令和3年度OBK式模試問題

数　学　(理系)

200 点満点

≪ 配点は, 問題用紙に記載のとおり. ≫

(注　意)

1. 問題冊子及び解答用紙は投稿されるまで開かないこと.
2. 解答冊子は表紙のほかに, 各自で用意した各種ページ含めて 16 ページあることを想定する.
3. 問題は全部で 6 題ある (1 ページから 2 ページ).
4. 難易度は京大の易からやや易レベル中心のつもりである.
5. 解答は解答冊子の指定された解答用ページに書くこと. ただし, 続き方をはっきり示して見開きに隣接する計算用ページに解答の続きを書いてもよい. その場合は, 解答用ページに「計算用ページに続く」旨を記すこと. このときに限って, 計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する. また, 余白ページに書かれたものは採点の対象としない.
6. 解答のための下書き, 計算などは, 計算用ページまたは余白ページに書いて, 残しておいてもよい.
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある.
8. 解答冊子は, どのページも切り離してはならない.
9. 解答は後日投稿するので, 答案を送る必要はない.

$\boxed{1}$ (35 点)

k を正の整数, $p,\ q$ を素数とする. このとき $(pq)^p - q^q + q = kp^q$ を満たす $p,\ q$ は存在しないことを示せ.

$\boxed{2}$ (35 点)

三角形 $\mathrm{OA_1B_1}$ の重心を $\mathrm{G_1}$ とする. 半直線 $\mathrm{OA_1}$, $\mathrm{OB_1}$ 上に任意の n 個の点をとり, それぞれの点を A_n, B_n とし, 三角形 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ の重心を G_n とする. このとき $\mathrm{G_2},\ \mathrm{G_3},\ \ldots,\ \mathrm{G}_n$ が半直線 $\mathrm{OG_1}$ 上に存在するならば, 三角形 $\mathrm{OA_1B_1}$ と三角形 $\mathrm{OA}_k\mathrm{B}_k$ $(2 \leqq k \leqq n)$ は相似な三角形であることを示せ.

$\boxed{3}$ (30 点)

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は $0<\alpha,\ 0<\beta,\ 0<\gamma,\ \alpha+\beta+\gamma=\pi$ を満たす実数とする. このとき, $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ の最大値を求めよ.

$\boxed{4}$ (35 点)

a, b は $0<a, 0<b,\ 1<a+b \leqq \sqrt{2}$ を満たす実数とする．このとき,

$-1<\frac{b(2a^2-1)}{2-b}+\frac{a(2b^2-1)}{2-a} \leqq 0$ であることを示せ.

$\boxed{5}$ (30 点)

正 n 角系 D の外接円 P の半径を R, 内接円 Q の半径を r とし, D と P の接点を時計回りにそれぞれ $A_1, A_2, ...A_n$．D と Q の接点を時計回りにそれぞれ $B_1, B_2, ...B_n$ とする．ここで弧 $A_kA_{k+1}(1 \leqq k \leqq n)$ と D で囲まれた部分の面積を S_n．弧 B_kB_{k+1} と D で囲まれた部分の面積 T_n としたとき $\lim_{n\to\infty} n(S_n - T_n)$ を求めよ.

$\boxed{6}$ (35 点)

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ として, 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,3,...)$ を

$a_1 = cos\frac{\pi}{4},\ a_{n+1} = 2a_n(\frac{2cos\frac{\theta}{2^n}tan\frac{\theta}{2^n}}{1+cos\frac{\theta}{2^n}}) \cdots\ (*)$

としたとき, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{sin\frac{\theta}{2^{n+1}}}$ を求めよ.

問題は, このページで終わりである.