Eerste orde differentiaalvergelijkingen

1 Algemeen

We behandelen differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1}$$

2 Lineaire vergelijkingen

Indien f een lineaire functie is van y, is vergelijking (1) van de vorm

$$y' + p(x)y = g(x). \tag{2}$$

Er bestaat een expliciete uitdrukking voor de oplossing van deze vergelijking.

2.1 Constante coëfficiënten

De vergelijking neemt nu de vorm

$$\frac{dy}{dx} = -ay + b,$$

aan met a en b gegeven constantes. Ze kan worden opgelost door ze te herschrijven, zodanig dat het linkerlid de afgeleide van $\ln|y - \frac{b}{a}|$ bevat en daarna links en rechts te integreren.

2.2 Geen constante coëfficiënten

Vermenigvuldig in dit geval linker- en rechterlid van vergelijking (2) met de integrerende factor $\mu(x)$ zodanig dat het linkerlid gelijk wordt aan de afgeleide van $\mu(x)y(x)$. Deze voorwaarde definieert $\mu(x)$ in termen van $p(x)$. De oplossing vindt men dan door weer links en rechts te integreren.

3 Scheidbare vergelijkingen

Indien vergelijking (1) kan geschreven worden als

$$M(x)dx + N(y)dy = 0,$$

vindt men een impliciete oplossing door dit te integreren.

4 Exacte vergelijkingen en integrerende factor

Indien er een functie $\psi(x,y)$ bestaat zodanig dat

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{en} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) = N(x,y),$$

dan noemt men de vergelijking

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3}$$

exact en vindt men een impliciete oplossing $\psi(x,y) = c$, waarin c een willekeurige integratieconstante is. Een nodige en voldoende voorwaarde voor het exact zijn van de vergelijking (3) is dat

$$M_y(x,y) = N_x(x,y),$$

waar de subscript staat voor partiële afgeleide.

Indien (3) niet exact blijkt te zijn, dan kan men de vergelijking soms toch exact maken door te vermenigvuldigen met een integrerende factor $\mu(x,y)$. Indien men aanneemt dat μ alleen functie is van x, kan men $\mu(x)$ bepalen door de voorwaarden voor exactheid op te leggen.