# Oefeningen Numerieke Wiskunde

Oefenzitting 9:
Iteratieve methoden voor het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen

## 1 Theorie

Beschouw het lineair stelsel

$$AX = B, \tag{1}$$

met $A$ een $n \times n$-matrix en $B$ en $X$ kolomvectoren. Bij de methodes van Jacobi en Gauss-Seidel wordt iteratief een rij van vectoren $X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ opgesteld, die hopelijk convergeert naar $X$.

De $i$-de vergelijking van het stelsel (1) is

$$a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,i-1}x_{i-1} + a_{i,i}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i. \tag{2}$$

Lossen we deze vergelijking op naar $x_i$, dan krijgen we

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j}{a_{i,i}} \tag{3}$$

Bij de methode van **Jacobi** berekenen we $x_i^{(k+1)}$ door in het rechterlid van (3) de onbekende $x_j$ te vervangen door de gekende $x_j^{(k)}$ van de vorige stap

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j^{(k)}}{a_{i,i}} \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

De methode van **Gauss-Seidel** benut het feit dat men reeds beschikt over $x_j^{(k+1)}$ met $j < i$ op het moment dat men $x_i^{(k+1)}$ wil berekenen

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j<i} a_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{i,j}x_j^{(k)}}{a_{i,i}} \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

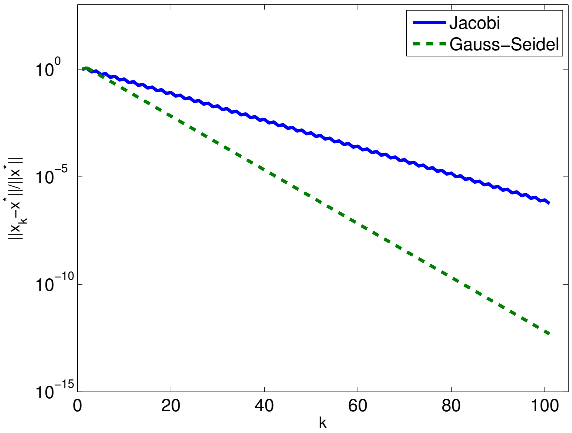
We kunnen (4) en (5) in matrix notatie schrijven als respectievelijk

$$Dx^{(k+1)} = b - (L + U)x^{(k)},$$

en

$$Dx^{(k+1)} = b - Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)},$$

waarbij we $A$ schrijven als $A = U + D + L$. De matrix $A$ wordt hierbij opgedeeld in zijn diagonaal $D$ en de overblijvende benedendriehoek $L$ en de bovendriehoek $U$.




Figuur 1: Jacobi en Gauss-Seidel, Probleem 4

# 2 Oefeningen

**Probleem 1.** Beschouw het stelsel

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 & = & 1 \\ -x_1 + 2x_2 & = & 2 \end{cases}$$

Illustreer voor dit stelsel grafisch de methodes van Jacobi en Gauss-Seidel met de startvector

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Teken hiervoor de twee rechten van het stelsel en bepaal grafisch de iteratiepunten $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, ... Convergeren de methoden? Welke is de snelste? Wat gebeurt er indien beide vergelijkingen verwisseld worden?

**Probleem 2.** Stel $E^{(k)} = X^{(k)} - X$ de foutenvector in de k-de stap, bewijs dan dat

$$E^{(k)} = GE^{(k-1)}, \qquad \text{met} \quad \begin{cases} G = -D^{-1}(U+L) & \text{voor Jacobi} \\ G = -(L+D)^{-1}U & \text{voor Gauss-Seidel} \end{cases}$$

**Probleem 3.** De spectraalradius van een matrix $A$ wordt gedefinieerd als $\rho(A) = \max_i(|\lambda_i(A)|)$, d.w.z. de spectraalradius is de modulus van de grootste eigenwaarde. Voor de convergentie van de methodes van Jacobi en Gauss-Seidel bestaan de volgende voorwaarden:

- $\|G\| < 1$ (voldoende voorwaarde voor convergentie),
- $\rho(G) < 1$ (nodige en voldoende voorwaarde voor convergentie).

Ga de convergentie van Jacobi en Gauss-Seidel na voor het stelsel uit Probleem 1 door $\|G\|_\infty$ en $\rho(G)$ te berekenen.

**Probleem 4.** Beschouw het stelsel

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 100 \\ 101 \end{bmatrix}.$$

Bereken opnieuw $\|G\|_\infty$ en $\rho(G)$ voor beide methodes. Wat besluit je over de convergentie? In Figuur 1 wordt de relatieve fout getoond voor beide methodes. Wat zijn de convergentiefactoren? Wat valt er je op?