Lista de Exercícios - GAAL

Segunda Prova

1 Transformações lineares

Questão 1.1. *Verifique se as funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ abaixo são ou não lineares:*

a) $f(x,y) = (y,x)$;

b) $f(x,y) = (x+1, 2y)$;

c) $f(x,y) = (x,y)$;

d) $f(x,y) = \left(\dfrac{x+y}{2}, x-y\right)$;

e) $f(x,y) = (x/y, y/x)$.

Questão 1.2. *Verifique se as funções de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ abaixo são ou não lineares:*

a) $f(x,y,z) = (x,y,0)$;

b) $f(x,y,z) = (z,y,x)$;

c) $f(x,y,z) = (2\pi x, 2x, \pi x)$;

d) $f(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z)$;

e) $f(x,y,z) = (\mathrm{sen} x, \cos y, \mathrm{tg} z)$.

Questão 1.3. *Se f e g são duas funções lineares (de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$), podemos concluir que $f \circ g$ e $g \circ f$ também são lineares?*

Questão 1.4. *Considere f, g duas funções lineares em $\mathbb{R}^2$. Defina a função $f+g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $(f+g)(x,y) := f(x,y) + g(x,y)$. Essa função é linear? E se f, g fossem funções lineares em $\mathbb{R}^3$?*

2 Produtos interno e vetorial

Questão 2.1. *Calcule o produto interno dos vetores abaixo:*

a) $(1, 1)$ *e* $(2, 3)$*;*

b) $(\pi, 2)$ *e* $(2, \pi)$*;*

c) $(0, 7)$ *e* $(8, 1)$*;*

d) $(1, 1, 1)$ *e* $(\pi, \pi, 4)$*;*

e) $(0, 7, 2)$ *e* $(3, 6, 5)$*;*

f) $(1, 2)$ *e* $(-2, 1)$*;*

g) $(2, 4)$ *e* $(16, -8)$*;*

h) $(1, -1, 2)$ *e* $(1, -1, -1)$*.*

Questão 2.2. *Dos itens acima, quais são pares de vetores ortogonais? Por que?*

Questão 2.3. *Exiba um vetor ortogonal a* $(2, -7)$*.*

Questão 2.4. *Calcule o produto vetorial dos vetores abaixo:*

a) $(1, 2, 3)$ *e* $(2, 4, 6)$*;*

b) $(2, 5, 3)$ *e* $(1, 1, 1)$*;*

c) $(0, 0, 1)$ *e* $(3, 4, 8)$*;*

d) $(8, 8, 8)$ *e* $(2, 3, 4)$*.*

Questão 2.5. *Exiba um vetor que seja simultaneamente ortogonal a* $(0, 0, 1)$ *e* $(3, 4, 8)$*.*

3 Subespaços

Questão 3.1. *Verifique se os conjuntos abaixo são subespaços:*

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;

b) $\{v \in \mathbb{R}^2 \mid 2v = 0\}$;

c) $\{v \in \mathbb{R}^2 \mid v = 0\}$;

d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \text{ é par}\}$;

e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$;

f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 7\}$;

g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = x - y\}$;

h) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$;

i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 2, x + z = 5 \text{ e } y + z = 3\}$;

j) $\{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \perp (1,1,1)\}$;

k) $\{v \in \mathbb{R}^3 \mid v = \lambda(2,3,1), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}\}$;

l) $\{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \times (1,1,1) = 0\}$;

m) $\{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, (2,3,2) \rangle = 9\}$.

4 Geradores

Questão 4.1. *Determine os subespaços gerados pelos seguintes vetores:*

a) $\{(1,0),(0,1)\}$;

b) $\{(1,1),(1,-1)\}$;

c) $\{(2,3),(-2,-3)\}$;

d) $\{(0,0)\}$;

e) $\{(1,1),(2,3),(4,-2)\}$;

f) $\{(1,5),(4,20),(-3,-15)\}$;

g) $\{(1,1,1),(1,1,-1),(7,7,0)\}$;

h) $\{(1,0,-1),(-1,0,-2),(0,0,1)\}$;

i) $\{(1,0,0)\}$;

j) $\{(1,0,6),(2,3,4)\}$;

k) $\{(1,0,3),(1/3,0,1)\}$;

l) $\{(1,1,1),(2,3,4),(0,0,1),(0,9,7)\}$.

Questão 4.2. *Dados dos subespaços abaixo, exiba um possível conjunto de geradores para cada um deles:*

a) O plano que contém os vetores $(1,0,1)$ *e* $(0,0,1)$;

b) A reta em $\mathbb{R}^2$ *que contém o vetor* $(2,5)$;

c) O plano ortogonal ao vetor $(1,1,1)$;

d) A reta em $\mathbb{R}^2$ *ortogonal ao vetor* $(1,1)$;

e) A reta em $\mathbb{R}^3$ *que contém o vetor* $(2,1,-5)$;

f) Todo o $\mathbb{R}^3$.

5 L.D. e L.I.

Questão 5.1. *Verifique se os conjuntos abaixo são l.d. ou l.i.:*