 2\tilde{T}_2(x) = 2x^2 - 1$. Tenslotte vinden we

$$\begin{aligned} \tilde{T}_3(x) &= x^3 - \frac{(x^3, T_1)}{(T_1, T_1)} T_1(x) \\ &= x^2 - \frac{2}{\pi} \left(\int_{-1}^{1} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) T_1(x) \\ &= x^3 - \frac{3}{4} x. \end{aligned}$$

  Normalizeren geeft $T_3(x) = 4x^3 - 3x$.

- Uit de recursiebetrekking volgt:

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_5(x) &= 2xT_4(x) - T_3(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x. \end{aligned}$$

- de vergelijkingen

$$\begin{aligned} T_1(x) &= xT_0(x) \\ \frac{1}{2}T_0(x)+\frac{1}{2}T_2(x) &= xT_1(x) \\ \frac{1}{2}T_1(x)+\frac{1}{2}T_3(x) &= xT_2(x) \\ \frac{1}{2}T_2(x)+\frac{1}{2}T_4(x) &= xT_3(x) \\ \frac{1}{2}T_3(x)+\frac{1}{2}T_5(x) &= xT_4(x) \end{aligned}$$

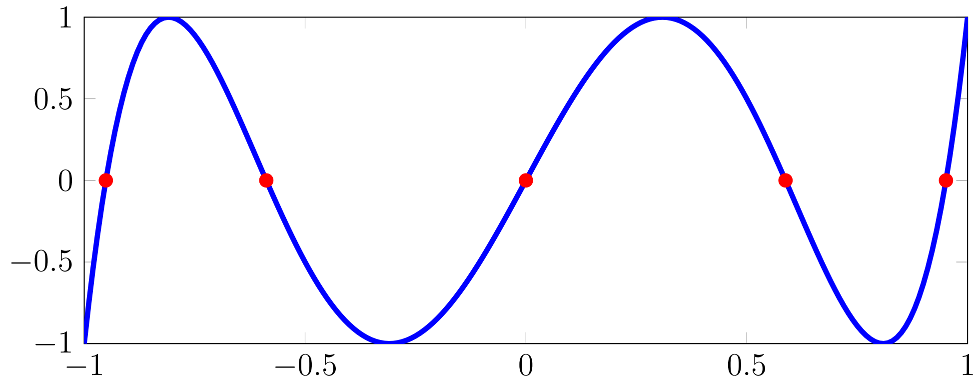
volgen rechtstreeks uit de recursiebetrekking. In Matrixvorm krijgen we

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ & 1/2 & 0 & 1/2 & \\ & & 1/2 & 0 & 1/2 \\ & & & 1/2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} T_0(x) \\ T_1(x) \\ T_2(x) \\ T_3(x) \\ T_4(x) \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} T_0(x) \\ T_1(x) \\ T_2(x) \\ T_3(x) \\ T_4(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_5(x) \end{bmatrix}.$$

Er volgt dat de nulpunten van $T_5(x)$ de eigenwaarden zijn van A. Merk op dat $T_0(x) = 1$ verzekert dat de bijhorende eigenvectoren niet triviaal zijn. Dit geeft in Matlab via het commando `eig(A)`

$$-9.5106e-01,\ -5.8779e-01,\ 3.0864e-17,\ 9.5106e-01,\ 5.8779e-01.$$

Een eenvoudig plot bevestigt de resultaten, zie Figuur 2.



Figuur 2: De vijfde Chebyshev veelterm van de eerste soort (—) en eigenwaarden van de matrix A (•).

Opgave 6. Beschouw de vectorruimte $V = C^1[a,b]$ van continue functies met continue afgeleide op het interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Op $C^1[a,b]$ is het *Sobolev inwendig product* $(f,g)_{H^1}$ gedefiniëerd als

$$(f,g)_{H^1} = \int_a^b (f(x)g(x) + f'(x)g'(x))dx.$$

- Toon aan dat $(\cdot,\cdot)_{H^1}$ een scalair product is en leid een formule af voor de geïnduceerde norm $\|\cdot\|_{H^1}$.
- Is $(f,g) = \int_a^b f'(x)g'(x)dx$ een scalair product op V? Bewijs je antwoord.
- Bereken de Sobolev en de L^2-afstand tussen x en e^x op $[0,1]$.
- Toon aan dat $\|f\|_{H^1} \geq \|f\|_{L^2}, \forall f \in V$.

Oplossing.

- De eerste drie axioma's volgen uit bilineariteit en symmetrie van $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$. De geïnduceerde norm is

$$\|f\|_{H^1} = \sqrt{(f,f)_{H^1}} = \sqrt{\int_a^b (f(x)^2 + f'(x)^2)dx} = \sqrt{\int_a^b f(x)^2dx + \int_a^b f'(x)^2dx}.$$

  Het vierde axioma volgt uit het feit dat van de twee positieve termen onder het wortelteken, de eerste strict positief is als en slechts als $f(x) \neq 0$.

- Neen. Een tegenvoorbeeld is $f(x) = C, C \in \mathbb{R}_0$, $(f,f)_{H^1} = 0$, maar $f \neq 0$.
- De Sobolev afstand wordt gegeven door

$$\rho_{H^1}(x,e^x) = \int_0^1 (xe^x + e^x)dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx + \int_0^1 e^x dx = e$$

  en

$$\rho_{L^2}(x,e^x) = \int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e-1) = 1.$$

- Dit volgt uit $\|f\|_V^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|f'\|_{L^2}^2$.