Oefeningen Numerieke Wiskunde

Oefenzitting 7: Het oplossen van niet-lineaire vergelijkingen

Het doel van deze oefenzitting is vertrouwd raken met en het onderzoeken van de consistentie en de convergentie voor substitutiemethodes. Er wordt ook aandacht besteed aan de grafische interpretatie van de convergentie, aan de methode van Newton-Raphson en aan de conditie van de nulpunten van veeltermen. Het bestreken deel van de cursus is *Hoofdstuk 2, Het oplossen van niet-lineaire vergelijkingen.*

1 Theorie

We benaderen de wortels van de niet-lineaire vergelijking $f(x) = 0$ m.b.v. substitutiemethodes. Een substitutiemethode zet de vergelijking $f(x) = 0$ om in een vast punt vergelijking $x = F(x)$. De iteratieformule ziet er dan uit als

$$x^{(k+1)} = F\left(x^{(k)}\right). \tag{1}$$

Een punt x^* dat voldoet aan $x^* = F(x^*)$ heet een vast punt van F.

Consistentie

Door het gebruik van een substitutiemethode kunnen er nulpunten zijn die niet overeenkomen met vaste punten en omgekeerd. In dit verband worden de volgende begrippen gedefinieerd:

(i) $F(x)$ is **consistent** met de vergelijking $f(x) = 0$ als alle nulpunten van $f(x)$ ook vaste punten van $F(x)$ zijn $\longrightarrow \quad f(x) = 0 \Longrightarrow F(x) = x$

(ii) $F(x)$ is **reciprook consistent** met de vergelijking $f(x) = 0$ als alle vaste punten van $F(x)$ ook nulpunten van $f(x)$ zijn $\longrightarrow \quad f(x) = 0 \Longleftarrow F(x) = x$

(iii) $F(x)$ is **volledig consistent** als $F(x)$ consistent en reciprook consistent is $\longrightarrow \quad f(x) = 0 \Longleftrightarrow F(x) = x.$

Convergentie

Voor een differentieerbare $F(x)$ geldt **Stelling 14.2**: het iteratieproces (1) convergeert naar een vast punt x^* van $F(x)$ indien $|F'(x)| \leqslant M < 1$ in een bepaald interval rond $x^{(0)}$ en x^*. Het teken van $F'(x)$ bepaalt of de convergentie monotoon zal verlopen (+) of volgens een vierkante spiraal (−).

Zij $\{x^{(k)}\}_0^\infty$ een rij van getallen die convergeert naar x^* . De fout van de k-de benadering is $\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x^*$. Zij

$$\rho^{(k)} = \frac{x^{(k)} - x^*}{x^{(k-1)} - x^*} = \frac{\varepsilon^{(k)}}{\varepsilon^{(k-1)}}. \tag{2}$$

Op voorwaarde dat de limiet bestaat noemen we $\rho = \lim_{k\to\infty} \rho^{(k)}$ de **convergentiefactor** van het benaderingsproces. Voor differentieerbare $F(x)$ met vast punt x^* en iteratieproces (1) is de convergentiefactor gelijk aan $\rho = F'(x^*)$ (zie **Stelling 15.2**).

Voor convergentie moet $|\rho| < 1$. Hoe kleiner $|\rho|$ is, des te sneller de convergentie. Als $\rho = 0$, dan kan men convergentiesnelheden vergelijken door de convergentieorde te definiëren. De **orde van convergentie** van het benaderingsproces is het getal p, $1 \leq p \in \mathbb{R}$, zodat

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon^{(k+1)}}{[\varepsilon^{(k)}]^p} = \rho_p, \quad \text{met} \quad 0 < \rho_p < \infty.$$

Dit betekent dat als de orde gelijk is aan p, de fout in stap $k+1$ en de p'de macht van de fout in stap k even snel naar nul gaan. Er geldt dan ook dat

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon^{(k+1)}}{[\varepsilon^{(k)}]^n} = \begin{cases} 0 & n < p \\ \rho_p & n = p \\ \infty & n > p \end{cases}. \tag{3}$$

Als de orde 1 is, dan is ρ_1 de convergentiefactor zoals wij hem hierboven gedefinieerd hebben. De orde van een substitutiemethode is altijd een natuurlijk getal. Om de orde van een substitutiemethode te bepalen, kan je **Stelling 15.3** gebruiken. We noemen een benaderingsproces van orde 1 lineair, een benaderingsproces van orde 2 kwadratisch en een benaderingsproces van orde 3 kubisch.

De methode van Newton-Raphson is een substitutiemethode met

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

zoals uitgelegd in Sectie 6. In Sectie 14.4 wordt de consistentie en convergentie van deze methode nagegaan.

2 Oefeningen

Probleem 1. Bewijs vergelijking (3).

Probleem 2. Beschouw de volgende substitutiemethodes voor de wortel van $f(x) = x + \log(x) = 0$.

(a) $x^{(k)} = -\log(x^{(k-1)})$

(b) $x^{(k)} = e^{-x^{(k-1)}}$

Ga voor beide methodes de consistentie na en bepaal de convergentiefactor. Schets $F(x)$ en geef grafisch de convergentie weer voor de startwaarde $x^{(0)} = 0.9$. (De wortel is $x^* \approx 0.56714$.)

Probleem 3. ($\sqrt{a}$ m.b.v. Newton-Raphson) Pas Newton-Raphson toe op de vergelijking $f(x) = 1 - \dfrac{a}{x^2}$.

(a) Onderzoek de consistentie.

(b) Bepaal de convergentiefactor. Wat is de orde?

(c) Schets $F(x)$.

(d) Voor welke startwaarden is er convergentie?

Probleem 4. Als x^* een m-voudige wortel is van $f(x) = 0$, dan geldt voor de Newton-Raphson methode dat ze lineair is als $m > 1$ en minstens kwadratisch als $m = 1$. Toon aan dat de volgende aangepaste methode minstens van tweede orde is

$$F(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)},$$

als m de multipliciteit is van de wortel x^* van $f(x) = 0$. Maak gebruik van de afleiding in het handboek bij de gevalstudie van de methode van Newton-Raphson (Sectie 14.4) om niet al het rekenwerk opnieuw te moeten doen.

(Denkvraagje: Als deze methode hogere orde heeft dan NR, waarom wordt ze dan niet verkozen boven NR?)

Probleem 5. Beschouw de volgende substitutiemethodes voor de wortel van $f(x) = x + \log(x) = 0$.

(a) $x^{(k)} = \dfrac{x^{(k-1)} + e^{-x^{(k-1)}}}{2}$

(b) $x^{(k)} = \sqrt{-x^{(k-1)}\log(x^{(k-1)})}$

Ga voor beide methodes de consistentie en de convergentie na. Schets $F(x)$ en geef grafisch de convergentie weer voor de startwaarde $x^{(0)} = 0.9$. (De wortel is $x^* \approx 0.56714$.)

Probleem 6. ($\sqrt{a}$ m.b.v. Newton-Raphson) Pas Newton-Raphson toe op de vergelijking $f(x) = x - \dfrac{a}{x}$.

(a) Onderzoek de consistentie.

(b) Bepaal de convergentiefactor. Wat is de orde?

(c) Schets $F(x)$.

(d) Voor welke startwaarden is er convergentie?

Probleem 7. (Conditie van een enkelvoudig nulpunt) Stel dat c een enkelvoudig nulpunt van $p(x)$ is en dat $\overline{c} = c + \Delta c$ het naburige nulpunt is van de geperturbeerde veelterm $\overline{p}(x) = p(x) + \Delta p(x)$.

Een formule voor Δc kan als volgt bekomen worden, door gebruik te maken van Taylor reeksen en door tweede orde termen te verwaarlozen (we veronderstellen dat $\Delta p(x)$ veel kleiner is dan $p(x)$):

$$\begin{aligned} 0 \overset{(1)}{=} \overline{p}(c+\Delta c) &\overset{(2)}{=} p(c+\Delta c) + \Delta p(c+\Delta c) \\ &\overset{(3)}{\approx} p(c) + p'(c)\Delta c + \Delta p(c) + \Delta p'(c)\Delta c \\ &\overset{(4)}{\approx} p'(c)\Delta c + \Delta p(c) \end{aligned}$$

en bijgevolg

$$\Delta c \approx -\frac{\Delta p(c)}{p'(c)} = \frac{-\sum_{j=0}^{n} \Delta a_j c^{n-j}}{p'(c)}. \tag{4}$$

- Verklaar in detail waarom gelijkheden (1) t/m (4) gelden.
- Waarom geldt deze formule voor Δc niet meer voor meervoudige nulpunten? (Hint: een meervoudig nulpunt wordt gedefinieerd in het begin van Hoofdstuk 2.)
- Ga na dat de formule een speciaal geval is van de formule in het handboek voor de conditie van een wortel.

Probleem 8. Beschouw de veelterm in x met parameter t

$$p(x) = x^2 - 2x + t$$

1. Zij $t = -3$. Breng een fout $\Delta t = 10^{-6}$ aan op t en controleer de foutenschatting (4) voor de wortel $\alpha = 3$.
2. Zij $t \approx 1$. Wat is de waarde van Δc volgens formule (4) in de limiet voor $c \to 1$ met $\Delta t = 10^{-6}$? Dit is uiteraard niet correct. Wat is het verband met de vorige oefening? (Hint: wat zijn de wortels van de veelterm voor $t = 1$?)