Modélisation Scientifique du Risque Climatique dans l'ORSA

Hypothèses, Formules et Explications Détaillées

Projet Actuariel – Version Scientifique détaillée

November 19, 2025

Abstract

Ce document fournit les formules mathématiques utilisées dans le modèle ORSA climatique développé en VBA/Excel ainsi que des explications détaillées et interprétations pour chacune. Le contenu est conçu pour être utilisé comme annexe méthodologique dans un mémoire, un rapport ORSA ou une soutenance.

Contents

1 Introduction

Ce document explique en détail toutes les formules utilisées dans le modèle ORSA climatique : quelle est leur finalité, comment elles sont calculées, quelles hypothèses elles portent, et quelles précautions appliquer lors de l'implémentation numérique. L'objectif est d'assurer une compréhension complète et transférable pour un lecteur technique (actuaire, analyste quantitatif, auditeur).

2 Notations générales

Avant d'entrer dans les formules, définissons quelques notations récurrentes :

- A_t : valeur totale des actifs à la date t.
- BEL_t : Best Estimate Liability (provisions techniques) à la date t.
- P_t : primes collectées l'année t.
- S_t : sinistres observés (ou coût total sinistres) sur l'année t.
- r : taux d'actualisation central (en %).
- g : taux de croissance annuel des sinistres lié au risque climatique (en proportion, ex. $0.03 = 3\%$).
- α, β : paramètres de la loi Gamma (shape et rate).
- SCR_i : capital requis pour le module i (ex : SCR_{taux}, SCR_{actions}).
- ρ_{ij} : corrélation entre modules i et j.
- $BSCR$: agrégation du Basic SCR (agrégation de tous les modules).
- BOF : Basic Own Funds $= A - BEL$.

3 BOF et Ratio de solvabilité

3.1 Formule

$$BOF = A - BEL$$

$$SR = \frac{BOF}{SCR_{\text{total}}}$$

3.2 Explication détaillée

- **BOF** (Basic Own Funds) est la mesure simple des fonds propres disponibles pour absorber des pertes. Dans notre modèle on prend A à la valeur de marché (ou comptable selon données) et BEL comme la meilleure estimation des engagements.
- Le **ratio de solvabilité** SR mesure la capacité à absorber le BSCR. Un $SR \geq 1$ signifie que, selon l'approximation retenue, l'entité dispose d'un capital suffisant pour couvrir le risque réglementaire.
- **Remarques pratiques** : il est crucial d'utiliser les mêmes unités et conventions (valeur en euros, arrondissements, prise en compte ou non des marges de risque).

4 Modélisation des sinistres : loi Gamma

4.1 Rappel des formules

La loi Gamma est paramétrée en *shape* α et *rate* β (ou en *scale* $\theta = 1/\beta$). À partir de la moyenne empirique μ et de la variance empirique σ^2 :

$$\alpha = \frac{\mu^2}{\sigma^2}, \qquad \beta = \frac{\mu}{\sigma^2}.$$

La cdf et l'inverse (utilisées dans le code) sont notées $F_\Gamma(x; \alpha, \beta)$ et $F_\Gamma^{-1}(u; \alpha, \beta)$.

4.2 Explication détaillée

- **Pourquoi la loi Gamma ?** La Gamma est fréquemment utilisée pour modéliser des montants positifs, asymétriques, et avec variance potentiellement élevée — typique des sinistres non-vie. Elle est flexible (forme variable selon α) et bien adaptée aux techniques d'estimation moment-matching.
- **Estimation** : on calcule la moyenne μ et la variance σ^2 des sinistres historiques (ex. $S_{t-4}, \ldots, S_t$). Si $\sigma^2 = 0$ (cas constant), la Gamma n'est pas définie — il faut alors recourir à une modélisation alternative (bootstrap, sur-dispersée, ou incrémenter une petite variance).
- **Projection par inversion** : dans le code on utilise l'approche suivante :
  1. calculer $u = F_\Gamma(S_{\text{dernier}}; \alpha, \beta)$ — la probabilité associée au dernier sinistre ;
  2. tirer $S_{\text{next}} = F_\Gamma^{-1}(u; \alpha, \beta)$, éventuellement ajusté pour la tendance climatique.

  Cette méthode préserve la position quantile relative du dernier événement dans la distribution estimée.

- **Précautions numériques** : pour α très petit ou très grand, utiliser des fonctions robustes (bibliothèques natives Excel/Stat) ; éviter la division par zéro ; imposer bornes pour α, β.

4.3 Exemple numérique

Si $\mu = 1\,200\,000$ et $\sigma^2 = 3.6 \times 10^{11}$ alors

$$\alpha = \frac{(1.2 \times 10^6)^2}{3.6 \times 10^{11}} = 4, \qquad \beta = \frac{1.2 \times 10^6}{3.6 \times 10^{11}} = 3.333 \cdot 10^{-6}.$$

5 Tendance climatique appliquée aux sinistres

5.1 Formule

Si la tendance annuelle liée au scénario est g, la projection est :

$$S_{t+1}^{climat} = S_t \cdot (1 + g).$$

Sur un horizon multiple :

$$S_{t+h}^{climat} = S_t \cdot (1 + g)^h.$$

5.2 Explication détaillée

- g est calibré selon le scénario : typiquement $g \in \{0.03, 0.05, 0.08\}$ pour Modéré / Sévère / Extrême.
- Cette formulation suppose un effet composé (croissance exponentielle). C'est simple et interprétable, mais *non linéaire* à long terme ; sur horizons très longs (10+ ans) il faudra plus de prudence.
- Dans le Monte-Carlo on peut échantillonner g_t autour d'une moyenne $\bar{g}$ (ex : $g_t \sim \mathcal{N}(\bar{g}, \sigma_g^2)$ tronquée pour rester ¿ -1).

6 SCR Marché : éléments détaillés

Le SCR Marché est composé de sous-risques (taux, actions, spread, immobilier). Pour chaque sous-module le principe est de mesurer la perte de valeur entre scénario central et scénario choqué.

6.1 SCR taux — principe

$$SCR_{\text{taux}} = \sum_{i=1}^{10} \left(V_i - V_i^{stress}\right),$$

avec pour une échéance i,

$$V_i = \text{remboursement et coupons actualisés au taux } r,$$

$$V_i^{stress} = \text{remboursement et coupons actualisés au taux stressé } r_i^{stress}.$$

6.1.1 Explication

- Les obligations sont valorisées comme la somme des flux futurs (coupon + principal) actualisés.
- Le choc taux est implémenté différemment suivant la structure : dans le code VBA on applique un multiplicateur par échéance (vecteur `stress`) qui augmente le taux effectif dans le scénario.
- Les coupons sont supposés fixes (hypothèse simplificatrice). Le calcul inclut à la fois la perte de valeur du principal et la perte de la valeur actualisée des coupons.

6.1.2 Implémentation numérique

Pour une obligation de nominal N et coupon c (en valeur absolue), échéance i :

$$V_i = \sum_{t=1}^{i} \frac{c}{(1+r)^t} + \frac{N}{(1+r)^i}.$$

$$V_i^{stress} = \sum_{t=1}^{i} \frac{c}{(1+r_i^{stress})^t} + \frac{N}{(1+r_i^{stress})^i}.$$

Remarque : l'utilisation d'un seul taux r_i^{stress} par échéance est une approximation: en pratique la courbe des taux doit être choquée selon la méthode réglementaire.

6.2 SCR spread

$$SCR_{\text{spread}} = \sum_{i=1}^{10} \left(V_i - V_i^{spread\_stress}\right),$$

où $V_i^{spread\_stress}$ intègre une probabilité de défaut (reduction du coupon attendu) et un ajustement de la valorisation en conséquence.

6.2.1 Explication

- Le choc de spread est souvent relié à une migration de notation (ex : AA $\rightarrow$ A) qui augmente la prime exigée par le marché.
- On modélise l'impact via une probabilité de défaut p_i pour l'échéance i. En cas de défaut on réduit la probabilité de toucher un coupon / principal.
- Dans la pratique on calcule un coupon attendu stressé : $c^{stress} = c \cdot (1 - p_i)$ puis on actualise avec le taux sans risque (ou un taux capitalisé).

6.3 SCR Actions et Immobilier

Formulation simple utilisée :

$$SCR_{\text{actions}} = A_{\text{actions}} \cdot \lambda_{\text{actions}}, \qquad SCR_{\text{immo}} = A_{\text{immo}} \cdot \lambda_{\text{immo}},$$

où λ. est la perte proportionnelle attendue dans un choc de marché (ex. $\lambda_{\text{actions}} = 0.25$).

6.3.1 Explication

- Ces formules sont des approximations par sensibilité. Elles simplifient le calcul mais capturent l'idée qu'un choc proprotionnel (ex. -25%) sur le portefeuille d'actions engendre une perte approximative égale à la proportion d'actions multipliée par le choc.
- λ_{actions} dépend du scénario (plus élevé en Extrême).

7 SCR Non-Vie : catastrophes et agrégation

7.1 Coûts par péril

On définit des coûts annuels moyens C_i pour chaque péril i : inondation, sécheresse, tempête, autres.

7.2 Agrégation quadratique

Le montant agrégé des catastrophes est calculé par la racine quadratique :

$$SCR_{Cat} = \sqrt{\sum_i C_i^2}.$$

7.2.1 Explication

- L'agrégation par racine de somme des carrés (RSS) équivaut à une hypothèse de *corrélation nulle* entre les périls mais combine leur volatilité de manière conservatrice. On peut introduire une matrice de corrélation si des dépendances sont attendues.
- Dans le code on modifie C_i par le facteur $(1+g)$ pour prendre en compte la hausse climatique.
- Pour plus de fidélité, on peut construire une copule liant la fréquence et la sévérité par péril.

7.3 SCR Non-Vie total (inclusion rachat)

On combine les catastrophes et un composant rachat/résidus (approximé) :

$$SCR_{\text{NonVie}} = \sqrt{SCR_{Cat}^2 + SCR_{rachat}^2}.$$

7.3.1 Remarque

La forme radicielle implique qu'on suppose une dépendance nulle entre le composant catastrophe et le composant rachat ; à défaut, il faut intégrer la corrélation.

8 SCR Contrepartie, Vie et Opérationnel

8.1 Formules simples utilisées

$$SCR_{\text{contrepartie}} = \gamma_C \cdot A, \qquad SCR_{\text{vie}} = \gamma_V \cdot BEL, \qquad SCR_{\text{op}} = \gamma_O \cdot P,$$

avec typiquement $\gamma_C = 0.005$ (0.5%), $\gamma_V = 0.01$ (1%), $\gamma_O = 0.03$ (3%).

8.2 Explication

- Ce sont des approximations utilitaires pour prendre en compte ces modules dans un prototype non-vie. Elles peuvent et doivent être remplacées par des modèles plus détaillés si le périmètre du projet s'élargit (ex: modélisation de la mortalité, tables de mortalité, modèles de default/recovery pour les contreparties).
- Les coefficients γ doivent être calibrés sur des données internes ou standards EIOPA.

9 Agrégation du BSCR (matrice de corrélation)

9.1 Formule générale

Soient $SCR_1, \ldots, SCR_n$ les modules (ici $n = 5$ dans notre simplification : Marché, Contrepartie, Vie, Non-Vie, Opérationnel). La formule d'agrégation est :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} SCR_i \cdot SCR_j \cdot \rho_{ij}}.$$

9.2 Interprétation

- ρ_{ij} représente la corrélation réglementaire (ou estimée) entre les modules i et j. Par exemple, EIOPA propose des matrices standardisées (où beaucoup d'éléments hors diagonal sont 0.25).
- L'expression est la version bilinéaire : $BSCR = \sqrt{\mathbf{SCR}^\top \rho \, \mathbf{SCR}}$.
- Si tous les modules étaient indépendants ($\rho_{ij} = 0$ pour $i \neq j$), $BSCR$ se réduit à la racine quadratique des SCR_i.

9.3 Exemple (2 modules)

Pour SCR_M (Marché) et SCR_{NV} (Non-Vie), avec corrélation ρ :

$$BSCR = \sqrt{SCR_M^2 + SCR_{NV}^2 + 2\rho \, SCR_M \, SCR_{NV}}.$$

9.4 Conseils pratiques

- Respecter la symétrie de la matrice ρ et la condition de positivité semi-définie (sinon la racine peut être erronée).
- Pour un modèle interne, estimer ρ_{ij} via séries historiques (corrélation des chocs) si disponible.

10 Simulation Monte-Carlo : formules et explications

10.1 But

Quantifier l'incertitude sur SCR et $BSCR$ due à la variabilité stochastique des drivers climatiques (croissance sinistres, chocs marchés, spreads, taux).

10.2 Variables simulées et hypothèses

On simule pour chaque run k et chaque année t :

$$g_t^{(k)} \sim \mathcal{N}(\bar{g}, \sigma_g^2) \quad (\text{tronqué: } g_t > -1),$$

$$\Delta r_t^{(k)} \sim \mathcal{N}(\mu_r, \sigma_r^2),$$

$$\Delta a_t^{(k)} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_a^2),$$

$$\Delta s_t^{(k)} \sim \mathcal{U}(-\delta_s, \delta_s).$$

Ces variables sont utilisées pour mettre à jour S_t, A_t, BEL_t.

10.3 Formules de mise à jour

$$S_t^{(k)} = S_{t-1}^{(k)} \cdot (1 + g_t^{(k)}).$$

$$A_t^{(k)} = A_{t-1}^{(k)} \cdot (1 + \Delta a_t^{(k)}).$$

$$BEL_t^{(k)} = BEL_{t-1}^{(k)} \cdot (1 + \Delta bel_t^{(k)}) \quad \text{où } \Delta bel_t^{(k)} \text{ est lié à } S_t^{(k)}.$$

10.4 Calcul du SCR par simulation

Pour chaque run k et année finale T on calcule :

$$SCR_T^{(k)} = f\big(A_T^{(k)}, BEL_T^{(k)}, \{S_t^{(k)}\}_{t \le T}\big)$$

puis on agrège les runs.

10.5 Statistiques d'estimation

$$\hat{\mu}_{SCR} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} SCR_T^{(k)},$$

$$\hat{\sigma}_{SCR} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N} \Big(SCR_T^{(k)} - \hat{\mu}_{SCR}\Big)^2}.$$

Intervalle de confiance asymptotique pour la moyenne :

$$IC_{95\%}(\hat{\mu}) = \hat{\mu} \pm 1.96 \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}}.$$

10.6 Remarques pratiques

- **Convergence** : la précision sur quantiles extrêmes (p.ex. 99.5%) demande un nombre de runs élevé (dizaines de milliers), ou des méthodes variance-reduction (importance sampling).

- **Stockage** : conserver les valeurs de chaque run permet d'analyser les percentiles (VaR) et la distribution complète.
- **Bande d'incertitude** : l'écart-type des runs informe sur la variabilité, utile pour la communication au management.

11 Formules et traitement des entrées (pré-validation)

11.1 Normalisation des saisies numériques

Pour éviter les erreurs liées au format (virgules décimales, espaces, symboles %), on applique au niveau input :

$$\text{valeur numérique} = \text{CDbl}\Big(\text{Replace}(\text{Replace}(\text{txt}, ",", "."), "\%", ""))\Big)$$

11.2 Gestion des vecteurs sinistres

On lit la colonne $B8 : B200$ et on construit un vecteur $\{S_i\}$ tel que chaque élément est numérique. Les éléments vides sont ignorés. En pseudo-code :

```
sinList = [ cell.value for cell in B8:B200 if IsNumeric(cell.value) ]
```

11.3 Traitement des cas pathologiques

- Si $|| < 2$: avertissement (variance non fiable).
- Si variance $= 0$: ajouter un bruit très faible ou utiliser une règle de substitution.

12 Interprétation des résultats et indicateurs clés

12.1 Indicateurs fournis

- $BSCR$ par année (N à N+4).
- Composantes SCR_i par module (taux, actions, spread, immo, inond, sécheresse, tempête, autres, contrepartie, vie, op).
- BOF et SR (ratio de solvabilité).
- Pour Monte-Carlo : $\hat{\mu}_{SCR}$, $\hat{\sigma}_{SCR}$, percentiles 5%/95%, graphiques bande ± 1.

12.2 Règles d'alerte

- Si $BOF - BSCR < 0$ alors **Solvabilité NOK** : action requise (réassurance, recapitalisation).
- Si la part d'un module ($SCR_i/BSCR$) dépasse un seuil (ex. 50%), alerter la direction de l'exposition dominante.

13 Pièges numériques et bonnes pratiques

- Toujours vérifier l'unité des entrées (euros,
- Gérer les cas de variance nulle ou d'échantillon insuffisant.
- Vérifier la positivité semi-définie de la matrice de corrélation : sinon l'agrégation peut produire des erreurs numériques.
- Pour Monte-Carlo, utiliser `Randomize` et seed contrôlable pour reproductibilité.
- Documenter toutes les hypothèses de calibration dans la feuille `Documentation`.

14 Conclusion

Ce document fournit des explications détaillées pour chaque formulation mathématique utilisée dans le modèle ORSA climatique. Les formules sont à la fois opérationnelles (prêtes à implémenter en VBA ou Python) et pédagogiques pour une soutenance ou un rapport technique.

Références

References

EIOPA, *Opinion on the supervision of the use of climate change risk scenarios in the ORSA*, 2021.

IPCC, *Sixth Assessment Report (AR6), Working Group I: Climate Change 2021 – The Physical Science Basis*, Cambridge University Press, 2021.

McNeil, A. J., & Frey, R. (2000). *Estimation of tail-related risk measures for heterogeneous data.* Journal of Empirical Finance.