

NMB - Oefenzitting 3: Eigenwaardenproblemen

Hendrik Speleers

Overzicht

NMB -
Oefenzitting 3

Hendrik
Speleers

Weetjes

Ontbindingen

Methodes

Machten

Invers

Rayleigh

QR

Andere

1 Weetjes

2 Ontbindingen

3 Methodes

- Methode van de machten
- Inverse iteratie
- Rayleigh quotiënt iteratie
- QR
- Andere

Weetjes

NMB -
Oefenzitting 3

Hendrik
Speleers

Weetjes

Ontbindingen

Methodes

Machten

Invers

Rayleigh

QR

Andere

- $Ax = \lambda x$
 - x eigenvector (ev)
 - λ eigenwaarde (ew)
- **Geometrische meervoudigheid** : dimensie eigenruimte ew (aantal ev horende bij ew)
- **Algebraïsche meervoudigheid** : meervoudigheid als wortel van de karakteristieke veelterm
- $gm \leq am$ ($gm < am \Rightarrow$ defectieve matrix)
- **Gelijkvormigheidstransformatie** : $A \rightarrow X^{-1}AX$

- **Hermitisch** : $A^* = A$ (**symmetrisch** : $A^T = A$)
reële ew, orthogonale ev

$$Ax = \lambda x \Rightarrow x^* Ax = \lambda x^* x$$

$$x^* A^* = \lambda^* x^* \Rightarrow x^* Ax = \lambda^* x^* x$$

$$\lambda^* = \lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

- **SPD matrix** : $\lambda = \frac{x^T Ax}{x^T x} > 0$
- **Unitair** : $A^* A = I$ (**orthogonaal** : $A^T A = I$)
alle ew modulus 1

$$\|Ax\|_2^2 = x^* A^* Ax = x^* \lambda^* \lambda x = x^* x$$

$$\lambda^* \lambda = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = 1$$

Ontbindingen

NMB -
Oefenzitting 3

Hendrik
Speleers

Weetjes

Ontbindingen

Methodes

Machten

Invers

Rayleigh

QR

Andere

Ontbindingen die eigenwaarden onthullen :

Structuur	Ontbinding	Voorwaarden
Diagonalisatie	$A = V \Lambda V^{-1}$	A is niet defectief
Unitaire diag.	$A = Q \Lambda Q^*$	A is normaal ($A^* A = A A^*$)
Schur factorisatie (Unitaire triangul.)	$A = Q T Q^*$	–

A hermitisch \rightarrow unitaire diagonalisatie

- Steeds iteratief
 - cfr. nulpunten veelterm ($m \geq 5$)
- Twee fasen aanpak:
 - Reductie naar Hessenberg/tridiagonale vorm
 - Iteratief proces op gestructureerde matrix

Methodes

NMB -
Oefenzitting 3

Hendrik
Speleers

Weetjes

Ontbindingen

Methodes

Machten

Invers

Rayleigh

QR

Andere

- Methode van de machten (**linear**)

$$w \leftarrow Av; \quad v \leftarrow \frac{w}{\|w\|}; \quad \lambda = v^*Av$$

- enkel de eigenvector bij de grootste eigenwaarde

- Inverse iteratie (**linear**)

$$(A - \mu I)w = v \rightarrow w; \quad v \leftarrow \frac{w}{\|w\|}; \quad \lambda = v^*Av$$

- keuze μ bepaalt gevonden eigenwaarden

- Rayleigh quotiënt iteratie (**kwadratisch, kubisch**)

$$(A - \lambda I)w = v \rightarrow w; \quad v \leftarrow \frac{w}{\|w\|}; \quad \lambda = v^*Av$$

- EV via inverse iteratie
- EW via Rayleigh quotiënt
- Voordeel : snelle convergentie
- Nadeel : telkens stelsel oplossen

- QR
 - Hessenberg, tridiagonaal
 - Zonder shift (**linear**)
$$QR = A \rightarrow (Q, R); \quad A \leftarrow RQ$$
 - Met shift (**kwadratisch, kubisch**)
$$QR = A - \mu I \rightarrow (Q, R); \quad A \leftarrow RQ + \mu I$$
 - Keuze shift
 - Rayleigh-quotiënt shift ($a_{m,m}$)
 - Wilkinson shift
- **Andere** : Jacobi, bisectie, verdeel en heers, Arnoldi, Lanczos