



Produits dérivés sur la volatilité et modèle de variance forward

19 mars 2017



Ayoub GHRISS | ElGhali LALAMI

SOMMAIRE

1	Introduction	3
1.1	Volatilité implicite	3
1.1.1	Définition de la volatilité implicite	4
1.1.2	Smile de volatilité	5
1.1.3	Volatilité stochastique	6
1.2	Swaps de variance	7
1.3	Swap de volatilité	8
1.3.1	Transformée de Laplace	9
1.4	conclusion	10
2	Etude de la variance swaps sur des modèles simple.	11
2.1	Merton Jump Diffusion (MJD)	11
2.2	Modèle de volatilité stochastique Modèle de Heston	12
2.3	Conclusion	14
3	Modèle de bergomi	15
3.1	Modélisation de la variance.	15
3.2	Modèle de Bergomi à un facteur	15
3.3	Modèle à deux facteurs	16
3.4	Concordance du modèle de Bergomi avec les données du marché.	19
4	Amélioration du modèle de bergomi et le modèle de rough Bergomi	19
5	Conclusion	26

1 INTRODUCTION

Les marchés financiers ont vu des changements significatifs au long du dernier siècle et les crises financières récentes les ont transformé de façon à accentuer le rôle de la volatilité. Le concept de la volatilité trouve son utilité aussi dans la gestion des risques, la valorisation des actifs, le trading... etc

La complexité croissante du marché a stimulé la demande des dérivées exotiques pour des finalités en trading ou en hedging. Les années 90 ont vu l'émergence d'une nouvelle classe d'actifs qui permettait à l'investisseur de prendre des positions directement sur la volatilité des sous-jacents. Avec cette nouvelle classe de dérivées, la volatilité n'est plus perçue comme un produit de niche inhérent à d'autres dérivées, mais c'est désormais un actif à part entière.

Les swaps de variance et de la volatilité furent les premiers les plus fondamentaux des produits qui ont été introduits dans cette classe depuis sa création, le marché des ses produits a explosé. Les produits sont par nature des contrats "forward" qui, à la maturité, permettent d'échanger la différence entre un strike fixé et la variance/volatilité réalisée à un facteur près. Ces produits sont négociés sur le marché hors cote (OTC) ce qui rend difficiles de déterminer la taille réelle du leur marché, mais des indices récents l'estiment d'un volume quotidien de 35\$ milliards. L'intérêt académique pour ces instruments a crû avec la demande de ces instruments, et plusieurs études et thèses ont été consacrées récemment pour le développement d'une méthode de valorisation efficace.

1.1 VOLATILITÉ IMPLICITE

Dans sa forme de base, la volatilité une mesure de dispersion dans les résultats d'une variable aléatoire- plus précisément une mesure agrégée de l'écart de la moyenne.

On définit l'estimateur standard de la volatilité d'un échantillon de taille n des rendements d'un actif r :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2} \quad (1.1.1)$$

Avec \bar{r} est la moyenne de l'échantillon.

Cet estimateur est basé sur les données historiques, en revanche la volatilité peut être aussi calculée avec la même formule si on peut anticiper les valeurs r_i . Dans le marché financier, on fait appel à la volatilité future afin de prédire les mouvements de prix pour des finalités d'investissements et de couverture contre le risque. Plusieurs approches de modélisation ont été proposées pour répondre à ce problème. La volatilité réalisée a été souvent utilisée pour

construire les meilleurs estimateurs, ce qui rend la maîtrise de ce concept important. D'autres approches plus avancées basées sur la calibration des modèles sur les données historiques afin de pouvoir projeter sur le futur.

1.1.1 • DÉFINITION DE LA VOLATILITÉ IMPLICITE

Malgré le fait que la volatilité future n'est pas observable dans le marché, il est pourtant possible d'extraire les prévisions du marché à partir des transactions publiques. Cet estimation est basé sur le modèle de Black-Scholes. Dans ce modèle, on suppose que le prix du sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1.1.2)$$

Selon cette dynamique, le prix de l'actif suit une loi log-normale :

$$\log(S_T) \sim \mathcal{N}(\log(S_t) + (\mu - \sigma^2/2)(T - t), \sigma\sqrt{T - t}) \quad (1.1.3)$$

Ce résultat est basé sur l'hypothèse d'absence d'arbitrage. Si on note par $V(S, t)$ le prix du sous-jacent comme fonction du spot S_t à l'instant t , il est possible de construire un portefeuille sans risque et dont la valeur dépend de la valeur du sous-jacent. Il suffit d'acheter une option de valeur $V(S, t)$ et vendre Δ sous-jacent S_t .

En appliquant la formule d'Itô et prenant $\frac{\partial V}{\partial S}$ et sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, on aboutit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV \quad (1.1.4)$$

Tout instrument dérivé sur un sous-jacent suivant une dynamique du modèle de Black-Scholes doit satisfaire l'équation. Avec la donnée des conditions limites, il est possible de trouver des solutions de valorisation des différents types d'options. C'est notamment le cas pour les options call et put européennes. Prenons le cas d'un call de maturité T et strike K sans dividende, le pay-off s'écrit :

$$C(S, T) = (S_T - K)^+$$

Dans le cadre du modèle de avec le pay-off comme condition terminale, on peut montrer que le prix du call à l'instant t est :

$$C_{BS}(t, S_t, \sigma, T, K) = S_t N(d_1) - K e^{r(T-t)} N(d_2) \quad (1.1.5)$$

avec N la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et d_1, d_2 sont définies comme :

$$d_1 = \frac{\log(\frac{S_t}{K}) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

Dans ce contexte, on peut formellement définir la volatilité implicite : c'est la valeur de σ qui, insérée dans la formule (5), permet de répliquer le prix du call observé dans le marché, ou comme l'a formulé Riccardo Rebonato en 1999 : "la volatilité implicite est une fausse valeur à insérer dans une fausse formule pour obtenir le bon prix"

1.1.2 • SMILE DE VOLATILITÉ

Dans le modèle de Black-Scholes, la volatilité implicite des options pour le même sous-jacent doit être constante pour les différents strikes. Cependant, l'observation empirique montre que ce n'est pas le cas. Black et Scholes ont remarqué "qu'on dispose des preuve de l'aspect non stationnaire de la variance" dans leur article de 1973¹. Dans le graphes ci-dessous, la volatilité implicite a été calculée pour des calls écrits sur S&P500 pour une maturité de 7 jours et différents strikes à la date 17 Mars 2017.

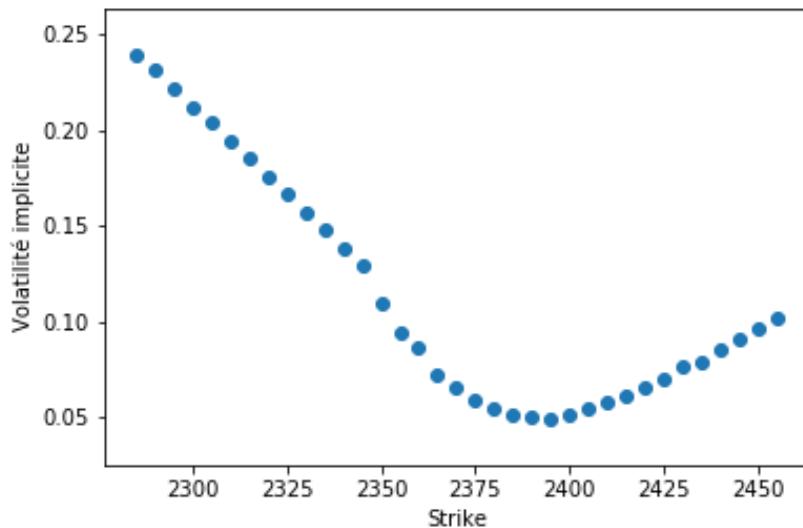


FIGURE 1 – Volatilité implicite pour les calls européens sur S&P500 du 17 Mars 2017, Spot : 2378.2 , T= 0.019

Ce résultat est connu sous le nom du "smile de volatilité" qu'on peut observé dans le marché d'équity ainsi que des taux d'intérêt. Il est évident que la valorisation avec le modèle de Black-

1. F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, 1973

Scholes dans ce cas produira une sous-estimation du prix des options qui sont profondément dans ou hors la monnaie. De façon similaire, ce modèle sur-estime le prix des options à la monnaie..

1.1.3 • VOLATILITÉ STOCHASTIQUE

Maintenant qu'on a montré que la volatilité n'est pas un facteur statique, mais plutôt une variable qui présente des fluctuations, on s'intéresse à explorer les différentes solutions au problème de pricing sous cette condition. L'une des réponses naturelles fut le développement des modèles permettant de décrire la volatilité comme un processus stochastique avec sa propre source aléatoire : modèles de volatilité stochastique. Le système des équations 6,7,8 présente une version générale de ses modèles.

$$\begin{cases} dS_t = \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dZ_t^1 \\ dv_t = \alpha(S_t, v_t, t) dt + \eta \beta(S_t, v_t, t) \sqrt{v_t} S_t dZ_t^2 \\ E[dZ_t^1 dZ_t^2] = \rho dt \end{cases} \quad (1.1.6)$$

Avec $\alpha(S_t, v_t, t)$ et $\beta(S_t, v_t, t)$ sont, respectivement, un drift et une fonction de diffusion aléatoires. η est connu comme "la volatilité de la volatilité".

Par rapport au modèle de Black-Scholes, la différence principale est l'introduction de l'EDS (7), qui définit la volatilité comme processus brownien géométrique.

Dans ce modèle, on a 2 sources distinctes de l'aspect aléatoire : les deux mouvement brownien corrélés Z_t^1 and Z_t^2 . Cela a une implication directe sur la valorisation des options écrites sur ce sous-jacent car la construction d'un proté-feuille sans risque exige de prendre des positions sur deux dérivées et le sous-jacent afin d'éliminer l'aspect aléatoire des deux mouvements.

L'équation différentielle partielle à résoudre dans ce cas s'écrit :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \eta v \beta S \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2} \eta^2 v \beta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + r S \frac{\partial V}{\partial S} - r V = -(\alpha - \phi \beta \sqrt{v}) \frac{\partial V}{\partial v} \quad (1.1.7)$$

Avec $\phi(S, v, t)$ est le prix du marché du risque de la volatilité, elle reflète le fait qu'un rendement supplémentaire par risque de volatilité représenté par dZ_t^2 est défini par $\phi(S, v, t)dt$.

L'avantage des modèles de la volatilité stochastique, même avec des méthodes de pricing complexe, est la possibilité de mettre en évidence les smiles et les skews avec des expressions des grecs "raisonnables". L'inconvénient est la difficulté d'estimation des paramètres des modèles.

1.2 SWAPS DE VARIANCE

Les swaps de variance² sont des actifs contingents qui permettent de prendre des positions sur la volatilité d'un sous-jacent. Un swap de variance a un pay-off à l'échéance égal à :

$$H_T = \frac{NA}{n} \sum_{i=1}^n (\log \frac{S_i}{S_{i-1}})^2 - N\sigma_K^2,$$

où

- A=250 est le nombre moyen de jours ouvrés dans l'année ;
- N est le nominal du contrat ;
- n représente le nombre de jours ouvrés jusqu'à l'échéance T ;
- σ_K est la volatilité ‘strike’.

En d'autres mots, un swap de variance permet d'échanger un montant fixe $N\sigma_K^2$ contre un flux aléatoire égal à la variance réalisée du sous-jacent.

Dans un modèle à trajectoires continues, un swap de variance peut être répliqué par un portefeuille statique contenant des options européennes et un portefeuille dynamique contenant le sous-jacent. Pour simplifier le traitement, on va approcher la somme dans le pay-off de produit par une intégrale :

$$H_T = N \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_s^2 ds - \sigma_K^2 \right\}.$$

Supposons que le sous-jacent S est décrit par

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t,$$

où μ_t et σ_t sont deux processus stochastiques. La formule d'Itô donne alors

$$\frac{1}{2} \int_0^T \sigma_s^2 ds = \int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \log \frac{S_T}{S_0} \quad (1.2.1)$$

Pour répliquer la variance intégrée, il suffit alors de répliquer les deux termes dans la partie droite.

Soit V_t la valeur du portefeuille qui réplique $\int_0^T \frac{dS_t}{S_t}$ et soit Q une probabilité risque-neutre. On a alors

$$V_t = e^{-r(T-t)} E \left[\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} | \mathcal{F}_t \right] = e^{-r(T-t)} \left\{ \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} + r(T-t) \right\}$$

2. Surface de volatilité, Peter TANKOV, Février 2015

d'où on déduit

$$dV_t = r(V_t - \delta_t S_t)dt + \delta_t dS_t \quad \text{avec} \quad \delta_t = \frac{e^{-r(T-t)}}{S_t} \quad (1.2.2)$$

Le premier terme de la partie droite de (1.2.1) peut donc être répliqué par un portefeuille auto-financant consistant à investir $e^{-r(T-t)}$ en actions et ayant la valeur initiale $V_0 = rTe^{-rT}$. Le deuxième terme dans la partie droite de (1.2.1) (le log-contrat) peut être répliqué par un portefeuille statique de calls et puts. Soit f une fonction C^2 . Alors il est facile de démontrer que pour tous F, x positifs,

$$f(x) = f(F) + f'(F)(x - F) + \int_0^F f''(K)(K - x)^+ dK + \int_F^\infty f''(K)(x - K)^+ dK.$$

Pour calculer le prix d'une option européenne d'échéance T et de pay-off $f(S_T)$, on pose $F = S_0 e^{rT}$ et calcule l'espérance de $e^{-rT} f(S_T)$ sous la probabilité risque-neutre :

$$\text{Prix} = e^{-rT} f(F) + \int_0^F f''(K)P(T, K)dK + \int_F^\infty f''(K)C(T, K)dK$$

où $P(T, K)$ est le prix d'un put et $C(T, K)$ le prix d'un call d'échéance T et strike K . En particulier, pour le log-contrat $f(x) = \log \frac{x}{S_0}$, on trouve

$$\text{Prix} = e^{-rT} rT - \int_0^F \frac{P(T, K)}{K^2} dK - \int_F^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK$$

En rajoutant ceci au prix du portefeuille de réplication pour le premier terme de (1.2.1), on trouve que σ_K qui annule la valeur du swap de variance satisfait :

$$e^{-rT} \sigma_K^2 = \frac{2}{T} \int_0^F \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T} \int_F^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK \quad (1.2.3)$$

1.3 SWAP DE VOLATILITÉ

Historiquement, les swaps de volatilité ont été introduits avant ceux de la variance. Cependant, les swaps de variance ont dominé à cause de la complexité liée à la couverture avec les dérivées de volatilité.

Le pay-off d'un swap de volatilité est défini par :

$$\text{Payoff}_T = N(\sigma_R - \sigma_K) \quad (1.3.1)$$

σ_R est la racine carré de la variance réalisée et σ_K est la volatilité "strike". On a montré dans la partie précédente que le swap de variance peut être bien répliqué, or ce n'est pas le cas. On peut écrire le payoff du swap de volatilité :

$$\text{Payoff}_T = N(\sqrt{\sigma_R^2(0, N, T)} - \sigma_K) \quad (1.3.2)$$

Et donc on a tendance à écrire :

$$\sigma_{K,Vol} = \sqrt{\sigma_{K,Var}}$$

Cette approche est fausse car elle ne prend en considération la convexité de la racine carrée : le payoff n'est linéaire en variance. Sous hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, on doit avoir : $\sigma_{K,Vol} < \sqrt{\sigma_{K,Var}}$, ce qui rejette cet estimateur. On peut montrer cela avec la relation de Jensen appliquée pour la fonction concave racine carrée :

$$\sigma_{K,Vol} = E[\sqrt{\sigma_R^2}] \leq \sqrt{E[\sigma_R^2]} = \sqrt{\sigma_{K,Var}} \quad (1.3.3)$$

1.3.1 • TRANSFORMÉE DE LAPLACE

Une approche alternative fait appel à la transformée de Laplace de la fonction racine carrée. Cette méthode a été introduite par Broadie and Jain³, ils ont proposé une solution analytique exacte en la transformée de Laplace de la racine carré qui s'écrit :

$$\forall x \geq 0 : \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-sx}}{s^{\frac{3}{2}}} ds$$

En prenant l'espérance des deux cotés de l'équation et en utilisant Fubini :

$$E[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1 - E[e^{-sx}]}{s^{\frac{3}{2}}} ds$$

Appliquée à la variance réalisée σ_R^2 , on obtient :

$$\sigma_{K,Vol} = E[\sqrt{\sigma_R^2}] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1 - E[e^{-s\sigma_R^2}]}{s^{\frac{3}{2}}} ds \quad (1.3.4)$$

3. Jain, Ashish & Broadie, Mark, The Effect of Jumps and Discrete Sampling on Volatility and Variance Swaps, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2008

1.4 CONCLUSION

La formule (1.2.3) nécessite une infinité d'options avec une distribution continue des strikes pour pouvoir répliquer σ_K , ce qui implique une erreur d'estimation des prix vu le nombre limité des options existantes dans le marché. EN outre, cette formulation dépend aussi du modèle choisi. En effet, on a considérer que le prix sport suit une diffusion continue et un drift déterministe mais inconnu, donc dans le cas d'un saut de prix, la réplication ne sera pas bonne. Au niveau pratique, une stratégie de couverture ne sera pas possible à cause des coûts des transactions.

Dans la suite du rapport, on présentera des exemples d'études des swpas de variance dans différents modèles de volatilité et dans un ordre croissant de complexité.

2 ETUDE DE LA VARIANCE SWAPS SUR DES MODÈLES SIMPLE.

La valorisation des Swaps de variance est basée sur la détermination de la variance "strike" σ_k^2 qui n'est que l'espérance sous la probabilité risque-neutre de la variance réalisée. Cette espérance dépend complètement de la modélisation de la variance. Dans cette section on présentera deux modèles : modèle de diffusion de saut de Merton et modèle de Heston. Le modèle de Black-Scholes a été déjà introduit dans la partie précédente.

2.1 MERTON JUMP DIFFUSION (MJD)

En 1976, Merton a introduit une extension du modèle de BS en prenant en considération la discontinuité éventuelles des rendements des actifs. Le modèle MJD ajoute un processus de Poisson q_t

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma S_t dZ_t + (J - 1)S_t dq_t \quad (2.1.1)$$

Avec le MB Z_t et le processus q_t sont indépendants et le paramètre de la taille des sauts $J > 0$. Le sens des sauts dépend donc de la valeur de J , qui peut être constant ou aléatoire :

- Si $J > 1$ le processus fait apparaître des sauts positifs.
- Si $J < 1$ le processus fait apparaître des sauts négatifs.

Dans (2.1.1), (q_t) est un processus de Poisson : q_t suit une loi de Poisson de paramètre d'intensité λ avec $\lambda > 0$: la fréquence des sauts est croissante en λ . Si l'intensité est constante, elle est dite "homogène" et "non-homogène" dans les autres cas. Finalement, l'intensité peut être un processus Cox–Ingersoll–Ross, qui est largement utilisé dans le domaine du risque de crédit dans les modèles de défaut. Dans notre cas on ne considère que le cas d'intensité homogène.

- $q_0 = 0$
- les incrément de q_t sont indépendantes.
- Pour tout $t, s \geq 0$, la fonction de répartition vérifie :

$$P(q_{s+t} - q_s = k) = P(q_t = k)_{s=0} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (2.1.2)$$

Dans la limite infinitésimale le processus se comporte de la façon suivante :

$$dq_t = \begin{cases} 0, \text{ avec probabilité } (1 - \lambda_t dt) \\ 1, \text{ avec probabilité } (\lambda_t dt) \end{cases}$$

Ainsi, si $dq_t = 1$, le spot effectue un saut de S_t à $(J - 1)S_t$, et quand $dq_t = 0$, l'effet saut est

éliminé et le processus se comporte comme un mouvement brownien géométrique. Le choix le plus répandu de la taille des sauts est une variable suivant une loi log-normale de moyenne α et écart-type δ .

$$J \sim \mathcal{LN}(\alpha, \delta^2) \Leftrightarrow \log(J) \sim \mathcal{N}(\alpha, \delta^2) \quad (2.1.3)$$

On peut donc écrire : $J \sim e^{\alpha+\delta\epsilon}$ avec $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Dans le modèle MJD on peut montrer que :

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2 dt + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{q_T} \log(J_i)^2 \quad (2.1.4)$$

En passant à l'espérance :

$$\sigma_{K,Var} = E[\sigma_R^2] = \sigma^2 + \lambda(a^2 + b^2) \quad (2.1.5)$$

Dans la figure ci-dessous, on calcule la volatilité implicite pour les prix du modèle MJD avec $\lambda = \frac{1}{2}$, $a = 0.1$ et $b = 0.3$ et $\sigma = 0.2$ par inversion par rapport au modèle de Black-Scholes

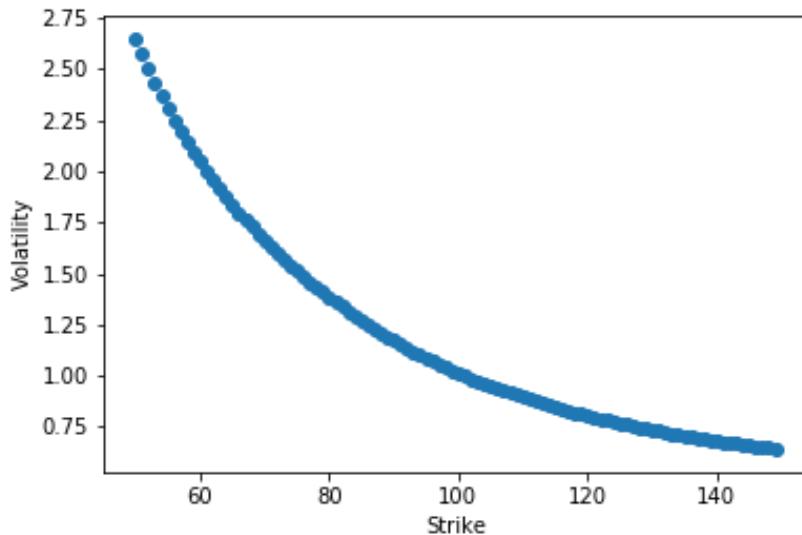


FIGURE 2 – Volatilité implicite calculée pour le modèle MJD. $S_0 = 100$,

2.2 MODÈLE DE VOLATILITÉ STOCHASTIQUE MODÈLE DE HESTON

Dans cette partie, on étudiera un modèle à volatilité stochastique : modèle de Heston. Ce processus est largement utilisé depuis son introduction par Steve Heston en 1993. En partant de

la formule générale des modèles à volatilité stochastique, le modèle de Heston dans un univers sans risque s'écrit :

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t (\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2) \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dW_t^1 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Pour s'assurer que la variance reste positive, les paramètres doivent vérifier l'inégalité : $2\kappa\theta > \sigma^4$ ⁴ Afin de valoriser les dérivées de la volatilité dans ce modèle, on a déjà plusieurs paramètres à notre disposition qui nous permettent de calculer l'espérance conditionnelle. Comme elle s'agit des équations d'intégrales ordinaires, les calculs donnent :

$$\begin{aligned} E[v_t|v_0] &= E\left[v_0 + \int_0^t \kappa(\theta - v_s) ds + \int_0^t \sigma_v \sqrt{v_s} dW_s^1 \middle| v_0\right] \\ &= E\left[v_0 + \int_0^t \kappa(\theta - v_s) ds \middle| v_0\right] \\ &= v_0 + \int_0^t \kappa(\theta - E[v_s|v_0]) ds. \end{aligned}$$

Cette dernière équation est équivalente à l'équation différentielle ordinaire suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dE[v_t|v_0]}{dt} &= \kappa(\theta - E[v_t|v_0]) \\ E[v_0|v_0] &= v_0 \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

La résolution de cette EDO donne :

$$E[v_t|v_0] = \theta + (v_0 - \theta)e^{-\kappa t} \quad (2.2.3)$$

Cette solution prend plusieurs forme selon le modèle de volatilité stochastique où on rencontrera le terme $e^{-\kappa t}$.

4. cette condition est connue sous le nom "Condition de Feller"

On peut maintenant déterminer facilement la variance strike $\sigma_{K,Var}^2$:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{K,Var}^2 &= E\left[\frac{1}{T} \int_0^T v_t dt | v_0\right] \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T E[v_t | v_0] dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T [\theta + (v_0 - \theta)e^{-\kappa t}] dt \\
 &= \frac{1}{T} [\theta T + \frac{v_0 - \theta}{\kappa} (1 - e^{-\kappa T})]
 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

De la même manière que la figure 2, on trace la volatilité implicite pour un sous-jacent qui suit le modèle de Heston pour $\theta = 8.08$, $\rho = -0.7$, et $\kappa = 4$

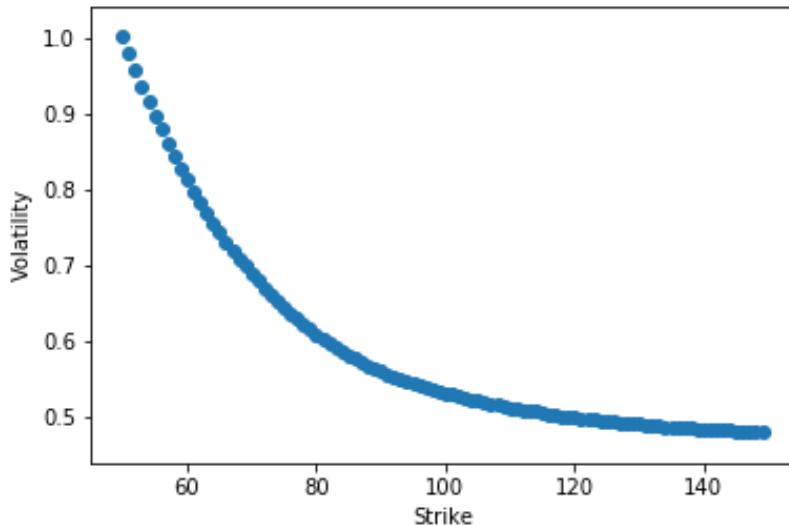


FIGURE 3 – Volatilité implicite calculée pour le modèle de Heston par inversion en modèle Black-Scholes,

2.3 CONCLUSION

Les modèles MJD et Heston permettent de comprendre et de modéliser quelques aspects de la volatilité : la diffusion des sauts et l'aspect imprévisible. Cependant, ces deux modèles sont loin de pouvoir répliquer théoriquement le comportement empirique observé dans le marché, ce qui exige une modélisation plus efficace et pertinente. Parmi les modèles les plus connus à cet égard est celui de Bergomi et qui constitue actuellement la base de plusieurs modèles sophistiqués de pricing des dérivées de la volatilité.

3 MODÈLE DE BERGOMI

Dans son article Smile dynamics II, Bergomi propose un modèle qui vise à pricer à la fois les options exotiques standards et les options générales sur la variance d'une manière cohérente, et permet de définir de manière indépendante les exigences sur :

- La dynamique de la volatilité de la Variance Swap.
- La corrélation entre les sous-jacents et les volatilités du Variance Swap à court et à long terme.

Dans cette article, Nous expliquerons le modèle mis en place par Bergomi pour la dynamique de la forward variance du swaps de variance. A partir de ceci on trouve la dynamique du sous jacent qui est cohérente avec ce modèle.

Pour simplifier, on appellera variance la forward variance du swaps de variance.

3.1 MODÈLISATION DE LA VARIANCE.

Notons V_t^T le prix en t de la variance swap de maturité T, donc $V_t^T = E_t[< \log(S) >_T]$. Notons alors

$\xi_t^T = \partial_T V_t^T$ la courbe de variance forward. Ainsi $\xi_t^T = E_t[\sigma_T^2]$ en particulier $\xi_t^t = \sigma_t^2$.

Ainsi le but à partir d'ici, est de trouver un modèle pour x_i^T .

3.2 MODÈLE DE BERGOMI À UN FACTEUR

Bergomi considère que ξ_t^T suit une loi log-normal, et considère que ξ_t^T à la dynamique suivante :

$$d\xi^T(t) = we^{-k(T-t)}\xi^T(t)dU_t \text{ avec } U_t \text{ un mouvement brownien.}$$

On trouve ainsi que :

$$\xi^T(t) = \xi^T(0)e^{we^{-k(T-t)}X_t - \frac{w^2}{2}e^{-2k(T-t)}E(X_t^2)} \text{ avec } X_t = \int_0^t e^{-k(t_u)}dU_u$$

X_t est un processus d'Orenstein Olenbeck. En simulant ce modèle on obtient différent trajectoire possible de notre variance forward :

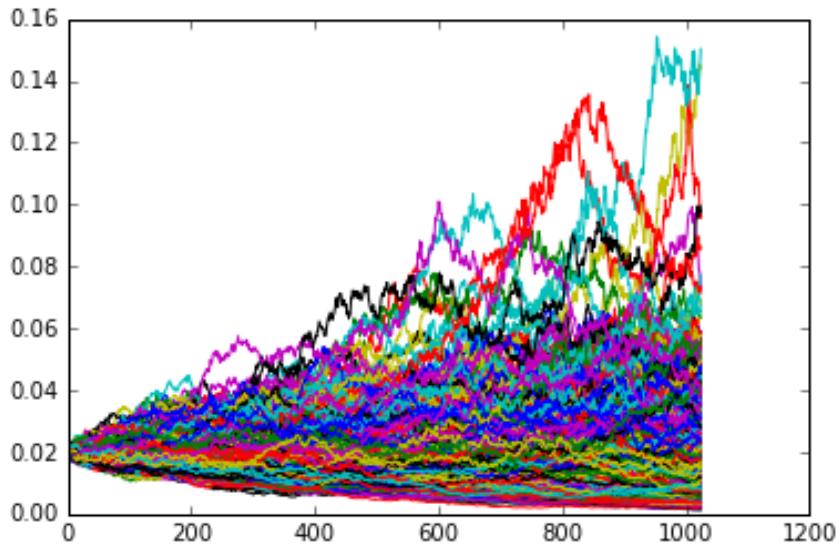


FIGURE 4 – Simulation de trajectoire possible de $\xi^T(t)$ pour un modèle de bergomi à un facteur.

A partir du modèle ci dessous on peut aussi déduire la dynamique de notre spot : $dS_t = rS_t dt + \sqrt{\xi_t^T} dW_t$ ce qui nous donne les trajectoire ci dessous.

Mais un seul facteur ne permet pas de modéliser proprement la variance forward observé. Pour cela Bergomi introduit un modèle à plusieurs facteurs

$$\begin{aligned}\xi_t^T &= \xi_0^T ((1 - \gamma_T) e^{w_T x_t^T - \frac{w_T^2}{2} E(x_t^T)^2} + \gamma_T e^{\beta_T w_T x_t^T - \frac{\beta_T^2 w_T^2}{2} E(x_t - T)^2}) \text{ avec :} \\ x_t^T &= \sum_n \theta_n e^{-k_n(T-t)} \int_0^t e^{-k_n(s)} dW_s^n\end{aligned}$$

avec les W^n des mouvements brownien pour matrice de corrélation $(\rho_{i,j})$

3.3 MODÈLE À DEUX FACTEURS

Afin d'étudier la pertinence du modèle de Bergomi, on étudiera le modèle à 2 facteurs qui a pour dynamique :

$$d\xi^T(t) = w\xi^T(t)(e^{-k_1(T-t)}dU_t + \theta e^{-k_2(T-t)}dW_t)$$

Avec W et U des mouvement brownien de corrélation ρ .

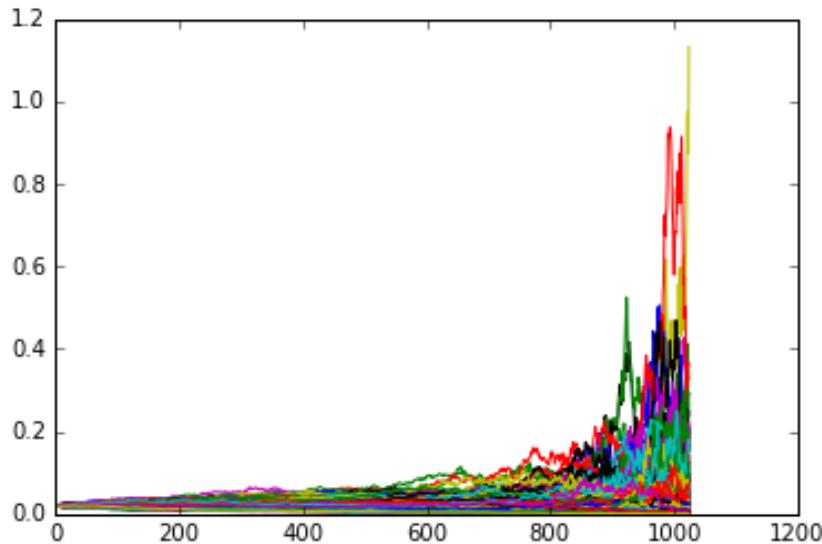


FIGURE 5 – Simulation de trajectoire possible de $\xi^T(t)$ pour un modèle de bergomi à deux facteur.

Etudions les résultats donnés par ce modèle et comparons les avec les résultats théoriques trouvé par Bergomi.

— La volatilité implicite at the money.

Dans l'article de smile dynamics II, Bergomi a prouvé que la volatilité implicite est en $O(\frac{1}{\sqrt{T}})$. On peut effectivement vérifier ceci par des simulation comme dans la figure ci dessous.

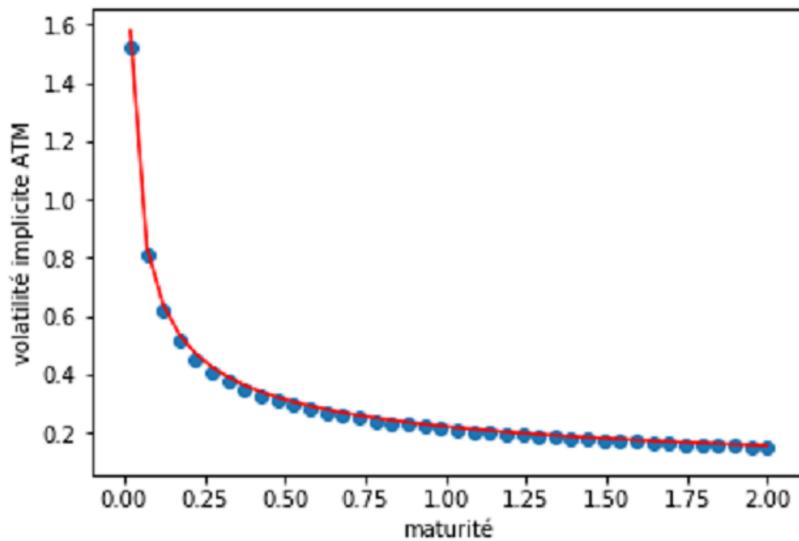


FIGURE 6 – Volatilité implicite at the money pour des différentes valeurs de maturité.

Dans le graphe ci-dessus les points bleue représente les différents valeurs de la volatilité implicite pour différente valeur de maturité T , et le graphe rouge représente la meilleur courbe

en $\frac{A}{\sqrt{T}}$ qui fit le mieux notre modèle, ici $A=0.223$.

On peut aussi voir cela à partir de la surface de volatilité donnée par ce modèle.

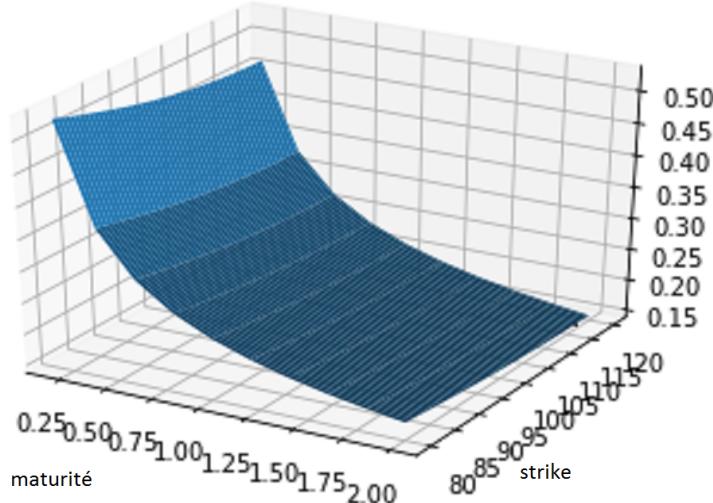


FIGURE 7 – surface de volatilité obtenue par le modèle de bergomi.

— le skew at the money

De même Bergomi à prouver théoriquement que la skew $\psi = |\frac{\partial \sigma(k, T)}{\partial k}|_{k=0}$ avec $k = \log(\frac{K}{S})$ est en $O(\frac{1}{\sqrt{T}})$ et on peut effectivement vérifier ce résultats théorique en simulant le skew.

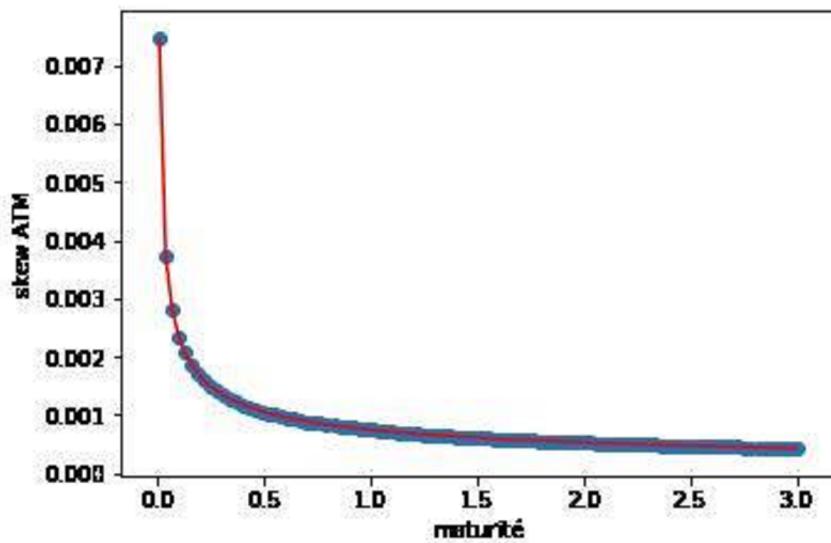


FIGURE 8 – Skew at the money pour des différentes valeurs de maturité.

Dans le graphe ci-dessus les points bleue représente les différents valeurs du skew pour

différente valeur de maturité T , et le graphe rouge représente la meilleure courbe en $\frac{A}{\sqrt{T}}$ qui fit le mieux notre modèle, ici $A = 5.510^{-4}$.

On s'aperçoit finalement que les résultats théorique concorde avec les simulations. Mais est ce que ce modèle concorde avec les résultats du marché ?

3.4 CONCORDANCE DU MODÈLE DE BERGOMI AVEC LES DONNÉES DU MARCHÉ.

Dans cette partie nous allons comparer les performances du modèle de Bergomi avec les vrais valeur du marché. Pour cela dessinons le skew réel sur le marché on obtient le graphe ci dessous :

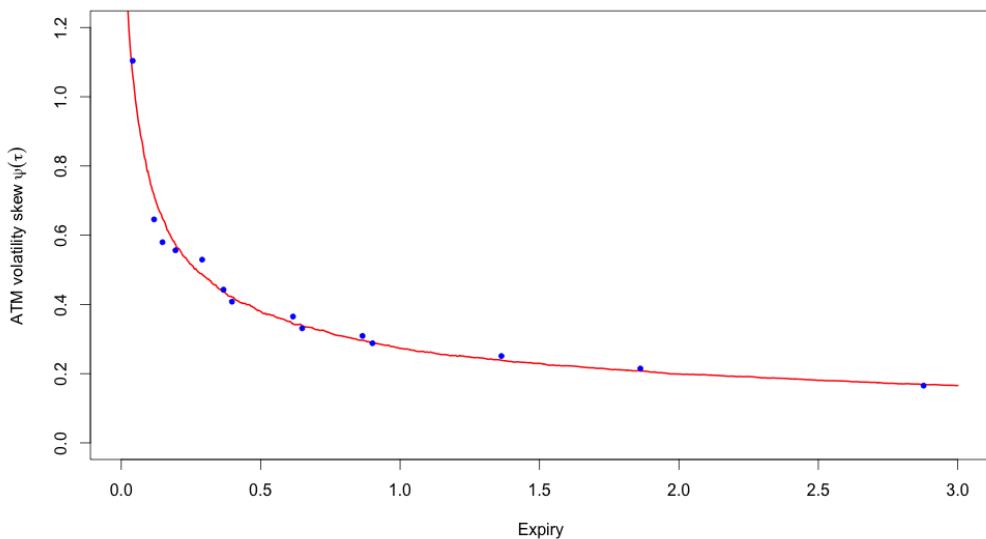


FIGURE 9 – Skew at the money

Les points noir désigne les valeur du skew sue le marché pour les différentes maturité, et le graphe rouge est le meilleur graphe en $\frac{A}{T^c}$ approchant nos donnés, et on trouve que $c=0.4$. Ce qui est complètement différent du modèle obtenue par Bergomi.

4 AMÉLIORATION DU MODÈLE DE BERGOMI ET LE MODÈLE DE ROUGH BERGOMI

Pour améliorer le modèle introduit par Bergomi et le rendre plus conforme à la réalité du marché, Christian bayer, Peter Friz et Jim Gatheral introduisent un modèle de rough bergomi.

Partant du constat fait par Rosenbaum, Gatheral and Jaisson que les distributions d'incrément du logarithme de la variance réalisée étaient proches de Gaussiennes, et que pour des

périodes de temps raisonnables d'intérêt pratique la série chronologique de la variance réalisée a été jugée compatible avec le modèle simple :

$$\log(\sigma_{t+\delta}) - \log(\sigma_t) = v(W_{t+\delta}^H - W_t^H) \text{ avec } W_t^H \text{ un mouvement brownien fractionnaire } W_t^H = A\left(\int_{-\infty}^t \frac{dW_s}{(t-s)^\gamma} - \int_{-\infty}^0 \frac{dW_s}{(-s)^\gamma}\right) \text{ ou } \gamma = \frac{1}{2} - H$$

On peut vérifier ceci sur les données du marché, pour différentes valeurs de δ

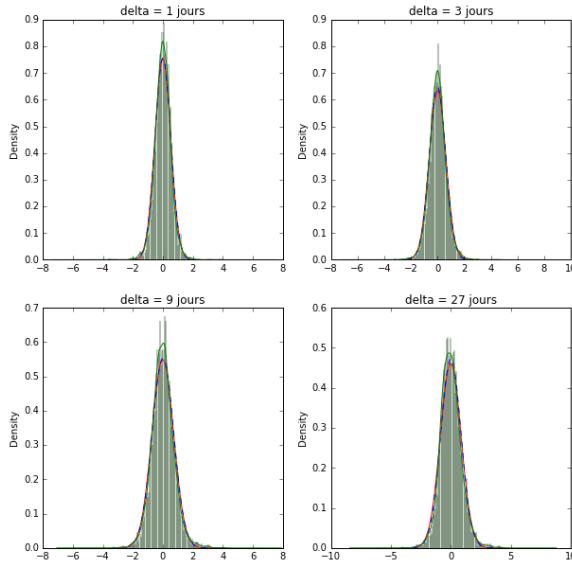


FIGURE 10 – histogramme de $\log(\sigma_{t+\delta}) - \log(\sigma_t)$ pour différentes valeurs de δ

En posant $v_t = \sigma_t^2$ on obtient :

$$\begin{aligned} \log(v_u) - \log(v_t) &= 2A\left(\int_{-\infty}^t \frac{dW_s}{(u-s)^\gamma} - \int_{-\infty}^t \frac{dW_s}{(t-s)^\gamma}\right) \\ &= 2A\left(\int_t^u \frac{dW_s}{(u-s)^\gamma} - \int_{-\infty}^t \frac{1}{(u-s)^\gamma} - \frac{1}{(t-s)^\gamma} dW_s\right) \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} M_t(u) &= \int_t^u \frac{dW_s}{(u-s)^\gamma} = \sqrt{2H}W_t^H \text{ et} \\ Z_t(u) &= \int_{-\infty}^t \frac{1}{(u-s)^\gamma} - \frac{1}{(t-s)^\gamma} dW_s. \end{aligned}$$

Donc par la propriété du brownien M_t et Z_t sont indépendant, et W_t^H un processus de Volterra.

Ainsi on a la dynamique suivante sous probabilité risque neutre :

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \sqrt{v_t}dU_t \\ v_u &= v_t \exp(C_1 W_t^H + C_2 Z_t(u)) \end{aligned}$$

Avec W et U mouvements brownien de corrélation ρ . Introduisons la fonction F tel que si X variable aléatoire, $F(X) = e^{X - \frac{1}{2}E(X^2)}$. On trouve ainsi que :

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 F\left(\int_0^t \sqrt{v_u} dU_u\right) \\ v_u &= v_0 F(C_1 W_t^H) \end{aligned}$$

On a $\text{Var}[W_t^H] = t^{2H}$, et si $t < s$ $\text{Cov}(W_s^H, W_t^H) = t^{2H}G(\frac{s}{t})$ avec pour $x > 1$:

$$\begin{aligned} G(x) &= 2H \int_0^1 \frac{ds}{(1-s)^\gamma (x-s)^\gamma} \\ &= \frac{1-2\gamma}{1-\gamma} x^\gamma F_1^2(1, \gamma, 2-\gamma, x) \end{aligned}$$

F_1^2 une fonction hypergéométrique.

De plus on a que $E[U_s W_t^H] = \rho \frac{\sqrt{2H}}{H+\frac{1}{2}} (t^{H+\frac{1}{2}} - (t - \min(t, s))^{H+\frac{1}{2}})$.

Ces résultats vont nous permettre de simuler les deux processus U_t et W_t^H par l'algorithme suivant :

- On discrétise le pas de temps entre $[0, T]$ et $t_i = \frac{iT}{N}$ construit la matrice de covariance conjointe de U_{t_i} et $W_{t_j}^H$ pour n pas de temps qu'on note C .
- On décompose C par une méthode Cholesky $C = L^T L$ avec L triangulaire inférieur.
- Par la suite on crée un vecteur de loi gaussienne, et on multiplie ce vecteur par L ainsi $L.v$ suit donc une loi $N(0, L^T L)$ et on déduit donc U_t et W_t^H .

A partir de la on prend les valeurs suivante pour les paramètres : $H=0.007$, $\rho=-0.9$ $S_0 = 100$ et $\xi_0 = 0.529$. Pour simuler ceci et étant donné que la fonction hypergéométrique n'est pas bien défini, on définit la fonction de façon discréte. On simule ensuite U_t et W_t^H et on obtient donc les simulations ci dessous :

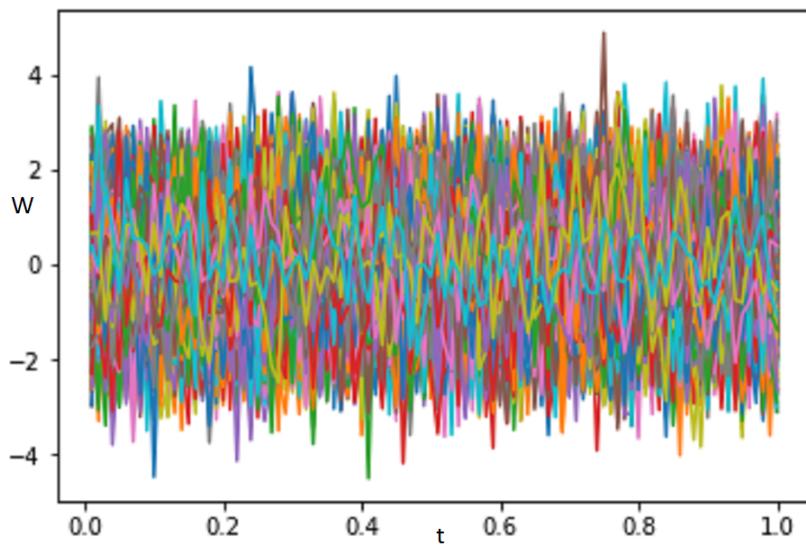


FIGURE 11 – Simulation de W_t^H pour différentes dates t .

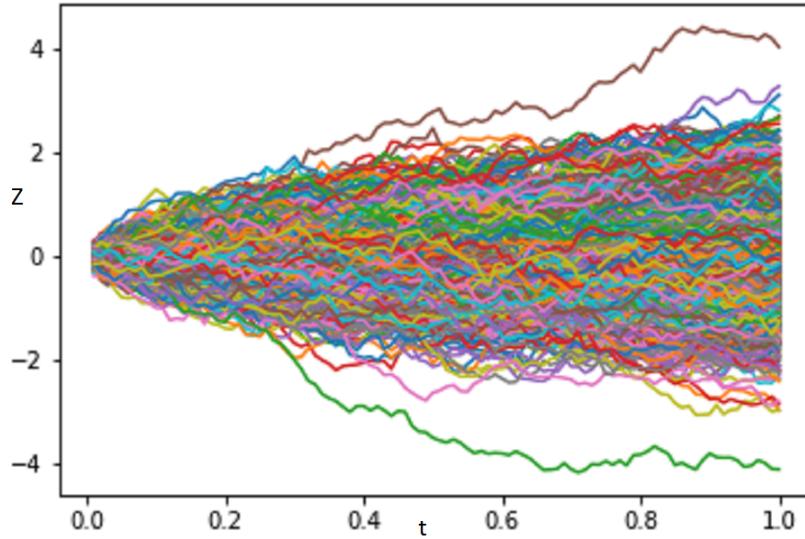


FIGURE 12 – Simulation de U_t pour différentes dates t .

On peut aussi vérifier si U_t et W_t^H sont bien centrés pour tout t .

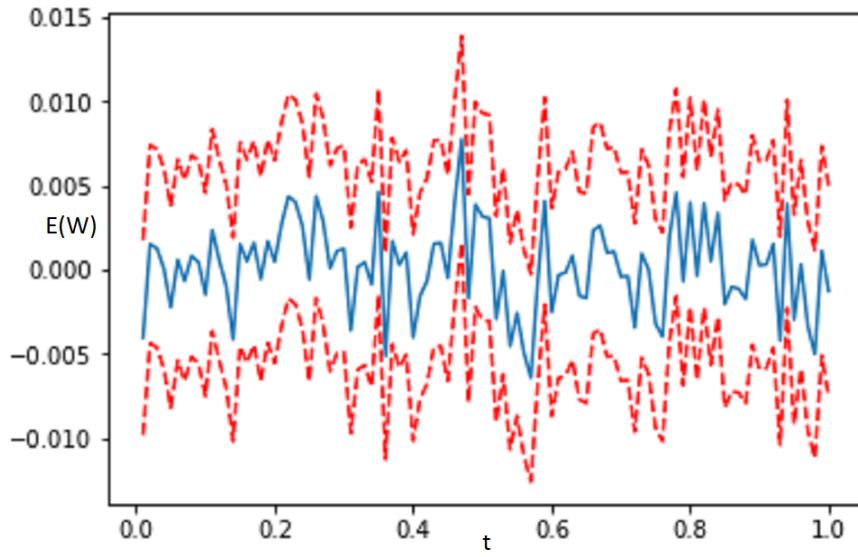


FIGURE 13 – Simulation de $E(W_t^H)$ pour différentes dates t avec l'intervalle de confiance.

On remarque que $E(W_t^H)$ est bien égale 0 avec un intervalle de confiance assez petit.

De même pour $E(U_t)$ on obtient :

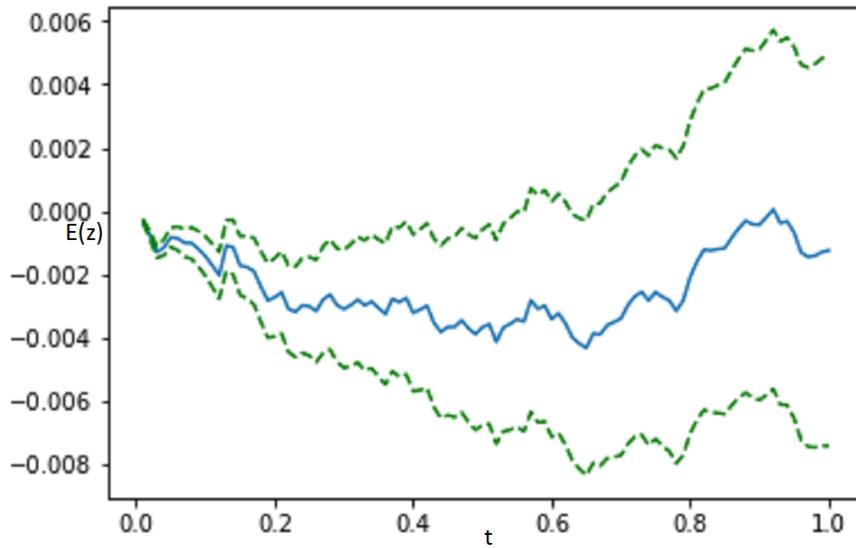


FIGURE 14 – Simulation de $E(U_t)$ pour différentes dates t avec l'intervalle de confiance.

— Amélioration du skew at the money.

Dans l'article, il a été prouvé que la skew at the money est d'ordre $\frac{1}{t^\gamma}$. Regardant par simulation si ceci concorde avec les résultats trouvés :

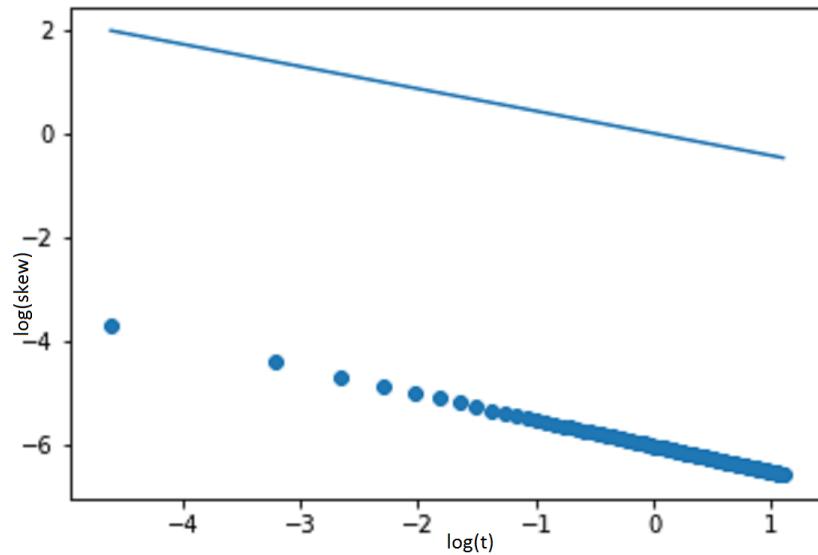


FIGURE 15 – Simulation du $\log(\text{skew})$ en fonction de $\log(t)$.

Dans le graphe ci dessus, on voit que le $\log(\text{skew})$ est parfaitement linéaire en fonction de $\log(\text{maturité})$ et il semble avoir la même pente que $\gamma \log(t)$ afin de vérifier ceci on fait une régressions linéaire sur le $\log(\text{skew})$ en fonction de la $\log(\text{maturité})$, on obtient :
 $\log(\text{skew}) = 0.494 * \log(\text{maturité}) - 5.9$.

Ceci concorde parfaitement avec les résultats théorique.

— Smile at the money par du rough Bergomi.

On simule le smile pour différentes valeurs de strike et de maturité, et on trace avec les intervalles de confiance.

Pour calculer les intervalles de confiance pour le smile, on note σ_{BS}^e l'estimateur de la volatilité implicite, on a $BS(\sigma_{BS}^e) = \frac{1}{n} \sum_i^n (S_T^i - K)^+$ donc $\sigma_{BS}^e = BS^{-1}(\frac{1}{n} \sum_i^n (S_T^i - K)^+)$ donc on a donc par la méthode substitution $\sqrt{n}(\sigma_{BS}^e - \sigma_{BS})$ suit une loi $N(0, \frac{Var((S_T^i - K)^+)}{vega(\sigma_{BS}^e)^2 * n})$

on obtient les smiles suivant :

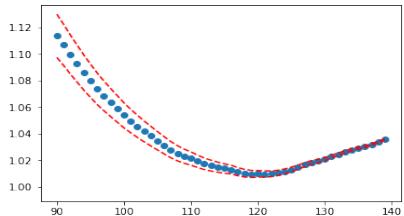


FIGURE 16 – $T=0.041$

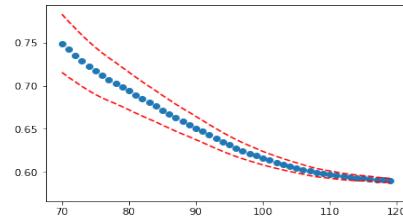


FIGURE 17 – $T=0.12$

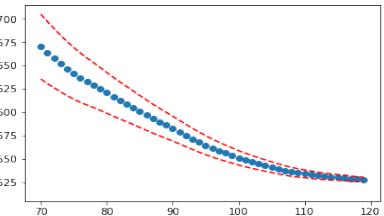


FIGURE 18 – $T=0.19$

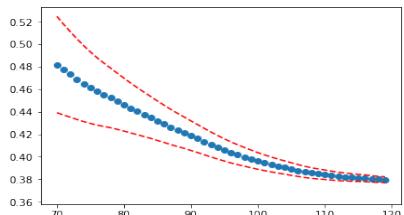


FIGURE 19 – $T=0.29$

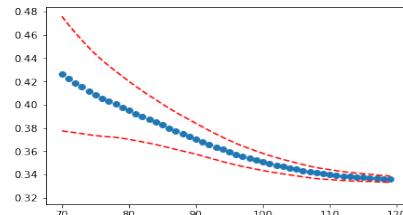


FIGURE 20 – $T=0.37$

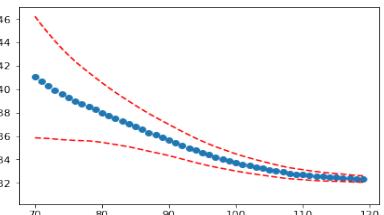


FIGURE 21 – $T=0.40$

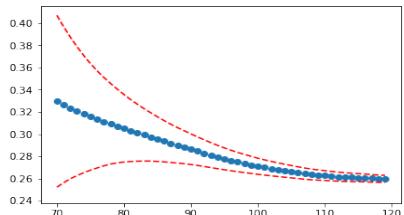


FIGURE 22 – $T=0.62$

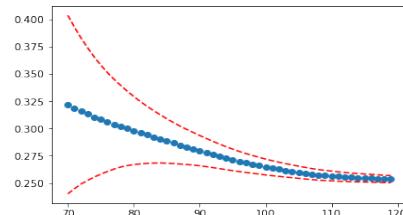


FIGURE 23 – $T=0.65$

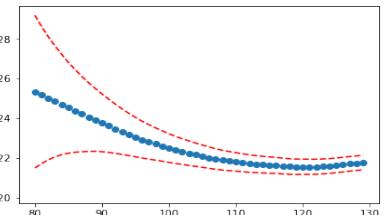


FIGURE 24 – $T=0.90$

Et plus généralement voici la surface de volatilité obtenu par ce modèle.

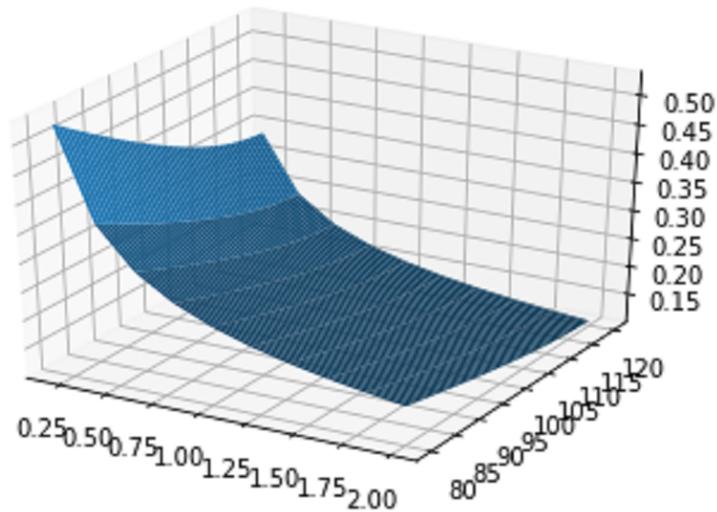


FIGURE 25 – surface de volatilité obtenue par le modèle de rough bergomi.

Finalement ce modèle est assez proches des résultats du marché comme le montre l'article de Gatheral, Friz et Bayer à partir des deux graphes ci dessous :

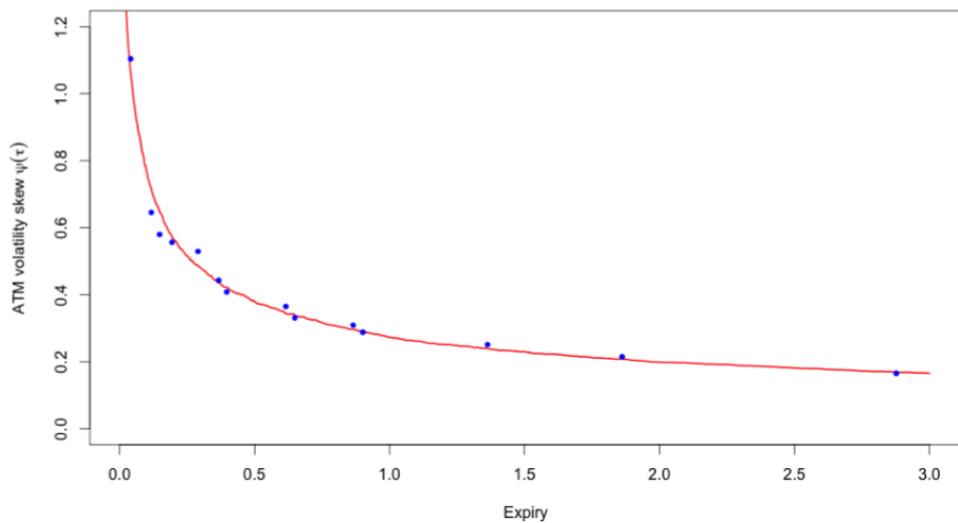


FIGURE 26 – Les points bleus sont des skew empiriques ATM ; La ligne rouge est de la simulation rBergomi.

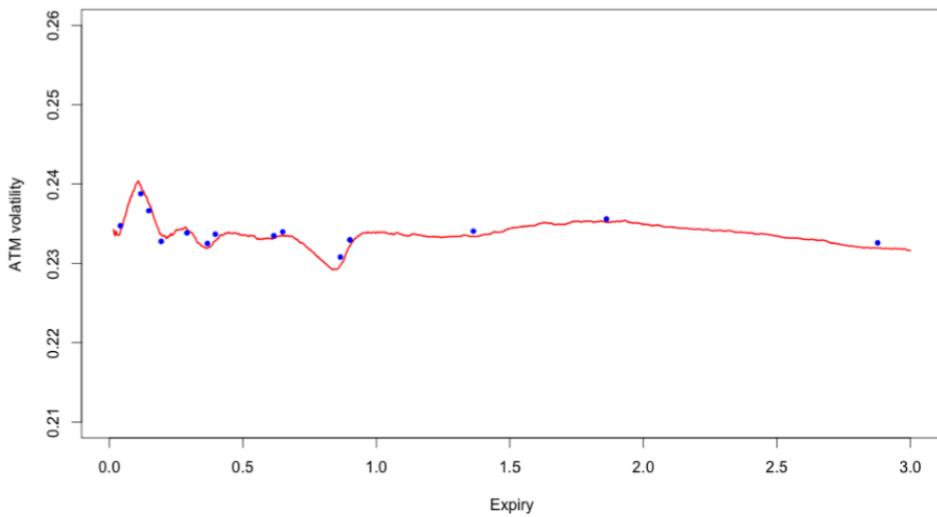


FIGURE 27 – Les points bleus sont des volatilités empiriques ATM ; La ligne rouge est de la simulation rBergomi.

5 CONCLUSION

En conclusion, à partir de tout les modèles présenté dans ce rapport nous avons montré que Le modèle de rBergomi conduit naturellement à un modèle de prix des options qui est remarquablement compatible avec la forme observée de la surface de volatilité implicite dans le cas particulier de SPX. De plus, Le modèle rBergomi est particulièrement tractable et semble s'adapter très bien à la volatilité SPX.

RÉFÉRENCES

- [1] Surface de volatilité, Peter TANKOV
- [2] Pricing of Variance and Volatility Swaps, Emil S. F. Stamp & Thomas F. Thorsen
- [3] Volatility Derivatives – Variance and Volatility Swaps, Joakim Marklund & Olle Karlsson
- [4] Smile Dynamics II, Lorenzo Bergomi
- [5] Pricing Under Rough Volatility, Christian Bayer, Peter K. Friz & Jim Gatheral
- [6] Options, Futures, and Other Derivatives, John Hull
- [7] K. Demeterfi, E. Derman, M. Kamal, J. Zou, More than you ever wanted to know about volatility swaps.