# Segunda Prova - GAAL

Em todas as questões abaixo, sempre que encontrar uma solução você deve mostrar que ela é, de fato, uma solução.

**Questão 1.** *Considere a matriz real* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ *e faça o que se pede.*

*a) Calcule* $\operatorname{Ker} A$ *e* $\operatorname{Im} A$ *e faça um esboço gráfico desses subespaços de* $\mathbb{R}^2$*.*

*b) Exiba (se possível) um conjunto de geradores l.i. para* $\operatorname{Ker} A$ *e para* $\operatorname{Im} A$*.*

*c) Sem fazer contas, exiba o conjunto solução do sistema*

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

**Questão 2.** *Considere as retas em* $\mathbb{R}^3$ *dadas por*

$$q = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v = \lambda(1,1,1) + (1,2,3)\}$$

$$r = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v = \lambda(1,0,1) + (2,2,1)\}$$

$$s = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v = \lambda(5,5,5)\}$$

$$t = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v = \lambda(-1,0,-1) + (-2,1,0)\}$$

*e faça o que se pede:*

*a) Classifique-as quanto a paralelas, concorrentes ou reversas.*

*b) Calcule as interseções dos pares de retas que forem concorrentes.*

**Questão 3.** *Considere os planos*

$$\pi_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v = \lambda(1,1,1) + \mu(1,0,-1), \text{ com } \lambda \text{ e } \mu \in \mathbb{R}\}$$

$$\pi_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 7z = 0\}.$$

*a) Calcule a interseção desses planos.*

*b) Exiba um conjunto de geradores l.i. dessa interseção.*

**Questão 4.** *Considere a matriz real* $2 \times 2$ $A$ *cujo núcleo é a reta* $y = 2x$ *e cuja imagem é o eixo* $Y$*.*

*a) Exiba um conjunto de geradores l.i. para o núcleo e a imagem de* $A$*.*

*b) Responda, sem fazer contas:* $A$ *é invertível? Justifique sua resposta.*

*c) Exiba uma possível expressão para* $A$ *que seja compatível com o enunciado.*

**Questão Bônus.** *Considere* $v, u \in \mathbb{R}^2$ *vetores não-nulos arbitrário e faça o que se pede:*

*a) Faça um esboço gráfico de* $v$*,* $u$*,* $v + u$ *e* $v - u$*.*

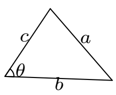
*b) Calcule* $\|v - u\|^2$*.*

*c) Compare o resultado acima com a Lei dos Cossenos (ver abaixo).*

*d) Obtenha uma fórmula que relacione o ângulo* $\theta$ *entre* $v$ *e* $u$ *e o produto interno* $\langle v, u \rangle$*.*

*e) Conclua mostrando que* $v$ *e* $u$ *são l.i. se, e somente se,* $\cos\theta \neq 0$*.*

**Lei dos Cossenos:**

Qualquer triângulo 

satisfaz a seguinte relação: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$.