1. **集合与常用逻辑用语**

**第1课时　集合的概念与运算**



1．集合与元素

(1)某些指定的对象集在一起就成为一个集合．其中每个对象叫做集合中的元素．集合中的元素具有确定性、互异性、无序性三个特性．

(2)集合的两种表示法：其中列举法指的是将集合中的元素一一列举出来写在大括号内；描述法指的是将集合元素的公共属性写在大括号内．

2．集合间的基本关系

(1)子集：*A*中任意一个元素均为*B*中的元素，记为*A*⊆*B*或*B*⊇*A*.

(2)真子集：*A*中任意一个元素均为*B*中的元素，且*B*中至少有一个元素不是*A*中的元素，记为*A**B*或*B**A*.

(3)空集：空集是任何集合*A*的子集(∅⊆*A*)，是任何非空集合*B*的真子集(∅*B*(*B*≠∅))．

3．集合的基本运算

(1)并集：由属于*A*或属于*B*的所有元素构成的集合，记为*A*∪*B*.

(2)交集：由既属于*A*又属于*B*的所有元素构成的集合，记为*A*∩*B*.

(3)补集：若全集为*U*，*A*是*U*的子集，则由属于*U*但不属于*A*的所有元素构成的集合，记为∁*UA*.



1．必明辨的2个易错点

(1)在求集合或进行集合运算时，容易忽视集合元素的互异性而出错．

(2)在运用*B*⊆*A*，*A*∩*B*＝*B*，*A*∪*B*＝*A*往往会忽视*B*＝∅的情况．

2．解集合问题常用的方法

(1)集合是由元素构成的，认清集合的元素对于处理集合之间的关系及进一步认识集合是非常重要的．

(2)用好韦恩图，韦恩图是集合特有的，它是集合中将抽象问题转化为具体问题的重要工具．

**第2课时　命题及其关系、充分条件与必要条件**



1．命题

用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做命题，其中判断为真的语句叫做真命题，判断为假的语句叫做假命题．

2．四种命题及其关系

(1)四种命题

若原命题为“若*p*，则*q*”，则其逆命题是若*q*，则*p*；否命题是若綈*p*，则綈*q*；逆否命题是若綈*q*，则綈*p*.

(2)四种命题的真假关系

①两个命题互为逆否命题，它们有相同的真假性；

②两个命题为互逆命题或互否命题，它们的真假性没有关系．

3．充分条件、必要条件与充要条件

(1)“若*p*，则*q*”为真命题，记作：*p*⇒*q*，则*p*是*q*的充分条件，*q*是*p*的必要条件．

(2)如果既有*p*⇒*q*，又有*q*⇒*p*，记作：*p*⇔*q*，则*p*是*q*的充要条件，*q*也是*p*的充要条件．



1．必明辨的2个易错点

(1)充分条件与充分不必要条件及必要条件与必要不充分条件的区别与联系．

(2)在探求充分条件或必要条件时要注意所判断命题的类别．

2．求解充要条件问题常用的4种方法

(1)利用原命题及逆命题：若仅原命题成立，则原命题的条件是结论的充分不必要条件；若仅逆命题成立，则原命题的条件是结论的必要不充分条件；若原命题与逆命题都成立，则原命题的条件是结论的充要条件；若原命题与逆命题都不成立，则原命题的条件既不是结论的充分条件也不是必要条件．

(2)利用逆否命题及否命题：由于原命题与逆否命题等价、逆命题与否命题等价；因而在第一条途径失效时，要选择逆否命题及否命题．

(3)利用“⇒，⇔”，若*A*⇒*B*，则*A*是*B*的充分条件，*B*是*A*的必要条件；若*A*⇔*B*，则*A*是*B*的充要条件．

(4)利用集合之间的包含关系：设*M*＝{*x*|*A*(*x*)成立}，*N*＝{*x*|*B*(*x*)成立}；显然，*A*⇒*B*当且仅当*M*⊆*N*；即当且仅当*M*⊆*N*时，*A*是*B*的充分条件，*B*是*A*的必要条件；*M*＝*N*时，*A*是*B*的充要条件．

**第3课时　简单的逻辑联结词、全称量词与存在量词**



1．简单的逻辑联结词

(1)用联结词“且”联结命题*p*和命题*q*，记作*p*∧*q*，读作“*p*且*q*”．

(2)用联结词“或”联结命题*p*和命题*q*，记作*p*∨*q*，读作“*p*或*q*”．

(3)对一个命题*p*全盘否定记作綈*p*，读作“非*p*”或“*p*的否定”．

2．全称量词与存在量词

(1)全称量词与全称命题

①短语“对所有的”、“对任意一个”在逻辑中通常叫做全称量词，并用符号“∀”表示．

含有全称量词的命题，叫做全称命题．

②全称命题“对*M*中任意一个*x*，有*p*(*x*)成立”可用符号简记为：∀*x*∈*M*，*p*(*x*)，读作“对任意*x*属于*M*，有*p*(*x*)成立．”

(2)存在量词与特称命题

①短语“存在一个”、“至少有一个”在逻辑中通常叫做存在量词，并用符号“∃”表示．

含有存在量词的命题，叫做特称命题．

②特称命题“存在*M*中的一个*x*0，使*p*(*x*0)成立”可用符号简记为：∃*x*0∈*M*，*p*(*x*0)，读作“存在一个*x*0属于*M*，使*p*(*x*0)成立”．

3．含有一个量词的命题的否定

|  |  |
| --- | --- |
| 命题 | 命题的否定 |
| ∀*x*∈*M*，*p*(*x*) | ∃*x*0∈*M*，綈*p*(*x*0) |
| ∃*x*0∈*M*，*p*(*x*0) | ∀*x*∈*M*，綈*p*(*x*) |



1．必明辨的2个易错点

(1)否命题与含有一个量词的命题的否定．

后者是以含有量词且仅含一个为前提的命题，否则，就不谈否定．显然，并非所有的命题都可以写否定．但任何一个命题存在否命题．

(2)书写命题的否定时，要结合全称量词与特称量词的特点进行．

2．解逻辑联结词及命题的否定常用的方法

(1)利用命题的等价性对命题进行转化，即若綈*p*⇒*q*，则綈*q*⇒*p*.

(2)书写含有一个量词的命题的否定时，有两个步骤：即转换量词与否定结论．

**第二章基本初等函数、导数及其应用**

**第1课时　函数及其表示**



1．函数的概念

(1)函数的定义域、值域：

在函数*y*＝*f*(*x*)，*x*∈*A*中，*x*叫做自变量，*x*的取值范围*A*叫做函数的定义域；与*x*的值相对应的*y*值叫做函数值，函数值的集合{*f*(*x*)|*x*∈*A*}叫做函数的值域．

(2)函数的三要素：定义域、值域和对应关系．

2．函数的表示方法

表示函数的常用方法有：解析法、列表法、图象法．

3．分段函数

若函数在其定义域的不同子集上，因对应关系不同而分别用几个不同的式子来表示，这种函数称为分段函数．

分段函数的定义域等于各段函数的定义域的并集，其值域等于各段函数的值域的并集，分段函数虽由几个部分组成，但它表示的是一个函数．



1．必明辨的2个易错点

(1)函数与映射的区别与联系，函数是特殊的映射，二者区别在于映射定义中的两个集合是非空集合，可以不是数集，而函数中的两个集合必须是非空数集．

(2)两函数在什么条件下为同一函数？定义域、对应关系分别相同，两函数即为同一函数．

2．理解函数概念中的2个关键词

理清函数定义中的“任意*x*”与“唯一*y*”的含义．

3．掌握求函数解析式的4种常见方法

凑配法、换元法、消元法及待定系数法

**第2课时　函数的单调性与最值**



1．函数的单调性

(1)一般地，设函数*f*(*x*)的定义域为*I*.如果对于定义域*I*内某个区间*D*上的任意两个自变量*x*1，*x*2，当*x*1<*x*2时，都有*f*(*x*1)＜*f*(*x*2)，那么就说函数*f*(*x*)在区间*D*上是增函数，都有*f*(*x*1)＞*f*(*x*2)，那么就说函数*f*(*x*)在区间*D*上是减函数．

(2)单调性、单调区间的定义：若函数*f*(*x*)在区间*D*上是增函数或减函数，则称函数*f*(*x*)在这一区间上具有(严格的)单调性，区间*D*叫做*f*(*x*)的单调区间．

2．函数的最值

设函数*y*＝*f*(*x*)的定义域为*I*，如果存在实数*M*满足：(1)对于任意*x*∈*I*，都有*f*(*x*)≤*M*且存在*x*0∈*I*，使得*f*(*x*0)＝*M*，*M*为最大值．(2)对于任意*x*∈*I*，都有*f*(*x*)≥*M*且存在*x*0∈*I*，使得*f*(*x*0)＝*M*，*M*为最小值．



1．必明辨的2个易错点

(1)函数*f*(*x*)在区间[*a*，*b*]上单调递增，与函数*f*(*x*)的单调递增区间为[*a*，*b*]含义不同．

(2)函数的最值与函数值域的关系．

2．牢记2种方法

(1)借助图象求函数的单调区间．

(2)用“同增异减”求复合函数的单调区间．

**第3课时　函数的奇偶性与周期性**



1．函数的奇偶性

(1)如果对于函数*f*(*x*)的定义域内任意一个*x*，都有*f*(－*x*)＝*f*(*x*)，那么函数*f*(*x*)是偶函数．

(2)如果对于函数*f*(*x*)的定义域内任意一个*x*，都有*f*(－*x*)＝－*f*(*x*)，那么函数*f*(*x*)是奇函数．

2．周期性

(1)周期函数：对于函数*y*＝*f*(*x*)，如果存在一个非零常数*T*，使得当*x*取定义域内的任何值时，都有*f*(*x*＋*T*)＝*f*(*x*)，那么就称函数*y*＝*f*(*x*)为周期函数，称*T*为这个函数的周期．

(2)最小正周期：如果在周期函数*f*(*x*)的所有周期中存在一个最小的正数，那么这个最小正数就叫做*f*(*x*)的最小正周期．

3．对称性

(1)偶函数关于*y*轴对称．

(2)奇函数关于原点对称．

(3)若函数*f*(*x*)满足*f*(*a*－*x*)＝*f*(*a*＋*x*)或*f*(*x*)＝*f*(2*a*－*x*)，则函数*f*(*x*)关于直线*x*＝*a*对称．

4．单调性与奇偶性的关系

(1)偶函数在原点两侧的增减性相反．

(2)奇函数在原点两侧的增减性一致．



1．必明辨的2个易错点

(1)奇、偶函数的定义域的特点

若函数*f*(*x*)具有奇偶性，则*f*(*x*)的定义域关于原点对称．反之，若函数的定义域不关于原点对称，则该函数无奇偶性．

(2)并非所有的周期函数都有最小正周期．

2．求解奇偶性与周期性问题应注意以下2点

(1)关注函数的定义域．

(2)若函数*f*(*x*)满足*f*＝－*f*(*x*)或*f*＝或*f*＝－，*T*≠0，则*f*(*x*)是周期函数，且周期为*T*.

**第4课时　二次函数与幂函数**



1．二次函数的解析式的几种常用表达形式

(1)一般式：*f*(*x*)＝*ax*2＋*bx*＋*c*(*a*≠0)；

(2)顶点式：*f*(*x*)＝*a*(*x*－*h*)2＋*k*(*a*≠0)，(*h*，*k*)是顶点；

(3)标根式(或因式分解式)：*f*(*x*)＝*a*(*x*－*x*1)(*x*－*x*2)(*a*≠0)，其中*x*1，*x*2分别是*f*(*x*)＝0的两实根．

(4)重要性质(设*f*(*x*)＝*ax*2＋*bx*＋*c*(*a*≠0)

①对称轴方程为*x*＝－；

②*a*＞0时，抛物线开口向上，函数在上递减，在上递增，*f*(*x*)min＝；

③*a*＜0时，抛物线开口向下，函数在上递增，在上递减，*f*(*x*)max＝；

④*f*(*x*)＝*ax*2＋*bx*＋*c*(*a*≠0)的顶点坐标为.

2．幂函数的定义

(1)定义：形如*y*＝*xα*(*α*∈**R**)的函数称为幂函数，其中*x*是自变量，*α*为常数．

(2)五种常见幂函数的图象与性质

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 函数  特征  性质 | *y*＝*x* | *y*＝*x*2 | *y*＝*x*3 | *y*＝*x* | *y*＝*x*－1 |
| 图象 |  |  |  |  |  |
| 定义域 | **R** | **R** | **R** | {*x*|*x*≥0} | {*x*|*x*≠0} |
| 值域 | **R** | {*y*|*y*≥0} | **R** | {*y*|*y*≥0} | {*y*|*y*≠0} |
| 奇偶性 | 奇 | 偶 | 奇 | 非奇非偶 | 奇 |
| 单调性 | 增 | (－∞，0)减  (0，＋∞)增 | 增 | 增 | (－∞，0)和  (0，＋∞)减 |
| 公共点 | (1,1) | | | | |



1．必明辨的2个易错点

(1)求闭区间上二次函数的最值要结合图象，不可直接代入区间端点产生．

(2)幂函数*y*＝*xα*，当*α*＝0或*α*＝1时的图象都是一条直线的说法是不正确的；因为幂函数*f*(*x*)＝*x*0(*x*≠0)的图象，是直线除去一个点．

2．求解二次函数与幂函数问题时常用方法

(1)二次函数*y*＝*ax*2＋*bx*＋*c*(*a*≠0)中三个字母的各自使命．*a*决定了开口方向；*a*，*b*共同决定对称轴位置；*c*决定与*y*轴的交点位置．

(2)用待定系数法求二次函数解析式．

(3)幂函数在第一象限的单调性决定了幂指数的符号，反之亦然

**第5课时　指数函数**



1．根式的概念

如果*xn*＝*a*，那么*x*叫做*a*的*n*次方根．当*n*为奇数时，正数的*n*次方根是一个正数，负数的*n*次方根是一个负数；当*n*为偶数时，正数的*n*次方根有两个，它们互为相反数．

2．有理指数幂

(1)分数指数幂的表示

①正数的正分数指数幂是：*a*＝(*a*＞0，*m*，*n*∈**N**\*，*n*＞1)．

②正数的负分数指数幂是：*a*－＝＝(*a*＞0，*m*，*n*∈**N**\*，*n*＞1)．

(2)有理指数幂的运算性质

①*aras*＝*ar*＋*s*(*a*＞0，*r*，*s*∈**Q**)．

②(*ar*)*s*＝*ars*(*a*＞0，*r*，*s*∈**Q**)．

③(*ab*)*r*＝*arbr*(*a*＞0，*b*＞0，*r*∈**Q**)．

3．指数函数的图象及其性质

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *a*>1 | 0<*a*<1 |
| 图象 |  |  |
| 定义域 | **R** | |
| 值域 | (0，＋∞) | |
| 性质 | 过定点(0,1)，即*x*＝0时，*y*＝1 | |
| 当*x*>0时，*y*>1；  当*x*<0时，0<*y*<1 | 当*x*>0时，0<*y*<1；  当*x*<0时，*y*>1 |
| 在(－∞，＋∞)上是增函数 | 在(－∞，＋∞)上是减函数 |

温馨提示：指数函数的单调性是由底数*a*的大小决定的，因此解题时通常对底数*a*按0＜*a*＜1和*a*＞1进行分类讨论．

**第6课时　对数函数**



1．对数的概念及运算法则

(1)对数的定义，如果*ax*＝*N*(*a*>0，且*a*≠1)，那么数*x*叫做以*a*为底*N*的对数，记作*x*＝log*aN*，其中*a*叫做对数的底数，*N*叫做真数．

(2)对数的常用关系式

①对数恒等式：*a*＝*N*(*a*>0且*a*≠1，*N*>0)；

②换底公式：log*ab*＝(*b*>0，*a*、*c*均大于0且不等于1)．

(3)对数的运算法则

如果*a*>0，且*a*≠1，*M*>0，*N*>0，那么

①log*a*(*M*·*N*)＝log*aM*＋log*aN*；

②log*a*＝log*aM*－log*aN*；

③log*aMn*＝*n*log*aM*(*n*∈**R**)；

④log*amMn*＝log*aM*(*n*∈**R**，*m*≠0)．

2．对数函数的图象与性质

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *a*>1 | 0<*a*<1 |
| 图象 |  |  |
| 定义域 | (0，＋∞) | |
| 值域 | **R** | |
| 性质 | 过定点(1,0) | |
| 当*x*>1时，*y*>0；当0<*x*<1时，*y*<0 | 当*x*>1时，*y*<0；当0<*x*<1时，*y*>0 |
| 在(0，＋∞)上是增函数 | 在(0，＋∞)上是减函数 |

温馨提示：

解决与对数函数有关的问题时易漏两点：

(1)函数的定义域；

(2)对数底数的取值范围．

3．反函数

指数函数*y*＝*ax*(*a*>0且*a*≠1)与对数函数*y*＝log*ax*(*a*>0且*a*≠1)互为反函数，它们的图象关于直线*y*＝*x*对称．



1．必明辨的3个易错点

(1)对数恒等式是有条件的等式．

(2)与对数函数复合的复合函数求单调区间时，容易忽略定义域．

(3)忽略对底数的讨论．

2．比较两个对数大小的3种方法

(1)底数大于1，真数大于1，或底数大于0小于1，真数大于0小于1称为相同，此时，函数值大于0.否则为不同，函数值小于0.简记为“相同大于零，不同小于零”．

(2)在比较真数相同，底数不同的两个对数大小时，若底数大于1，称“递增”(大于0小于1，称“递减”)．真数大于1(或大于0小于1)，称“真底同(异)向”，此时符合“递增又同向”便有“底小值居上”．注意若出现“增”与“同”改一个字，结论中的“上”要改为“下”．改两个字则结论不变．

(3)利用对数函数的图象及图象性质解题．

**第7课时　函数的图象及其应用**



1．作图

作函数的图象有两条基本途径：

(1)描点法：其基本步骤是列表、描点、连线．首先①确定函数的定义域，②化简函数解析式，③讨论函数的性质(奇偶性、单调性、周期性、对称性、值域)；其次列表(尤其注意特殊性，如最大值、最小值、与坐标轴的交点)；最后描点，连线．

(2)图象变换法，常见的四种变换：平移变换(左加、右减、上加、下减)；伸缩变换；翻折变换；对称变换．

2．识图

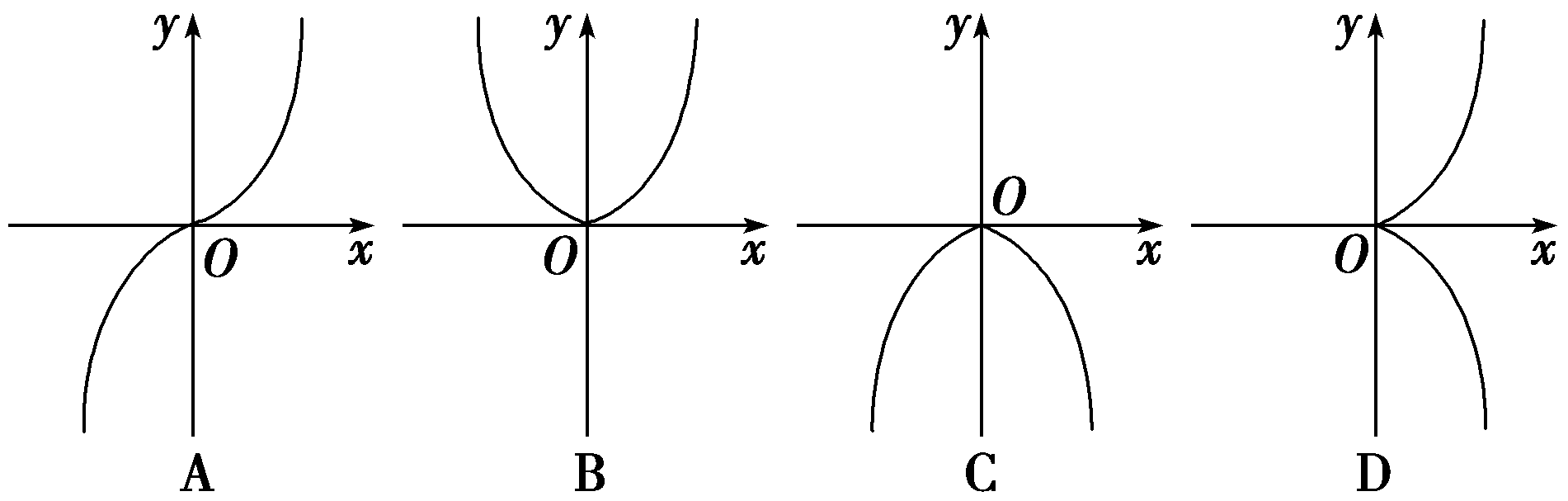
绘图、识图是学习函数、应用函数的一项重要基本功，是数形结合解题方法的基础．识图要首先把握函数的定义域、值域、单调区间、奇偶性或图象的对称特征、周期性、与坐标轴的交点，另外有无渐近线，正、负值区间等都是识图的重要方面，要注意函数解析式中含参数时，怎样由图象提供信息来确定这些参数．

3．用图

函数图象形象地显示了函数的性质，为研究数量关系提供了“形”的直观性，它是探求解题途径，获得问题结果的重要工具．要重视数形结合解题的思想方法．

[做一做]

1．(1)函数*y*＝*x*|*x*|的图象大致是(　　)



(2)函数*y*＝－e*x*的图象(　　)

A．与*y*＝e*x*的图象关于*y*轴对称

B．与*y*＝e*x*的图象关于坐标原点对称

C．与*y*＝e－*x*的图象关于*y*轴对称

D．与*y*＝e－*x*的图象关于坐标原点对称

解析：(1)选A.*y*＝*x*|*x*|＝

(2)选D.由题意知D项正确．



1．必明辨的2个易错点

(1)函数*y*＝*f*(*x*)的图象关于原点对称与两函数的图象关于原点对称是有区别的．函数*y*＝*f*(*x*)的图象关于某直线对称与两函数的图象关于某直线对称也是有区别的．

(2)利用图象求解问题很直观、很方便，但要看到有时是不准确的．

**第8课时　函数与方程**



1．函数的零点

(1)函数零点的定义

对于函数*y*＝*f*(*x*)(*x*∈*D*)，把使*f*(*x*)＝0成立的实数*x*叫做函数*y*＝*f*(*x*)(*x*∈*D*)的零点．

(2)几个等价关系

方程*f*(*x*)＝0有实数根⇔函数*y*＝*f*(*x*)的图象与*x*轴有交点⇔函数*y*＝*f*(*x*)有零点．

(3)函数零点的判定(零点存在性定理)

如果函数*y*＝*f*(*x*)在区间[*a*，*b*]上的图象是连续不断的一条曲线，并且有*f*(*a*)·*f*(*b*)<0，那么函数*y*＝*f*(*x*)在区间(*a*，*b*)内有零点，即存在*c*∈(*a*，*b*)，使得*f*(*c*)＝0，这个*c*也就是*f*(*x*)＝0的根．

2．二次函数*y*＝*ax*2＋*bx*＋*c*(*a*＞0)的图象与零点的关系

(1)*Δ*＞0，图象与*x*轴有两个交点，则函数有两个零点．

(2)*Δ*＝0，图象与*x*轴相切，则函数有一个零点．

(3)*Δ*＜0，图象与*x*轴没有交点，则函数没有零点．

3．二分法的定义

对于在区间[*a*，*b*]上连续不断且*f*(*a*)·*f*(*b*)<0的函数*y*＝*f*(*x*)，通过不断地把函数*f*(*x*)的零点所在的区间一分为二，使区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到零点近似值的方法叫做二分法．



1．必明辨的2个易错点

(1)若函数不满足零点存在性定理，则该函数不一定没有零点．

(2)用二分法求方程的近似解时，只要区间长度符合精确度的要求，则区间内的任意值都可以作为方程的近似解，为方便，我们将取区间的端点．

2．求函数零点的2种方法

(1)因式分解是求函数零点的最快的方法．

(2)构造函数使其符合零点存在性定理．

提醒：零点存在性定理只是判断零点存在的依据，至于有几个零点，零点是多少，不在判断之列．

**第9课时　函数模型及其应用**



1．几种常见的函数模型

(1)一次函数模型：*f*(*x*)＝*ax*＋*b*(*a*、*b*为常数，*a*≠0)；

(2)二次函数模型：*f*(*x*)＝*ax*2＋*bx*＋*c*(*a*，*b*，*c*为常数，*a*≠0)；

(3)指数函数模型：*f*(*x*)＝*bax*＋*c*(*a*，*b*，*c*为常数，*a*＞0且*a*≠1，*b*≠0)；

(4)对数函数模型：*f*(*x*)＝*b*log*ax*＋*c*(*a*，*b*，*c*为常数，*a*＞0且*a*≠1，*b*≠0)；

(5)幂函数模型：*f*(*x*)＝*axn*＋*b*(*a*，*b*，*n*为常数，*a*≠0，*n*≠0)．

2．三种函数模型的增长特性

(1)指数函数模型，在(0，＋∞)上单调递增时，增长速度越来越快，随*x*值增大，图象与*y*轴接近平行．

(2)对数函数模型，在(0，＋∞)上单调递增时，增长速度越来越慢，随*x*值增大，图象与*x*轴接近平行．

(3)幂函数模型，在(0，＋∞)上单调递增时，增长速度相对平稳，随*n*值变化而不同．



1．必明辨的2个易错点

(1)在借助函数模型处理问题时，容易忽略定义域的取值而出错．

(2)在实际问题中模型的准确性不是十分严格，求解时，要因题而异，不可盲目乱套基本模型．

2．求解函数模型应用问题常用4法

(1)抓常规，乱中找序：模型应用题往往与生活联系密切，无论多么复杂的问题，总存在着生活中的常规现象，抓住它们，就在纷乱的条件中找到了“头序”，问题就能迎刃而解．

(2)抓重点，以纲带目：模型应用题的一大特点是：信息量大、文字叙述较长，有时还会出现很多数据，面对这些信息要善于找主要矛盾、抓重点，以纲带目．

(3)抓概念，深入理解：模型应用题一般都会伴有新概念、新术语的产生，面对这些新概念、新术语，我们必须抓住它们，通过对它们的全面分析，使我们能准确的把握题意，从而进行正确求解．

(4)用草图，显现关系：一个应用问题往往涉及较多数据，面对众多数据及这些数据间错综复杂的制约关系，画个草图，用草图，显现关系，问题会渐趋明朗．

**第10课时　变化率与导数、导数的计算**



1．导数

(1)函数*y*＝*f*(*x*)从*x*1到*x*2的平均变化率为，若Δ*x*＝*x*2－*x*1，Δ*y*＝*f*(*x*2)－*f*(*x*1)，则平均变化率可表示为.

(2)函数*f*(*x*)在*x*＝*x*0处的导数

①定义

称函数*f*(*x*)在*x*＝*x*0处的瞬时变化率

＝ 为函数*f*(*x*)在*x*＝*x*0处的导数，记作*f*′(*x*0)或*y*′|*x*＝*x*0，即*f*′(*x*0)＝ .

②几何意义

函数*f*(*x*)在点*x*0处的导数*f*′(*x*0)的几何意义是曲线*y*＝*f*(*x*)在点(*x*0，*y*0)处的切线的斜率．相应地，切线方程为*y*－*y*0＝*f*′(*x*0)·(*x*－*x*0)．

2．导数的运算

(1)基本初等函数的导数公式

(*C*)′＝0(*C*为常数)；

(*xα*)′＝*αxα*－1；(sin *x*)′＝cos\_*x*；

(cos *x*)′＝－sin\_*x*；(*ax*)′＝*ax*ln\_*a*；

(e*x*)′＝e*x*；(log*ax*)′＝；

(ln *x*)′＝；

(2)导数运算法则

①[*f*(*x*)±*g*(*x*)]′＝*f*′(*x*)±*g*′(*x*)；

②[*f*(*x*)·*g*(*x*)]′＝*f*′(*x*)*g*(*x*)＋*f*(*x*)*g*′(*x*)；

③[]′＝(*g*(*x*)≠0)．



1．必明辨的2个易错点

(1)*f*′(*x*)与*f*′(*x*0)的区别与联系．

(2)在某点处的切线与过某点的切线的区别与联系．

2．求解变化率与导数的常用方法

(1)用导数的定义求导数，注意①分子自变量的增量，②分母，③取极限过程的变量完全一致，简称为“三合一”．

(2)用两线重合求切线方程．

　求下列函数的导数：

(1)*y*＝(3*x*2－4*x*)(2*x*＋1)；

(2)*y*＝*x*2sin *x*；

(3)*y*＝；

(4)*y*＝*x*tan *x*.

　2.求下列函数的导数：

(1)*y*＝；

(2)*y*＝e*x*ln *x*；

(3)*y*＝3*x*e*x*－2*x*＋e；

(4)*y*＝*x*3e*x*.

**第11课时　导数与函数的单调性、极值**



1．函数的单调性与导数

在区间(*a*，*b*)内，函数的单调性与其导数的正负有如下的关系：

(1)如果*f*′(*x*)＞0，那么函数*y*＝*f*(*x*)在这个区间单调递增；

(2)如果*f*′(*x*)＜0，那么函数*y*＝*f*(*x*)在这个区间单调递减；

(3)如果*f*′(*x*)＝0，那么函数*y*＝*f*(*x*)在这个区间为常数．

注：*f*(*x*)在(*a*，*b*)内可导为此规律成立的一个前提条件．

2．函数极值的概念

设函数*f*(*x*)在点*x*0附近有定义且在点*x*0处连续．

(1)如果在*x*0附近的左侧*f*′(*x*)＞0，右侧*f*′(*x*)＜0，那么*f*(*x*0)是极大值．

(2)如果在*x*0附近的左侧*f*′(*x*)＜0，右侧*f*′(*x*)＞0，那么*f*(*x*0)是极小值．

(3)如果在*x*0附近的左、右两侧导数值同号，那么*f*(*x*0)不是极值．

(4)极大值点、极小值点统称为极值点，极大值、极小值统称为极值．

注：(1)在函数的整个定义域内，函数的极值不一定唯一，在整个定义域内可能有多个极大值和极小值．

(2)极大值与极小值没有必然关系，极大值可能比极小值还小．



1．必明辨的2个易错点

(1)若*f*′(*x*0)＝0，则*x*0未必是极值点．但*x*0是极值点，则*f*′(*x*0)＝0一定成立．

(2)对于在(*a*，*b*)内可导的函数*f*(*x*)来说，*f*′(*x*)＞0是*f*(*x*)在(*a*，*b*)上为递增函数的充分不必要条件；*f*′(*x*)＜0是*f*(*x*)在(*a*，*b*)上为递减函数的充分不必要条件．例如：*f*(*x*)＝*x*3在整个定义域**R**上为增函数，但*f*′(*x*)＝3*x*2，*f*′(0)＝0，所以在*x*＝0处并不满足*f*′(*x*)＞0，即并不是在定义域中的任意一点都满足*f*′(*x*)＞0.

2．牢记导数应用的2类题型

(1)求函数单调性的基本步骤；

(2)求函数极值的基本步骤．

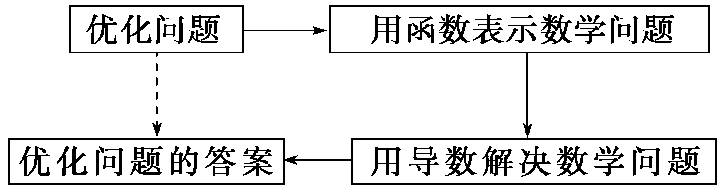
**第12课时　导数与函数的最值及在实际生活中的应用**



1．函数的最值

假设函数y＝f(x)在闭区间[a，b]上的图象是一条连续不间断的曲线，则该函数在[a，b]上一定能够取得最大值与最小值．若函数在(a，b)内是可导的，该函数的最值必在极值点或区间端点处取得．

2．解决优化问题的基本思路





1．必明辨的2个易错点

(1)函数的极值与最值的区别

极值是指某一点附近函数值的比较．因此，同一函数在某一点的极大(小)值，可以比另一点的极小(大)值小(大)；而最大、最小值是指在闭区间[*a*，*b*]上所有函数值的比较，因而在一般情况下，两者是有区别的，极大(小)值不一定是最大(小)值，最大(小)值也不一定是极大(小)值，但如果连续函数在区间(*a*，*b*)内只有一个极值，那么极大值就是最大值，极小值就是最小值．

(2)极值与最值的存在性

闭区间[*a*，*b*]上的连续函数不一定存在极值，但一定有最值．

2．求解导数与函数的最值及在实际生活中的应用问题常用的方法

(1)求函数最值的基本步骤；

(2)实际应用问题——构建数学模型——转化为数学问题——求解数学问题——回到实际问题之中．

**第三章三角函数、解三角函数**

**第1课时　任意角和弧度制及任意角的三角函数**



1．任意角

(1)角的概念的推广：按旋转方向不同分为正角、负角、零角．按终边位置不同分为象限角和轴线角．

(2)终边相同的角：终边与角*α*相同的角可写成*α*＋*k*·360°(*k*∈**Z**)或*α*＋*k*·2π(*k*∈**Z**)．

2．弧度与角度的互化

(1)1弧度的角：长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做1弧度的角，用符号rad表示．

(2)角*α*的弧度数：半径为*r*的圆的圆心角*α*所对弧的长为*l*，那么，角*α*的弧度数的绝对值是|*α*|＝.

(3)角度与弧度的换算

①1°＝ rad；②1 rad＝()°.

(4)弧长、扇形面积的公式，设扇形的弧长为*l*，圆心角大小为*α* rad，半径为*r*，则*l*＝*rα*，扇形的面积为*S*＝*lr*＝*r*2*α*.

3．任意角的三角函数

(1)定义：设角*α*的终边与单位圆交于点*P*(*x*，*y*)，则sin *α*＝*y*，cos *α*＝*x*，tan *α*＝(*x*≠0)．

(2)几何表示：三角函数线可以看作三角函数的几何表示．正弦线的起点都在*x*轴上，余弦线的起点都是原点，正切线的起点都是单位圆与*x*轴正半轴的交点．



1．必明辨的2个易错点

(1)几种角的关系：锐角、小于90°的角、第一象限的角．

(2)两个角的顶点重合、始边重合、终边也重合，但两角不一定相等．它们相差360°的整数倍．

2．牢记2个结论

(1)用“一全正二正弦三正切四余弦”判断三角函数在各个象限内的符号．

(2)将各象限均*n*等分后，从*x*轴正半轴按逆时针方向分别在各区域上标出1,2,3,4，可由*α*所在的象限迅速判断出所在象限的结论．

**第2课时　同角三角函数的基本关系与诱导公式**



1．同角三角函数基本关系式

(1)平方关系：sin2*α*＋cos2*α*＝1，其等价形式为：sin2*α*＝1－cos2*α*，cos2*α*＝1－sin2*α*.

(2)商数关系：＝tan *α*，其等价形式为：sin *α*＝cos\_*α*·tan\_*α*.

2．角的对称

|  |  |
| --- | --- |
| 相关角的终边 | 对称性 |
| *α*与π＋*α* | 关于原点对称 |
| *α*与π－*α* | 关于*y*轴对称 |
| *α*与－*α*(或2π－*α*) | 关于*x*轴对称 |
| *α*与－*α* | 关于直线*y*＝*x*对称 |

3．六组诱导公式

(1)*α*为任意角，分成两类：2*k*π＋*α*，－*α*，π±*α*，与±*α*共六组．

(2)利用诱导公式化简或求值的一般步骤：①负角的三角函数化成正角三角函数．②大于2π的化成[0,2π)内的角的三角函数．③钝角的三角函数化成锐角的三角函数．



1．必明辨的2个易错点

(1)公式记忆不准确出错．

(2)忽视已知角的范围出错．

[练一练]

2．同角三角函数的基本关系与诱导公式灵活应用及简单记法

(1)将教材上的六组诱导公式统一为±*α*形式，其中*k*∈**Z**.简记为“奇变偶不变符号看象限”．

(2)公式可用sin2*α*＋cos2*α*＝1，也可用1＝sin2*α*＋cos2*α*，需根据题意灵活选用．

**第3课时　两角和与差的正弦、余弦和正切公式**



1．两角和与差的正弦、余弦和正切公式

(1)cos(*α*＋*β*)＝cos\_*α*cos\_*β*－sin\_*α*sin\_*β*，

cos(*α*－*β*)＝cos\_*α*cos\_*β*＋sin\_*α*sin\_*β*；

(2)sin(*α*＋*β*)＝sin\_*α*cos\_*β*＋cos\_*α*sin\_*β*，

sin(*α*－*β*)＝sin\_*α*cos\_*β*－cos\_*α*sin\_*β*；

(3)tan(*α*＋*β*)＝，

tan(*α*－*β*)＝.

(*α*，*β*，*α*＋*β*，*α*－*β*均不等于*k*π＋，*k*∈**Z**)

其变形为：tan *α*＋tan *β*＝tan(*α*＋*β*)(1－tan\_*α*tan\_*β*)，

tan *α*－tan *β*＝tan(*α*－*β*)(1＋tan\_*α*tan\_*β*)．

2．二倍角的正弦、余弦和正切公式

(1)sin 2*α*＝2sin\_*α*cos\_*α*；

(2)cos 2*α*＝cos2*α*－sin2*α*＝2cos2*α*－1＝1－2sin2*α*；

(3)tan 2*α*＝(*α*≠＋且*α*≠*k*π＋，*k*∈**Z**)．



1．必明辨的1个易错点

使用公式时必须注意定义域是否改变．

2．利用两角和差公式及二倍角公式时常用的2种方法

(1)凑角法的应用；

(2)公式的各种变形及应**用．**

**第4课时　简单的三角恒等变换**



1．用cos *α*表示sin2，cos2，tan2.(降幂公式)

sin2＝；

cos2＝；

tan2＝.

2．用sin *α*、cos *α*表示sin，cos，tan.(半角公式不要求记忆)

sin＝±；

cos＝±；

tan＝±.



1．必明辨的2个易错点

(1)易忽视各公式成立的条件致误．

(2)注意变换的等价性．

2．简单的三角恒等变换问题常用的2种方法

(1)“切化弦”即正切转化为正、余弦．

(2)化三角函数式为一个角的一个三角函数式．

**第5课时　三角函数的图象和性质**





1．用五点法作正弦函数和余弦函数的简图

(1)正弦函数*y*＝sin *x*，*x*∈[0,2π]的图象中，五个关键点是：(0,0)，，(π，0)，，(2π，0)．

(2)余弦函数*y*＝cos *x*，*x*∈[0,2π]的图象中，五个关键点是：(0,1)，，(π，－1)，，(2π，1)．

2．正弦、余弦、正切函数的图象与性质(下表中*k*∈**Z**)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 函数 | *y*＝sin *x* | *y*＝cos *x* | *y*＝tan *x* |
| 图  象 |  |  |  |
| 定  义  域 | **R** | **R** | {*x*|*x*∈**R**，且  *x*≠*k*π＋} |
| 值  域 | [－1,1] | [－1,1] | **R** |
| 周  期  性 | 2π | 2π | π |
| 奇  偶  性 | 奇函数 | 偶函数 | 奇函数 |
| 单  调  性 | 为增；  为减 | [2*k*π－π，2*k*π]为增；[2*k*π，2*k*π＋π]为减 | 为增 |
| 对  称  中  心 | (*k*π，0) |  |  |
| 对  称  轴 | *x*＝*k*π＋ | *x*＝*k*π | 无 |

3．周期性

(1)一般地，对于函数*f*(*x*)，如果存在一个非零常数*T*，使得当*x*取定义域内的每一个值时，都有*f*(*x*＋*T*)＝*f*(*x*)，那么函数*f*(*x*)就叫做周期函数，非零常数*T*叫做这个函数的周期．

(2)对于一个周期函数*f*(*x*)，如果在它所有的周期中存在一个最小的正数，那么这个最小正数就叫做*f*(*x*)的最小正周期．



1．必明辨的2个易错点

(1)正弦函数*f*(*x*)＝sin(*ωx*＋*φ*)的周期是，而正切函数*f*(*x*)＝tan(*ωx*＋*φ*)的周期是.

(2)求闭区间内函数的最大值与最小值时，一定要结合图象，区间端点往往不是最值点．

2．求解有关三角函数的图象和性质问题时必会的2种能力

(1)熟练作出*y*＝sin *x*，*y*＝cos *x*，*y*＝tan *x*的简图．

(2)掌握正弦、余弦、正切函数的性质．

**第6课时　函数*y*＝*A*sin(*ωx*＋*φ*)的图象及三角函数模型的简单应用**



1．*y*＝*A*sin(*ωx*＋*φ*)的有关概念

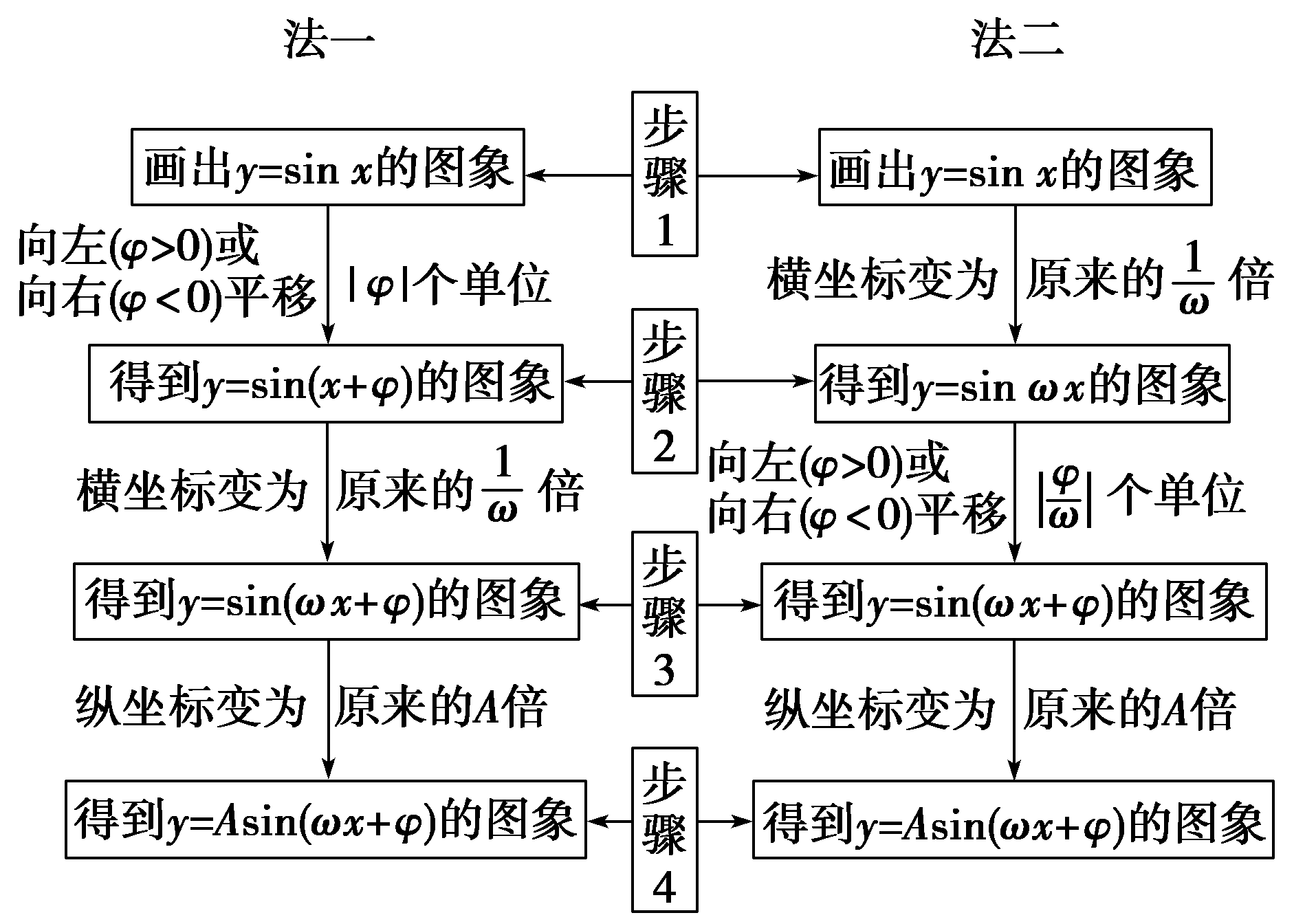
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *y*＝*A*sin(*ωx*＋*φ*)  (*A*>0，*ω*>0)，*x*∈**R** | 振幅 | 周期 | 频率 | 相位 | 初相 |
| *A* | *T*＝ | *f*＝＝ | *ωx*＋*φ* | *φ* |

2．用五点法画*y*＝*A*sin(*ωx*＋*φ*)一个周期内的简图

用五点法画*y*＝*A*sin(*ωx*＋*φ*)一个周期内的简图时，要找五个关键点，如下表所示.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | － | － | － | － | － |
| *ωx*＋*φ* | 0 |  | π |  | 2π |
| *y*＝*A*sin(*ωx*＋*φ*) | 0 | *A* | 0 | －*A* | 0 |

3．函数*y*＝sin *x*的图象变换得到*y*＝*A*sin(*ωx*＋*φ*)(*A*＞0，*ω*＞0)的图象的步骤



4．图象的对称性

函数*y*＝*A*sin(*ωx*＋*φ*)(*A*>0，*ω*>0)的图象是轴对称也是中心对称图形，具体如下：

(1)函数*y*＝*A*sin(*ωx*＋*φ*)的图象关于直线*x*＝*xk*(其中*ωxk*＋*φ*＝*k*π＋，*k*∈**Z**)成轴对称图形．

(2)函数*y*＝*A*sin(*ωx*＋*φ*)的图象关于点(*xk,*0)(其中*ωxk*＋*φ*＝*k*π，*k*∈**Z**)成中心对称图形．



1．必明辨的2个易错点

(1)求函数*f*(*x*)＝sin(*ωx*＋*φ*)(*ω*＜0)的单调区间，要首先利用诱导公式，将*x*的系数转化为正数后求解．

(2)初相变换与周期变换的顺序不同，平移的距离往往也不同．

[练一练]

2．解函数*y*＝*A*sin(*ωx*＋*φ*)的图象及三角函数模型的简单应用问题常用的方法

(1)“五点法”作函数*y*＝*A*sin(*ωx*＋*φ*)(*A*＞0，*ω*＞0)的图象．

(2)由*y*＝sin *x*的图象变换得到*y*＝*A*sin(*ωx*＋*φ*)(*A*＞0，*ω*＞0)的图象，由于周期变换、初相变换与振幅变换三种顺序不同将产生的方式不同．

**第7课时　正弦定理和余弦定理**



1．正弦定理

＝＝＝2*R*(*R*为△*ABC*外接圆半径)

(1)边化角形式：*a*＝2*R*sin\_*A*，*b*＝2*R*sin\_*B*，*c*＝2*R*sin\_*C*.

(2)角化边形式：sin *A*＝，sin *B*＝，sin *C*＝.

(3)边角基本关系式：

①*a*∶*b*∶*c*＝sin\_*A*∶sin\_*B*∶sin\_*C*；

②＝.

2．余弦定理

(1)求边：*a*2＝*b*2＋*c*2－2*bc*cos\_*A*；*b*2＝*c*2＋*a*2－2*ac*cos\_*B*；*c*2＝*a*2＋*b*2－2*ab*cos\_*C*.

(2)求角

cos *A*＝；cos *B*＝；

cos *C*＝.

3．三角形面积公式

*S*△*ABC*＝*ab*sin *C*＝*bc*sin *A*＝*ac*sin *B*.



1．必明辨的2个易错点

(1)应用正弦定理已知两边和其中一边对角求另一边对角时，容易忽视解的判断．

(2)在判断三角形的形状时，等式两边一般不要约去因式，防止漏解．

2．牢记3个结论

(1)三角形的内角和定理及由此产生的三角关系，如sin(*A*＋*B*)＝sin *C*；

cos(*A*＋*B*)＝－cos *C*.

(2)内角*A*，*B*，*C*成等差数列⇔*B*＝60°.

(3)两边之和大于第三边，两边之差小于第三边．

**第8课时　正弦定理和余弦定理的应用举例**



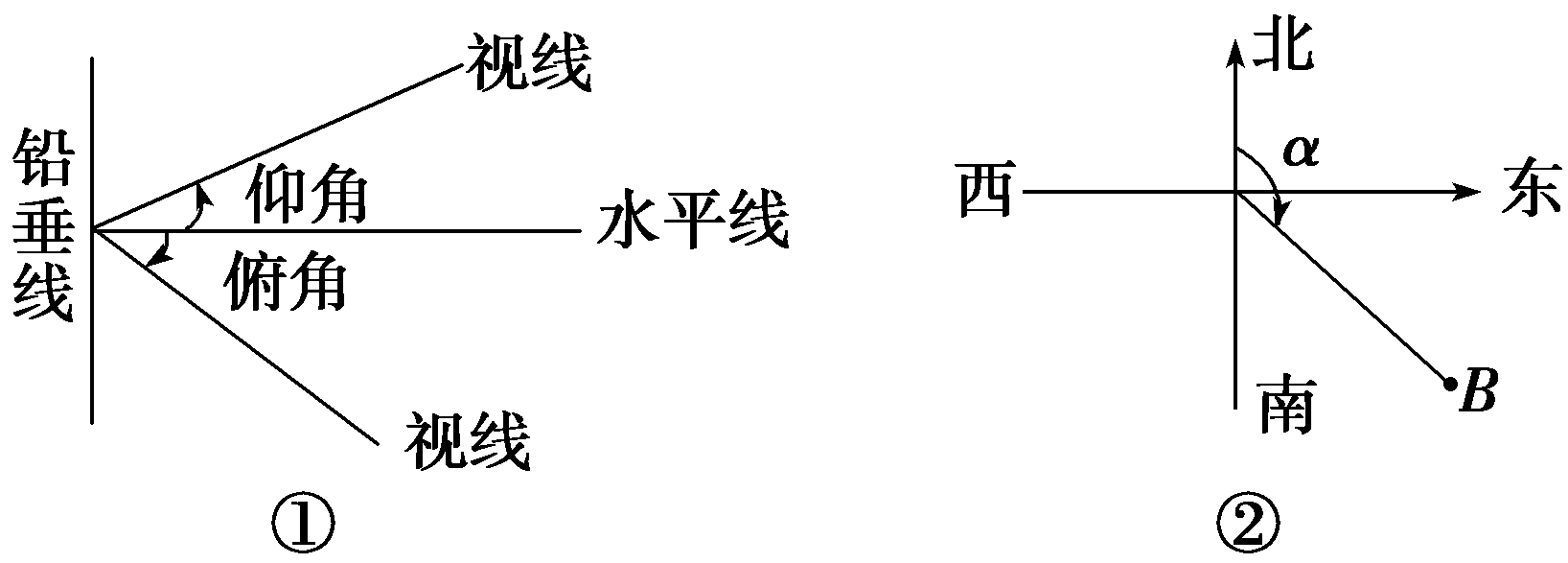
1．用正弦定理和余弦定理解三角形的常见题型

测量距离问题、高度问题、角度问题、计算面积问题、航海问题、物理问题等．

2．实际问题中的常用角

(1)仰角和俯角

在视线和水平线所成的角中，视线在水平线上方的角叫仰角，在水平线下方的角叫俯角(如图①)．

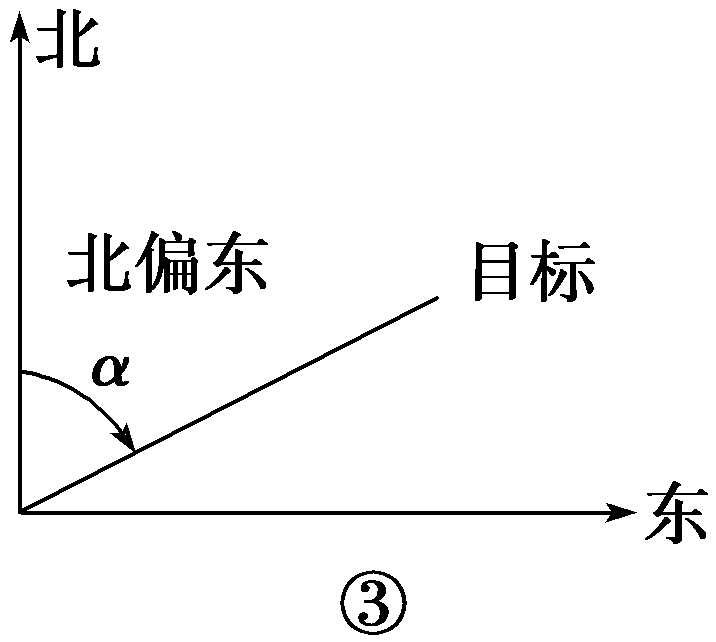


(2)方位角

从正北方向顺时针转到目标方向线的角(如图②，*B*点的方位角为*α*)．

(3)方向角

相对于某一正方向的角(如图③)．



①北偏东*α*：指从正北方向顺时针旋转*α*到达目标方向；

②东北方向：指北偏东45°；

③其他方向角类似．

(4)坡度：坡面与水平面所成的二面角的正切值．



1．必明辨的2个易错点

(1)将实际问题转化为解三角形问题后，忽视各变量的范围要受实际问题的制约这一因素．

(2)涉及速度与距离时，注意单位是否一致．

2．解三角形应用题的一般步骤

(1)阅读理解题意，弄清问题的实际背景，明确已知与未知，理清量与量之间的关系．

(2)根据题意画出示意图，将实际问题抽象成解三角形问题的模型．

(3)根据题意选择正弦定理或余弦定理求解．

(4)将三角形问题还原为实际问题，注意实际问题中的有关单位问题、近似计算的要求等．

**第四章平面向量、数系的扩充与复数的引入**

**第1课时　向量的概念及线性运算**



1．向量的有关概念

(1)向量：既有大小又有方向的量．向量的大小叫做向量的长度(或模)．

(2)零向量：长度为0的向量，其方向是任意的．

(3)单位向量：长度等于1个单位的向量．

(4)平行向量：方向相同或相反的非零向量(也叫共线向量)．

(5)相等向量：长度相等且方向相同的向量．

(6)相反向量：长度相等且方向相反的向量．

2．向量的加法与减法

(1)加法

①法则：服从三角形法则和平行四边形法则(注意共线向量运算法则)．

②性质：***a***＋***b***＝***b***＋***a***(交换律)；

(***a***＋***b***)＋***c***＝***a***＋(***b***＋***c***)(结合律)；

***a***＋00 ***a***＝***a***.

(2)减法：减法与加法互为逆运算，服从三角形法则．

3．实数与向量的积

(1)|*λ****a***|＝|*λ*||***a***|.

(2)当λ＞0时，λ***a***与***a***的方向相同；当*λ*＜0时，*λ****a***与***a***的方向相反；当*λ*＝0时，*λ****a***＝0.

(3)运算律：设*λ*，*μ*∈**R**，则：

①*λ*(*μ* ***a***)＝(*λμ*)***a***；

②(*λ*＋*μ*)***a***＝*λ****a***＋*μ* ***a***；

③*λ*(***a***＋***b***)＝*λ****a***＋*λ****b***.

4．两个向量共线定理

向量***b***与非零向量***a***共线的充要条件是有且只有一个实数*λ*，使得***b***＝*λ****a***.



1．必明辨的3个易错点

(1)向量平行不具有传递性．

(2)实数零与零向量容易混淆．

(3)向量与有向线段的区别与联系．

2．求解向量的概念及线性运算问题必牢记的2类知识点

(1)准确地理解基本概念；

(2)两向量共线的充要条件与两向量不共线的充要条件．

**第2课时　平面向量基本定理及坐标表示**



1．平面向量基本定理

定理：如果***e***1、***e***2是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任意向量***a***，有且只有一对实数*λ*1，*λ*2，使***a***＝*λ*1***e***1＋*λ*2***e***2.其中不共线的向量***e***1、***e***2叫做表示这一平面内所有向量的一组基底．

2．平面向量的坐标表示

(1)在平面直角坐标系中，分别取与*x*轴、*y*轴方向相同的两个单位向量***i***，***j***作为基底，对于平面内的一个向量***a***，存在唯一的有序数对(*x*，*y*)，使***a***＝*x****i***＋*y****j***，把有序数对(*x*，*y*)叫做向量***a***的坐标，记作***a***＝(*x*，*y*)，其中*x*叫做***a***在*x*轴上的坐标，*y*叫做***a***在*y*轴上的坐标．

(2)设＝*x****i***＋*y****j***，则向量的坐标就是终点*A*的坐标，即若＝(*x*，*y*)，则*A*点坐标为(*x*，*y*)，反之亦成立(*O*是坐标原点)．

3．平面向量的坐标运算

设***a***＝(*x*1，*y*1)，***b***＝(*x*2，*y*2)，其中***b***≠0，

(1)加法、减法、数乘、模用坐标表示

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 向量 | ***a***＋***b*** | ***a***－***b*** | *λ****a*** | |***a***| |
| 坐标 | (*x*1＋*x*2，*y*1＋*y*2) | (*x*1－*x*2，*y*1－*y*2) | (*λx*1，*λy*1) |  |

(2)平面向量共线的坐标表示

***a***∥***b***⇔***a***＝*λ****b***⇔*x*1*y*2－*x*2*y*1＝0.

(3)向量坐标的求法

已知*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，则＝(*x*2－*x*1，*y*2－*y*1)，

||＝.



1．必明辨的2个易错点

(1)忽视共线多样性致误．

(2)只有当向量的起点是坐标原点时，向量对应的坐标才是终点对应的坐标．

2．求解平面向量基本定理及坐标表示问题时应注意的2点

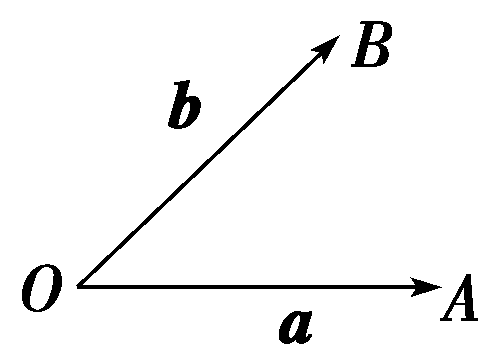
(1)在用已知向量表示未知向量时，首先要抓住基底，围绕基底展开．

(2)在已知两点求向量时，注意用终点减去起点．

**第3课时　平面向量的数量积及应用举例**



1．定义

(1)两个向量的夹角

已知两个非零向量***a***和***b***，作＝***a***，＝***b***，则∠*AOB*称作向量***a***与向量***b***的夹角，记作〈***a***，***b***〉．

(2)平面向量的数量积的定义

|***a***||***b***|cos〈***a***，***b***〉叫做向量***a***和***b***的数量积(或内积)，记作***a***·***b***＝|***a***||***b***|cos〈***a***，***b***〉．可见，***a***·***b***是实数，可以等于正数、负数、零．其中|***a***|cos *θ*(|***b***|cos *θ*)叫做向量***a***在***b***方向上(***b***在***a***方向上)的投影．

2．性质

(1)向量数量积的运算律

①***a***·***b***＝***b***·***a***(交换律)；

②(***a***＋***b***)·***c***＝***a***·***c***＋***b***·***c***(分配律)；

③(*λ****a***)·***b***＝*λ*(***a***·***b***)＝***a***·(*λ****b***)(数乘结合律)．

(2)平面向量数量积的性质

已知非零向量***a***＝(*a*1，*a*2)，***b***＝(*b*1，*b*2)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 性质 | 几何表示 | 坐标表示 |
| 定义 | ***a·b***＝|***a***||***b***|cos〈***a***，***b***〉 | ***a·b***＝*a*1*b*1＋*a*2*b*2 |
| 模 | ***a·a***＝|***a***|2或|***a***|  ＝ | |***a***|＝ |
| ***a***⊥***b***  的充  要条件 | ***a·b***＝0 | *a*1*b*1＋*a*2*b*2＝0 |
| 夹角 | cos〈***a***，***b***〉＝  (|***a***||***b***|≠0) | cos〈***a***，***b***〉＝ |
| |***a·b***|与  |***a***||***b***|的  关系 | |***a·b***|≤|***a***||***b***| | |*a*1*b*1＋*a*2*b*2|≤  · |



1．必明辨的3个易错点

(1)当两向量的起点不重合时求两向量的夹角，要对其中一个向量进行平移，使起点重合．

(2)向量夹角为锐角是两向量的数量积大于零的充分不必要条件. 向量夹角为钝角是两向量的数量积小于零的充分不必要条件．

(3)实数的运算律在向量运算中不一定都适合(如：乘法的结合律)．

2．求解平面向量的数量积的应用问题时常用的方法

(1)在求解应用问题时，要善于根据图形特点建立直角坐标系；

(2)在求解有关最值问题时，要善于引入辅助角，将向量问题转化为三角问题处理．

**第4课时　数系的扩充与复数的引入**



1．复数的概念

(1)复数：形如a＋b*i*(a，b∈**R**)的数，其中i叫做虚数单位，*a*和*b*分别叫做它的实部和虚部．

(2)复数相等：*a*＋*b*i＝*c*＋*d*i⇔*a*＝*c*且*b*＝*d*(*a*，*b*，*c*，*d*∈**R**)．

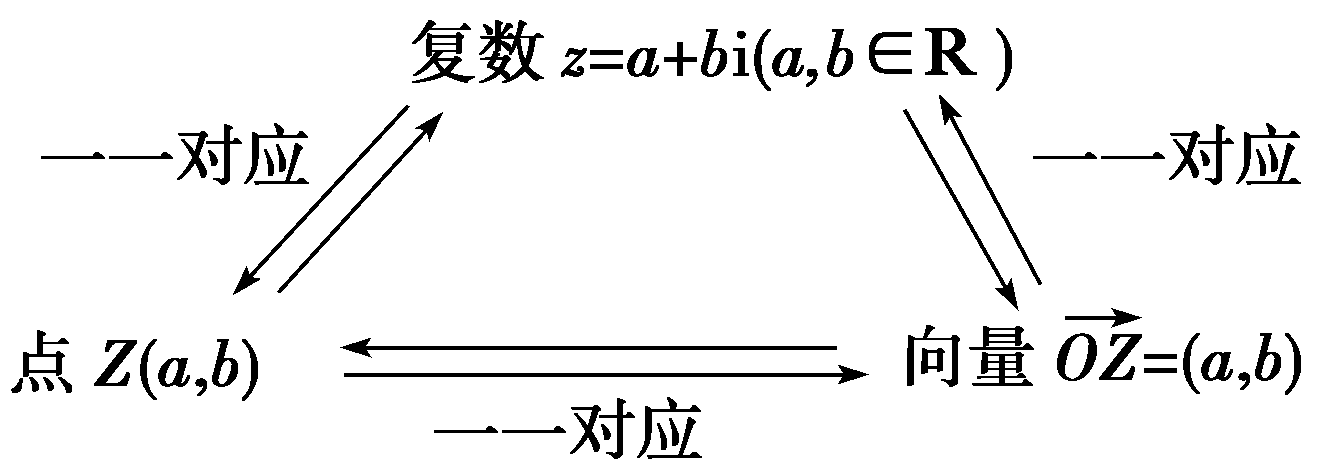
(3)共轭复数：*a*＋*b*i与*c*＋*d*i共轭⇔*a*＝*c*，*b*＝－*d*(*a*，*b*，*c*，*d*∈**R**)．

(4)复数的分类

2．复数的几何意义

(1)复平面：建立直角坐标系来表示复数的平面，叫做复平面，横轴叫做实轴，竖轴叫做虚轴．实轴上的点都表示实数；除原点外，虚轴上的点都表示纯虚数．

(2)复数、点与向量的对应关系



(3)复数的模：向量的模叫做复数*z*＝*a*＋*b*i的模，记作|*z*|或|*a*＋*b*i|，即|*z*|＝|*a*＋*b*i|＝.

3．复数的运算

(1)复数的加、减、乘、除运算法则

设*z*1＝*a*＋*b*i，*z*2＝*c*＋*d*i(*a*，*b*，*c*，*d*∈**R**)，则

①加法：*z*1＋*z*2＝(*a*＋*b*i)＋(*c*＋*d*i)＝(*a*＋*c*)＋(*b*＋*d*)i；

②减法：*z*1－*z*2＝(*a*＋*b*i)－(*c*＋*d*i)＝(*a*－*c*)＋(*b*－*d*)i；

③乘法：*z*1·*z*2＝(*a*＋*b*i)·(*c*＋*d*i)＝(*ac*－*bd*)＋(*ad*＋*bc*)i；

④除法：＝＝

＝(*c*＋*d*i≠0)．

(2)复数加法的运算律

复数的加法满足交换律、结合律，即对任何*z*1、*z*2、*z*3∈**C**，有：*z*1＋*z*2＝*z*2＋*z*1，(*z*1＋*z*2)＋*z*3＝*z*1＋(*z*2＋*z*3)．

**第五章数列**

**第1课时　数列的概念与简单表示法**



1．数列的定义

数列是按一定次序排成的一列数，从函数观点看，数列是定义域为正整数集(或它的有限子集)，当自变量*n*从1开始依次取正整数时所对应的一列函数值*f*(1)，*f*(2)，…，*f*(*n*)，….

2．数列的分类

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 分类原则 | 类型 | | 满足条件 | |
| 按项数  分类 | | 有穷数列 | 项数有限 | |
| 无穷数列 | 项数无限 | |
| 按项与项间的大小关系分类 | | 递增数列 | *an*＋1>*an* | 其中  *n*∈**N**\* |
| 递减数列 | *an*＋1<*an* |
| 常数列 | *an*＋1＝*an* |
| 摆动数列 | 从第二项起，有些项大于它的前一项，有些项小于它的前一项 | |

3．数列与函数的关系

(1)从函数观点看，数列可以看成是以正整数集**N**\*(或**N**\*的有限子集{1,2,3，…，*n*})为定义域的函数*an*＝*f*(*n*)，当自变量按照从小到大的顺序依次取值时所对应的一列函数值．

(2)数列同函数一样有解析法、图象法、列表法三种表示方法．

4．数列的通项公式

如果数列{*an*}的第*n*项*an*与序号*n*之间的关系可以用一个公式*an*＝*f*(*n*)来表示，那么这个公式叫做这个数列的通项公式．



1．必明辨的2个易错点

(1)在已知前有限项时，如果数列通项公式能够写出，通项公式可能不唯一．

(2)易在应用公式*an*＝忘记*n*＝1时的情形．

2．求通项公式常见的两种类型

(1)用叠加法、叠积法求数列的通项公式．

(2)应用*an*与*Sn*的关系推出关于*an*(或*Sn*)的递推关系．

**第2课时　等差数列及其前*n*项和**



1．等差数列的基本问题

(1)定义

如果一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，那么这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做等差数列的公差，通常用字母*d*表示，定义的表达式为*an*＋1－*an*＝*d*.

(2)通项公式

如果等差数列{*an*}的首项为*a*1，公差为*d*，那么通项公式为*an*＝*a*1＋(*n*－1)*d*＝*am*＋(*n*－*m*)*d*.

推导方法：累加法*an*＝(*an*－*an*－1)＋(*an*－1－*an*－2)＋…＋(*a*2－*a*1)＋*a*1.

(3)等差中项

如果*a*，*A*，*b*成等差数列，那么*A*叫做*a*与*b*的等差中项且*A*＝.

(4)前*n*项和公式*Sn*＝*na*1＋*d*＝.

推导方法：倒序相加法．

(5)用函数观点认识等差数列(其中*d*≠0)

①*an*＝*nd*＋(*a*1－*d*)(一次函数)．

②*Sn*＝*n*2＋(*a*1－)*n*(常数项为零的二次函数)．

2．等差数列的性质

已知数列{*an*}是等差数列，*Sn*是其前*n*项和．

(1)下标和与项的和的关系

若*m*＋*n*＝*p*＋*q*，则*am*＋*an*＝*ap*＋*aq*.

特别地：若*m*＋*n*＝2*p*，则*am*＋*an*＝2*ap*.

(2)①在等差数列{*an*}中，*m*、*n*∈**N**\*，则*am*－*an*＝(*m*－*n*)*d*或*am*＝*an*＋(*m*－*n*)*d*或＝*d*.

②在等差数列中，等距离取出若干项也构成一个等差数列，即*an*，*an*＋*m*，*an*＋2*m*，…为等差数列，公差为*md*.

③等差数列的依次*n*项和也构成一个等差数列，即*Sn*，*S*2*n*－*Sn*，*S*3*n*－*S*2*n*，…为等差数列，公差为*n*2*d*.

(3)设等差数列{*an*}的公差为*d*，那么

①*d*>0⇔{*an*}是递增数列，*Sn*有最小值；*d*<0⇔{*an*}是递减数列，*Sn*有最大值；*d*＝0⇔{*an*}是常数数列．

②数列{*λan*＋*b*}仍为等差数列，公差为*λd*.

③若{*bn*}，{*an*}都是等差数列，则{*an*±*bn*}仍为等差数列．

④关于非零等差数列奇数项和与偶数项和的性质

a．若项数为2*n*，则*S*偶－*S*奇＝*nd*，＝.

b．若项数为2*n*－1，则*S*偶＝(*n*－1)*an*，*S*奇＝*nan*，*S*奇－*S*偶＝*an*，＝.

⑤若{*an*}与{*bn*}为等差数列，且前*n*项和分别为*Sn*与*Tn*，则＝.



1．必明辨的2个易错点

(1)在应用*m*＋*n*＝*p*＋*q*，则*am*＋*an*＝*ap*＋*aq*时，要注意两点：①项数相等；②下脚码和相等．仅注意下脚码和相等是不行的．

应用前*n*项和公式求和时，要认清项数，否则容易出错．

2．求等差数列及其前*n*项和问题常用的2种方法

(1)灵活应用等差数列的性质．

(2)应用函数的观点认识等差数列问题，在公差*d*≠0的情况下，通项公式*an*是*n*的一次函数．前*n*项和*Sn*是*n*的二次函数．同时前*n*项和*Sn*还可以转化为也是*n*的一次函数．

**第3课时　等比数列及其前*n*项和**



1．等比数列的基本问题

(1)定义

一般地，如果一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数，那么这个数列就叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的公比，公比通常用字母*q*(*q*≠0)表示．

(2)通项公式

设等比数列{*an*}的首项为*a*1，公比为*q*，则它的通项*an*＝*a*1*qn*－1.

(3)等比中项

如果三个数*a*、*G*、*b*成等比数列，则*G*叫做*a*和*b*的等比中项，那么＝，即*G*2＝*ab*.

(4)前*n*项和公式

*Sn*＝

2．等比数列的性质

(1){*an*}是等比数列⇔{*c*·*an*}是等比数列(*c*≠0)；

(2){*an*}、{*bn*}均为等比数列⇒{*an*·*bn*}、{}是等比数列；

(3){*an*}为等比数列，则＝*qm*－*n*；

(4)若*m*、*n*、*p*、*q*∈**N**\*且*m*＋*n*＝*p*＋*q*，则*am*·*an*＝*ap*·*aq*.特别地，*a*1*an*＝*a*2*an*－1＝*a*3*an*－2＝…；

(5)等间隔的*k*项和(或积)仍成等比数列；

(6)*a*＝*an*－*k*·*an*＋*k*(1≤*k*<*n*，*n*、*k*∈**N**\*)；

(7){*an*}是等比数列，则{*a*}、{}(*an*>0)、{}、{|*an*|}均为等比数列；

(8)非零常数列既是等差数列，也是等比数列；

(9)若{*an*}是等差数列，*b*>0，则{*b*}是等比数列；

若{*an*}是正项等比数列，则{lg *an*}是等差数列；

(10)等比数列{*an*}的单调性

当或时，{*an*}为递增数列，当或时，{*an*}为递减数列；

(11)数列*Sm*，*S*2*m*－*Sm*，*S*3*m*－*S*2*m*，…仍是等比数列(此时{*an*}的公比*q*≠－1)．



1．必明辨的3个易错点

(1)等比数列中的任何一项都不能为零．

(2)当四个数成等比数列求此四数时，设四数分别为*aq*－3，*aq*－1，*aq*，*aq*3时，因公比的局限性容易出错．

(3)应用等比数列前*n*项和公式求和时，要注意看看公比是否有为1的可能．

2．求解等比数列及其前*n*项和问题常用的2种方法

(1)灵活应用等比数列的性质．

(2)注意辅助数列的引入与应用．

**第4课时　数列的综合应用**



1．求数列的前*n*项和的方法

(1)公式法

①等差数列的前*n*项和公式

*Sn*＝＝*na*1＋*d*.

②等比数列的前*n*项和公式

a．当*q*＝1时，*Sn*＝*na*1；

b．当*q*≠1时，*Sn*＝＝.

(2)倒序相加法

如果一个数列{*an*}，首末两端等“距离”的两项的和相等或等于同一常数，那么求这个数列的前*n*项和即可用倒序相加法，如等差数列的前*n*项和即是用此法推导的．

(3)错位相减法

如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的，那么这个数列的前*n*项和即可用此法来求，如等比数列的前*n*项和就是用此法推导的．

(4)裂项相消法

把数列的通项拆成两项之差，在求和时中间的一些项可以相互抵消，从而求得其和．

(5)分组转化法

若一个数列的通项公式是由若干个等差数列或等比数列或可求和的数列组成，则求和时可用分组转化法，分别求和而后相加减．

(6)并项求和法

一个数列的前*n*项和中，可两两结合求解，则称之为并项求和．形如*an*＝(－1)*nf*(*n*)类型，可采用两项合并求解．

2．解答数列的应用问题

(1)解答数列应用题的步骤

①审题——仔细阅读材料，认真理解题意．

②建模——将已知条件翻译成数学(数列)语言，将实际问题转化成数学问题，弄清该数列的特征、要求是什么．

③求解——求出该问题的数学答案．

④还原——将所求结果还原到实际问题中．

(2)数列应用题常见模型

①等差模型：如果增加(或减少)的量是一个固定量时，该模型是等差模型，增加(或减少)的量就是公差．

②等比模型：如果后一个量与前一个量的比是一个固定的数时，该模型是等比模型，这个固定的数就是公比．

③递推数列模型：如果题目中给出的前后两项之间的关系不固定，随项的变化而变化时，应考虑是*an*与*an*＋1之间的递推关系，还是*Sn*与*Sn*＋1之间的递推关系．



1．必明辨的2个易错点

(1)在使用错位相减法求和时，要注意等比数列的项数，同时注意公比为字母时，对字母进行分类讨论．

(2)在应用分组转化法求和时，对各组和式进行运算，要注意和式中的项的特点．

2．求解数列的综合应用问题常用的2种方法

(1)累加法与累乘法求数列的通项公式．

(2)通过引入新数列处理两种常规类型*an*＋1＝*pan*＋*q*及*an*＋1＝*pan*＋*qan*－1的求解．

**第六章 不等式、推理与证明**

**第1课时　不等关系与不等式**



1．不等式的定义

在客观世界中，量与量之间的不等关系是普遍存在的，我们用数学符号＞、＜、≥、≤、≠连接两个数或代数式以表示它们之间的不等关系，含有这些不等号的式子，叫做不等式．

2．比较两个实数的大小

两个实数的大小是用实数的运算性质来定义的，有*a*－*b*＞0⇔*a*＞*b*；*a*－*b*＝0⇔*a*＝*b*；*a*－*b*＜0⇔*a*＜*b*.另外，若*b*＞0，则有＞1⇔*a*＞*b*；＝1⇔*a*＝*b*；＜1⇔*a*＜*b*.

3．不等式的性质

(1)对称性：*a*＞*b*⇔*b*＜*a*；

(2)传递性：*a*＞*b*，*b*＞*c*⇒*a*＞*c*；

(3)可加性：*a*＞*b*⇒*a*＋*c*＞*b*＋*c*；*a*＞*b*，*c*＞*d*⇒*a*＋*c*＞*b*＋*d*；

(4)可乘性：*a*＞*b*，*c*＞0⇒*ac*＞*bc*；*a*>*b*，*c*<0⇒*ac*<*bc*；

*a*＞*b*＞0，*c*＞*d*＞0⇒*ac*＞*bd*；

(5)可乘方：*a*＞*b*＞0⇒*an*＞*bn*(*n*∈**N**，*n*≥2)；

(6)可开方：*a*＞*b*＞0⇒＞(*n*∈**N**，*n*≥2)．



1．必明辨的2个易错点

(1)同向不等式可以相加，但不能相减．

(2)同向不等式在最小的大于零时，可以相乘，但不能相除．

2．解答不等关系与不等式问题常用方法

(1)比较两数的大小时，可以作差．当两数具有指数幂的形式时，可以作商.

(2)已知不等式组，求代数式取值范围的问题时，使用待定系数法．

**第2课时　一元二次不等式及其解法**



1．一元一次不等式的解法

一元一次不等式*ax*＞*b*(*a*≠0)的解集为

(1)当*a*＞0时，解集为{*x*|*x*＞}．

(2)当*a*＜0时，解集为{*x*|*x*＜}．

2．一元二次不等式与相应的二次函数及一元二次方程的关系如下：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 二次函数 | *Δ*的符号 | 一元二次方程 | 一元二次不等式 | |
|  | *y*＝*ax*2＋*bx*＋*c*(*a*＞0) | *Δ*＝*b*2－4*ac* | *ax*2＋*bx*＋*c*＝0(*a*≠0) | *ax*2＋*bx*＋*c*＞0(*a*＞0) | *ax*2＋*bx*＋*c*<0(*a*＞0) |
| 图象与解 |  | *Δ*＞0 | *x*1＝、*x*2＝ | 不等式解集为{*x*|*x*＜*x*1或*x*＞*x*2} | 不等式解集为{*x*|*x*1＜*x*＜*x*2} |
|  | *Δ*＝0 | *x*1＝*x*2＝－ | 不等式解集为{*x*|*x*≠－，*x*∈**R**} | 不等式解集为∅ |
|  | *Δ*＜0 | 方程无解 | 不等式解集为**R** | 不等式解集为∅ |



1．必明辨的2个易错点

(1)用求根法解一元二次不等式时，要注意二次项系数的符号．

(2)利用换元法转化为一元二次不等式的问题，要注意变量的变化范围．

2．解一元二次不等式问题的2种常见类型

(1)解逆向型问题(即已知不等式的解集，求参数或求解另外的不等式)要结合二次方程的根与系数关系．

(2)恒成立与恒有解问题，往往要结合最值求解．

**第3课时　二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题**



1．二元一次不等式(组)的解集

满足二元一次不等式(组)的*x*和*y*的取值构成的有序数对(*x*，*y*)，叫做二元一次不等式(组)的解，所有这样的有序数对(*x*，*y*)构成的集合称为二元一次不等式(组)的解集．

2．二元一次不等式表示的平面区域

对于在直线*Ax*＋*By*＋*C*＝0同一侧的所有点(*x*，*y*)，式子*Ax*＋*By*＋*C*的符号相同，所以只需在此直线的同一侧取某个特殊点(*x*0，*y*0)作为测试点，由*Ax*0＋*By*0＋*C*的正负即可判断*Ax*＋*By*＋*C*>0表示的是直线*Ax*＋*By*＋*C*＝0哪一侧的平面区域．特别地，当*C*≠0时，常把原点(0,0)作为此特殊点．

3．线性规划的有关概念

(1)把要求最大值或最小值的函数叫做目标函数．

(2)目标函数中的变量所满足的不等式组称为约束条件．

(3)如果目标函数是关于变量的一次函数，则称为线性目标函数．

(4)如果约束条件是关于变量的一次不等式(或等式)，则称为线性约束条件．

(5)在线性约束条件下，求线性目标函数的最大值或最小值问题，称为线性规划问题．

(6)满足线性约束条件的解(*x*，*y*)叫做可行解．由所有可行解组成的集合叫做可行域．

(7)使目标函数达到最大值或最小值的点的坐标，称为问题的最优解．

4．利用图解法解决线性规划问题的一般步骤

(1)作出可行域．将约束条件中的每一个不等式所表示的平面区域作出，找出其公共部分．

(2)作出目标函数的等值线．

(3)确定最优解

①在可行域内平行移动目标函数等值线，最先通过或最后通过的顶点便是最优解对应的点，从而确定最优解．

②利用围成可行域的直线的斜率来判断．若围成可行域的直线*l*1、*l*2、…、*ln*的斜率分别为*k*1<*k*2<…<*kn*，而且目标函数的直线的斜率为*k*，则当*ki*<*k*<*ki*＋1时，直线*li*与*li*＋1相交的点经常是最优解．

(4)将最优解代入目标函数，求出最值．



1．必明辨的2个易错点

(1)目标函数的最值点不一定唯一，即可行域内使目标函数取得最值的点不一定只有一个，也可能有无数个，也可能没有．

(2)当约束条件中含有字母时，作可行域要注意分情况讨论．

2．规划问题常见的两类题型及求解步骤

(1)解常规的线性规划问题的基本步骤是：①作可行域；②作平行线组；③分析取得最值时的直线位置；④求出最值；

(2)非线性规划问题的求解步骤：①准确画出不等式组或特殊不等式所表示的区域；②认识所求最值式子的几何意义；③借助几何意义直观完成求解．

**第4课时　基本不等式**



1．基本不等式：≤

(1)基本不等式成立的条件：*a*>0，*b*>0.

(2)等号成立的条件：当且仅当*a*＝*b*时取等号．

2．常用的几个重要不等式

(1)*a*2＋*b*2≥2*ab*(*a*，*b*∈**R**)；

(2)*ab*≤()2(*a*，*b*∈**R**)；

(3)≥()2(*a*，*b*∈**R**)；

(4)＋≥2(*a*，*b*同号且不为零)．

3．算术平均数与几何平均数

设*a*>0，*b*>0，则*a*，*b*的算术平均数为，几何平均数为，基本不等式可叙述为：两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数．

4．利用基本不等式求最值问题

已知*x*>0，*y*>0，则

(1)如果积*xy*是定值*p*，那么当且仅当*x*＝*y*时，*x*＋*y*有最小值是2.(简记：积定和最小)

(2)如果和*x*＋*y*是定值*p*，那么当且仅当*x*＝*y*时，*xy*有最大值是.(简记：和定积最大)



1．必明辨的2个易错点

(1)应用基本不等式求最值时要注意等号成立的条件．

(2)应用基本不等式求解实际应用问题时，要注意变量的取值范围．

2．利用基本不等式求解应注意以下两点

(1)构造法将表面上看不符合基本不等式的式子转化为可用基本不等式的式子；

(2)在连续使用基本不等式放缩时，要注意不等式的方向必须一致及等号成立的条件一致．

**第5课时　合情推理与演绎推理**



1．推理

(1)定义：推理是根据一个或几个已知的判断来确定一个新的判断的思维过程．

(2)分类：推理一般分为合情推理与演绎推理两类．

2．合情推理

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 归纳推理 | 类比推理 |
| 定义 | 由某类事物的部分对象具有某些特征，推出该类事物的全部对象都具有这些特征的推理，或者由个别事实概括出一般结论的推理 | 由两类对象具有某些类似特征和其中一类对象的某些已知特征，推出另一类对象也具有这些特征的推理 |
| 特点 | 由部分到整体、由个别到一般的推理 | 由特殊到特殊的推理 |
| 一般步骤 | (1)通过观察个别情况发现某些相同性质；(2)从已知的相同性质中推出一个明确的一般性命题(猜想) | (1)找出两类事物之间的相似性或一致性；(2)用一类事物的性质去推测另一类事物的性质，得出一个明确的命题(猜想) |

3．演绎推理

(1)定义：从一般性的原理出发，推出某个特殊情况下的结论，我们把这种推理称为演绎推理；

(2)特点：演绎推理是由一般到特殊的推理；

(3)模式：三段论．

“三段论”是演绎推理的一般模式，包括：

|  |  |
| --- | --- |
| “三段论”的结构 | ①大前提——已知的一般原理； |
| ②小前提——所研究的特殊情况； |
| ③结论——根据一般原理，对特殊情况做出的判断． |
| “三段论”的表示 | ①大前提——*M*是*P*； |
| ②小前提——*S*是*M*； |
| ③结论——*S*是*P*. |

1．必明辨的2个易错点

(1)无论是归纳推理还是类比推理，其产生的结论都不一定是正确的．

(2)应用演绎推理只要大前提正确，推理过程不出错误，结论一定是正确的．

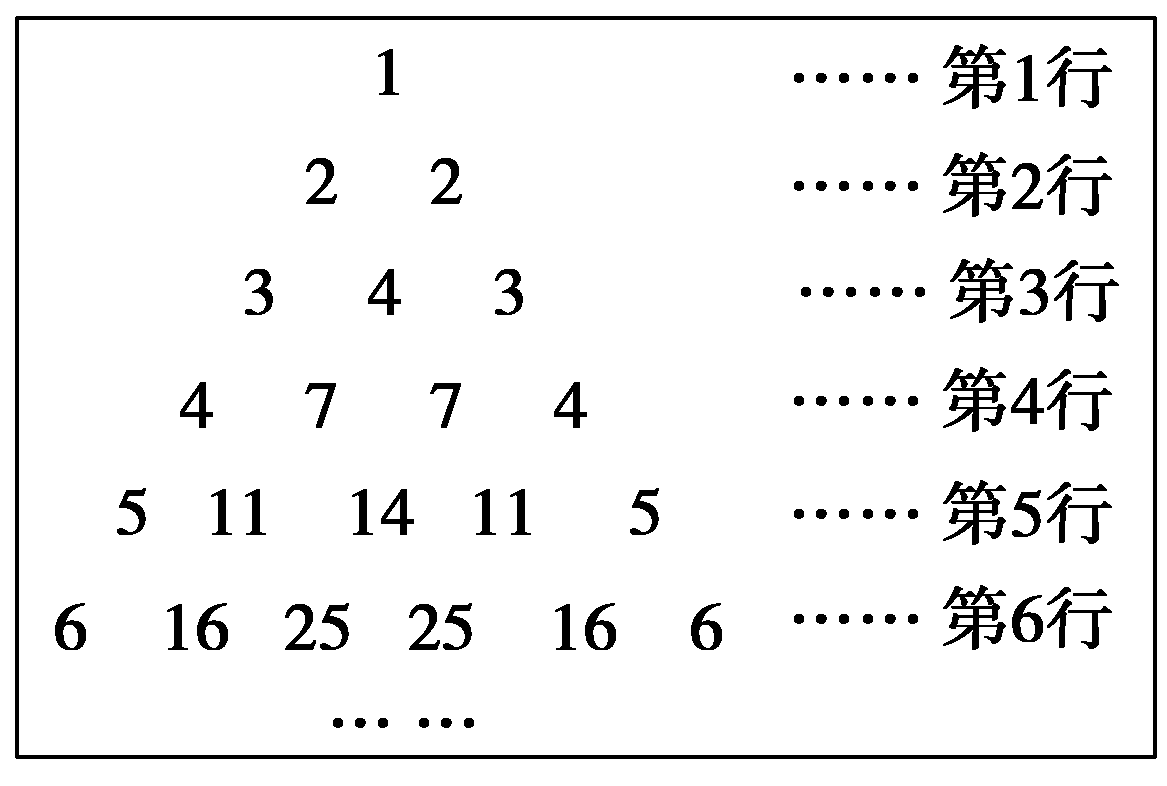
2．求解合情推理与演绎推理问题常用的方法

(1)当面对数表型推理问题时，往往要注意连续两项之间的规律，揭示规律与应用规律将是求解的关键；

(2)当面对图形推理问题时，要注意仔细观察图形的特点及前后图形之间的联系与区别．

[练一练]

2．(1)观察下表中的数字排列规律：



则第*n*行(*n*≥2)第2个数是\_\_\_\_\_\_\_\_．

(2)(2014·高考课标全国卷Ⅰ)甲、乙、丙三位同学被问到是否去过A，B，C三个城市时，

甲说：我去过的城市比乙多，但没去过B城市；

乙说：我没去过C城市；

丙说：我们三人去过同一城市．

由此可判断乙去过的城市为\_\_\_\_\_\_\_\_．

**第6课时　直接证明与间接证明**





1．直接证明

直接证明中最基本的两种证明方法是综合法和分析法．

(1)综合法：一般地，利用已知条件和某些数学定义、定理、公理等，经过一系列的推理论证，最后推导出所要证明的结论成立，这种证明方法叫做综合法．

综合法又称为：由因导果法(顺推证法)．

(2)分析法：一般地，从要证明的结论出发，逐步寻求使它成立的充分条件，直至最后，把要证明的结论归结为判定一个明显成立的条件(已知条件、定理、定义、公理等)为止，这种证明方法叫做分析法．

分析法又称为：执果索因法(逆推证法)．

2．间接证明——反证法

(1)一般地，假设原命题不成立(即在原命题的条件下，结论不成立)，经过正确的推理，最后得出矛盾，因此说明假设错误，从而证明了原命题成立，这样的证明方法叫做反证法．

(2)应用反证法证明数学命题，一般有下面几个步骤：

第一步：分清命题“*p*⇒*q*”的条件和结论；

第二步：作出与命题结论*q*相矛盾的假设綈*q*；

第三步：由*p*和綈*q*出发，应用正确的推理方法，推出矛盾结果；

第四步：断定产生矛盾结果的原因在于开始所做的假设綈*q*不真，于是原结论*q*成立，从而间接地证明了命题“若*p*则*q*”为真．

所说的矛盾结果，通常是指推出的结果与已知公理、定义、定理或已知条件矛盾，与临时假设矛盾以及自相矛盾等各种情况．



1．必明辨的2个易错点

(1)用分析法找思路、综合法写过程，在解题过程中既有分析法又有综合法时，应注意解题过程的规范性．

(2)应用反证法证明问题，要注意对结论进行准确的否定．

2．直接证明与间接证明在证明问题时常用的2法

(1)分析法步步追溯的条件都是结论的充分条件(当然充要条件更好)，因此，分析法的表述中都是“⇐”或“⇔”，即应是：果⇐因，但不可：果⇒因．

(2)掌握一些常见命题的否定形式，熟悉推出矛盾的几种常见类型，是用好反证法的关键，反证法证题的一般步骤为：

①分清命题的条件和结论；

②做出与命题结论相矛盾的假定；

③由假设出发，应用正确的推理方法，推出矛盾的结果；

④断定产生矛盾的原因，在于开始所做的假设不真，于是原结论正确，从而间接地证明命题为真．

**第七章立体几何**

**第1课时　空间几何体的结构及其三视图和直观图**





1．多面体的结构特征

(1)棱柱

(2)棱锥

(3)棱台：棱锥被平行于棱锥底面的平面所截，截面与底面之间的部分．

2．旋转体的形成

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 几何体 | 旋转图形 | 旋转轴 |
| 圆柱 | 矩形 | 任一边所在的直线 |
| 圆锥 | 直角三角形 | 一条直角边所在的直线 |
| 圆台 | 直角梯形 | 垂直于底边的腰所在的直线 |
| 球 | 半圆(或圆) | 直径所在的直线 |

3.直观图

(1)画法：常用斜二测画法．

(2)规则：

①原图形中*x*轴、*y*轴、*z*轴两两垂直，直观图中，*x*′轴、*y*′轴的夹角为45°(或135°)，*z*′轴与*x*′轴和*y*′轴所在平面垂直．

②原图形中平行于坐标轴的线段，直观图中仍平行于坐标轴．平行于*x*轴和*z*轴的线段在直观图中保持原长度不变，平行于*y*轴的线段长度在直观图中变为原来的一半．

4．三视图

(1)几何体的三视图包括正视图、侧视图、俯视图，分别是从几何体的正前方、正左方、正上方观察几何体画出的轮廓线．

(2)三视图的画法

①基本要求：长对正、高齐平、宽相等．

②画法规则：正侧一样高，正俯一样长，侧俯一样宽；看不到的线画虚线．



1．必明辨的3个易错点

(1)台体可以看成是由锥体截得的，易忽视截面与底面平行且侧棱延长后必交于一点．

(2)空间几何体不同放置时其三视图不一定相同．

(3)对于简单组合体，若相邻两物体的表面相交，表面的交线是它们的分界线，在三视图中，易忽视实虚线的画法．

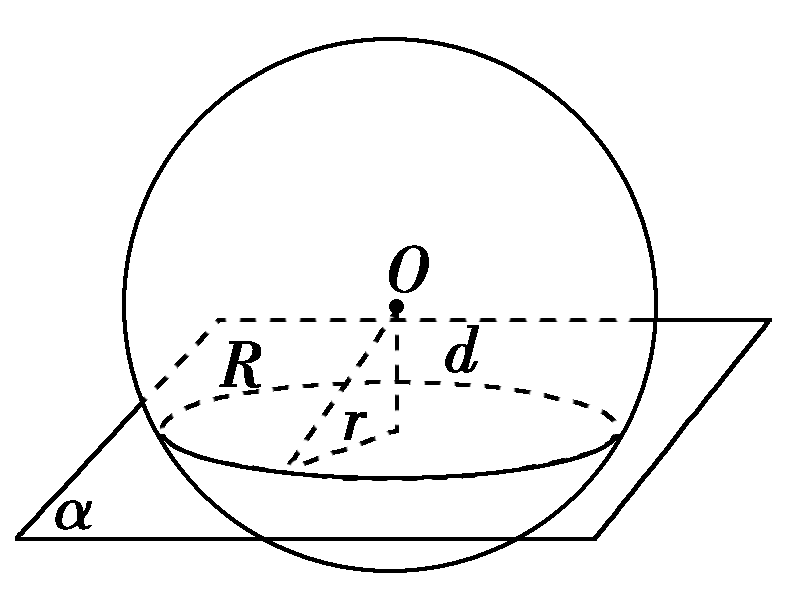
2．必掌握特殊几何体的性质、特征

(1)特殊的四棱柱：四棱柱平行六面体直平行六面体长方体正四棱柱正方体．

(2)正棱锥的性质：①各侧棱相等，各侧面都是全等的等腰三角形．这些等腰三角形的高叫做棱锥的斜高.②棱锥的高、斜高和斜高在底面内的射影组成一个直角三角形；棱锥的高、侧棱和侧棱在底面内的射影也组成一个直角三角形.

(3)正棱台的性质：①各侧棱相等，侧面是全等的等腰梯形，这些等腰梯形的高叫做棱台的斜高，斜高都相等.②两底面以及平行于底面的截面是相似多边形；③两底面中心连线、相应的边心距和斜高组成一个直角梯形；④两底面中心连线、侧棱和两底面相应外接圆的半径也组成一个直角梯形；⑤正棱台的上、下底面中心的连线是棱台的一条高．

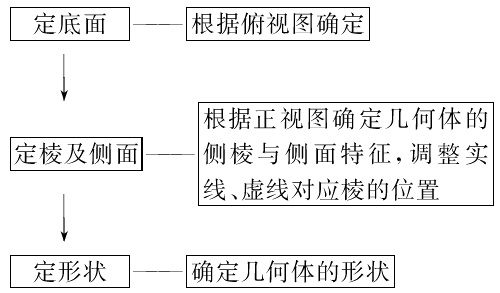
(4)球的截面性质：①用一个平面去截球，截面是圆面.

②球心到截面的距离*d*与球的半径*R*及截面的半径*r*，有下面的关系：*r*＝(如图) .

截面过球心，此时截面积最大，此圆叫球的大圆，或球面被经过球心的平面截得的圆叫做大圆. 不过球心的截面所截得的圆叫小圆．

3．必会的2法

(1)由三视图还原几何体的方法



(2)斜二测画法中的“三变”与“三不变”

“三变”

“三不变”

*S*直观图＝*S*原图形，*S*原图形＝2*S*直观图．

**第2课时　空间几何体的表面积和体积**



1．柱、锥、台和球的侧面积和体积

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 面积 | 体积 |
| 圆柱 | *S*侧＝2π*rh* | *V*＝*Sh*＝π*r*2*h* |
| 圆锥 | *S*侧＝π*rl* | *V*＝*Sh*＝π*r*2*h*  ＝π*r*2 |
| 圆台 | *S*侧＝π(*r*1＋*r*2)*l* | *V*＝(*S*上＋*S*下＋)*h*  ＝π(*r*＋*r*＋*r*1*r*2)*h* |
| 直棱柱 | *S*侧＝*Ch* | *V*＝*Sh* |
| 正棱锥 | *S*侧＝*Ch*′ | *V*＝*Sh* |
| 正棱台 | *S*侧＝(*C*＋*C*′)*h*′ | *V*＝(*S*上＋*S*下＋)*h* |
| 球 | *S*球面＝4π*R*2 | *V*＝π*R*3 |

2.平行于棱锥底面的截面的性质

棱锥被平行于底面的平面所截，截面与底面相似，相似比等于截得小棱锥与原棱锥的对应边(侧棱、高)的比．面积比等于相似比的平方，若棱锥为正棱锥，则两底面对应外接圆的半径的比、对应边的比、对应边心距的比、斜高的比都等于相似比．

3．几何体的表面积

柱、锥、台的表面积等于侧面积与底面积之和．



1．必明辨的2个易错点

(1)对几何体识别与判定，必须严格依据定义．只有认识了几何体，才能应用该几何体的侧面积与体积公式进行计算．

(2)表面积是所有表面的面积之和，对特殊几何体的表面认识容易出错．

2．求解空间几何体的表面积和体积问题常用的2种方法

(1)表面上最短距离，通过展开图进行求解．

(2)求不规则几何体的体积，常用割补的方法，转化为已知体积公式的几何体进行解决．

**第3课时　空间点、直线、平面的位置关系**



1．平面的基本性质

(1)公理1：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线在此平面内．

(2)公理2：过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面．

推论1：经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面.

推论2：经过两条相交直线，有且只有一个平面.

推论3：经过两条平行直线，有且只有一个平面．

(3)公理3：如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线．

(4)公理4：平行于同一条直线的两条直线互相平行．

2．空间点、线、面之间的位置关系

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | 直线与直线 | 直线与平面 | 平面与平面 |
| 平行关系 | 图形语言 |  |  |  |
| 符号语言 | *a*∥*b* | *a*∥*α* | *α*∥*β* |
| 交点个数 | 0 | 0 | 0 |
| 相交关系 | 图形语言 |  |  |  |
| 符号语言 | *a*∩*b*＝*A* | *a*∩*α*＝*A* | *α*∩*β*＝*l* |
| 交点个数 | 1 | 1 | 无数个 |
| 独有关系 | 图形语言 |  |  |  |
| 符号语言 | *a*、*b*是异面直线 | *a*⊂*α* |  |
| 交点个数 | 0 | 无数个 |  |

3.异面直线所成的角

(1)定义：设*a*，*b*是两条异面直线，经过空间中任一点*O*作直线*a*′∥*a*，*b*′∥*b*，把*a*′与*b*′所成的锐角(或直角)叫做异面直线*a*与*b*所成的角．

(2)异面直线所成角的取值范围：(0，]．

4．定理

空间中如果两个角的两边分别对应平行，那么这两个角相等或互补．



1．必明辨的2个易错点

(1)三条直线两两相交，则三条直线并不一定共面，可以交于一点．

(2)用余弦定理求两异面直线成角，当余弦值小于零时，异面直线成角是该角的补角．

2．解证空间点、直线、平面的位置关系问题常用方法

(1)运用交集的思想求共点线与共线点问题．

(2)作两异面直线所成的角，对空间任意一点的选择时，因为“任意”所以“灵活”．

**第4课时　直线、平面平行的判定及其性质**



1．直线与平面平行的判定与性质

(1)判定方法

①定义：直线与平面无公共点．

②判定定理：平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行．

定理的模式：⇒*a*∥*α*.

(2)性质定理：一条直线与一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行．

定理的模式：⇒*a*∥*b*.

2．平面与平面平行

(1)判定方法

①定义：两个平面无公共点

②判定定理：如果一个平面内有两条相交直线都平行于一个平面，那么这两个平面平行．

定理的模式：⇒*α*∥*β*.

(2)性质定理：①如果两个平面平行，那么其中一个平面内的直线平行于另一个平面；

②如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行．



1．必明辨的2个易错点

(1)一个平面内无数条直线平行于另一个平面，这两个平面不一定平行．

(2)两平面平行，则分别在两平面内的直线不一定平行．

2．判定和证明时常用的4个推论

(1)⇒*a*∥*α*.

(2)推论：如果一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面内的两条相交直线，那么这两个平面互相平行．

推论模式： ⇒*α*∥*β*.

(3)⇒ *α*∥*β*.

(4)⇒*α*∥*β*.

3．解证直线、平面平行的判定及其性质问题常用的方法

(1)应用判定定理时，遵循从“低维”到“高维”的转化，即从“线线平行”到“线面平行”，再到“面面平行”；

(2)应用性质定理时，遵循从“高维”到“低维”的转化，即从“面面平行”到“线面平行”，再到“线线平行”．

**第5课时　直线、平面垂直的判定及其性质**



1．直线与平面垂直

(1)定义：如果直线*l*与平面*α*内的任意一条直线都垂直，则直线*l*与平面*α*互相垂直．

(2)判定方法

①定义；

②判定定理：一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直．

即⇒*a*⊥*α*.

③判定定理推论：⇒*b*⊥*α*.

④⇒*a*⊥*β*.

(3)性质定理：垂直于同一个平面的两条直线平行．

即⇒*a*∥*b*.

2. 直线与平面所成的角

(1)定义：平面的一条斜线和它在这个平面内的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角；

(2)一条直线垂直于平面，我们说它们所成的角是直角；一条直线和平面平行，或在平面内，我们说它们所成的角是0°的角；

(3)范围：[0°，90°]．

3．二面角的有关概念

(1)二面角：从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角．二面角的取值范围是[0°，180°]，*θ*＝0°或*θ*＝180°时两个半平面共面；0°<*θ*<90°时为锐二面角；*θ*＝90°时为直二面角；90°<*θ*<180°时为钝二面角．

(2)二面角的平面角：在二面角的棱上取一点，过该点分别在二面角的两个半平面内作棱的垂线，两射线的夹角，即为二面角的平面角．

4．平面与平面垂直

(1)定义：如果两个平面所成的二面角是直二面角，就说这两个平面互相垂直．

(2)判定定理：一个平面过另一个平面的垂线，则这两个平面垂直．

即：⇒*α*⊥*β*.

(3)性质

①性质定理：两个平面垂直，则一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直．

即：⇒*a*⊥*β*.

②重要结论：⇒*PA*⊂*α*.



1．必明辨的2个易错点

(1)一个二面角的两个半平面分别垂直于另一个二面角的两个半平面，此时，两二面角不一定相等也不一定互补．

(2)两面垂直经过一个平面内一点且垂直于交线的直线与另一个平面不一定垂直．

2．解证直线、平面垂直的判定及其性质问题常用的结论与方法

(1)直线与平面所成的角，是它和平面内任何一条直线所成的一切角中的最小角，即若*θ*为线面角，*α*为斜线与平面内任何一条直线所成的角，则有*θ*≤*α*.

(2)在求二面角与线面角时，要注意“作—证—求”三步曲．

**第八章平面解析集合**

**第1课时　直线及其方程**



1．直线的倾斜角与斜率

(1)直线的倾斜角

①定义：当直线*l*与*x*轴相交时，我们取*x*轴作为基准，*x*轴正向与直线*l*向上方向之间所成的角*α*叫做直线*l*的倾斜角．当直线*l*与*x*轴平行或重合时，规定它的倾斜角为0°.

②倾斜角的范围为[0°，180°)．

(2)直线的斜率

①定义：一条直线的倾斜角*α*的正切值叫做这条直线的斜率，斜率常用小写字母*k*表示，即*k*＝tan\_*α*，倾斜角是90°的直线斜率不存在．

②过两点的直线的斜率公式

经过两点*P*1(*x*1，*y*1)，*P*2(*x*2，*y*2) (*x*1≠*x*2)的直线的斜率公式为*k*＝.

2. 直线方程的五种形式

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 名称 | 条件 | 方程 | 适用范围 |
| 点斜式 | 斜率*k*与点(*x*1，*y*1) | *y*－*y*1＝*k*(*x*－*x*1) | 不含直线*x*＝*x*1 |
| 斜截式 | 斜率*k*与直线在*y*轴上的截距*b* | *y*＝*kx*＋*b* | 不含垂直于*x*轴的直线 |
| 两点式 | 两点(*x*1，*y*1)，(*x*2，*y*2) | ＝ | 不含直线*x*＝*x*1  (*x*1≠*x*2)和直线  *y*＝*y*1(*y*1≠*y*2) |
| 截距式 | 直线在*x*轴，*y*轴上的截距分别为*a*与*b* | ＋＝1 | 不含垂直于坐标轴和过原点的直线 |
| 一般式 |  | *Ax*＋*By*＋*C*＝0  (*A*2＋*B*2≠0) | 平面直角坐标系内的直线都适用 |

3.线段的中点坐标公式

若点*P*1、*P*2的坐标分别为(*x*1，*y*1)、(*x*2，*y*2)，且线段*P*1*P*2的中点*M*的坐标为(*x*，*y*)，则此公式为线段*P*1*P*2的中点坐标公式．



1．必明辨的2个易错点

(1)所有的直线都有倾斜角，但并非所有直线都有斜率．

(2)应用点斜式、斜截式方程解题时，忽略对斜率是否存在进行讨论．应用截距式方程解题时，忽略过原点的情况而出错．

2．求解直线及其方程问题常用的2法

(1)为避免斜率不存在而造成错误，在已知斜率不为零的情况下，可设直线方程为：*x*＝*ty*＋*b*.

(2)求直线方程的一般方法

①直接法：根据已知条件，选择适当的直线方程形式，直接写出直线方程，选择时，应注意各种形式的方程的适用范围，必要时要分类讨论．

②待定系数法，具体步骤为：

a．设所求直线方程的某种形式；

b由条件建立所求参数的方程(组)；

c．解这个方程(组)求出参数；

d．把参数的值代入所设直线方程．

**第2课时　两直线的位置关系**



1．两条直线平行与垂直的判定

(1)两条直线平行

①对于两条不重合的直线*l*1，*l*2，其斜率分别为*k*1，*k*2，若*l*1∥*l*2则*k*1＝*k*2.特别地，当直线*l*1，*l*2的斜率都不存在时，亦有*l*1∥*l*2.

②对于直线*l*1：*A*1*x*＋*B*1*y*＋*C*1＝0，*l*2：*A*2*x*＋*B*2*y*＋*C*2＝0.

若*l*1∥*l*2，则*A*1*B*2＝*A*2*B*1且*A*2*C*1≠*A*1*C*2(或*B*1*C*2≠*B*2*C*1)．

(2)两条直线垂直

①如果两条直线*l*1，*l*2斜率存在，设为*k*1，*k*2，若*l*1⊥*l*2，则*k*1·*k*2＝－1.当一条直线斜率为零，另一条直线斜率不存在时，两直线垂直．

②对于直线*l*1：*A*1*x*＋*B*1*y*＋*C*1＝0，*l*2：*A*2*x*＋*B*2*y*＋*C*2＝0.若*l*1⊥*l*2，则*A*1*A*2＋*B*1*B*2＝0.

2．两直线相交

交点：直线*l*1：*A*1*x*＋*B*1*y*＋*C*1＝0和*l*2：*A*2*x*＋*B*2*y*＋*C*2＝0的公共点的坐标与方程组的解一一对应．

①相交⇔方程组有且只有一组解，交点坐标就是方程组的解；

②平行⇔方程组无解；

③重合⇔方程组有无数组解．

3．三种距离公式

(1)点*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)间的距离

|*AB*|＝.

(2)点*P*(*x*0，*y*0)到直线*l*：*Ax*＋*By*＋*C*＝0的距离

*d*＝.

(3)两平行直线*l*1：*Ax*＋*By*＋*C*1＝0与*l*2：*Ax*＋*By*＋*C*2＝0(*C*1≠*C*2)间的距离

*d*＝.



1．必明辨的2个易错点

(1)求解两直线平行问题时，在斜率存在的情况下，除了要求斜率相等外，还要求截距不相等．

(2)求两平行线间的距离时，要注意两直线方程的*x*，*y*系数是否相等，不相等时，要转化相等之后再用公式．

2．求解直线及其方程问题常用的2法

(1)与已知直线垂直及平行或过两直线*l*1，*l*2交点的直线系的设法

①与直线*Ax*＋*By*＋*C*＝0(*A*2＋*B*2≠0)垂直和平行的直线方程可设为：

a．垂直：*Bx*－*Ay*＋*m*＝0；

b．平行：*Ax*＋*By*＋*n*＝0.

②过直线*l*1：*A*1*x*＋*B*1*y*＋*C*1＝0与直线*l*2：*A*2*x*＋*B*2*y*＋*C*2＝0交点的直线系方程为*A*1*x*＋*B*1*y*＋*C*1＋*λ*(*A*2*x*＋*B*2*y*＋*C*2)＝0，其中*λ*∈**R**，但不包括*l*2.

(2)转化思想在对称问题中的应用

对称问题一般是将线与线的对称转化为点与点的对称，利用坐标转移法．

**第3课时　圆的方程**



1．圆的定义、方程

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 定义 | 平面内与定点的距离等于定长的点的集合(轨迹) | |
| 标准方程 | (*x*－*a*)2＋(*y*－*b*)2＝*r*2(*r*>0) | 圆心：(*a*，*b*)，半径：*r* |
| 一般方程 | *x*2＋*y*2＋*Dx*＋*Ey*＋*F*＝0，即为(*x*＋)2＋(*y*＋)2＝，  *r*2相当于  (*D*2＋*E*2－4*F*>0) | 圆心：(－，－)，  半径： |

2.点与圆的位置关系

点*M*(*x*0，*y*0)与圆(*x*－*a*)2＋(*y*－*b*)2＝*r*2的位置关系：

(1)若*M*(*x*0，*y*0)在圆外，则(*x*0－*a*)2＋(*y*0－*b*)2>*r*2；

(2)若*M*(*x*0，*y*0)在圆上，则(*x*0－*a*)2＋(*y*0－*b*)2＝*r*2；

(3)若*M*(*x*0，*y*0)在圆内，则(*x*0－*a*)2＋(*y*0－*b*)2<*r*2.



1．必明辨的2个易错点

(1)方程*x*2＋*y*2＋*Dx*＋*Ey*＋*F*＝0并非一定是圆的方程，只有当*D*2＋*E*2－4*F*>0的情况下才表示圆．

(2)在应用待定系数法求圆的方程时，要认真分析条件，结合几何性质尽量避免产生繁杂的方程，否则，也是隐性失分．

2．求解圆的方程时常用的2法

(1)结合几何性质求圆的方程．

(2)结合待定系数法，应用方程思想求解圆的方程．

**第4课时　直线与圆、圆与圆的位置关系**



1．直线与圆的位置关系

设直线*l*：*Ax*＋*By*＋*C*＝0(*A*2＋*B*2≠0)，

圆：(*x*－*a*)2＋(*y*－*b*)2＝*r*2(*r*>0)，

*d*为圆心(*a*，*b*)到直线*l*的距离，联立直线和圆的方程，消元后得到的一元二次方程的判别式为*Δ*.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | 相离 | 相切 | 相交 |
| 图形 | |  |  |  |
| 量化 | 方程观点 | *Δ*<0 | *Δ*＝0 | *Δ*>0 |
| 几何观点 | *d*>*r* | *d*＝*r* | *d*<*r* |

2.圆与圆的位置关系

设圆*O*1：(*x*－*a*1)2＋(*y*－*b*1)2＝*r*(*r*1>0)，

圆*O*2：(*x*－*a*2)2＋(*y*－*b*2)2＝*r*(*r*2>0).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 相离 | 外切 | 相交 | 内切 | 内含 |
| 图形 |  |  |  |  |  |
| 量化 | *d*>*r*1＋*r*2 | *d*＝*r*1＋*r*2 | |*r*1－*r*2|<  *d*<*r*1＋*r*2 | *d*＝|*r*1－*r*2| | *d*<|*r*1－*r*2| |



1．必明辨的2个易错点

(1)求过定点的圆的切线方程时，要注意切线斜率是否存在．

(2)在应用代数方法判断两圆位置关系时，若方程无解，两圆不一定相离，也可能内含．

2．求解直线与圆、圆与圆的位置关系问题常用2法

(1)求解直线与圆的位置关系问题的两种途径：①用“代数”法，通过方程根的判别式，来确定直线与圆的位置关系；②用“几何”法，通过圆心到直线的距离与圆的半径之间的大小关系判断直线与圆的位置关系．

(2)对于两圆位置关系问题，我们有两种思路：代数法，将两圆方程联立，构成方程组，通过方程组解的情况来判断；几何法，通过两圆的圆心距与两半径之间的关系确定．

**第5课时　椭　圆**



1. 椭圆的概念

在平面内与两定点*F*1、*F*2的距离的和等于常数(大于|*F*1*F*2|)的点的轨迹叫做椭圆．这两个定点叫做椭圆的焦点，两焦点间的距离叫做椭圆的焦距．

集合*P*＝{*M*||*MF*1|＋|*MF*2|＝2*a*}，|*F*1*F*2|＝2*c*，其中*a*>0，*c*>0，且*a*，*c*为常数：

(1)若*a*>*c*，则*P*点的轨迹为椭圆；

(2)若*a*＝*c*，则*P*点的轨迹为线段；

(3)若*a*<*c*，则*P*点的轨迹不存在．

2．椭圆的标准方程和几何性质

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 标准方程 | | ＋＝1(*a*>*b*>0) | ＋＝1(*a*>*b*>0) |
| 图形 | |  |  |
| 性质 | 范围 | －*a*≤*x*≤*a*，－*b*≤*y*≤*b* | －*b*≤*x*≤*b*，－*a*≤*y*≤*a* |
| 对称性 | 对称轴：坐标轴；对称中心：原点 | |
| 顶点 | *A*1(－*a,*0)，*A*2(*a,*0)  *B*1(0，－*b*)，*B*2(0，*b*) | *A*1(0，－*a*)，*A*2(0，*a*)  *B*1(－*b,*0)，*B*2(*b,*0) |
| 轴 | 长轴*A*1*A*2的长为2*a*短轴*B*1*B*2的长为2*b* | |
| 焦距 | |*F*1*F*2|＝2*c* | |
| 离心率 | *e*＝∈(0,1) | |
| *a*，*b*，*c*  的关系 | *c*2＝*a*2－*b*2 | |



1．必明辨的3个易错点

(1)动点到两定点的距离之和为定值，则动点的轨迹不一定是椭圆，只有符合“该和”大于两定点间的距离时，才是椭圆．

(2)求椭圆的标准方程时易忽视判断焦点的位置，而直接设方程为＋＝1(*a*>*b*>0)．

(3)注意椭圆的范围，在设椭圆＋＝1(*a*>*b*>0)上点的坐标为*P*(*x*，*y*)时，则|*x*|≤*a*，这往往在求与点*P*有关的最值问题中特别有用，也是容易被忽略而导致求最值错误的原因．

2．求解椭圆问题常用的3法

(1)求椭圆标准方程的方法

①定义法：根据椭圆定义，确定*a*2，*b*2的值，再结合焦点位置，直接写出椭圆方程．

②待定系数法：根据椭圆焦点是在*x*轴还是在*y*轴上，设出相应形式的标准方程，然后根据条件确定关于*a*，*b*，*c*的方程组，解出*a*2，*b*2，从而写出椭圆的标准方程．

(2)椭圆上任意一点*M*到焦点*F*的所有距离中，长轴端点到焦点的距离分别为最大距离和最小距离，且最大距离为*a*＋*c*，最小距离为*a*－*c*.

(3)求椭圆离心率*e*时，只要求出*a*，*b*，*c*的一个齐次方程，再结合*b*2＝*a*2－*c*2就可求得*e*(0<*e*<1)．

**第6课时　双曲线**



1．双曲线的定义

平面内动点*P*与两个定点*F*1、*F*2(|*F*1*F*2|＝2*c*>0)的距离之差的绝对值为常数2*a* (0<2*a*<2*c*)，则点*P*的轨迹叫双曲线．这两个定点叫双曲线的焦点，两焦点间的距离叫焦距．

集合*P*＝{*M*|||*MF*1|－|*MF*2||＝2*a*}，|*F*1*F*2|＝2*c*，其中*a*、*c*为常数且*a*>0，*c*>0：

(1)当*a*<*c*时，*P*点的轨迹是双曲线；

(2)当*a*＝*c*时，*P*点的轨迹是两条射线；

(3)当*a*>*c*时，*P*点不存在．

2．双曲线的标准方程和几何性质

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 标准方程 | | －＝1(*a*＞0，*b*＞0) | －＝1(*a*＞0，*b*＞0) |
| 图形 | |  |  |
| 性质 | 范围 | *x*≥*a*或*x*≤－*a* | *y*≥*a*或*y*≤－*a* |
| 对称性 | 对称轴：*x*轴，*y*轴对称中心：坐标原点 | 对称轴：*x*轴，*y*轴对称中心：坐标原点 |
| 顶点坐标 | *A*1(－*a,*0)，*A*2(*a,*0) | *A*1(0，－*a*)，*A*2(0，*a*) |
| 焦点坐标 | (±*c,*0) | (0，±*c*) |
| 渐近线 | *y*＝±*x* | *y*＝±*x* |
| 离心率 | *e*＝，*e*∈(1，＋∞) | |
| 实虚轴 | 线段*A*1*A*2叫做双曲线的实轴，它的长|*A*1*A*2|＝2*a*；线段*B*1*B*2叫做双曲线的虚轴，它的长|*B*1*B*2|＝2*b*；*a*叫做双曲线的半实轴(或实半轴)长，*b*叫做双曲线的半虚轴(或虚半轴)长 | |
| *a*，*b*，*c*间的关系 | | *c*2＝*a*2＋*b*2(*c*＞*a*＞0，*c*＞*b*＞0) | |

3.等轴双曲线

实轴和虚轴等长的双曲线叫做等轴双曲线，其方程为*x*2－*y*2＝*λ*(*λ*≠0)，其离心率为*e*＝，渐近线方程为*y*＝±*x*.



1．必明辨的2个易错点

(1)动点到两定点的距离之差为定值，则动点的轨迹可能是两定点连线的垂直平分线．

(2)易混淆椭圆、双曲线中的*a*，*b*，*c*.

①双曲线的标准方程中对*a*、*b*的要求只是*a*>0，*b*>0，易误认为与椭圆标准方程中*a*，*b*的要求相同．

若*a*>*b*>0，则双曲线的离心率*e*∈(1，)；

若*a*＝*b*>0，则双曲线的离心率*e*＝；

若0<*a*<*b*，则双曲线的离心率*e*>.

②注意区分双曲线中*a*，*b*，*c*的大小关系与椭圆中*a*、*b*、*c*的关系，在椭圆中*a*2＝*b*2＋*c*2，而在双曲线中*c*2＝*a*2＋*b*2.

2．求解双曲线问题常用的4种方法

(1)待定系数法求双曲线方程的常用方法

①与双曲线－＝1共渐近线的可设为－＝*λ*(*λ*≠0)；

②若渐近线方程为*y*＝±*x*，则可设为－＝*λ*(*λ*≠0)；

③若过两个已知点则设为＋＝1(*mn*<0)．

(2)等轴双曲线的离心率与渐近线关系

双曲线为等轴双曲线⇔双曲线的离心率*e*＝⇔双曲线的两条渐近线互相垂直(位置关系)．

(3)双曲线的焦点到渐近线的距离等于虚半轴长*b*

(4)渐近线与离心率

由－＝1(*a*>0，*b*>0)的一条渐近线的斜率为＝＝＝，可以看出，双曲线的渐近线和离心率的实质都表示双曲线张口的大小．

**第7课时　抛物线**



1．抛物线的定义

平面内与一个定点*F*和一条定直线*l*(*l*不过*F*)的距离相等的点的集合叫做抛物线．这个定点*F*叫做抛物线的焦点，这条定直线*l*叫做抛物线的准线．

2．抛物线的标准方程和几何性质

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 标准方程 | | *y*2＝2*px*(*p*＞0) | *y*2＝－2*px*(*p*＞0) |
| 图形 | |  |  |
| 性质 | 焦点坐标 | *F*(，0) | *F*(－，0) |
| 准线方程 | *x*＝－ | *x*＝ |
| 对称轴 | *x*轴 | *x*轴 |
| 范围 | *x*≥0 | *x*≤0 |
| 顶点坐标 | *O*(0,0) | |
| 离心率 | *e*＝1 | |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 标准方程 | | *x*2＝－2*py*(*p*＞0) | *x*2＝2*py*(*p*＞0) |
| 图形 | |  |  |
| 性质 | 焦点坐标 | *F*(0，－) | *F*(0，) |
| 准线方程 | *y*＝ | *y*＝－ |
| 对称轴 | *y*轴 | *y*轴 |
| 范围 | *y*≤0 | *y*≥0 |
| 顶点坐标 | *O*(0,0) | |
| 离心率 | *e*＝1 | |

3.抛物线的焦点弦

涉及抛物线的焦半径或焦点弦的问题，常考虑应用定义求解．

(1)若抛物线*y*2＝2*px*(*p*>0)的焦点弦为*AB*，*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，则有如下结论：

①|*AB*|＝*x*1＋*x*2＋*p*；②*y*1*y*2＝－*p*2；③*x*1*x*2＝.

(2)直线*l*过抛物线*y*2＝2*px*(*p*>0)的焦点*F*(，0)时，常设*l*：*x*＝*my*＋以简化运算．



1．必明辨的2个易错点

(1)动点到定点与定直线的距离相等，则动点轨迹不一定是抛物线，只有当定点不在定直线上时，轨迹才是抛物线．

(2)直线与抛物线只有一个公共点，直线不一定是抛物线的切线，也可能是与对称轴平行的直线．

2．求解抛物线问题常用的2种思想方法

(1)应用抛物线上的点到焦点的距离与到准线距离之间的转化解题；

(2)应用方程思想求解与抛物线方程有关的问题．

**第8课时　圆锥曲线的综合问题(选用)**



1．直线与圆锥曲线的位置关系

判定直线与圆锥曲线的位置关系，通常是将直线方程与曲线方程联立，消去变量*y*(或*x*)得变量*x*(或*y*)的方程：*ax*2＋*bx*＋*c*＝0(或*ay*2＋*by*＋*c*＝0)．

若*a*≠0，可考虑一元二次方程的判别式*Δ*，有：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 相交 | *Δ*>0 | 直线与圆锥曲线有两个公共点 |
| 相切 | *Δ*＝0 | 直线与圆锥曲线有一个公共点 |
| 相离 | *Δ*<0 | 直线与圆锥曲线无公共点 |

若*a*＝0，则直线与圆锥曲线相交，且有一个交点．若曲线为双曲线，则直线与双曲线的渐近线平行；若曲线为抛物线，则直线与抛物线的对称轴平行．

2．直线与圆锥曲线相交弦长问题

(1)斜率为*k*的直线与圆锥曲线交于两点*P*1(*x*1，*y*1)，*P*2(*x*2，*y*2)，则所得弦长|*P*1*P*2|＝|*x*2－*x*1|或|*P*1*P*2|＝|*y*2－*y*1|，其中求|*x*2－*x*1|与|*y*2－*y*1|时，通常作如下变形：|*x*2－*x*1|＝，|*y*2－*y*1|＝，使用根与系数的关系即可解决．

(2)当斜率*k*不存在时，直线为*x*＝*m*的形式，可直接代入求出交点的纵坐标*y*1、*y*2得弦长|*y*1－*y*2|.



1．必明辨的2个易错点

(1)在求解基本量之间关系的问题时，容易出现将椭圆的*a*，*b*，*c*之间的关系与双曲线的*a*，*b*，*c*之间的关系混淆．

(2)直线与双曲线、抛物线只有一个公共点是直线与双曲线、抛物线相切的必要条件．

2．求解圆锥曲线的综合问题常用的2法

(1)应用“设而不求”，优化解题过程．

(2)注意一元二次方程的根与系数的关系在解题中的应用．

**第九章统计、统计案例及算法初步**

**第1课时　随机抽样**



1．简单随机抽样

(1)抽取方式：逐个不放回的抽取；

(2)每个个体被抽到的概率相等；

(3)常用方法：抽签法、随机数法．

2．系统抽样

将总体分成均衡的若干部分，然后按照预先制定的规则，从每一部分抽取一个个体，得到所需要的样本，这种抽样的方法叫做系统抽样，也叫等距抽样．

3．分层抽样

当已知总体由差异明显的几部分组成时，将总体分成几部分(各部分互不交叉)，然后按照各部分所占比例进行抽样，这种抽样方法叫做分层抽样，所分成的部分叫做层．

4．三类抽样的步骤

简单随机抽样的步骤：(1)将总体中的个体随机编号；(2)选定开始的数字；(3)获取样本号码．

系统抽样的步骤：(1)将总体中的个体随机编号；(2)将编号分段；(3)在第1段中用简单随机抽样确定起始的个体编号；(4)按照事先研究的规则抽取样本．

分层抽样的步骤：(1)分层；(2)按比例确定每层抽取个体的个数；(3)各层抽样(方法可以不同)；(4)汇合成样本．



1．必明辨的2个易错点

(1)采用系统抽样，当总体容量除以样本容量不是一个整数时，要先用简单随机抽样从总体中剔除部分个体，使剩余总体的容量恰好是样本容量的整数倍．

(2)应用分层抽样时，各层所占的抽样比是相同的，即每层被抽出的数量＝每层的数量×.

2．解答随机抽样问题常用的方法

(1)准确分辨出使用何种抽样方法进行抽样；

(2)对特殊总体进行的特殊处理．

**第2课时　用样本估计总体**



1. 频率分布直方图

(1)通常我们对总体作出的估计一般分成两种，一种是用样本的频率分布估计总体的频率分布，另一种是用样本的数字特征估计总体的数字特征．

(2)在频率分布直方图中，纵轴表示，数据落在各小组内的频率用各小长方形的面积表示，各小长方形的面积的总和等于1.

(3)连接频率分布直方图中各小长方形上端的中点，就得到频率折线图．随着样本容量的增加，作图时所分的组数增加，组距减小，相应的频率折线图就会越来越接近于一条光滑的曲线，统计中称之为总体密度曲线，它能够更加精细的反映出总体在各个范围内取值的百分比．

(4)当样本数据较少时，用茎叶图表示数据的效果较好，它不但可以保留所有信息，而且可以随时记录，给数据的记录和表示都带来方便．

2. 用样本的数字特征估计总体的数字特征

(1)众数、中位数、平均数

众数：在一组数据中，出现次数最多的数据叫做这组数据的众数(在频率分布直方图中是最高的矩形的中点的横坐标)．

中位数：将一组数据按大小依次排列，把处在最中间位置的一个数据(或最中间两个数据的平均数)叫做这组数据的中位数(在频率分布直方图中，中位数左边和右边的直方图的面积应该相等)．

平均数：样本数据的算术平均数，即＝(*x*1＋*x*2＋…＋*xn*)．(在频率分布直方图中，平均数的估计值等于每个小矩形的面积乘以矩形底边中点横坐标之和)．

(2)样本方差、标准差

标准差*s*＝

，

其中*xn*是样本数据的第*n*项，*n*是样本容量，是平均数．

标准差是反映总体波动大小的特征数，样本方差是标准差的平方．通常用样本方差估计总体方差，当样本容量接近总体容量时，样本方差很接近总体方差．



1．必明辨的2个易错点

(1)频率分布直方图的纵轴数据，只有当组距为1时，才能是频率．否则，必须乘以组距才是频率．

(2)建立在频率分布直方图的基础上求得的众数、中位数与平均数都不一定是准确值，而只是近似值．

**第3课时　变量间的相关关系、统计案例**



1．两个变量的线性相关

(1)正相关

在散点图中，点散布在从左下角到右上角的区域．对于两个变量的这种相关关系，我们将它称为正相关．

(2)负相关

在散点图中，点散布在从左上角到右下角的区域，两个变量的这种相关关系称为负相关．

(3)线性相关关系、回归直线

如果散点图中点的分布从整体上看大致在一条直线附近，就称这两个变量之间具有线性相关关系，这条直线叫做回归直线．

2．回归方程

(1)最小二乘法

求回归直线使得样本数据的点到回归直线的距离的平方和最小的方法叫做最小二乘法．

(2)回归方程

方程＝*x*＋是两个具有线性相关关系的变量的一组数据(*x*1，*y*1)，(*x*2，*y*2)，…，(*xn*，*yn*)的回归方程，其中，是待定参数．

3．回归分析

(1)定义

对具有相关关系的两个变量进行统计分析的一种常用方法．

(2)样本点的中心

在具有线性相关关系的数据(*x*1，*y*1)，(*x*2，*y*2)，…，(*xn*，*yn*)中，(，)称为样本点的中心．

(3)相关系数

当*r*>0时，表明两个变量正相关；

当*r*<0时，表明两个变量负相关．

*r*的绝对值越接近于1，表明两个变量的线性相关性越强．*r*的绝对值越接近于0，表明两个变量之间几乎不存在线性相关关系．通常|*r*|大于0.75时，认为两个变量有很强的线性相关性．

4．独立性检验

(1)分类变量的定义

如果某种变量的不同“值”表示个体所属的不同类别，像这样的变量称为分类变量．

(2)2×2列联表

一般地，假设有两个分类变量*X*和*Y*，它们的值域分别为{*x*1，*x*2}和{*y*1，*y*2}，其样本频数列联表(称为2×2列联表)为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *y*1 | *y*2 | 总计 |
| *x*1 | *a* | *b* | *a*＋*b* |
| *x*2 | *c* | *d* | *c*＋*d* |
| 总计 | *a*＋*c* | *b*＋*d* | *a*＋*b*＋*c*＋*d* |

*K*2＝，用它的大小可以决定是否拒绝原来的统计假设*H*0，如果*K*2值较大，就拒绝*H*0，即*X*和*Y*有关．



1．必明辨的3个易错点

利用回归方程对结论进行预测，我们必须注意三点：

(1)有限性，这里有两层含义，其一，回归方程仅适合所研究样本的总体，超出这个总体无效；其二，样本的范围与样本容量又会影响回归方程的适用，样本不理想，适用性也不理想；

(2)时间性，回归方程一般都有时间性，随着时间的慢慢推移，精确度会越来越差，直至毫无意义；

(3)准确性，预报变量由于受随机误差影响，一般情况下与实际值都不相等 ，不要期望回归方程可以得到准确值．

**第4课时　算法与程序框图**



1．算法的定义

算法是指按照一定规则解决某一类问题的明确的和有限的步骤．

2．程序框图

(1)程序框图又称流程图，是一种用程序框、流程线及文字说明来表示算法的图形．

(2)程序框图通常由程序框和流程线组成．

(3)基本的程序框有终端框(起止框)、输入、输出框、处理框(执行框)、判断框．

3．三种基本逻辑结构

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 名称  内容 | 顺序结构 | 条件结构 | 循环结构 |
| 定义 | 由若干个依次执行的步骤组成的，这是任何一个算法都离不开的基本结构 | 算法的流程根据条件是否成立有不同的流向，条件结构就是处理这种过程的结构 | 从某处开始，按照一定的条件反复执行某些步骤的情况，反复执行的步骤称为循环体 |
| 程序框图 |  |  |  |

**选修4-1几何证明选讲**

**第1课时　相似三角形的判定及有关性质**

1．平行线等分线段定理

(1)定理　如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等，那么在其他直线上截得的线段也相等．

(2)推论1　经过三角形一边的中点与另一边平行的直线必平分第三边．

(3)推论2　经过梯形一腰的中点，且与底边平行的直线平分另一腰．

2．平行线分线段成比例定理

(1)定理　三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例．

(2)推论　平行于三角形一边的直线截其他两边(或两边的延长线)所得的对应线段成比例．

3．相似三角形的判定与性质

(1)判定定理

|  |  |
| --- | --- |
|  | 内容 |
| 判定定理1 | 两角对应相等的两个三角形相似 |
| 判定定理2 | 两边对应成比例，并且夹角相等的两个三角形相似 |
| 判定定理3 | 三边对应成比例的两个三角形相似 |

(2)性质定理

|  |  |
| --- | --- |
|  | 内容 |
| 性质定理1 | 相似三角形对应边上的高、中线和它们周长的比都等于相似比 |
| 性质定理2 | 相似三角形的面积比等于相似比的平方 |

(3)推论　相似三角形外接圆的直径比、周长比等于相似比，外接圆的面积比等于相似比的平方．

4．射影定理

直角三角形斜边上的高是两直角边在斜边上射影的比例中项；两直角边分别是它们在斜边上射影与斜边的比例中项．

**第2课时　直线与圆的位置关系**

1．圆周角定理

(1)圆周角定理及其推论

①定理：圆上一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半．

②推论

(i)推论1：同弧或等弧所对的圆周角相等；同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧也相等．

(ii)推论2：半圆(或直径)所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径．

(2)圆心角定理：圆心角的度数等于它所对弧的度数．

2．圆内接四边形的性质与判定定理

(1)圆内接四边形的性质定理

①定理1：圆内接四边形的对角互补．

②定理2：圆内接四边形的外角等于它的内角的对角．

(2)圆内接四边形的判定定理及推论

①判定定理：如果一个四边形的对角互补，那么这个四边形的四个顶点共圆．

②推论：如果四边形的一个外角等于它的内角的对角，那么这个四边形的四个顶点共圆．

3．圆的切线的性质及判定定理

切线的性质定理及推论

(1)定理：圆的切线垂直于经过切点的半径．

(2)推论：

①推论1：经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点．

②推论2：经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心．

4．弦切角的性质

弦切角定理：弦切角等于它所夹的弧所对的圆周角．

5．与圆有关的比例线段

圆中的比例线段

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 定理名称 | 基本图形 | 结论 | 应用 |
| 相交弦定理 |  | (1)*PA*·*PB*＝*PC*·*PD*  (2)△*ACP*∽△*BDP* | (1)在*PA*、*PB*、*PC*、*PD*四线段中知三求一  (2)求弦长及角 |
| 割线定理 |  | (1)*PA*·*PB*＝*PC*·*PD*；  (2)△*PAC*∽△*PDB* | (1)求线段*PA*、*PB*、*PC*、*PD*及*AB*、*CD*；(2)应用相似求*AC*、*BD* |
| 切割线定理 |  | (1)*PA*2＝*PB*·*PC*；  (2)△*PAB*∽△*PCA* | (1)已知*PA*、*PB*、*PC*知二可求一；  (2)求解*AB*、*AC* |
| 切线长定理 |  | (1)*PA*＝*PB*；  (2)∠*OPA*＝∠*OPB* | (1)证线段相等，已知*PA*求*PB*；  (2)求角 |

**第十章概率**

**第1课时　随机事件的概率**



1．随机事件和确定事件

(1)在条件*S*下，一定会发生的事件，叫做相对于条件*S*的必然事件．

(2)在条件*S*下，一定不会发生的事件，叫做相对于条件*S*的不可能事件．

(3)在条件*S*下可能发生也可能不发生的事件，叫做相对于条件*S*的随机事件．

(4)必然事件、不可能事件和随机事件统称为事件，一般用大写字母*A*，*B*，*C*…表示．

2．频率与概率

(1)在相同的条件*S*下重复*n*次试验，观察某一事件*A*是否出现，称*n*次试验中事件*A*出现的次数*nA*为事件*A*出现的频数，称事件*A*出现的比例*fn*(*A*)＝为事件*A*出现的频率．

(2)对于给定的随机事件*A*，如果随着试验次数的增加，事件*A*发生的频率*fn*(*A*)稳定在某个常数上，把这个常数记作*P*(*A*)，称为事件*A*的概率，简称为*A*的概率．

3．事件的关系与运算

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 定义 | 符号表示 |
| 包含关系 | 如果事件*A*发生，则事件*B*一定发生，这时称事件*B*包含事件*A*(或称事件*A*包含于事件*B*) | *B*⊇*A*(或*A*⊆*B*) |
| 相等关系 | 若*B*⊇*A*且*A*⊇*B* | *A*＝*B* |
| 并事件(和事件) | 若某事件发生当且仅当事件*A*发生或事件*B*发生，则称此事件为事件*A*与事件*B*的并事件(或和事件) | *A*∪*B*(或*A*＋*B*) |
| 交事件(积事件) | 若某事件发生当且仅当事件*A*发生且事件*B*发生，则称此事件为事件*A*与事件*B*的交事件(或积事件) | *A*∩*B*(或*AB*) |
| 互斥事件 | 若*A*∩*B*为不可能事件，则事件*A*与事件*B*互斥 | *A*∩*B*＝∅ |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 对立事件 | 若*A*∩*B*为不可能事件，*A*∪*B*为必然事件，那么称事件*A*与事件*B*互为对立事件；即*B*＝ | *A*∩*B*＝∅  *P*(*A*∪*B*)＝*P*(*A*)＋*P*(*B*) ＝1 |

4.概率的几个基本性质

(1)概率的取值范围：0≤*P*(*A*)≤1.

(2)必然事件的概率*P*(*E*)＝1.

(3)不可能事件的概率*P*(*F*)＝0.

(4)互斥事件概率的加法公式

①如果事件*A*与事件*B*互斥，则

*P*(*A*∪*B*)＝*P*(*A*)＋*P*(*B*)．

②若事件*B*与事件*A*互为对立事件，则

*P*(*A*)＝1－*P*(*B*)．



1．必明辨的2个易错点

(1)频率随着试验次数的变化而变化，概率却是一个常数，当试验次数越来越多时，频率向概率靠近，只要次数足够多，所得频率就近似地当作随机事件的概率．

(2)互斥事件是不可能同时发生的两个事件，而对立事件除要求这两个事件不同时发生外，还要求二者之一必须有一个发生，因此，对立事件是互斥事件的特殊情况，而互斥事件未必是对立事件．

2．求解随机事件的概率问题常用的方法

(1)利用集合方法判断互斥事件与对立事件

①由各个事件所含的结果组成的集合彼此的交集为空集，则事件互斥．

②事件*A*的对立事件所含的结果组成的集合，是全集中由事件*A*所含的结果组成的集合的补集．

(2)利用对立事件求概率问题是常用的间接法，求和(并)事件的概率首先判断两事件是否互斥．

**第2课时　古典概型**



1．基本事件的特点

(1)任何两个基本事件都是互斥的．

(2)任何事件(除不可能事件)都可以表示成基本事件的和．

2．古典概型

具有以下两个特点的概率模型称为古典概率模型，简称古典概型．

(1)有限性：试验中所有可能出现的基本事件只有有限个．

(2)等可能性：每个基本事件出现的可能性相等．

3．古典概型的概率公式

*P*(*A*)＝.



1．必明辨的2个易错点

(1)准确理解事件发生的等可能性．有些事件表面上看是等可能的，但深入分析会发现不一定是等可能的．

(2)用树形图列举基本事件时，“干、枝、叶”必须分清，否则会出现重复或遗漏．

2．求解古典概型问题常用的方法

(1)用树形图列举基本事件．

(2)无重复时用三角形列举法列举基本事件．

(3)有重复时，用矩形列举法列举基本事件．

**第3课时　几何概型**



1．几何概型

(1)定义：如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度(面积或体积)成比例，则称这样的概率模型为几何概率模型，简称几何概型．

(2)特点：

①无限性：试验中所有可能出现的结果(基本事件)有无限多个．

②等可能性：每个基本事件出现的可能性相等．

2．几何概型的概率公式

*P*(*A*)＝



1．必明辨的2个易错点

(1)求几何概型时，选取的几何度量一定要保证每个基本事件出现是等可能的．

(2)求几何概型时，画几何图形有时对区域认识不准导致出错．

2．求解几何概型问题常用的方法

(1)从长度、面积、体积入手寻找解题的突破口．

(2)借助转化思想将不等式组转化为平面区域，再将可能性转化为概率．

**选修4-1几何证明选讲**

**第1课时　相似三角形的判定及有关性质**

1．平行线等分线段定理

(1)定理　如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等，那么在其他直线上截得的线段也相等．

(2)推论1　经过三角形一边的中点与另一边平行的直线必平分第三边．

(3)推论2　经过梯形一腰的中点，且与底边平行的直线平分另一腰．

2．平行线分线段成比例定理

(1)定理　三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例．

(2)推论　平行于三角形一边的直线截其他两边(或两边的延长线)所得的对应线段成比例．

3．相似三角形的判定与性质

(1)判定定理

|  |  |
| --- | --- |
|  | 内容 |
| 判定定理1 | 两角对应相等的两个三角形相似 |
| 判定定理2 | 两边对应成比例，并且夹角相等的两个三角形相似 |
| 判定定理3 | 三边对应成比例的两个三角形相似 |

(2)性质定理

|  |  |
| --- | --- |
|  | 内容 |
| 性质定理1 | 相似三角形对应边上的高、中线和它们周长的比都等于相似比 |
| 性质定理2 | 相似三角形的面积比等于相似比的平方 |

(3)推论　相似三角形外接圆的直径比、周长比等于相似比，外接圆的面积比等于相似比的平方．

4．射影定理

直角三角形斜边上的高是两直角边在斜边上射影的比例中项；两直角边分别是它们在斜边上射影与斜边的比例中项．

**第2课时　直线与圆的位置关系**

1．圆周角定理

(1)圆周角定理及其推论

①定理：圆上一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半．

②推论

(i)推论1：同弧或等弧所对的圆周角相等；同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧也相等．

(ii)推论2：半圆(或直径)所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径．

(2)圆心角定理：圆心角的度数等于它所对弧的度数．

2．圆内接四边形的性质与判定定理

(1)圆内接四边形的性质定理

①定理1：圆内接四边形的对角互补．

②定理2：圆内接四边形的外角等于它的内角的对角．

(2)圆内接四边形的判定定理及推论

①判定定理：如果一个四边形的对角互补，那么这个四边形的四个顶点共圆．

②推论：如果四边形的一个外角等于它的内角的对角，那么这个四边形的四个顶点共圆．

3．圆的切线的性质及判定定理

切线的性质定理及推论

(1)定理：圆的切线垂直于经过切点的半径．

(2)推论：

①推论1：经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点．

②推论2：经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心．

4．弦切角的性质

弦切角定理：弦切角等于它所夹的弧所对的圆周角．

5．与圆有关的比例线段

圆中的比例线段

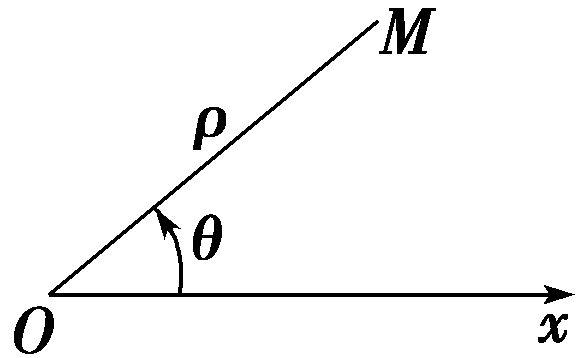
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 定理名称 | 基本图形 | 结论 | 应用 |
| 相交弦定理 |  | (1)*PA*·*PB*＝*PC*·*PD*  (2)△*ACP*∽△*BDP* | (1)在*PA*、*PB*、*PC*、*PD*四线段中知三求一  (2)求弦长及角 |
| 割线定理 |  | (1)*PA*·*PB*＝*PC*·*PD*；  (2)△*PAC*∽△*PDB* | (1)求线段*PA*、*PB*、*PC*、*PD*及*AB*、*CD*；(2)应用相似求*AC*、*BD* |
| 切割线定理 |  | (1)*PA*2＝*PB*·*PC*；  (2)△*PAB*∽△*PCA* | (1)已知*PA*、*PB*、*PC*知二可求一；  (2)求解*AB*、*AC* |
| 切线长定理 |  | (1)*PA*＝*PB*；  (2)∠*OPA*＝∠*OPB* | (1)证线段相等，已知*PA*求*PB*；  (2)求角 |

**选修4-4坐标系与参数方程**

**第1课时　极坐标系**

1．极坐标系的概念

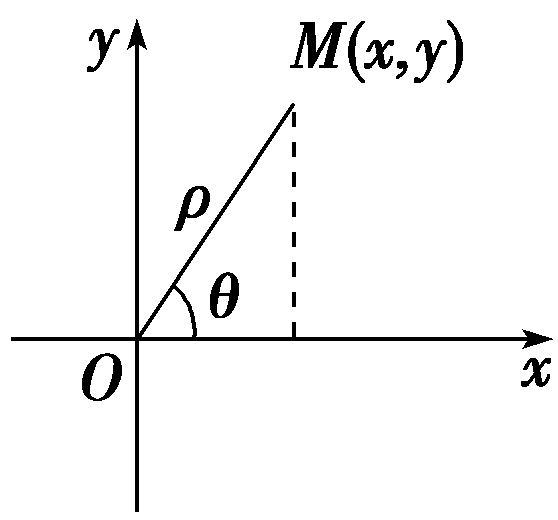
在平面上取一个定点*O*叫做极点；自点*O*引一条射线*Ox*叫做极轴；再选定一个长度单位、角度单位(通常取弧度)及其正方向(通常取逆时针方向为正方向)，这样就建立了一个极坐标系．设*M*是平面上任一点，极点*O*与点*M*的距离|*OM*|叫做点*M*的极径，记为*ρ*；以极轴*Ox*为始边，射线*OM*为终边的∠*xOM*叫做点*M*的极角，记为*θ*.有序数对(*ρ*，*θ*)称为点*M*的极坐标，记作*M*(*ρ*，*θ*)．



2．直角坐标与极坐标的互化

把直角坐标系的原点作为极点，*x*轴正半轴作为极轴，并在两坐标系中取相同的长度单位．设*M*是平面内的任意一点，它的直角坐标、极坐标分别为(*x*，*y*)和(*ρ*，*θ*)，则

3．直线的极坐标方程



若直线过点*M*(*ρ*0，*θ*0)，且极轴到此直线的角为*α*，则它的方程为：*ρ*sin(*θ*－*α*)＝*ρ*0sin(*θ*0－*α*)．

几个特殊位置的直线的极坐标方程

(1)直线过极点：*θ*＝*θ*0或*θ*＝π－*θ*0(*ρ*∈**R**)；

(2)直线过点*M*(*a,*0)且垂直于极轴：*ρ*cos *θ*＝*a*；

(3)直线过*M*(*b*，)且平行于极轴：*ρ*sin\_*θ*＝*b*.

4．圆的极坐标方程

若圆心为*M*(*ρ*0，*θ*0)，半径为*r*，则该圆的方程为：

*ρ*2－2*ρ*0*ρ*cos(*θ*－*θ*0)＋*ρ*－*r*2＝0.

几个特殊位置的圆的极坐标方程

(1)当圆心位于极点，半径为*r*：*ρ*＝*r*；

(2)当圆心位于*M*(*a,*0)，半径为*a*：*ρ*＝2*a*cos\_*θ*；

(3)当圆心位于*M*(*a*，)，半径为*a*：*ρ*＝2*a*sin\_*θ*.

**第2课时　参数方程**

1．参数方程的概念

在平面直角坐标系中，如果曲线上任意一点的坐标*x*，*y*都是某个变数*t*的函数：并且对于*t*的每一个允许值，由这个方程组所确定的点*M*(*x*，*y*)都在这条曲线上，那么这个方程就叫做这条曲线的参数方程，联系变数*x*，*y*的变数*t*叫做参变数，简称参数．相对于参数方程而言，直接给出点的坐标间关系的方程叫做普通方程．

2．几种常见曲线的参数方程

(1)直线

经过点*P*0(*x*0，*y*0)，倾斜角为*α*的直线的参数方程是其中*t*为参数．

(2)圆

以*O*′(*a*，*b*)为圆心，*r*为半径的圆的参数方程是其中*α*是参数．

当圆心为(0,0)时，方程为

(3)椭圆

中心在原点，以坐标轴为对称轴的椭圆的参数方程有以下两种情况：

椭圆＋＝1(*a*>*b*>0)的参数方程是其中*φ*是参数．

椭圆＋＝1(*a*>*b*>0)的参数方程是其中*φ*是参数．