Differentiaalvergelijkingen
Lessenpakket 2016 - 2017

Uitkomsten – Extra oefenmateriaal – Hoofdstuk 7

nico.scheerlinck@cs.kuleuven.be

1. (a)

   (b)

   (c) $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$

2. (a)

   (b)

   (c) $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{1-t} & -\frac{t}{1-t} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$

3. kritisch punt is (asymptotisch) onstabiel, ongeacht de waarde van α.

4.

5.
   - $\alpha < 0$: spiraal, asymptotisch stabiel;
   - $\alpha = 0$: knoop (improper node), asymptotisch stabiel;
   - $0 < \alpha < 1$: knoop, asymptotisch stabiel;
   - $\alpha = 1$: oneindig veel kritische punten, asymptotisch stabiel;
   - $\alpha > 1$: zadelpunt, asymptotisch onstabiel.

6. de gegeven matrix heeft een dubbele eigenwaarde (met dimensie van de eigenruimte gelijk aan 1); oplossingsmethode werd in deze cursus niet gezien/besproken. Je kan eventueel de oefening eens maken voor een andere matrix (zonder dubbele eigenwaarde).

7. $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} (t+1)\ e^t \\ \sin(2t)\ e^t \\ -\cos(2t)\ e^t \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\ (-3\sin t + \cos t) \\ e^{-t}\ (-\sin t + \cos t) \\ e^{-2t}\ (-10\sin t + 2\cos t) \\ e^{-2t}\ (-6\sin t - 4\cos t) \end{pmatrix}$

9.

10. (a) $y(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{12}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{-2t}$

$z(t) = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{2t}$

(b) $y(t) = 2e^{t}$

$z(t) = 3e^{-t}$

(c) $y(t) = e^{t} - \frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{2}{3}$

$z(t) = \frac{3}{2}e^{t} + \frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{2}{3}$

(d) $y(t) = e^{-t}(2\cos t - \sin t)$

$z(t) = e^{-t}(1 - \cos t + 3\sin t)$

(e) $y(t) = 1 - e^{-t}$

$z(t) = e^{-t}$

(f) $x(t) = 1 - e^{-t} + e^{-2t}$

$y(t) = -1 + e^{-t}$

$z(t) = -\frac{1}{2} + 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$

(g) $x(t) = 2A\cos t + 2B\sin t$

$y(t) = A(-2\cos t - \sin t) + B(-2\sin t + \cos t) + Ce^{t}$

$z(t) = A\cos t + B\sin t + Ce^{t}$

11. (a) stabiel voor $(0 < \lambda < 1)$ & $(\forall \mu \in \mathbb{R})$
(b) niet stabiel $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
(c) stabiel voor $(\lambda < -2)$ & $(\mu < 2\lambda)$
(d) stabiel voor $(-1 < \lambda < \frac{1}{2})$ & $(\mu < 0)$