

Lista de Exercícios - GAAL

Segunda Prova

1 Transformações lineares

Questão 1.1. Verifique se as funções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 abaixo são ou não lineares:

a) $f(x, y) = (y, x);$

b) $f(x, y) = (x + 1, 2y);$

c) $f(x, y) = (x, y);$

d) $f(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, x-y\right);$

e) $f(x, y) = (x/y, y/x).$

Questão 1.2. Verifique se as funções de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 abaixo são ou não lineares:

a) $f(x, y, z) = (x, y, 0);$

b) $f(x, y, z) = (z, y, x);$

c) $f(x, y, z) = (2\pi x, 2x, \pi x);$

d) $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z);$

e) $f(x, y, z) = (\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} y, \operatorname{tg} z).$

Questão 1.3. Se f e g são duas funções lineares (de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3), podemos concluir que $f \circ g$ e $g \circ f$ também são lineares?

Questão 1.4. Considere f, g duas funções lineares em \mathbb{R}^2 . Defina a função $f + g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $(f + g)(x, y) := f(x, y) + g(x, y)$. Essa função é linear? E se f, g fossem funções lineares em \mathbb{R}^3 ?

2 Produtos interno e vetorial

Questão 2.1. *Calcule o produto interno dos vetores abaixo:*

a) $(1, 1)$ e $(2, 3)$;

b) $(\pi, 2)$ e $(2, \pi)$;

c) $(0, 7)$ e $(8, 1)$;

d) $(1, 1, 1)$ e $(\pi, \pi, 4)$;

e) $(0, 7, 2)$ e $(3, 6, 5)$;

f) $(1, 2)$ e $(-2, 1)$;

g) $(2, 4)$ e $(16, -8)$;

h) $(1, -1, 2)$ e $(1, -1, -1)$.

Questão 2.2. *Dos itens acima, quais são pares de vetores ortogonais? Por que?*

Questão 2.3. *Exiba um vetor ortogonal a $(2, -7)$.*

Questão 2.4. *Calcule o produto vetorial dos vetores abaixo:*

a) $(1, 2, 3)$ e $(2, 4, 6)$;

b) $(2, 5, 3)$ e $(1, 1, 1)$;

c) $(0, 0, 1)$ e $(3, 4, 8)$;

d) $(8, 8, 8)$ e $(2, 3, 4)$.

Questão 2.5. *Exiba um vetor que seja simultaneamente ortogonal a $(0, 0, 1)$ e $(3, 4, 8)$.*

3 Subespaços

Questão 3.1. *Verifique se os conjuntos abaixo são subespaços:*

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\};$

b) $\{v \in \mathbb{R}^2 \mid 2v = 0\};$

c) $\{v \in \mathbb{R}^2 \mid v = 0\};$

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2 \text{ ou } x + y = 4\};$

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\};$

f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 7\};$

g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = x - y\};$

h) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\};$

i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 2, x + z = 5 \text{ e } y + z = 3\};$

j) $\{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \perp (1, 1, 1)\};$

k) $\{v \in \mathbb{R}^3 \mid v = \lambda(2, 3, 1), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}\};$

l) $\{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \times (1, 1, 1) = 0\};$

m) $\{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, (2, 3, 2) \rangle = 9\}.$

4 Geradores

Questão 4.1. *Determine os subespaços gerados pelos seguintes vetores:*

- a) $\{(1, 0), (0, 1)\};$
- b) $\{(1, 1), (1, -1)\};$
- c) $\{(2, 3), (-2, -3)\};$
- d) $\{(0, 0)\};$
- e) $\{(1, 1), (2, 3), (4, -2)\};$
- f) $\{(1, 5), (4, 20), (-3, -15)\};$
- g) $\{(1, 1, 1), (1, 1, -1), (7, 7, 0)\};$
- h) $\{(1, 0, -1), (-1, 0, -2), (0, 0, 1)\};$
- i) $\{(1, 0, 0)\};$
- j) $\{(1, 0, 6), (2, 3, 4)\};$
- k) $\{(1, 0, 3), (1/3, 0, 1)\};$
- l) $\{(1, 1, 1), (2, 3, 4), (0, 0, 1), (0, 9, 7)\}.$

Questão 4.2. *Dados dos subespaços abaixo, exiba um possível conjunto de geradores para cada um deles:*

- a) *O plano que contém os vetores $(1, 0, 1)$ e $(0, 0, 1)$;*
- b) *A reta em \mathbb{R}^2 que contém o vetor $(2, 5)$;*
- c) *O plano ortogonal ao vetor $(1, 1, 1)$;*
- d) *A reta em \mathbb{R}^2 ortogonal ao vetor $(1, 1)$;*
- e) *A reta em \mathbb{R}^3 que contém o vetor $(2, 1, -5)$;*
- f) *Todo o \mathbb{R}^3 .*

5 L.D. e L.I.

Questão 5.1. *Verifique se os conjuntos abaixo são l.d. ou l.i.:*

- a) $\{(1, 0)\}$;
- b) $\{(1, 0), (0, 1), (2, 5)\}$;
- c) $\{(1, 1), (2, 3)\}$;
- d) $\{(1, -1), (3, -2), (2, 2)\}$;
- e) $\{(1, 1, 1), (1, 1, -1)\}$;
- f) $\{(1, 7, 6), (3, 21, 18)\}$;
- g) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 5, 3), (7, -2, 3)\}$;
- h) $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

Questão 5.2. *Verifique que o conjunto $\{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, -2)\}$ é l.d. Em seguida, descreva quais vetores você poderia tirar desse conjunto de forma a torná-lo l.i.*

Questão 5.3. *Verifique que o conjunto $\{(1, 0, 1), (2, 3, 2)\}$ é l.i. Em seguida, apresente um novo vetor que seja l.i. com o conjunto anterior, mas que também forme, junto com esse conjunto, um conjunto de geradores para \mathbb{R}^3 (ou seja, encontre v tal que $\{(1, 0, 1), (2, 3, 2), v\}$ é l.i. e gera \mathbb{R}^3).*

6 Núcleo e Imagem

Questão 6.1. *Para cada função linear da seção 1 desta lista, exiba seu núcleo e imagem. Em seguida, calcule um conjunto de geradores l.i. para o núcleo e a imagem, e conclua calculando as dimensões de cada um.*