NMB - Oefenzitting 3
Trigonometrische benadering

Simon Telen

Opgave 1. We beschouwen het scalair product

$$(f, g)_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

op de vectorruimte $C[-\pi, \pi]$ van continue reële functies op $[-\pi, \pi]$.

1. Ga na dat het stel

   $$B_{M,N} = \{1, \sin(x), \sin(2x), \ldots, \sin(Mx), \cos(x), \cos(2x), \ldots, \cos(Nx)\}$$

   orthogonaal is ten opzichte van dit scalair product voor alle $M, N \in \mathbb{N}$. met behulp van Mupad, Wolfram Alpha, ...

2. Leidt hieruit via het normaalstelsel af dat de beste benadering voor $f \in C[-\pi, \pi]$ in $\text{Span}(B_{M,N})$ gegeven is door $\tilde{f}(x) = a_0/2 + \sum_{j=1}^{M} a_j \sin(jx) + \sum_{k=1}^{N} b_k \cos(kx)$ met

   $$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_j &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(jx)dx, 1 \leq j \leq M, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)dx, 1 \leq k \leq N. \end{aligned}$$

   Je herkent dit als de coëfficiënten van de *Fourierreeks* van f, een periodische functie op $\mathbb{R}$ met periode 2π.

3. Gebruik dit om in Matlab een benadering $\tilde{f}$ op te stellen voor de *zaagtandfunctie* met voorschrift

   $$f(x) = \frac{x}{\pi}, -\pi \leq x \leq \pi, \qquad f(x + 2k\pi) = f(x), \forall k \in \mathbb{Z},$$

   voor toenemende waarden van M en N. Plot je resultaten.

Opgave 2. Bepaal de meest in het oog vallende frequentie en de overeenkomstige periode in de zonnevlekkencyclus met behulp van de snelle Fourier-transformatie.

Meetgegevens zijn terug te vinden in de MATLAB-bestanden `dayssn.dat` en `yearssn.dat` (zie Toledo). Om de snelle Fourier-transformatie uit te rekenen kan je het MATLAB-commando `fft` gebruiken.

Opgave 3. Comprimeer een foto.

Volgende MATLAB-commando's kunnen van pas komen: `imread`, `imshow`, `fft2`, `ifft2`.

Opgave 4. Implementeer een DFT-vermenigvuldigingsalgoritme. Gebruik daarvoor de volgende voorstelling van positieve gehele getallen. Zij a een vector van lengte n met $a(i) \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\},\ i = 1 \ldots n$ en $a(n) \neq 0$ als $n > 1$. De vector a stelt het geheel getal $\sum_{i=1}^{n} a(i) \times 10^{i-1}$ voor. Bereken met behulp van je routine $N!$, met $N = 50 + r$ waarbij r het natuurlijke getal is gegeven door de laatste twee cijfers van je r-nummer.