“3º Testinho” - Solucionário - GAAL

18 de Junho de 2019

Em todas as questões abaixo deixe sempre explícito o seu raciocínio, não apenas a resposta correta.

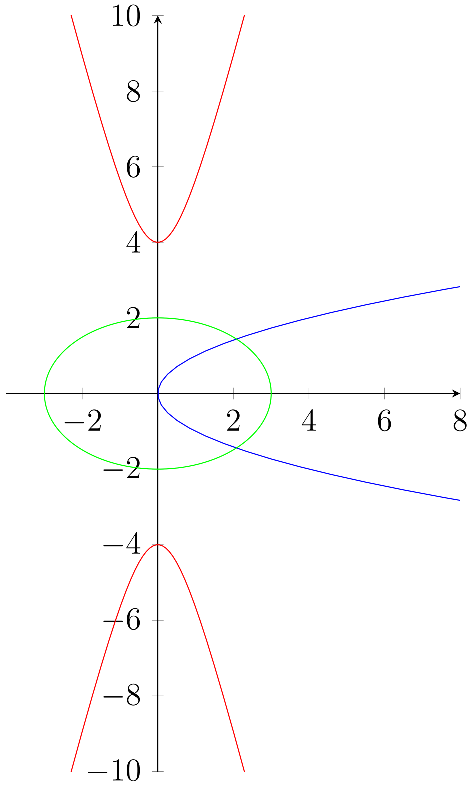
Questão 1. *Para cada equação abaixo, diga que tipo de cônica ele representa e faça um esboço dessa cônica.*

a) $x = 9y^2$;

b) $4x^2 + 9x^2 = 36$;

c) $x^2 - \frac{y^2}{16} = -1$.

SOLUÇÃO:



onde a equação (c) é uma hipérbole, a equação (b) é uma elipse e a equação (a) é uma parábola.

Questão 2. *Diga qual das equações abaixo descreve uma cônica rotacionada e qual descreve uma cônica transladada. Em seguida, apresente a matriz de rotação para a cônica rotacionada e o vetor de translação para a cônica transladada.*

a) $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 30$;

b) $4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y = 76$.

SOLUÇÃO: A equação (a) descreve uma cônica rotacionada, devido à presença do termo xy. Ela pode ser reescrita como

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 30 \tag{*}$$

A matriz $\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ possui como autovalores as soluções da equação

$$\det \begin{pmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

que se traduz em $(9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = 0$, ou seja, $\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$. Ou seja, os autovalores da matriz são da forma

$$\lambda = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 200}}{2} = \frac{15 \pm 5}{2}$$

ou seja, $\lambda = 10$ e $\lambda = 5$ são os nossos autovalores.

Como os autovetores são as soluções não-triviais do sistema

$$\begin{pmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

podemos calcular os autovetores substituindo os autovalores obtidos acima, por exemplo $\lambda = 5$:

$$\begin{pmatrix} 9-5 & -2 \\ -2 & 6-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

ou seja, queremos achar as soluções do sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Note, contudo, que as linhas da matriz são múltiplas uma da outra, e, portanto, qualquer uma delas nos dá todas as soluções: $W_1 = \{-2x + y = 0\}$, ou, visto de outra forma, $W_1 = \{y = 2x\}$. Escolhendo $v = (1, 2) \in W_1$, vemos que $\|v\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ e, portanto, podemos escolher o autovetor unitário $v_1 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ associado ao autovalor 5.

Como os autoespaços de uma matriz simétrica são ortogonais, podemos tomar $v_2 = (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ e obter a matriz de rotação

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por fim, reescrevendo a equação (*) usando a matriz de autovalores e a matriz de rotação obtemos

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 30$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 30,$$

donde $5x'^2 + 10y'^2 = 30$ (fazendo $(x', y') = P^t(x, y)$) e vemos que a cônica descrita por (a) está apenas rotacionada pela matriz de rotação P.

A equação (b), por sua vez, não possui o termo xy e, portanto, não está rotacionada. Para descobrirmos a translação, temos que completar quadrados:

$$\begin{aligned}
4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y &= 76 \\
4(x^2 - 2x) - 9(y^2 - 4y) &= 76 \quad && \text{agrupando os termos com } x \text{ e } y \\
4((x-1)^2 - 1) - 9((y-2)^2 - 4) &= 76 && \text{completando os quadrados} \\
4(x-1)^2 - 4 - 9(y-2)^2 + 36 &= 76 && \text{distribuindo 4 e 9} \\
4x'^2 - 9y'^2 &= 36 && \text{substituindo } (x', y') = (x-1, y-2)
\end{aligned}$$

e vemos que o vetor translação é exatamente $T = (1, 2)$.

Questão 3. *Dada a equação*

$$13x^2 + 10xy - 22x + 13y^2 + 58y + 37 = 0$$

faça o que se pede:

a) Reescreva equação acima em forma matricial.

b) Encontre os autovalores e autovetores associados à parte de grau 2 da equação acima.

c) Identifique a matriz de rotação associada a essa equação.

d) Faça a mudança de coordenadas que diagonaliza a forma matricial obtida no item (a).

e) Identifique a translação associada a essa equação.

f) Faça uma translação de forma que a equação obtida no item (d) esteja na forma padrão.

g) Identifique qual a cônica descrita pela equação.

h) Faça um esboço dessa cônica.

SOLUÇÃO: Começamos re-escrevendo a equação na forma

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -22 & 58 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 37 = 0. \tag{$*$}$$

Vamos agora diagonalizar a matriz $A = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$. Para isso, vamos calcular os autovalores como sendo as soluções da equação

$$\det \begin{pmatrix} 13-\lambda & 5 \\ 5 & 13-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja, $(13-\lambda)^2 - 25 = 0$, que podemos ainda re-escrever como

$$\lambda^2 - 26\lambda + 169 - 25 = \lambda^2 - 26\lambda + 144 = 0.$$

Sabemos, ainda, que as soluções dessa equação são da forma

$$\lambda = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 144}}{2} = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 576}}{2} = \frac{26 \pm 10}{2},$$

ou seja, $\lambda_1 = 18$ e $\lambda_2 = 8$.

Com isso, podemos calcular os autoespaços W_1 e W_2 como sendo as soluções não-triviais da equação $(A - \lambda I)X = 0$ para cada valor de λ. Para λ_1 temos:

$$\begin{pmatrix} 13-18 & 5 \\ 5 & 13-18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

que admite solução da forma $W_1 = \{-5x + 5y = 0\}$ ou seja, $W_1 = \{x = y\}$. Assim, podemos pegar o vetor $v_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \in W_1$ e ver que $\|v_1\| = \sqrt{(1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2} = \sqrt{1/2 + 1/2} = \sqrt{1} = 1$, ou seja, v_1 é um autovetor normal da matriz A associado ao autovalor 18.

Como A é simétrica, sabemos que $W_2 = W_1^{\perp}$ e, portanto, podemos simplesmente tomar $v_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Claramente $\|v_2\| = 1$ (já que $\|v_2\| = \|v_1\|$) e $v_1 \perp v_2$ (por construção). Segue que $A = PDP^t$ onde $P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Com isso, vamos reescrever $(*)$:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} PDP^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -22 & 58 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 37 = 0$$

e, fazendo a mudança de coordenadas $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}$ temos que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e, portanto, multiplicando à esquerda por P ambos os lados da equação acima, obtemos $P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Assim, obtemos

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -22 & 58 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 37 = 0.$$

Antes de avançar, vamos calcular $\begin{pmatrix} -22 & 58 \end{pmatrix} P$:

$$\begin{pmatrix} -22 & 58 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} -22 & 58 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 36 & 80 \end{pmatrix}$$

e escrever, finalmente,

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 36 & 80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 37 = 0. \tag{$**$}$$

Agora, obtemos a equação $18x'^2 + 8y'^2 + 36/\sqrt{2}x' + 80/\sqrt{2}y' + 37 = 0$ que podemos completar quadrados:

$$\begin{aligned}
18x'^2 + 8y'^2 + 36/\sqrt{2}x' + 80/\sqrt{2}y' + 37 &= 0 \\
(18x'^2 + 36/\sqrt{2}x') + (8y'^2 + 80/\sqrt{2}y') + 37 &= 0 && \text{agrupando } x' \text{ e } y' \\
18(x'^2 + 2/\sqrt{2}x) + 8(y'^2 + 10/\sqrt{2}y') + 37 &= 0 && \text{colocando 18 e 8 em evidência} \\
18((x' + 1/\sqrt{2})^2 - 1/2) + 8((y' + 5/\sqrt{2})^2 - 25/2) & && \text{completando os quadrados} \\
18(x' + 1/\sqrt{2})^2 - 9 + 8(y' + 5/\sqrt{2})^2 - 100 + 37 &= 0 && \text{distribuindo 18 e 8} \\
18x''^2 - 9 + 8y''^2 - 100 + 37 &= 0 && \text{fazendo } \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + 1/\sqrt{2} \\ y' + 5/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
18x''^2 + 8y''^2 &= 72 && \text{fazendo as operações com números restantes}
\end{aligned}$$

o que nos diz que fazendo a mudança de coordenadas $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + 1/\sqrt{2} \\ y' + 5/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ podemos re-escrever $(**)$ como

$$18x''^2 + 8y''^2 = 72. \tag{$***$}$$

Finalmente, dividindo ambos os lados por 72 obtemos

$$\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{9} = 1$$

e, portanto, concluímos que a equação $(*)$ descreve uma elipse de semi-eixos 2 e 3.

Para esboçar a cônica, precisamos achar o quanto ela está rodada e transladada. Achar a rotação é fácil: Basta notar que $P = R_{45^\circ}$.

Para descobrir a translação, note que já sabemos o quanto o eixo (x'', y'') está transladado em relação ao eixo (x', y''): exatamente $(-1/\sqrt{2}, -5/\sqrt{2})$. Mas sabemos que $(x', y') = P^t(x, y)$, ou seja, a translação pode ser calculada como $P(-1/\sqrt{2}, -5/\sqrt{2})$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

o que nos dá uma translação de $T = (2, -3)$, e podemos esboçar nossa cônica: