

Variance swap

Ayoub Ghriss ElGhali Lalami

Département de mathématiques appliquées
École Polytechnique

Mars 2017

- 1 Introduction aux swaps de variance
- 2 Swaps de variance pour des modèles simple
 - Merton Jump diffusion
 - Modèle d'Heston
- 3 Modèle de Bergomi
 - Introduction au modèle
 - Modèle à un facteur
 - Modèle à deux facteur
 - Concordance du modèle de Bergomi avec les données du marché.
- 4 Modèle de rBergomi
 - Introduction au modèle
 - Simulation du modèle.
 - Concordance du modèle avec les données du marché

Définition du variance swap

Un swap de variance a un pay-off à l'échéance égal à :

$$H_T = N \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_s^2 ds - \sigma_K^2 \right\} = \frac{NA}{n} \sum_{i=1}^n \left(\log \frac{S_i}{S_{i-1}} \right)^2 - N\sigma_K^2$$

- $A=250$ est le nombre moyen de jours ouvrés dans l'année ;
- N est le nominal du contrat ;
- n représente le nombre de jours ouvrés jusqu'à l'échéance T ;
- σ_K est la volatilité 'strike'.

Pricer les variances swap

La formule d'Itô donne alors

$$\frac{1}{2} \int_0^T \sigma_s^2 ds = \int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \log \frac{S_T}{S_0} \quad (1)$$

Soit V_t la valeur du portefeuille qui réplique $\int_0^T \frac{dS_t}{S_t}$ on a :

$$dV_t = r(V_t - \delta_t S_t)dt + \delta_t dS_t \text{ avec } \delta_t = \frac{e^{-r(T-t)}}{S_t} \quad (2)$$

Pour le deuxième terme on utilise la formule suivante :

$$f(x) = f(F) + f'(F)(x-F) + \int_0^F f''(K)(K-x)^+ dK + \int_F^\infty f''(K)(x-K)^+ dK.$$

En prenant : $f(x) = \log \frac{x}{S_0}$, $x = S_T$ et en passant à l'espérance on a :

$$\text{Prix} = e^{-rT} rT - \int_0^F \frac{P(T, K)}{K^2} dK - \int_F^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK$$

- Pas de continuités des valeurs du strike sur le marché on discrétise :

$$\frac{2e^{rT}}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} Q_i(K_i) - \frac{1}{T} \left(\frac{F}{K_0} - 1 \right)^2 \quad (3)$$

- Valeurs approchés.
- Problème potentielle pour des petites valeurs de K.
- Objectif : Trouver un modèle concordant avec la réalité du marché pour pouvoir pricer la variance swap.

- 1 Introduction aux swaps de variance
- 2 Swaps de variance pour des modèles simple
 - Merton Jump diffusion
 - Modèle d'Heston
- 3 Modèle de Bergomi
 - Introduction au modèle
 - Modèle à un facteur
 - Modèle à deux facteur
 - Concordance du modèle de Bergomi avec les données du marché.
- 4 Modèle de rBergomi
 - Introduction au modèle
 - Simulation du modèle.
 - Concordance du modèle avec les données du marché

Introduction au modèle MJD

Merton a introduit une extension du modèle de BS en prenant en considération la discontinuité éventuelles des rendements des actifs. Le modèle MJD ajoute un processus de Poisson q_t

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma S_t dZ_t + (J - 1) S_t dq_t \quad (4)$$

- (q_t) est un processus de Poisson de paramètre λ .

-

$$J \sim \mathcal{LN}(\alpha, \delta^2) \Leftrightarrow \log(J) \sim \mathcal{N}(\alpha, \delta^2) \quad (5)$$

Dans le modèle MJD on peut montrer que :

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2 dt + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{qT} \log(J_i)^2 \quad (6)$$

En passant à l'espérance :

$$\sigma_{K, Var} = E[\sigma_R^2] = \sigma^2 + \lambda(a^2 + b^2) \quad (7)$$

$a = 0.1$ et $b = 0.3$ et $\sigma = 0.2$.

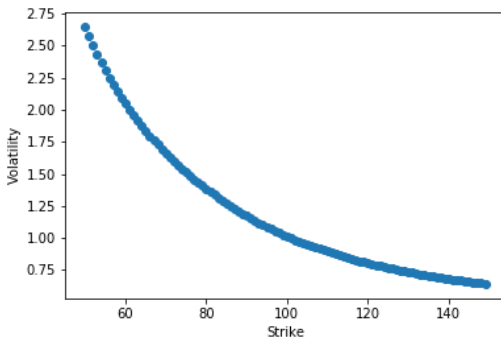


Figure – Volatilité implicite calculée pour le modèle MJD. $S_0 = 100$,

- 1 Introduction aux swaps de variance
- 2 Swaps de variance pour des modèles simple
 - Merton Jump diffusion
 - **Modèle d'Heston**
- 3 Modèle de Bergomi
 - Introduction au modèle
 - Modèle à un facteur
 - Modèle à deux facteur
 - Concordance du modèle de Bergomi avec les données du marché.
- 4 Modèle de rBergomi
 - Introduction au modèle
 - Simulation du modèle.
 - Concordance du modèle avec les données du marché

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t (\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2) \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dW_t^1 \end{cases} \quad (8)$$

On peut calculer facilement $E[v_t|v_0]$

$$E[v_t|v_0] = \theta + (v_0 - \theta)e^{-\kappa t} \quad (9)$$

ce qui Implique :

$$\begin{aligned} \sigma_{K,Var}^2 &= E\left[\frac{1}{T} \int_0^T v_t dt | v_0\right] \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T E[v_t | v_0] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T [\theta + (v_0 - \theta)e^{-\kappa t}] dt \\ &= \frac{1}{T} \left[\theta T + \frac{v_0 - \theta}{\kappa} (1 - e^{-\kappa T}) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Smile Heston

$\theta = 0.08$, $\rho = -0.7$, et $\kappa = 4$

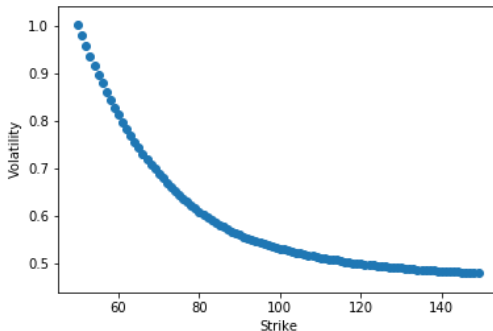


Figure – Volatilité implicite calculée pour le modèle de Heston par inversion en modèle Black-Scholes,

- 1 Introduction aux swaps de variance
- 2 Swaps de variance pour des modèles simple
 - Merton Jump diffusion
 - Modèle d'Heston
- 3 **Modèle de Bergomi**
 - **Introduction au modèle**
 - Modèle à un facteur
 - Modèle à deux facteur
 - Concordance du modèle de Bergomi avec les données du marché.
- 4 **Modèle de rBergomi**
 - Introduction au modèle
 - Simulation du modèle.
 - Concordance du modèle avec les données du marché

Introduction a modèle de bergomi

Objectif :

- Proposer un modèle qui vise à pricer à la fois les options exotiques standards et les options générales sur la variance d'une manière cohérente.
- Répondre aux exigences sur la dynamique de la volatilité de la Variance Swap.
- Reproduire la corrélation entre les sous-jacents et les volatilités du Variance Swap à court et à long terme.

Bergomi introduit les notations suivantes :

- V_t^T le prix en t de la variance swap de maturité T, donc $V_t^T = E_t[\langle \log(S) \rangle_T]$.
- $\xi_t^T = \partial_T V_t^T$ la courbe de variance forward. $\xi_t^T = E_t[\sigma_T^2]$ en particulier $\xi_t^t = \sigma_t^2$.

- 1 Introduction aux swaps de variance
- 2 Swaps de variance pour des modèles simple
 - Merton Jump diffusion
 - Modèle d'Heston
- 3 **Modèle de Bergomi**
 - Introduction au modèle
 - **Modèle à un facteur**
 - Modèle à deux facteur
 - Concordance du modèle de Bergomi avec les données du marché.
- 4 Modèle de rBergomi
 - Introduction au modèle
 - Simulation du modèle.
 - Concordance du modèle avec les données du marché

Modèle de Bergomi à un facteur

on considère la dynamique suivante de ξ_t^T

$$d\xi^T(t) = w e^{-k(T-t)} \xi^T(t) dU_t$$

On trouve ainsi que :

$$\xi^T(t) = \xi^T(0) e^{w X_t - \frac{w^2}{2} \int_0^t e^{-2k(T-u)} du} \text{ avec } X_t = \int_0^t e^{-k(T-u)} dU_u$$

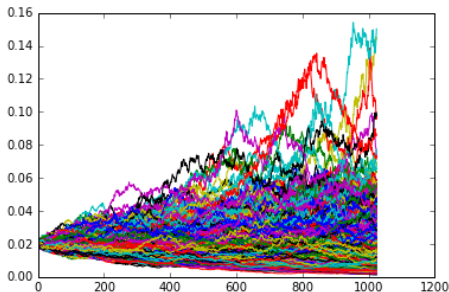


Figure – Simulation de trajectoire possible de $\xi^T(t)$ pour un modèle de bergomi à un facteur.

- 1 Introduction aux swaps de variance
- 2 Swaps de variance pour des modèles simple
 - Merton Jump diffusion
 - Modèle d'Heston
- 3 **Modèle de Bergomi**
 - Introduction au modèle
 - Modèle à un facteur
 - **Modèle à deux facteur**
 - Concordance du modèle de Bergomi avec les données du marché.
- 4 **Modèle de rBergomi**
 - Introduction au modèle
 - Simulation du modèle.
 - Concordance du modèle avec les données du marché

Modèle de Bergomi à deux facteur

$$d\xi^T(t) = w\xi^T(t)(e^{-k_1(T-t)}dU_t + \theta e^{-k_2(T-t)}dW_t)$$

Avec W et U des mouvement brownien de corrélation ρ .

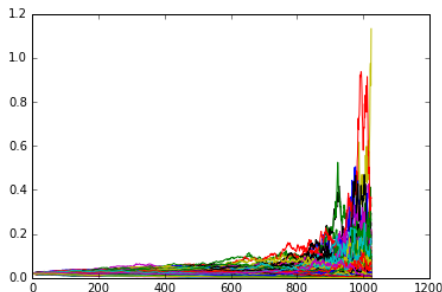


Figure – Simulation de trajectoire possible de $\xi^T(t)$ pour un modèle de bergomi à deux facteur.

Volatilité Implicite at the money

Dans le modèle de Bergomi, on peut prouver que la volatilité implicite est en $O(\frac{1}{\sqrt{T}})$.

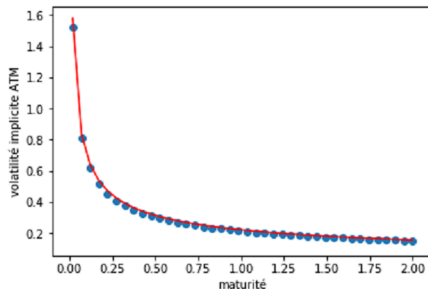


Figure – Volatilité implicite at the money pour des différentes valeurs de maturité.

Surface de volatilité

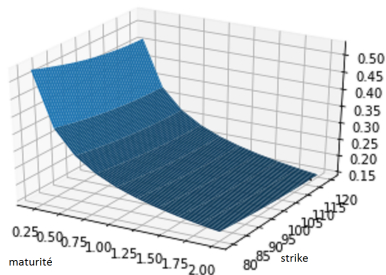


Figure – surface de volatilité obtenue par le modèle de bergomi.

skew at the money

De même Bergomi à prouver théoriquement que la skew $\psi = \left| \frac{\partial \sigma(k, T)}{\partial k} \right|_{k=0}$ avec $k = \log\left(\frac{K}{S}\right)$ est en $O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$ et on peut effectivement vérifier ce résultats théorique en simulant le skew.

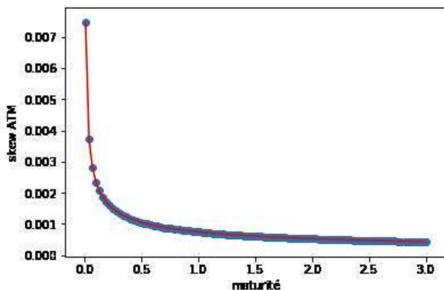


Figure – Skew at the money pour des différentes valeurs de maturité.

Est ce que ce modèle concorde avec les résultats du marché?

- 1 Introduction aux swaps de variance
- 2 Swaps de variance pour des modèles simple
 - Merton Jump diffusion
 - Modèle d'Heston
- 3 **Modèle de Bergomi**
 - Introduction au modèle
 - Modèle à un facteur
 - Modèle à deux facteur
 - **Concordance du modèle de Bergomi avec les données du marché.**
- 4 **Modèle de rBergomi**
 - Introduction au modèle
 - Simulation du modèle.
 - Concordance du modèle avec les données du marché

Concordance du modèle de Bergomi avec les données du marché.

Dans cette partie nous allons comparer les performances du modèle de Bergomi avec les vraies valeurs du marché. Pour cela dessinons le skew réel sur le marché on obtient le graphique ci dessous :

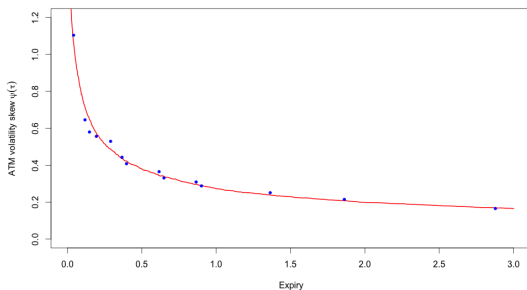


Figure – Skew at the money

Les points noirs désignent les valeurs du skew sur le marché pour les différentes

- 1 Introduction aux swaps de variance
- 2 Swaps de variance pour des modèles simple
 - Merton Jump diffusion
 - Modèle d'Heston
- 3 Modèle de Bergomi
 - Introduction au modèle
 - Modèle à un facteur
 - Modèle à deux facteur
 - Concordance du modèle de Bergomi avec les données du marché.
- 4 **Modèle de rBergomi**
 - **Introduction au modèle**
 - Simulation du modèle.
 - Concordance du modèle avec les données du marché

Amélioration du modèle de bergomi et le modèle de rough Bergomi

Partant du constat fait par Rosenbaum, Gatheral and Jaisson :

$$\log(\sigma_{t+\delta}) - \log(\sigma_t) = \nu(W_{t+\delta}^H - W_t^H)$$

W_t^H un mouvement brownien fractionnaire

$$W_t^H = A\left(\int_{-\infty}^t \frac{dW_s}{(t-s)^\gamma} - \int_{-\infty}^0 \frac{dW_s}{(-s)^\gamma}\right)$$

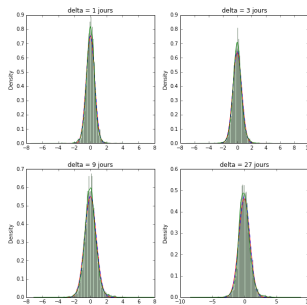


Figure – histogramme de $\log(\sigma_{t+\delta}) - \log(\sigma_t)$ pour différentes valeurs de δ

En posant $v_t = \sigma_t^2$ on obtient :

$$\begin{aligned} \log(v_u) - \log(v_t) &= 2A \left(\int_{-\infty}^t \frac{dW_s}{(u-s)^\gamma} - \int_{-\infty}^t \frac{dW_s}{(t-s)^\gamma} \right) \\ &= 2A \left(\int_t^u \frac{dW_s}{(u-s)^\gamma} - \int_{-\infty}^t \frac{1}{(u-s)^\gamma} - \frac{1}{(t-s)^\gamma} dW_s \right) \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} M_t(u) &= \int_t^u \frac{dW_s}{(u-s)^\gamma} = \sqrt{2H} W_t^H \text{ et} \\ Z_t(u) &= \int_{-\infty}^t \frac{1}{(u-s)^\gamma} - \frac{1}{(t-s)^\gamma} dW_s. \end{aligned}$$

Donc par la propriété du brownien M_t et Z_t sont indépendants, et W_t^H un processus de Volterra. Ainsi on a la dynamique suivante sous probabilité risque neutre :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sqrt{v_t} dU_t$$

$$v_u = v_t \exp(C_1 W_t^H + C_2 Z_t(u))$$

Avec W et U mouvements brownien de corrélation ρ . Introduisons la fonction F tel que si X variable aléatoire, $F(X) = e^{X - \frac{1}{2}E(X^2)}$. On trouve ainsi que :

$$S_t = S_0 F\left(\int_0^t \sqrt{v_u} dU_u\right)$$

$$v_u = v_0 F(C_1 W_t^H)$$

- 1 Introduction aux swaps de variance
- 2 Swaps de variance pour des modèles simple
 - Merton Jump diffusion
 - Modèle d'Heston
- 3 Modèle de Bergomi
 - Introduction au modèle
 - Modèle à un facteur
 - Modèle à deux facteur
 - Concordance du modèle de Bergomi avec les données du marché.
- 4 **Modèle de rBergomi**
 - Introduction au modèle
 - **Simulation du modèle.**
 - Concordance du modèle avec les données du marché

Méthode de simulation du modèle obtenue par rBergomi

On a $Var[W_t^H] = t^{2H}$, et si $t < s$ $Cov(W_s^H, W_t^H) = t^{2H} G(\frac{s}{t})$ avec pour $x > 1$:

$$G(x) = 2H \int_0^1 \frac{ds}{(1-s)^\gamma (x-s)^\gamma}$$
$$= \frac{1-2\gamma}{1-\gamma} x^\gamma F_1^2(1, \gamma, 2-\gamma, x)$$

F_1^2 une fonction hypergéométrique.

De plus on a que $E[U_s W_t^H] = \rho \frac{\sqrt{2H}}{H+\frac{1}{2}} (t^{H+\frac{1}{2}} - (t - \min(t, s))^{H+\frac{1}{2}})$.

Ces résultats vont nous permettre de simuler les deux processus U_t et W_t^H par l'algorithme suivant :

- On discrétise le pas de temps entre $[0, T]$ et $t_i = \frac{iT}{N}$ construit la matrice de covariance conjointe de U_{t_i} et $W_{t_j}^H$ pour n pas de temps qu'on note C .
- On décompose C par une méthode Cholesky $C = L^T L$ avec L triangulaire inférieur.
- Par la suite on crée un vecteur de loi gaussienne, et on multiplie ce vecteur par L ainsi $L.v$ suit donc une loi $N(0, L^T L)$.

$H=0.007$, $\rho=-0.9$ $S_0 = 100$ et $\xi_0 = 0.529$

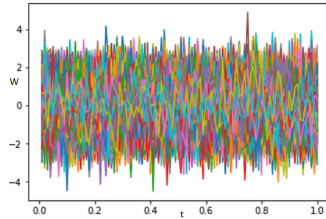


Figure – Simulation de W_t^H pour différentes dates t .

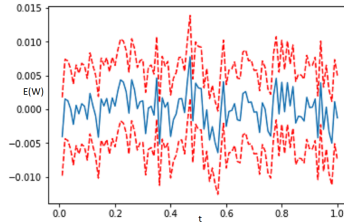


Figure – Simulation de $E(W_t^H)$ pour différentes dates t avec l'intervalle de confiance

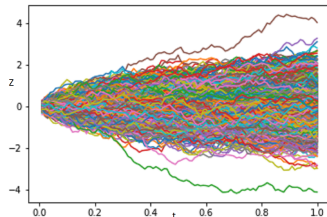


Figure – Simulation de U_t pour différentes dates t .

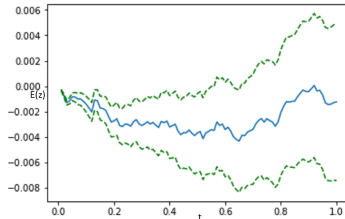


Figure – Simulation de $E(U_t)$ pour différentes dates t avec l'intervalle de confiance.

Amélioration du skew at the money.

Dans l'article, il a été prouvé que la skew at the money est d'ordre $\frac{1}{t^\gamma}$.
Regardant par simulation si ceci concorde avec les résultats trouvés :

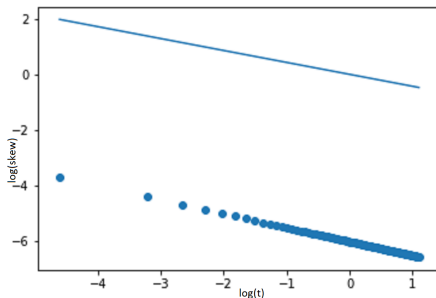


Figure – Simulation du $\log(\text{skew})$ en fonction de $\log(t)$.

$$\log(\text{skew}) = 0.494 \cdot \log(\text{maturité}) - 5.9$$

$$\bullet BS(\sigma_{BS}^e) = \frac{1}{n} \sum_i^n (S_T^i - K)^+ \bullet \sigma_{BS}^e = BS^{-1}(\frac{1}{n} \sum_i^n (S_T^i - K)^+) \bullet \\ \sqrt{n}(\sigma_{BS}^e - \sigma_{BS}) \text{ suit une loi } N(0, \frac{Var((S_T^i - K)^+)}{vega(\sigma_{BS}^e)^2 * n})$$

Smile at the money par du rough Bergomi

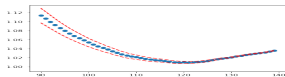


Figure – $T=0.041$

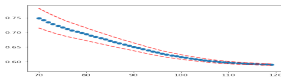


Figure – $T=0.12$

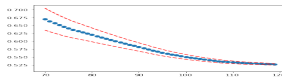


Figure – $T=0.19$

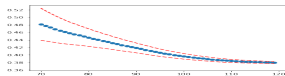


Figure – $T=0.29$

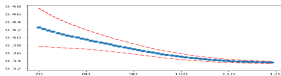


Figure – $T=0.37$

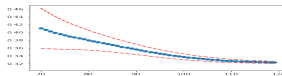


Figure – $T=0.40$

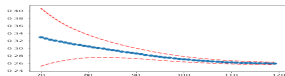


Figure – $T=0.62$

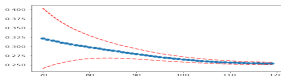


Figure – $T=0.65$

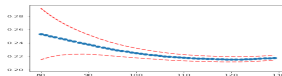


Figure – $T=0.90$

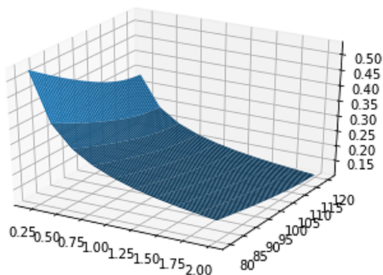


Figure – surface de volatilité obtenue par le modèle de rough bergomi.

- 1 Introduction aux swaps de variance
- 2 Swaps de variance pour des modèles simple
 - Merton Jump diffusion
 - Modèle d'Heston
- 3 Modèle de Bergomi
 - Introduction au modèle
 - Modèle à un facteur
 - Modèle à deux facteur
 - Concordance du modèle de Bergomi avec les données du marché.
- 4 **Modèle de rBergomi**
 - Introduction au modèle
 - Simulation du modèle.
 - Concordance du modèle avec les données du marché

Concordance du modèle avec les données du marché

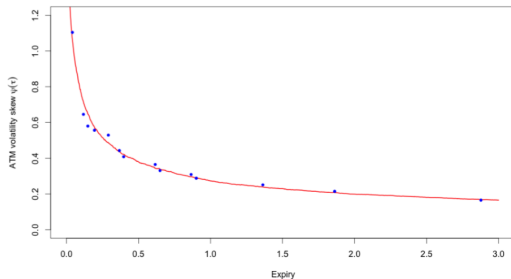


Figure – Les points bleus sont des skew empiriques ATM ; La ligne rouge est de la simulation rBergomi.

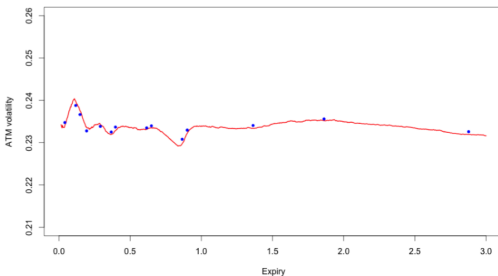


Figure – Les points bleus sont des volatilités empiriques ATM ; La ligne rouge est de la simulation rBergomi.