Solucionário - Primeira Prova - GAAL

Questão 1. *Considere o sistema linear*

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e faça o que se pede:

a) Exiba a matriz aumentada desse sistema.

b) Exiba a matriz escalonada desse sistema.

c) Calcule o conjunto solução desse sistema.

d) Exiba uma solução do sistema, e verifique que ela é, de fato, uma solução.

Solução

a) A matriz aumentada do sistema é

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

b) Vamos escalonar:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

e obter que a matriz escalonada do sistema é

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

c) Com a matriz escalonada, vemos que temos as equações $x = w$, $y = w$ e $z = 3w$. Como x, y, z dependem de w, vamos declarar w variável livre e expressar o conjunto solução como

$$S = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = z = 3w\right\},$$

(ou

$$S = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

se você preferir).

d) Para achar uma solução não-trivial, basta escolher qualquer $w \neq 0$, por exemplo, $w = 1$. Assim obtemos a solução $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vamos checar se é solução:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3 \\ 4 + 1 - 3 - 2 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, X_1 é, de fato, solução.

Questão 2. *Considere a matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & -7 \end{pmatrix}$ *e faça o que se pede:*

a) Resolva o sistema linear homogêneo $AX = 0$.

b) Dada a matriz coluna $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *encontre uma matriz* B *tal que* X_1 *seja solução do sistema* $AX = B$.

c) Encontre, sem fazer contas, outra solução qualquer do sistema $AX = B$ *e mostre que ela é solução.*

SOLUÇÃO

a) Para resolver o sistema linear homogêneo, vamos escalonar A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 6 & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/3 \\ 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

agora vemos que temos equações $x = -7z/3$ e $y = 4z/3$. Como x e y dependem de z, vamos declarar z como variável livre e escrever

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -7z/3 \text{ e } y = 4z/3\right\}$$

(ou

$$S = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -7/3 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

se você preferir).

b) Como a matriz X_1 é solução do sistema $AX = B$, por definição de solução sabemos que $AX_1 = B$. Mas já temos A e X_1, assim podemos calcular B:

$$B = AX_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1 \\ 2+5-2 \\ 1+7-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, a única matriz B tal que X_1 é solução do sistema $AX = B$ é a matriz $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Já sabemos que a soma de uma solução não-trivial do sistema homogêneo $AX = 0$ com uma solução do sistema $AX = B$ também é solução do sistema $AX = B$. Então, escolhendo $\lambda = 1$ temos que $X_0 = \begin{pmatrix} -7/3 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ é solução não-trivial do sistema homogêneo, donde $X_0 + X_1 = \begin{pmatrix} -7/3 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 7/3 \\ 2 \end{pmatrix}$ é solução do sistema $AX = B$.

Vamos verificar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4/3 \\ 7/3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 + 7/3 + 2 \\ -8/3 + 35/3 - 4 \\ -4/3 + 49/3 - 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = B,$$

como queríamos mostrar.

Questão 3. *Dadas as matrizes* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, *faça o que se pede:*

a) Calcule A^{-1}.

b) Calcule $A^{-1}B$.

c) Exiba o conjunto solução do sistema linear $AX = B$.

Solução

a) Para achar A^{-1} temos que resolver o sistema $AX = I$. Vamos lá:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

e vemos que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vamos conferir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 1-4+3 & -1-2+3 \\ 2-2 & 1-2+2 & -1-1+2 \\ 2-2 & -2+2 & -1+2 \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-1 & 2-2 \\ 2-2 & 4-2-1 & 6-4-2 \\ -1+1 & -2+1+1 & -3+2+2 \end{pmatrix} = I$$

ou seja, elas são mesmo inversas.

b) Vamos calcular $A^{-1}B$:

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+2 \\ 10-14+2 \\ -5+7-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

logo $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Como A é inversível, o sistema $AX = B$ possui solução única dada por $A^{-1}B$, ou seja,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Questão 4. *Dadas as matrizes* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*, faça o que se pede:*

a) Calcule AB *e* BA *e compare os resultados obtidos.*

b) Escolha A *ou* B*. Você seria capaz de encontrar uma matriz* C *que comute com a matriz que você escolheu (por exemplo, se você escolher a matriz* A*, uma matriz* C *tal que* $AC = CA$*)? Explique seu raciocínio.*

Solução

a) Vamos calcular:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comparando os resultados obtidos, vemos que $AB \neq BA$.

b) A resposta é sim, independente de ter escolhido A ou B. Por exemplo, você poderia escolher $C = 0$ ou $C = I$ e, nesse caso, certamente $AC = CA$ e $BC = CB$. Além disso, poderia notar que A e B são inversíveis e, portanto, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ e $BB^{-1} = B^{-1}B = I$, ou seja, poderíamos tomar C como sendo a inversa da matriz escolhida. Ou você poderia encontrar alguma matriz C aleatória da sua cabeça que comute com A ou B.

O importante aqui é que você saiba que **o produto em geral não é comutativo, mas isso não significa que ele nunca é comutativo**.

Questão Bônus. *Considere a reação*

$$x\mathrm{Fe_3O_4} + y\mathrm{CO} \to z\mathrm{FeO} + w\mathrm{CO_2},$$

em que $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ *são coeficientes de balanceamento, e faça o que se pede:*

a) Escreva as equações que relacionam as quantidades de cada substância na reação - uma equação para o ferro, uma equação para o oxigênio e uma equação para o carbono (por exemplo, como temos $3x$ *átomos de ferro do lado esquerdo e* z *átomos de ferro do lado direito, isso nos dá a equação* $3x = z$*).*

b) Use as equações que obtidas no item anterior para montar um sistema linear homogêneo.

c) Resolva o sistema obtido no item anterior.

d) Escolha uma solução não-trivial do sistema e verifique que ela é um balanceamento da reação.

e) Conclua descrevendo um procedimento sistemático para balanceamento de reações.

Solução

a) Comparando o ferro obtemos $3x = z$, comparando o oxigênio obtemos $4x + y = z + 2w$ e comparando o carbono obtemos $y = w$.

b) Podemos reescrever todas essas equações como $3x - z = 0$, $4x + y - z - 2w = 0$ e $y - w = 0$ e montar o sistema linear homogêneo

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Ao invés de resolver o sistema, note que é o mesmo sistema da Questão 1, e já sabemos a solução:

$$S = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

d) Podemos novamente escolher a solução $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e ver que a reação

$$\mathrm{Fe_3O_4} + \mathrm{CO} \to 3\mathrm{FeO} + \mathrm{CO_2}$$

está balanceada.

e) Dada uma reação qualquer, podemos atribuir variáveis aos coeficientes de balanceamento e, comparando ambos os lados, obter equações relacionando essas variáveis.

Com essas equações podemos montar um sistema linear homogêneo.

Resolvendo esse sistema, obtemos um conjunto de soluções que podemos facilmente verificar que são balanceamentos da reação original.