Tweede orde lineaire differentiaalvergelijkingen

1 Homogene vergelijkingen met constante coëfficiënten

Deze zijn van de vorm
$$ay'' + by' + cy = 0.$$
Om de oplossing te vinden zoekt men de wortels van de karakteristieke vergelijking
$$ar^2 + br + c = 0.$$
Noem deze wortels r_1 en r_2. Dan zijn er drie gevallen te beschouwen:

- $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$:
$$y_c(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$
- $r_1 = r_2$:
$$y_c(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}.$$
- $r_1 = \lambda + i\mu$, $r_2 = \lambda - i\mu$:
$$y_c(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \sin \mu t.$$

2 Niet-homogene vergelijkingen

Deze zijn van de vorm
$$ay'' + by' + cy = g(t).$$

2.1 Methode van de onbepaalde coëfficiënten

Deze methode gebruik je best als $g(t)$

- exponentieel
- sinus, cosinus
- veelterm

of sommen/producten van dergelijke functies is. De oplossing bepaalt men dan als volgt:

1. Bepaal de algemene oplossing van de homogene vergelijking $\rightarrow y_c(t)$.
2. Zoek een particuliere oplossing $Y(t)$ door een *goed* voorstel te doen.
3. $y(t) = y_c(t) + Y(t)$.

2.2 Variatie van de parameters

Indien een algemene oplossing van de homogene vergelijking gegeven wordt door

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

dan vervangen we de constanten c_1 en c_2 door functies $u_1(t)$ en $u_2(t)$. We zoeken dan deze functies zodat

$$y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$$

een oplossing is van de niet-homogene vergelijking. $u_1(t)$ en $u_2(t)$ bepalen we als volgt:

- Bereken $y'(t)$.
- Leg als eerste voorwaarde op dat $y'(t)$ geen afgeleiden van $u_1(t)$ en $u_2(t)$ bevat.
- Bereken ook $y''(t)$.
- Vul alles in in de niet-homogene vergelijking, je bekomt een tweede voorwaarde.
- Via de opgelegde voorwaarden bekom je een stelsel in de onbekenden $u_1'(t)$ en $u_2'(t)$ waaruit je dan $u_1(t)$ en $u_2(t)$ kan vinden.