Solução do "1º Testinho" - GAAL

28 de Março de 2019

Em todas as questões abaixo, sempre que encontrar uma solução você deve mostrar que ela é, de fato, uma solução.

Questão 1. *Dado o sistema linear*

$$AX = 0$$

em que $A \in M_n(\mathbb{R})$ e X é uma matriz coluna de variáveis, você seria capaz de apresentar uma solução óbvia do sistema sem fazer contas?

Solução

Como uma "solução" é uma matriz coluna C tal que $AC = B$, o sistema linear $AX = 0$ sempre admite solução $X = 0$, já que toda matriz vezes a matriz coluna 0 é 0.

Questão 2. *Considere o sistema linear*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & 15 & -10 & 40 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -45 \\ 6 \end{pmatrix}$$

e faça o que se pede:

a) Exiba a matriz aumentada desse sistema.

b) Exiba a matriz escalonada desse sistema.

c) Calcule o conjunto solução desse sistema.

d) Exiba uma solução do sistema, e verifique que ela é, de fato, uma solução.

Solução

a) A matriz aumentada de um sistema consiste da matriz de coeficientes acrescida da matriz de resultados. Assim, a matriz aumentada do sistema é

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right).$$

b) Vamos escalonar essa matriz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

e ver que a forma escalonada da matriz desse sistema é

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

c) Agora, para achar uma solução, usamos a forma escalonada acima para obter que $x + 3y + w = -5$ e $z - 3w = 2$. Como temos duas equações e quatro variáveis, teremos duas variáveis livres.

Apesar da apresentação do conjunto sistema depender de quais variáveis livres você vai escolher, o conjunto em si independe dessa escolha. Então vamos escolher y e w livres, ou seja, $x = -3y - w - 5$ e $z = 3w + 2$.

Assim, o conjunto solução é da forma

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -3y - w - 5, z = 3w + 2\},$$

que também podemos expressar por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -3y - w - 5 \\ y \\ 3w + 2 \\ w \end{pmatrix} \in M_{4\times1}(\mathbb{R}) \right\}$$

ou ainda

$$S = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times1}(\mathbb{R}) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

d) Finalmente, escolhendo valores para as variáveis livres podemos encontrar soluções do sistema. Por exemplo, escolhendo $\lambda = \mu = 0$, vemos que $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma solução. Vamos testar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & 15 & -10 & 40 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+0-2+0 \\ -25+0-20+0 \\ 0+0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -45 \\ 6 \end{pmatrix},$$

ou seja, $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ é, de fato, uma solução.

Questão 3. *Resolva o sistema linear*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

sem escalonar e sem fazer substituição (dica: use matrizes inversas).

Solução

Sabemos que a matriz inversa de uma matriz da forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é a matriz $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Assim, a inversa da matriz acima é $\dfrac{1}{6-5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. Com isso, podemos calcular as soluções do sistema:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6+3 \\ -10-6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 9 \\ -16 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 9 \\ -16 \end{pmatrix} \end{aligned},$$

ou seja, a única solução do sistema é $x = 9$ e $y = -16$.
Contudo, caso não soubéssemos qual a inversa da matriz do sistema, poderíamos calculá-la resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

ou seja, $X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ é inversa da matriz do sistema, e podemos simplesmente repetir o raciocínio anterior para resolver o sistema.

Questão 4. *Sem fazer contas, explique porque o sistema abaixo não possui solução:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 9 & 8 \\ \pi & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 17 \\ \pi + \sqrt{2} \\ 1278 \end{pmatrix}.$$

Você consegue modificar apenas uma linha do sistema de forma que ele passe a ter solução? Se sim, exiba tal modificação e calcule a solução. Se não, diga por quê é impossível.

Solução

Claramente o sistema não possui solução, pois a última linha nos diz que se (x, y) é solução, então $0x + 0y = 1278$, mas claramente $0x + 0y = 0$ e $0 \neq 1278$. Então não existe solução.
Contudo, poderíamos notar que, a menos da última linha, o sistema tem uma solução única: $(1, 1)$. Então, podemos remover a última linha, e isso tornaria o sistema solucionável. Podemos também trocar a última linha por $(1, 1277)$ ou de maneira geral, $(a, 1278 - a)$. Isso faria com que $a + (1278 - a) = 1278$, então a solução $(1, 1)$ continua sendo solução.
Poderíamos também simplesmente zerar toda a última linha, e certamente $0 + 0 = 0$.