NMB - Oefenzitting 6: Kleinste-kwadratenbenadering (deel 2)

Hendrik Speleers

Opgave 1. In deze oefening onderzoeken we verschillende discrete kkb's voor de functie

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$$

waarbij $x > 0$ een positief reëel getal is (x mag kleiner zijn dan 1).

a) Om $f(x)$ te evalueren kan je gebruik maken van de ingebouwde Matlab-functie `expint`. Hoe doe je dit?

> **Oplossing.** `expint(1)-expint(x)`

b) Kan vanaf een bepaalde benaderingsgraad het residu in elk punt (theoretisch) nul worden? Leg uit. Wat betekent dit?

> **Oplossing.**
>
> - *Als er N abscissen zijn, is de kkb van graad $N-1$ de interpolerende veelterm en dus is het residu dan nul in elk punt.*
> - *Een graad hoger nemen is volledig zinloos.*

c) Vergelijk verschillende benaderingen voor $f(x)$ op het interval $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ met gewichtsfunctie $w(x) \equiv 1$ en een vast aantal abscissen N. Gebruik deze benaderingen om de integraal

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)dx$$

te berekenen met 6 juiste beduidende cijfers. Leg uit hoe je te werk gaat en geef de waarde van de integraal.

> **Oplossing.**
>
> - $y_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$
> $\Rightarrow \int y_n(x)\, dx = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = Y_n(x)$
> $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)dx \simeq \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} y_n(x)dx = Y_n(\frac{3}{2}) - Y_n(\frac{1}{2})$
> - *Voor toenemende n: cijfers die niet meer veranderen zijn juist.*

d) Op dezelfde manier kan je ook de afgeleide $f'(x)$ op $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ benaderen. Leg uit hoe je te werk gaat. Vergelijk je resultaat met de exacte waarde

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

Geef voor een bepaalde graad n en aantal abscissen N de maximale relatieve fout op $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Vergelijk dit met de fout bij numerieke integratie. Wat is nauwkeuriger?

Oplossing.

- $y'_n(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1}$
- *Integreren is nauwkeuriger (zie numerieke wiskunde).*

Opgave 2. Het bestand `abinbev.mat` geeft de dagelijkse evolutie weer van het aandeel van brouwerij AB Inbev over de periode van 24 november 2009 tot en met 23 november 2010 zoals het genoteerd werd op de Euronext beurs. Uitgezet is de prijs per stuk in Euro. Merk op dat niet voor elke dag een waarde beschikbaar is (dag 1 komt overeen met 24 november 2009).

Gebruik veeltermextrapolatie d.m.v. kleinste-kwadratenbenadering om de waarde van het aandeel te voorspellen op 3 december 2010 (10 dagen na de laatste notering). Wat gebeurt er op langere termijn met het aandeel?

Heb je veel vertrouwen in je eigen voorspelling? Leg uit.

Oplossing. *Zeer onbetrouwbaar. Veeltermextrapolatie is geen goed idee voor beurskoersen, de basisfuncties gaan naar $\pm\infty$, afhankelijk van de graad van benadering zal AB Inbev snel failliet gaan of geweldig veel winst maken.*

Opgave 3. Zoek een veeltermbenadering voor de functie $\text{bgsin}(x)$ voor $x \in [0, 1]$. Probeer enkele gewichtsfuncties en eventueel verschillende liggingen van de meetpunten om je benadering zo nauwkeurig mogelijk te maken. Vergelijk je resultaten met een benadering van de vorm:

$$\frac{\pi}{2} - \sqrt{1-x}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots)$$

Geef aan hoe je te werk gaat. Welke benadering geeft het beste resultaat?

Oplossing. *De functie* $\text{bgsin}(x)$ *is niet veeltermachtig (de afgeleide wordt oneindig voor $x = 1$), hierdoor kan er moeilijk een veeltermbenadering opgesteld worden. Noch het verhogen van de graad, noch de keuze van de gewichtsfunctie $w(x)$, noch de ligging van de punten helpen om de nauwkeurigheid te verbeteren.*
Het opstellen van een benadering $y_n \sim \frac{\frac{\pi}{2} - \text{bgsin}(x)}{\sqrt{1-x}}$ laat toe om zelfs met een lage graad een zeer goede benadering te berekenen voor $\text{bgsin}(x)$.