“2º Testinho” - GAAL

02 de Maio de 2019

Em todas as questões abaixo, sempre que encontrar uma solução você deve mostrar que ela é, de fato, uma solução.

Questão 1. *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y, x + y)$.

a) Mostre que f *é linear.*

b) Calcule $\operatorname{Ker} f$ *e* $\operatorname{Im} f$.

c) Exiba um conjunto de geradores l.i. para $\operatorname{Ker} f$ *e* $\operatorname{Im} f$.

d) Calcule o produto interno de qualquer gerador de $\operatorname{Ker} f$ *com qualquer gerador de* $\operatorname{Im} f$ *escolhidos acima.*

e) Conclua que $\operatorname{Ker} f \perp \operatorname{Im} f$, *isto é, qualquer elemento de* $\operatorname{Ker} f$ *é ortogonal a qualquer elemento de* $\operatorname{Im} f$.

Questão 2. *Considere o conjunto de vetores* $\{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (-1, 5)\}$ *em* $\mathbb{R}^2$.

a) Mostre que esse conjunto é l.d.

b) Mostre que os vetores $(1, 0)$ *e* $(0, 1)$ *são gerado por esse conjunto.*

c) Calcule o subespaço de $\mathbb{R}^2$ *gerado por esse conjunto.*

d) É possível encontrar uma subcoleção desses vetores com dois elementos e que seja l.i.? Se sim, exiba tal subcoleção, se não, prove que é impossível.

Questão 3. *Considere os vetores* $v = (1, 1, 1)$, $u = (1, 0, -1)$ *e* $w = (-1, -2, 3)$ *em* $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule os produtos internos $\langle v, u\rangle$, $\langle v, w\rangle$ *e* $\langle u, w\rangle$.

b) Usando o item acima, conclua que existe um plano π *que é gerado por dois dos vetores acima e é ortogonal ao terceiro. Explicite quais são os vetores que geram o plano e qual é o vetor ortogonal ao plano.*

c) Calcule o produto vetorial dos vetores que geram o plano e compare o resultado com o vetor ortogonal ao plano.

Questão 4. *Considere os planos*

$$\pi_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v = \lambda(1, 1, 1) + \mu(1, 0, -1) + (0, 0, 3),\ \text{com } \lambda \text{ e } \mu \in \mathbb{R}\}$$

$$\pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 7z = 5\}.$$

a) Calcule a interseção desses planos.

b) Explicite um conjunto de geradores l.i. dessa interseção.