

# NMB - Oefenzitting 7: Iteratieve methoden

Simon Telen & Daan Camps

## 1 Convergentie CG

### Opgave 1. Pen en papier

Ga voor jezelf na dat formule (38.9) op p. 298 van [Trefethen & Bau] wil zeggen dat voor alle veeltermen  $p_n(z) \in P_n$  (veeltermen van graad  $\leq n$  met  $p_n(0) = 1$ ) het volgende geldt

$$\frac{\|e_n\|_A}{\|e_0\|_A} \leq \max_{z \in \Lambda(A)} |p_n(z)| \quad (1)$$

We kunnen aan de hand van deze formule voor bepaalde matrices de convergentie voorspellen aan de hand van een goed gekozen rij veeltermen. Er geldt ook nog

$$\frac{\|e_n\|_A}{\|e_0\|_A} \leq 2 \left( \frac{\sqrt{\kappa(A)} - 1}{\sqrt{\kappa(A)} + 1} \right)^n \quad (2)$$

waarbij  $\|x\|_A = \|A^{\frac{1}{2}}x\| = \sqrt{x^*Ax}$ .

Voorspel de convergentie voor matrices met de onderstaande eigenschappen. Veronderstel dat deze matrices symmetrisch-positief definitief zijn. Geef ook een schatting voor het aantal iteraties nodig om de  $A$ -norm van de fout ten opzichte van de initiële fout met een factor  $10^{-3}$  te verkleinen. Tip: veeltermen van de vorm  $p_n(z) = (1 - z/a)^n$  voldoen aan de voorwaarde  $p_n(0) = 1$ .

- Eigenwaarden in het interval  $(9, 11)$ .
- Eigenwaarden in  $(1, 1.5) \cup (399, 400)$ . Gebruik eerst de formule met  $\kappa(A)$ . Verscherp deze schatting gebruik makend van de rij veeltermen  $p_{3k}(z) = (1 - z/1.25)^k(1 - z/400)^{2k}$ .

### Opgave 2. Matlab

Controleer je bevindingen met numerieke experimenten. Je kan de volgende MATLAB-functies gebruiken. Gebruik `help <naam>` voor extra informatie.

Naam	info
<code>linspace.m</code>	N reële getallen uniform verdeeld in <code>[rmin, rmax]</code>
<code>eigint.m</code>	N willekeurige reële getallen uniform verdeeld in <code>[rmin, rmax]</code>
<code>eigcirk.m</code>	N willekeurige complexe getallen $\lambda$ met $ \lambda - c  < R$
<code>willglv.m</code>	past een willekeurige gelijkvormigheidstransformatie toe op de diagonaalmatrix met opgegeven waarden
<code>willorth.m</code>	pas een willekeurige orthogonale transformatie toe op de diagonaalmatrix met opgeven waarden
<code>cg.m</code>	<code>help cg (M=eye(size(A)))</code>

Je kan bijvoorbeeld een matrix maken met 10 eigenwaarden in  $(3, 4)$  en 5 eigenwaarden in  $(7, 8)$  met het volgende bevel

```
A = willglv([eigint(3,4,10); eigint(7,8,5)]);
```

Gebruik je `willorth` dan is  $A$ , in dit geval, symmetrisch positief-definiet. Je kan de eigenwaarden bekijken met `plot(eig(A), '+')`.

Suggestie: Genereer een matrix  $A$ , kies een exacte oplossing  $x^*$ , bepaal het rechterlid  $b = Ax^*$ . Los het stelsel  $Ax = b$  op met CG. Maak grafieken van de norm van de fout  $(x - x^*)$ , het residu  $(b - Ax)$  en van de  $A$ -norm van de fout. Tip: maak hiervoor een m-bestand (of meerdere natuurlijk).

Probeer matrices die voldoen aan a) en b) uit de vorige opgave. Probeer verschillende liggingen van 1 en 2 intervallen. Formuleer enkele besluiten.

## 2 CG versus steilste helling

CG kan beschouwd worden als een methode om de functie  $\phi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$  te minimaliseren. Een andere manier is de methode van de steilste helling. Een iteratie bestaat dan uit het nemen van een stap in de richting van de negatieve gradiënt van  $\phi(x)$ .

### Opgave 3. Pen en papier

- a) Leid af dat  $\nabla\phi(x) = -r$ .
- b) Bepaal de optimale staplengte voor de iteratie  $x_n = x_{n-1} - \alpha_n \nabla\phi(x_{n-1})$ .
- c) Toon aan dat de methode van de steilste helling convergeert.

### Opgave 4. Matlab

- a) Implementeer de methode van de steilste helling. (Een lus met 3 bevelen.)
- b) Vergelijk de convergentie van CG en de methode van de steilste helling voor een spd matrix met  $\kappa = 10$ . (Gebruik de norm van het residu.)

## 3 Eigenwaarden bepalen met de Arnoldi iteratie

### Opgave 5. Matlab

Implementeer de Arnoldi iteratie. De iteratie hoeft geen rekening te houden met 'breakdown' (deling door 0). Bepaal bij elke iteratie de grootste en kleinste Ritz-eigenwaarden (efficiëntie is niet belangrijk, gebruik de standaard MATLAB-functie). Construeer een matrix met eigenwaarden in het interval  $(4, 5)$ . Maak een grafiek van de absolute waarde van het verschil tussen de grootste Ritz-eigenwaarde en de grootste eigenwaarde. Idem voor de kleinste Ritz-eigenwaarde en de kleinste eigenwaarde. Doe nu hetzelfde maar vervang een van de eigenwaarden door 8 en vervolgens ook een door 2. Wat stel je vast? Wat zou je hieruit kunnen besluiten?

## 4 The SIAM 100-Dollar, 100-Digit Challenge

**Opgave 6.** Zoek op het internet het artikel met als titel ‘A Hundred-Dollar, Hundred-Digit Challenge’. Het is geschreven door de auteur van het tekstboek dat voor dit vak gebruikt wordt. Los probleem 7 uit dit artikel op.