

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

Kафедра радиотехники и систем управления

A. A. Григорьев, И. А. Григорьев

БЕЗЫНЕРЦИОННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

Учебно-методическое пособие

МОСКВА
МФТИ
2021

УДК 621.396.6(075)

ББК 32.841.я73

Г83

Р е ц е н з е н т :

Кандидат технических наук *А. Л. Ларин*

Г83

Григорьев, Александр Алексеевич,

Григорьев, Иван Александрович

Безынерционные линейные цепи : учебно-методическое пособие А. А. Григорьев, И. А. Григорьев, – Москва: МФТИ, 2021 – 32 с.

Работа служит кратким введением в теорию безынерционных линейных и аффинных электрических цепей. В центре внимания – применение теорем об эквивалентном генераторе и знакомство с матричными описаниями линейных трехполюсников.

© Григорьев А. А., Григорьев И. А., 2021

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2021

Содержание

1. Безынерционные линейные цепи	4
1.1. Безынерционные двухполюсники	5
1.2. Аффинные двухполюсники	8
1.3. Линейные трехполюсники и их модели	12
1.4. Популярные системы параметров и эквивалентные схемы	15
1.5. Несколько поучительных примеров	21
2. Задание	26
2.1. Делитель напряжения	26
2.2. Параллельный сумматор	27
2.3. H -параметры	28
2.4. Звезда и треугольник	29
2.5. Лестничные структуры	29
2.6. Задачи для самопроверки	31

1. Безынерционные линейные цепи

Электрическую цепь представляет граф, рис. 1, – множество узлов-вершин, связанных ветвями-ребрами. Узлы – это места, в которых действуют узловые электрические потенциалы φ_j . В ветвях протекают токи I_{jk} . Каждая из ветвей изображает компонент электрической цепи – нечто с двумя полюсами (*двуихполюсник*), подключенными к двум различным узлам цепи. Условие равенства нулю заряда внутри компонента дает основание считать втекающий в компонент и вытекающий из него токи равными. Это и позволяет говорить о токе в ветви безотносительно к полюсу, из которого этот ток вытекает или в который втекает. Принято считать положительным ток, протекающий от узла с высоким потенциалом к узлу с низким. Глобальное состояние цепи – это точка в многомерном пространстве состояний, которая задает набор всех узловых потенциалов и токов во всех ветвях.

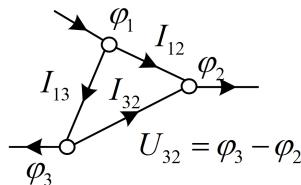


Рис. 1. Фрагмент графа цепи

Разность узловых потенциалов определяет действующее на двухполюснике напряжение $U_{jk} = \varphi_j - \varphi_k$. Каждый двухполюсник устанавливает некоторую связь между действующим на нем напряжении U и протекающим через него током $I - U(I)$ или $I(U)$. Набор этих связей – это локальное описание цепи.

Расчет цепи состоит в том, чтобы, располагая локальными описаниями компонентов, найти глобальное состояние цепи – набор узловых потенциалов и токов в ветвях. Глобальное состояние находят как решение некоторой системы уравнений, связывающих переменные состояния. Существуют два альтернативных универсальных метода составления этой системы.

В методе **контурных токов**, рис. 2а, в качестве переменных вводятся кольцевые токи в некотором наборе замкнутых контуров графа цепи. Набор контурных токов должен быть достато-

чен для того, чтобы ток в любой ветви можно было выразить как их алгебраическую сумму. Уравнения контурных токов выражают факт равенства нулю суммы падений напряжения на ветвях вдоль любого замкнутого контура. Решение этой системы уравнений дает набор контурных токов, которые определяют токи в ветвях и, тем самым, напряжения между узлами.

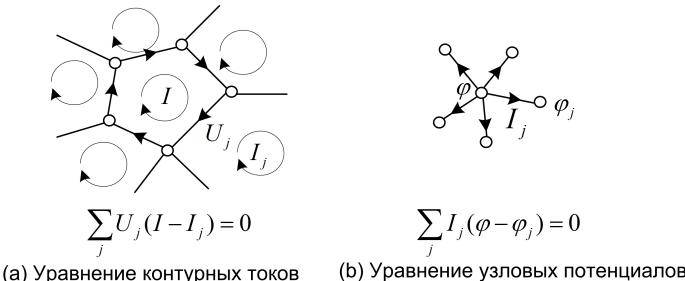


Рис. 2. Уравнения цепи

В методе **узловых потенциалов**, рис. 2b, в качестве переменных выбираются потенциалы узлов. Уравнения записываются как условия равенства нулю сумм токов, протекающих в инцидентных данному узлу ветвях. Токи эти выражаются через разности потенциалов между соседними узлами. Решением системы оказываются узловые потенциалы, которые определяют напряжения между смежными узлами и, тем самым, токи в ветвях.

Цепи, состояния которых во времени не меняются, называют безынерционными. Такая цепь как бы «живет» вне времени, «ничего не зная» о его существовании.

1.1. Безынерционные двухполюсники

Состояние безынерционного двухполюсника – это точка в двумерном линейном пространстве векторов (U, I) . Локальные свойства двухполюсника как компонента цепи характеризует подмножество его допустимых состояний. Как правило, этим подмножеством оказывается некоторая одномерная кривая на (U, I) -плоскости. Часто эта кривая может быть задана графиком функции $U = f(I)$ – вольт-амперной характеристикой.

Двухполюсник линеен, если множество его допустимых состояний – это линейное подпространство в двумерном линейном пространстве (U, I) . Линейность эквивалентна выполнению следующего принципа суперпозиции: если каждое из состояний (U_1, I_1) и (U_2, I_2) допустимо, то допустима и любая их линейная комбинация $(\alpha U_1 + \beta U_2, \alpha I_1 + \beta I_2)$ с произвольными вещественными коэффициентами α, β .

Подпространства двумерного (U, I) -пространства могут быть 0-, 1- и 2 – мерными. Нуль-мерное подпространство, состоящее из единственной точки $(0, 0)$, и двумерное пространство исключаются – трудно допустить существование физического двухполюсника, для которого ток и напряжение строго равны нулю одновременно, равно как и двухполюсника, который не накладывает на значения тока и напряжения никакого ограничения. Остаются одномерные подпространства – прямые линии в (U, I) -плоскости, проходящие через начало координат. Прямыми этим отвечают резисторы с положительным и отрицательным сопротивлениями, рис. 3а. Эти компоненты устанавливают взаимно однозначные функциональные связи между током и напряжением по закону Ома: $U = RI$, $I = GU$, где R – сопротивление, а $G = \frac{1}{R}$ – проводимость.

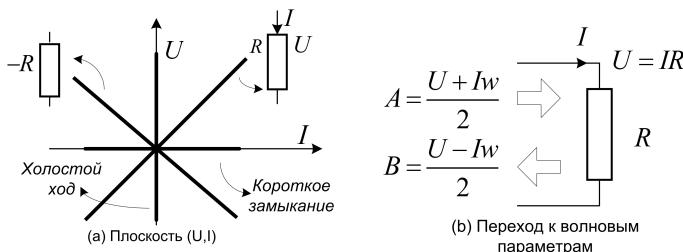


Рис. 3. Одномерные подпространства

Мощность на двухполюснике – это произведение напряжения на ток:

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = I^2 R.$$

Для двухполюсника с положительным сопротивлением она положительна (мощность, рассеиваемая в виде тепла), для двухполюсника с отрицательным сопротивлением – отрицательна (мощ-

ность, отдаваемая во внешний мир). Отрицательные сопротивления нарушают закон сохранения энергии и поэтому, физически, без активных усилительных компонентов, не реализуемы.

Горизонтальной и вертикальной прямым в (U, I) -плоскости отвечают короткое замыкание (*short circuit*) ($U = 0$) и холостой ход (*open circuit*) ($I = 0$). Это особые двухполюсники. Во первых, на них рассеивается нулевая мощность. Кроме того, они не устанавливают жесткой функциональной связи между током и напряжением. Короткое замыкание гарантирует нулевое значение напряжения при любом токе, а холостой ход – нулевое значение тока при любом напряжении.

Отсутствие функциональной связи ток-напряжение не присуще этим двухполюсникам как таковым, а вызвано не вполне удачным выбором координатных осей в (U, I) -плоскости. Достаточно повернуть эти оси, чтобы функциональная связь восстановилась. Перейдем, например, от параметров U, I к волновым параметрам A, B :

$$A = \frac{U + Iw}{2}; \quad B = \frac{U - Iw}{2},$$

введенным через некоторое волновое сопротивление w , рис. 3б.

Этой параметризации отвечает представление о том, что в подходящем к резистору проводнике присутствуют бегущие волны, в которых значения напряжения и тока связаны через волновое сопротивление, а направление распространения совпадает с направлением тока. Тогда A – это амплитуда падающей волны, бегущей в сторону резистора, а B – амплитуда отраженной волны, бегущей от него.

В самом деле, пусть $B = 0$ – нет отраженной волны. Тогда $U = Iw$, а амплитуда падающей волны $A = U = Iw$ – это одновременно и напряжение U , и произведение Iw направленного в сторону распространения тока I на w . В изолированной ($A = 0$) отраженной волне все то же самое: $B = U = -Iw$. Только ток отрицателен – направлен от резистора, то есть в сторону распространения волны.

В волновых параметрах на смену сопротивлению $R = \frac{U}{I}$ при-

ходит коэффициент отражения

$$\rho = \frac{B}{A} = \frac{U - Iw}{U + Iw} = \frac{\frac{U}{I} - w}{\frac{U}{I} + w} = \frac{R - w}{R + w}.$$

Короткому замыканию ($R = 0$) отвечает при этом значение $\rho = -1$ с функциональной связью $B = -A$ между амплитудами волн, а холостому ходу ($R = \infty$) – значение $\rho = +1$ со связью $B = A$. Особым оказывается случай $R = w$ (согласованная нагрузка) с $\rho = 0$, когда амплитуда отраженной волны $B = \rho A$ заведомо нулевая, а амплитуда A падающей волны – произвольна.

Напряжение и ток выражаются через амплитуды волн:

$$U = A + B; \quad I = \frac{A - B}{w}; \quad R = \frac{U}{I} = w \frac{1 + \rho}{1 - \rho}.$$

Это позволяет представить гиперболу рассеиваемой мощности $P = UI$ разностью квадратов:

$$P = UI = \frac{A^2}{w} - \frac{B^2}{w} = \frac{A^2}{w}(1 - \rho^2).$$

Рассеиваемая на двухполюснике мощность оказывается разностью мощностей, переносимых падающей ($\frac{A^2}{w}$) и отраженной ($\frac{B^2}{w}$) волнами, а параметр ρ^2 приобретает смысл коэффициента отражения мощности.

1.2. Аффинные двухполюсники

Электрические цепи, составленные только из резисторов с неотрицательными сопротивлениями, тривиальны. Их единственное глобальное состояние нулевое – все токи и напряжения равны нулю. Картина оживляется введением аффинных двухполюсников, множества допустимых состояний которых – это аффинные прямые, не проходящие через начало координат ((U, I) -плоскости. Это и есть источники. Их присутствие наряду с резисторами и обеспечивает существование ненулевых глобальных состояний цепей.

Горизонтальная аффинная прямая на рис. 4а представляет знакомый всем идеальный источник напряжения – батарейку.

Напряжение на нем составляет E при любом значении отдаваемого тока I . При $E = 0$ источник становится линейным двухполюсником – коротким замыканием. Так что источник нулевого напряжения – это в точности короткое замыкание.

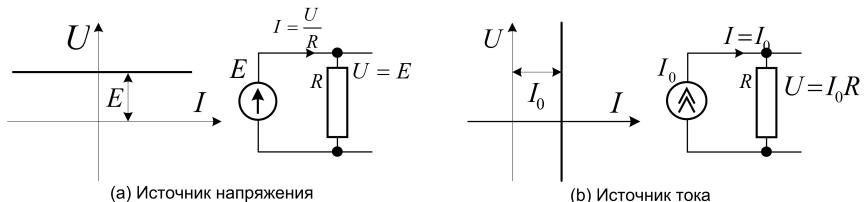


Рис. 4. Идеальные источники

Если к источнику с напряжением E подключить резистор R , в нем пойдет ток $I = \frac{E}{R}$ и будет рассеиваться мощность $P = \frac{E^2}{R}$. При $R \rightarrow 0$ ток и мощность неограниченно нарастают. Источник напряжения невозможно представить себе в режиме короткого замыкания с $R = 0$ из-за бесконечных значений тока и мощности. Так что это идеальный, физически не реализуемый компонент.

Вертикальная аффинная прямая на рис. 4b представляет двойственный двухполюсник – идеальный источник тока. Через него протекает фиксированный ток I_0 при любом напряжении.

Если к идеальному источнику тока подключить резистор R , на нем возникнет напряжение $U = I_0 R$ и выделится мощность $P = UI = I_0^2 R$. И то и другое уходит в бесконечность с ростом R . Источник тока невозможно представить себе в режиме холостого хода, когда $R = \infty$.

Идеальные источники напряжения и тока двойственны. В электрических цепях они фигурируют на равных правах – если один, то и другой. Нет оснований сделать выбор в чью-либо пользу.

Реальному источнику отвечает наклонная аффинная прямая в (U, I) -плоскости, рис. 5. Всякая такая прямая определяется двумя точками, в частности, точками пересечения с осями координат.

Точки на оси напряжений отвечают режим холостого хода (*Open Circuit*) – к полюсам источника ничего не подключено, отбираемый от него ток равен нулю. Присутствующее в этом

режиме напряжение на источнике – это напряжение холостого хода U_{oc} . Точки на оси токов отвечают режиму короткого замыкания (*Short Circuit*) – между полюсами источника включен проводник, через который протекает ток короткого замыкания I_{sc} . Пара (U_{oc}, I_{sc}) вполне определяет аффинную прямую и поэтому исчерпывающе характеризует свойства источника. Отношение $R = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}$ определяет внутреннее сопротивление источника.

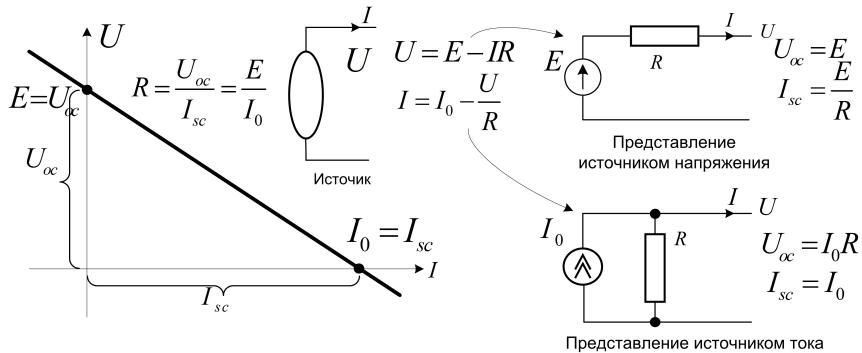


Рис. 5. Реальные источники

Прямая на рисунке задается уравнением $U = E - IR = U_{os} - I \frac{U_{oc}}{I_{sc}}$. Этому уравнению отвечает привычная эквивалентная схема источника, состоящая из идеального источника напряжения с последовательным внутренним сопротивлением R . При нулевом отбиаемом от источника токе I создаваемое им напряжение U совпадает с напряжением холостого хода: $U = E = U_{oc}$. По мере роста тока напряжение снижается из-за падения напряжения на внутреннем сопротивлении.

То же уравнение можно записать иначе, выразив ток через напряжение:

$$I = \frac{E}{R} - \frac{U}{R} = \frac{U_{os}}{R} - \frac{U}{R} = I_{sc} - \frac{U}{R} = I_0 - \frac{U}{R}.$$

Этому отвечает двойственная эквивалентная схема того же источника в виде идеального источника тока $I_0 = \frac{E}{R}$ с параллельным сопротивлением R . В режиме короткого замыкания источник отдает в нагрузку ток короткого замыкания $I_0 = I_{sc}$. С ро-

стом напряжения U отдаваемый ток снижается за счет утечки тока в сопротивление R .

Таким образом, всякий реальный источник – это либо идеальный источник напряжения холостого хода с последовательным внутренним сопротивлением R , либо идеальный источник тока короткого замыкания с тем же параллельным внутренним сопротивлением. Обе модели равнозначны.

Какая из них более адекватна, зависит от соотношения между внутренним сопротивлением R и предполагаемым сопротивлением нагрузки R_l . При $R_l \gg R$ – почти холостой ход – напряжение на источнике $U = E \frac{R_l}{R+R_l} = \frac{E}{1+R/R_l} \simeq E$ почти равно E и слабо зависит от нагрузки. Источник «похож» на идеальный источник напряжения. Напротив, при $R_l \ll R$ – почти короткое замыкание – источник ведет себя как источник тока: $I = \frac{E}{R+R_l} = \frac{E/R}{1+R_l/R} \simeq E/R$.

Возможность приведения произвольного источника (аффинного двухполюсника) к одной из двух эквивалентных моделей обычно формулируется в виде двух теорем об эквивалентом генераторе – теореме Тевенина (приведение к источнику напряжения) и теореме Нортонна (приведение к источнику тока). Чтобы найти параметры эквивалентного генератора для данного источника, нужно измерить или вычислить напряжение холостого хода U_{oc} и ток короткого замыкания I_{sc} . Тогда по теореме Тевенина $E = U_{oc}$, $R = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}$, а по теореме Нортонна $I_0 = I_{sc}$, $R = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}$.

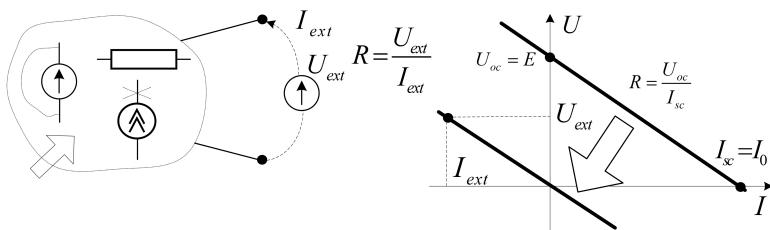


Рис. 6. К определению внутреннего сопротивления

Полезен эффективный прием вычисления внутреннего сопротивления источника R преобразованием аффинного двухполюсника в линейный, рис. 6. Проникнем «внутрь» источника и преобразуем все внутренние аффинные компоненты в линейные.

Для этого достаточно обнулить все внутренние идеальные источники. Нулевой источник напряжения – это короткое замыкание, нулевой же источник тока – это разрыв цепи. Измерим сопротивление получившегося теперь уже линейного двухполюсника по принципу омметра – приложим внешнее напряжение U_{ext} и вычислим потребляемый ток I_{ext} . Внутреннее сопротивление источника найдем по закону Ома как $R = \frac{U_{ext}}{I_{ext}}$. Этот прием оказывает неоценимую услугу, избавляя от двойной работы по нахождению напряжения холостого хода и тока короткого замыкания.

1.3. Линейные трехполюсники и их модели

Среди компонентов электрических цепей встречаются трехполюсники, которые подключаются своими полюсами к трем различным узлам графа цепи.

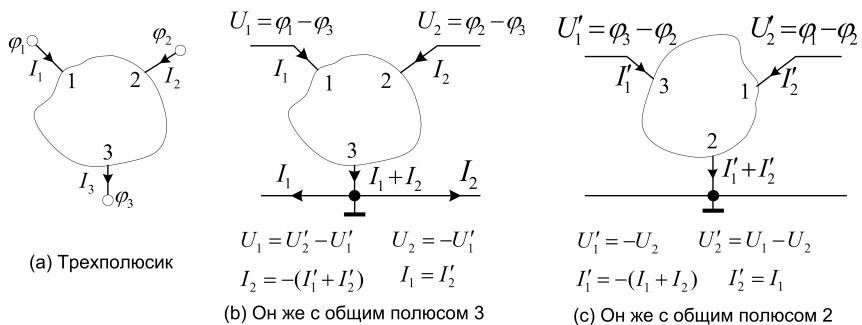


Рис. 7. Варианты включения трехполюсника

Формально, состояние трехполюсника – это вектор $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, I_1, I_2, I_3)$ в шестимерном пространстве. Один из полюсов объявляют общим. На рис. 7b это полюс номер 3. Это позволяет перейти от трех потенциалов к двум напряжениям между полюсами: $U_1 = \varphi_1 - \varphi_3$, $U_2 = \varphi_2 - \varphi_3$. Закон отсутствия заряда внутри трехполюсника позволяет исключить один из трех токов: $I_3 = I_1 + I_2$. В результате размерность пространства состояний снижается до четырех: (U_1, U_2, I_1, I_2) . Трехполюсник становится четырехполюсником с общей шиной, к входным (слева) и выходным (справа) парам полюсов которого могут подключаться те или иные двухполюсники.

Если объявить общим другой полюс, к примеру, полюс 2 на рис. 7c, состояние трехполюсника окажется вектором в том же четырехмерном пространстве, но с иным выбором базиса – координатных осей (U'_1, U'_2, I'_1, I'_2). Переходы между не штрихованными и штрихованными координатами – это линейные преобразования. Формулы для них приведены на рисунке. Используются также и координаты, отличающиеся направлением одного или сразу двух токов. Излишне говорить, что выбор общим полюсом номер 1 даст еще один набор координат.

Говоря о представлении трехполюсника четырехполюсиком, необходимо явно указывать, какой из полюсов объявлен общим. Модели на рис. 7b и рис. 7c – это совершенно разные модели, различающиеся выбором базиса в четырехмерном пространстве состояний.

Если трехполюсник линеен, то множество его допустимых состояний – это линейное подпространство в четырехмерном пространстве. В четырех измерениях существуют линейные подпространства размерностей от 0 до 4. Размерности 0, 1, 3 и 4 исключаются из общих соображений. Сложно, к примеру, представить себе трехполюсник, у которого два напряжения и один из токов (размерность 3) могут быть заданы как угодно и это определит значение оставшегося тока. Остаются двумерные подпространства. Это и есть допустимые пространства линейных трехполюсников.

Каждое двумерное пространство в четырех измерениях – это пересечение двух трехмерных пространств – гиперплоскостей.

Гиперплоскость определяется направляющим вектором $n = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ как множество векторов $X = (U_1, U_2, I_1, I_2)$, ортогональных направляющему вектору:

$$(n, X) = 0 \Rightarrow \alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma I_1 + \delta I_2 = 0.$$

Это представление гиперплоскости инвариантно относительно выбора базиса в четырехмерном пространстве.

Всякая пара неколлинеарных векторов $n_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ и $n_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$ определяет двумерное подпространство – допустимое подпространство некоторого трехполюсника:

$$(n_1, X) = 0 \Rightarrow \alpha_1 U_1 + \beta_1 U_2 + \gamma_1 I_1 + \delta_1 I_2 = 0, \quad (1)$$

$$(n_2, X) = 0 \Rightarrow \alpha_2 U_1 + \beta_2 U_2 + \gamma_2 I_1 + \delta_2 I_2 = 0.$$

Так выглядит инвариантная форма описания свойств произвольного линейного трехполюсника.

Обозначим через (α, β) квадратную 2×2 -матрицу

$$(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

а через $(\alpha, \beta)^{-1}$ – ее обращение

$$(\alpha, \beta)^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\alpha, \beta)} \begin{pmatrix} \beta_2 & -\beta_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix},$$

где $\det(\alpha, \beta) = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$. Обратите внимание на форму обратной матрицы – диагональные компоненты переставляются местами, внедиагональные – меняют знак, все делится на детерминант.

Из столбцов матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

можно составить шесть таких 2×2 -матриц: (α, β) , (α, γ) , (α, δ) , (β, γ) , (β, δ) , (γ, δ) . По меньшей мере одна из них невырождена. Иначе векторы n_1, n_2 оказались бы коллинеарными. В типовом случае невырожденными оказываются все они.

Пусть, к примеру, невырождена матрица (α, β) . Тогда

$$(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = -(\gamma, \delta) \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

А это означает, что умножением обеих частей слева на обратную к (α, β) матрицу вектор напряжений можно линейно выразить через вектор токов:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = -(\alpha, \beta)^{-1}(\gamma, \delta) \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

Получилось описание трехполюсника матрицей X -параметров, которая определяет пару зависимых переменных (напряжений U_1, U_2) по паре свободных (токов I_1, I_2).

Если матрица X невырождена, то связь между токами и напряжениями взаимно однозначна. Если же она вырождена, то ее строки линейно зависимы. А это означает, что между напряжениями существует жесткая связь $U_2 = KU_1$ с некоторым коэффициентом K . Переменные (U_1, U_2) в этом случае не могут быть выбраны в качестве свободных. Описание трехполюсника обратной матрицей $Y = X^{-1}$,

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = -(\gamma, \delta)^{-1}(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

оказывается невозможным в силу вырожденности матрицы (γ, δ) .

Подведем итоги. При любом выборе четырех переменных состояния (базиса в пространстве состояний) произвольный линейный трехполюсник допускает хотя бы одно описание 2×2 -матрицей, которая выражает пару зависимых переменных через пару свободных. В типовом случае таких описаний можно построить ровно шесть – по числу вариантов выбора пары свободных переменных из четырех возможных. К этому добавляются три варианта выбора общего полюса. Открывается масса возможностей.

В типовом случае все эти описания эквивалентны. Рецепт перехода от одного к другому прост. Записываем имеющееся описание в инвариантной форме (1). Если нужно, выполняем линейную замену переменных, как при смене общего полюса. Теперь строим новое описание обращением подходящей 2×2 -матрицы. Проблема может возникнуть только на последнем этапе – если обращаемая матрица окажется вырожденной. Это означает только то, что в выбранных координатах описание трехполюсника с данной парой свободных переменных невозможно – между ними имеется жесткая связь. Нужно изменить либо координаты, либо выбор свободных переменных.

1.4. Популярные системы параметров и эквивалентные схемы

Не все возможные способы матричного описания трехполюсников одинаково распространены. В усилительной технике широко используется описание матрицами H -параметров, которые

линейно выражают пару зависимых переменных (U_1, I_2) через пару свободных (I_1, U_2).

$$U_1 = h_{11}I_1 + h_{12}U_2,$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}U_2.$$

Эта модель приводит к эквивалентной схеме трехполюсника (четырехполюсника с общей шиной) в H -параметрах, показанной на рис. 8.

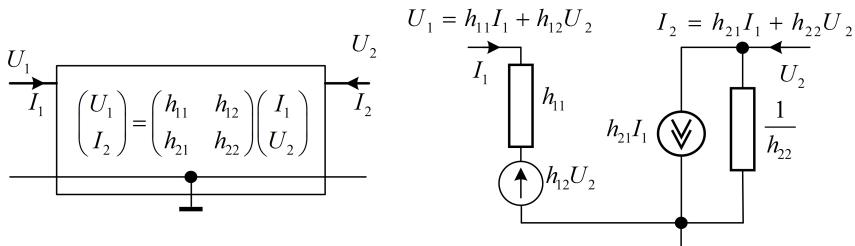


Рис. 8. Система Н-параметров

Входная и выходная цепи этой схемы попросту изображают графически первое и второе уравнения. Во входной цепи имеется резистор h_{11} (входное сопротивление), который отвечает за первое слагаемое в уравнении. Второе слагаемое представляет управляемый напряжением идеальный источник напряжения с величиной $h_{12}U_2$. Безразмерный коэффициент h_{12} известен как коэффициент внутренней обратной связи. В выходной цепи имеются управляемый током идеальный источник тока $h_{21}I_1$ с коэффициентом передачи тока h_{21} и выходная проводимость h_{22} , которая учитывает зависимость тока I_2 от напряжения U_2 . Эта модель идеально подходит для биполярных транзисторов, которые, в первом приближении, как раз являются управляемыми током источниками усиленного тока. Коэффициент передачи тока $h_{21} \simeq 100$ – это основной параметр транзистора.

В эквивалентной схеме появляются качественно новые компоненты электрических цепей – *управляемые источники*. Их присутствие означает, что класс трехполюсников шире класса электрических цепей, составленных из двухполюсников. В частности, среди трехполюсников присутствуют усилительные компоненты, которые заведомо невозможно изготовить из резисторов.

Встречается четыре типа управляемых источников – источники напряжения, управляемые напряжением/током и источники тока, управляемые током/напряжением. Аббревиатуры: VCVS/CCVS (Voltage/Current Controlled Voltage Source), VCCS/CCCS (Voltage/Current Controlled Current Source).

Все управляемые источники – это линейные (не аффинные !!!) компоненты. В пространство их допустимых состояний входит точка $(0, 0)$ – нуль на входе / нуль на выходе. Так что при вычислении внутреннего сопротивления источника методом преобразования аффинного двухполюсника в линейный (рис. 6) обнулять их (закорачивать/разрывать) нельзя. **Управляемые источники остаются как есть !**

Уравнения в H -параметрах справедливы при всех значениях свободных переменных (I_1, U_2), в том числе и при нулевых. Это дает удобный способ их измерения/вычисления. При $U_2 = 0$ (короткое замыкание на выходе) выпадают, умножаются на нуль параметры h_{12} и h_{22} . Оставшиеся два легко определяются: $h_{11} = \frac{U_1}{I_1}$, $h_{21} = \frac{I_2}{I_1}$. Достаточно измерить или вычислить I_1, I_2, U_1 . При $I_1 = 0$ (холостой ход на входе) выпадают h_{11} и h_{21} . Оставшиеся два определяются: $h_{12} = \frac{U_1}{U_2}$, $h_{22} = \frac{I_2}{U_2}$.

Та же техника исключения работает и при измерении/вычислении параметров иных матричных описаний.

Широко известны описания трехполюсников матрицами $X(Y)$ -параметров, рис. 9, 10. X -параметры (размерности сопротивления) выражают напряжения через токи, Y -параметры (размерности проводимости) – токи через напряжения. Их матрицы взаимно обратны: $Y = X^{-1}$.

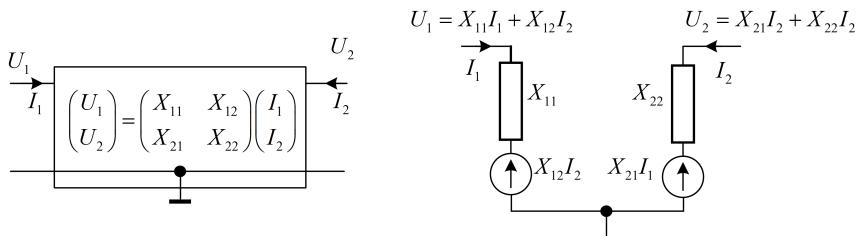


Рис. 9. Система X-параметров

Показанные на рисунках эквивалентные схемы в $X(Y)$ -параметрах отличает симметрия топологий входной и выходной

цепей. В этих параметрах хорошо выражается свойство взаимности трехполюсника, состоящее в том, что его поведение не изменяется при отражении – «перепутывании» входа с выходом. Ясно, что взаимность эквивалентна тождественности входной и выходной цепей эквивалентных схем.

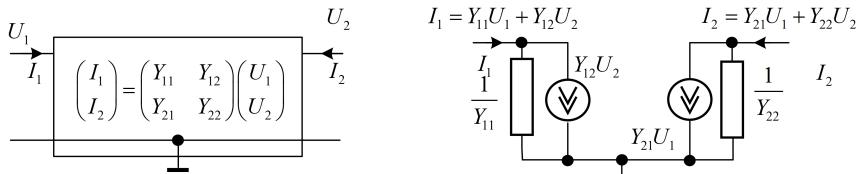


Рис. 10. Система Y-параметров

Вторая удивительная особенность этих параметров состоит в том, что любая *симметричная* $X(Y)$ -матрица с $X_{12} = X_{21}$ ($Y_{12} = Y_{21}$) может быть реализована эквивалентной схемой без управляемых источников в виде звезды из трех сопротивлений $R_j = \frac{1}{G_j}$ или треугольника из трех проводимостей $G_{jk} = \frac{1}{R_{jk}}$, как показано на рис. 11.

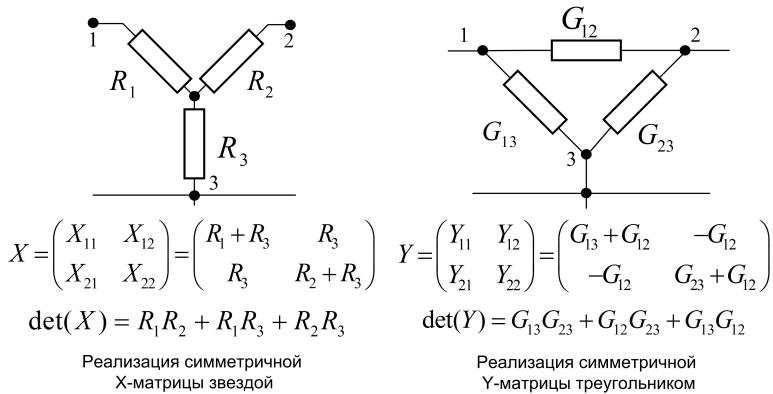


Рис. 11. Звезда и треугольник

Сравнение этих схем дает известную технику эквивалентного преобразования треугольника в звезду и наоборот.

В самом деле, пусть звезда и треугольник эквивалентны. Тогда

$X^{-1} = Y$. То есть

$$\frac{1}{\det X} \begin{pmatrix} R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_1 + R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{13} + G_{12} & -G_{12} \\ -G_{12} & G_{23} + G_{12} \end{pmatrix}.$$

Сравнение компонент матриц дает:

$$\frac{R_3}{\det(X)} = G_{12}, \quad \frac{R_2}{\det(X)} = G_{13}, \quad \frac{R_1}{\det(X)} = G_{23},$$

$\det(X) = R_1R_3 + R_1R_2 + R_2R_3$, или, после некоторых преобразований:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}, \quad R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1R_3}{R_2}, \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}.$$

Сопротивление между узлами (1, 2) треугольника равно сумме сопротивлений (1), (2) между теми же узлами в звезде плюс произведение этих сопротивлений, деленное на оставшееся – (3).

Формулы пересчета треугольника в звезду получаются приравниванием $Y^{-1} = X$:

$$G_1 = G_{12} + G_{13} + \frac{G_{12}G_{13}}{G_{23}}, \quad G_2 = G_{12} + G_{23} + \frac{G_{12}G_{23}}{G_{13}},$$

$$G_3 = G_{13} + G_{23} + \frac{G_{13}G_{23}}{G_{12}}.$$

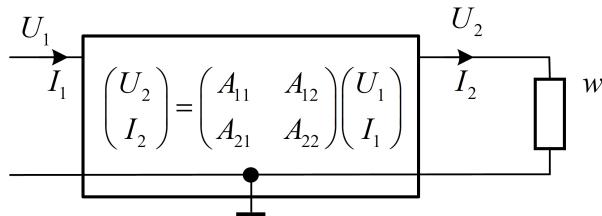


Рис. 12. Передаточная матрица

При анализе лестничных схем, образованных каскадным соединением большого числа одинаковых блоков (четырехполюсников), полезны передаточные матрицы A , рис. 12, которые выражают выходные напряжение и ток (U_2, I_2) через входные –

(U_1, I_1) . Важно, что в определении A -матрицы используется противоположное направление выходного тока I_2 – от четырехполюсника во внешний мир.

Отличительное свойство этих матриц состоит в том, что сквозная передаточная матрица A каскадного соединения n блоков с передаточными матрицами $A_1, A_2 \dots, A_n$ оказывается равной произведению этих матриц: $A = A_1 A_2 \dots A_n$.

Вторая особенность заключается в существовании характеристического сопротивления нагрузки w , включение которого на выход ($\frac{U_2}{I_2} = w$) дает такое же входное сопротивление: $\frac{U_1}{I_1} = w$. Сопротивление w находится как решение уравнения

$$w = \frac{U_2}{I_2} = \frac{A_{11}U_1 + A_{12}I_1}{A_{21}U_1 + A_{22}I_1} = \frac{A_{11}\frac{U_1}{I_1} + A_{12}}{A_{21}\frac{U_1}{I_1} + A_{22}} = \frac{A_{11}w + A_{12}}{A_{21}w + A_{22}},$$

или

$$A_{11} + \frac{A_{12}}{w} = A_{21}w + A_{22} = \gamma.$$

При нагрузке w параметр γ оказывается сразу и коэффициентом передачи напряжения

$$U_2 = A_{11}U_1 + A_{12}I_1 = \left(A_{11} + \frac{A_{12}}{w} \right) U_1 = \gamma U_1,$$

и коэффициентом передачи тока

$$I_2 = A_{21}U_1 + A_{22}I_1 = \left(A_{21}w + A_{22} \right) I_1 = \gamma I_1.$$

Коэффициент передачи мощности оказывается равным γ^2 .

Если каскадное соединение n одинаковых блоков нагружено на характеристическое сопротивление, то коэффициенты передачи напряжения и тока от входа до нагрузки составляют γ^n . Значение этого факта в анализе лестничных структур невозможно переоценить.

Если на входе и выходе перейти к волновым параметрам – амплитудам падающих внутрь четырехполюсника и отраженных от него волн, получится описание четырехполюсника S -матрицей рассеяния, которая выражает амплитуды отраженных волн (B_1, B_2) через амплитуды падающих (A_1, A_2), рис. 13.

Измерение и вычисление параметров рассеяния упрощается в режиме согласования, когда сопротивление подключенной к

выходу (или входу) нагрузки совпадает с волновым сопротивлением w . Это обнуляет амплитуду падающей волны A_2 (или A_1), поскольку $U_2 = -wI_2$. В нуль обращается коэффициент отражения падающей на нагрузку волны B_2 .

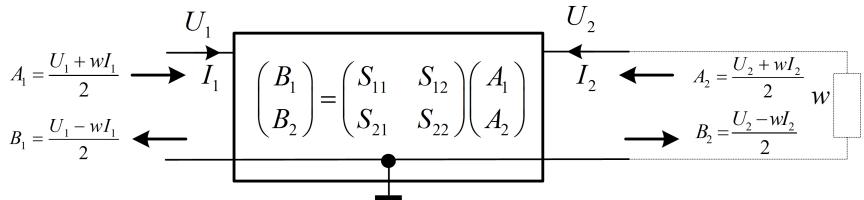


Рис. 13. Матрица рассеяния

Через матрицу рассеяния легко выражается свойство бездиссипативности четырехполюсника, состоящее в совпадении падающей ($A_1^2 + A_2^2$) и отраженной ($B_1^2 + B_2^2$) мощностей. Бездиссипативность оказывается эквивалентной ортогональности S -матрицы: $S^T S = I$ – транспонированная матрица S^T является обратной. В самом деле, пусть A -вектор столбец с координатами (A_1, A_2) , а B – столбец (B_1, B_2) . Так что $B = SA$. Имеем

$$B_1^2 + B_2^2 = B^T B = (SA)^T SA = A^T S^T SA = A^T A = A_1^2 + A_2^2.$$

Наконец, волновая передаточная T -матрица на рис. 14, связывающая амплитуды волн на выходе с их амплитудами на входе, полезна при анализе каскадных соединений – сквозная T -матрица соединения равна произведению T -матриц блоков.

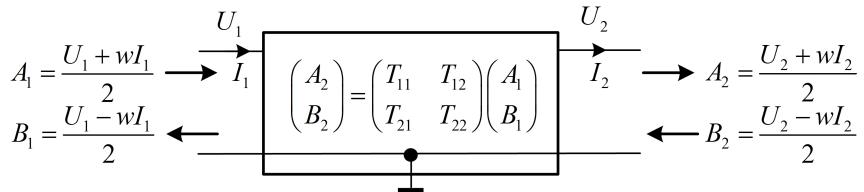


Рис. 14. Волновая передаточная матрица

1.5. Несколько поучительных примеров

Пример 1. Найдем матрицу H -параметров тривиального трехполюсника из единственного резистора R на рис. 15.

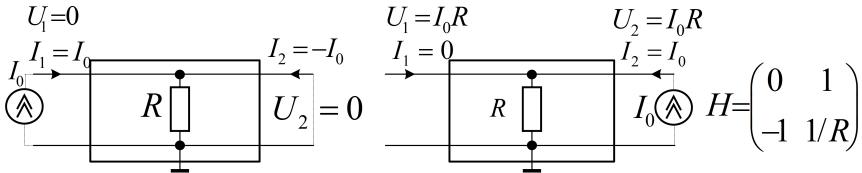
Имея перед глазами уравнения в H -параметрах,

$$U_1 = h_{11}I_1 + h_{12}U_2,$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}U_2,$$

обнулим U_2 , устроив короткое замыкание на выходе. Тем самым мы исключим параметры h_{12} и h_{22} , умножив их на нуль. Теперь подадим слева ток от источника I_0 . Без труда найдем показанные на рисунке значения для $U_1 = U_2 = 0$, $I_1 = I_0$, $I_2 = -I_0$. Вычислим $h_{11} = \frac{U_1}{I_1} = 0$, $h_{21} = \frac{I_2}{I_1} = -1$.

Теперь обнулим I_1 , устроив холостой ход на входе, и подадим ток I_0 справа. Найдем $h_{12} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_0R}{I_0R} = 1$, $h_{22} = \frac{I_2}{U_2} = \frac{I_0}{I_0R} = \frac{1}{R}$. Итоговая матрица показана на рисунке.



(b) Холостой ход на входе

Рис. 15. Тривиальный трехполюсник

Пример 2. Пересчитаем матрицу H -параметров трехполюсника в матрицу его X -параметров. Для этого запишем уравнения в H -параметрах в инвариантной форме:

$$(-1)U_1 + h_{12}U_2 + h_{11}I_1 + 0I_2 = 0,$$

$$0U_1 + h_{22}U_2 + h_{21}I_1 + (-1)I_2 = 0,$$

и перейдем к матричной записи, выделив интересующие нас пары зависимых и свободных переменных:

$$\begin{pmatrix} -1 & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} h_{11} & 0 \\ h_{21} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

Осталось помножить обе части слева на обратную матрицу:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{h_{22}} \begin{pmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & 0 \\ h_{21} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

В итоге получается:

$$X_{11} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{h_{22}}, \quad X_{12} = \frac{h_{12}}{h_{22}}, \quad X_{21} = -\frac{h_{21}}{h_{22}}, \quad X_{22} = \frac{1}{h_{22}}.$$

Трехполюсник взаимен, если $X_{11} = X_{22}$ и $X_{21} = X_{12}$. Легко увидеть, что свойство взаимности выражается следующими двумя условиями на H -параметры: $\det(H) = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = 1$, $h_{21} = -h_{12}$.

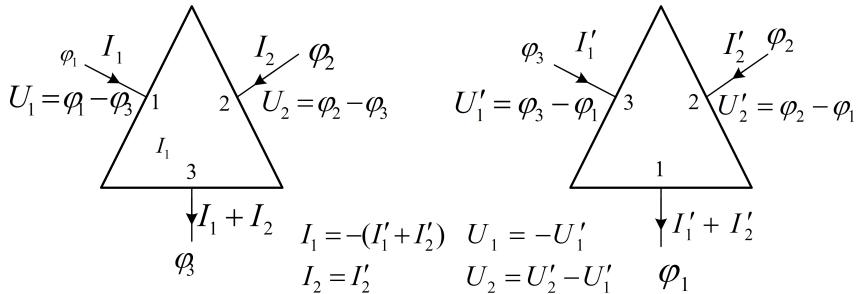


Рис. 16. Замена переменных

Пример 3. Пересчитаем H -параметры трехполюсника с общим полюсом номер 3 в H -параметры того же трехполюсника с общим полюсом номер 1. В уравнениях в H -параметрах

$$U_1 = h_{11}I_1 + h_{12}U_2, \quad I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}U_2$$

перейдем к штрихованным переменным согласно показанным на рис. 16 формулам:

$$-U'_1 = -h_{11}(I'_1 + I'_2) + h_{12}(U'_2 - U'_1), \quad I'_2 = -h_{21}(I'_1 + I'_2) + h_{22}(U'_2 - U'_1).$$

В матричном виде с разделенными зависимыми и свободными переменными это принимает вид:

$$\begin{pmatrix} h_{12} - 1 & h_{11} \\ h_{22} & 1 + h_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U'_1 \\ I'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_{11} & h_{12} \\ -h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I'_1 \\ U'_2 \end{pmatrix}.$$

Помножив обе части на обращение левой матрицы, получим:

$$\begin{pmatrix} U'_1 \\ I'_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1+h_{21} & -h_{11} \\ -h_{22} & h_{12}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h_{11} & h_{12} \\ -h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I'_1 \\ U'_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I'_1 \\ U'_2 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = (1 + h_{21}) + [h_{11}h_{22} - h_{12}(1 + h_{21})]$. Перемножив 2×2 -матрицы, окончательно найдем:

$$h'_{11} = \frac{h_{11}}{\Delta}, \quad h'_{12} = \frac{\det(H) - h_{12}}{\Delta}, \quad h'_{21} = -\frac{h_{21} + \det(H)}{\Delta}, \quad h'_{22} = \frac{h_{22}}{\Delta},$$

где $\det(H) = h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12}$ – детерминант исходной матрицы H -параметров.

Трехполюсник инвариантен относительно поворотов, если штрихованные H -параметры совпадают с нештрихованными. Из $h'_{11} = h_{11}$ вытекает $\Delta = 1$, откуда следует, что $\det(H) = h_{12} - h_{21}$. При этих значениях Δ и $\det(H)$ формула для h'_{12} дает: $h'_{12} = -h_{21}$. Это совпадает с h_{12} , если $h_{21} = -h_{12}$. В окончательном виде выраженные в H -параметрах два условия инвариантности трехполюсника относительно поворотов принимают вид: $h_{21} = -h_{12}$, $\det(H) = 2h_{12}$.

Назовем трехполюсник абсолютно симметричным, если он инвариантен относительно поворотов и взаимен – инвариантен относительно отражений. Из условий $\det(H) = 2h_{12}$ (*инвариантность относительно поворотов*) и $\det(H) = 1$ (*взаимность*) вытекает $h_{12} = \frac{1}{2}$, а $h_{21} = -h_{12} = -\frac{1}{2}$. Из $\det(H) = h_{11}h_{22} - \frac{1}{4} = 1$ получается $h_{22}h_{11} = \frac{3}{4}$.

Условия на компоненты матрицы H -параметров абсолютно симметричного трехполюсника окончательно принимают вид

$$h_{11} = \frac{3}{2}R, \quad h_{12} = \frac{1}{2}, \quad h_{21} = -\frac{1}{2}, \quad h_{22} = \frac{1}{2R}.$$

Это в точности H -параметры звезды из трех одинаковых резисторов R .

Как видно из примеров 2 и 3, техника пересчета одних систем параметров в другие идеологически проста, но порой приводит к довольно тяжеловесным выкладкам. Полезно немножко поупражняться в ней. Пересчитайте, например, матрицу H -параметров

в S -матрицу параметров рассеяния с произвольно выбранным волновым сопротивлением w .

Пример 4. Найдем матрицу S -параметров длинной линии нулевой длины на рис. 17.

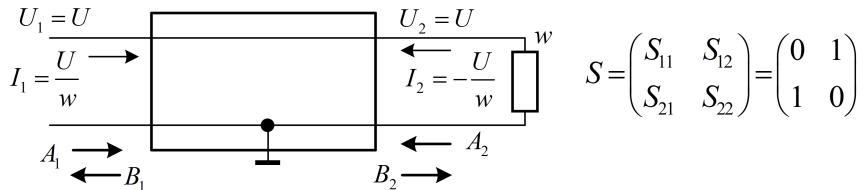


Рис. 17. Линия нулевой длины

Нагрузим линию слева на согласованное сопротивление w с тем, чтобы обнулить отраженную от нагрузки волну A_2 . Приложим слева напряжение U . Получим: $U_1 = U_2 = U$, $I_1 = \frac{U}{w}$, $I_2 = -\frac{U}{w}$. При этих значениях токов и напряжений амплитуда волны $A_2 = \frac{U_2 + wI_2}{2} = \frac{U - w\frac{U}{w}}{2} = 0$ действительно равна нулю. Найдем:

$$S_{11} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{U_1 - wI_1}{U_1 + wI_1} = \frac{U - w\frac{U}{w}}{U + w\frac{U}{w}} = 0,$$

$$S_{21} = \frac{B_2}{A_1} = \frac{U_2 - wI_2}{U_1 + wI_1} = \frac{U + w\frac{U}{w}}{U + w\frac{U}{w}} = 1.$$

Оставшиеся два S -параметра определяются аналогично – нагрузку w включаем слева, а напряжение U подаем справа. Итоговая форма S -матрицы приведена на рисунке. Квадрат этой матрицы равен 1, что характеризует линию как бездиссипативную систему. В S -матрице реальной линии длины l внедиагональные единицы заменяются на экспоненты вида $e^{-\gamma l}$ с некоторой постоянной распространения γ . При нулевой длине они становятся единицами.

2. Задание

2.1. Делитель напряжения

В схеме делителя напряжения на рис. 18 напряжение E идеального источника делится на части U_1 , U_2 ($U_1 + U_2 = E$), падающие на резисторах R_1 , R_2 .

Делитель – это распространенное схемное решение для преобразования источника питания E в источник опорного напряжения с требуемым эквивалентным напряжением $E^* = E \frac{R_2}{R_1+R_2}$ и внутренним сопротивлением $R^* = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} = R_1 || R_2$, равным параллельному соединению сопротивлений R_1 , R_2 .

Делитель естественным образом возникает, когда источник с внутренним сопротивлением R_1 подключается к нагрузке R_2 , рис. 18с. Это сопровождается потерей уровня сигнала источника, выражаемой коэффициентом передачи $K = \frac{u}{e} = \frac{R_2}{R_1+R_2}$.

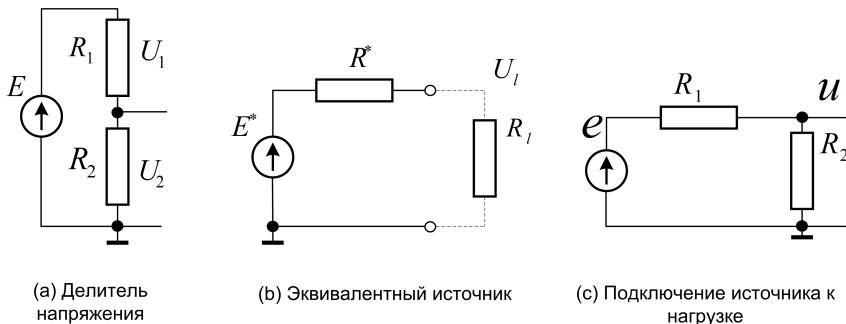


Рис. 18. Делитель напряжения

Задание 1

1. На макетной плате собрать делитель напряжения, реализующий опорный источник с напряжением $E^* = 2$ В при напряжении питания $E = 10$ В. Резистор R_1 выбрать как угодно из диапазона от 5 до 20 кОм, а резистор R_2 рассчитать под требуемое опорное напряжение E^* из пропорции $\frac{E-E^*}{R_1} = \frac{E^*}{R_2}$. Измерить напряжение E^* и внутреннее сопротивление R^* получившегося источника.

Внутреннее сопротивление измерять по методу двух нагрузок: измерить напряжение холостого хода на выходе делителя

$U_{oc} = E^*$ и напряжение U_l на дополнительном резисторе нагрузки R_l , рис. 18б. Внутреннее сопротивление R^* оценить из пропорции

$$\frac{E^* - U_l}{R^*} = \frac{U_l}{R_l}.$$

2. Подать на вход делителя синусоидальное напряжение e от лабораторного источника. Измерив эффективные значения напряжений u , e , рис. 18с, оценить коэффициент передачи $K = \frac{u}{e}$.

2.2. Параллельный сумматор

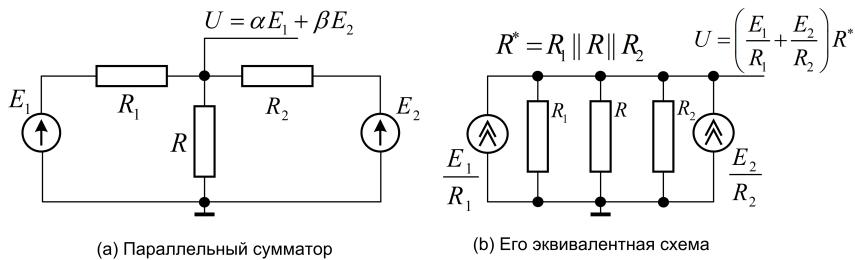


Рис. 19. Сумматор

Схема на рис. 19 реализует параллельный сумматор, выход U которого является взвешенной суммой входных напряжений E_1 , E_2 с весовыми коэффициентами α , β :

$$U = \alpha E_1 + \beta E_2.$$

Приравняв к нулю напряжение E_2 (короткое замыкание справа), легко увидеть, что α – это коэффициент передачи делителя напряжения на резисторах R_1 и ($R \parallel R_2$): $\alpha = \frac{R \parallel R_2}{R_1 + R \parallel R_2}$. Аналогично, $\beta = \frac{R \parallel R_1}{R_2 + R \parallel R_1}$.

Замена левого и правого источников напряжения эквивалентными источниками тока приводит к эквивалентной схеме на рис. 19б, из которой становится ясно, что

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{R_2}{R_1}; \quad \alpha + \beta = \frac{1}{1 + \frac{R_1 \parallel R_2}{R}},$$

а сопротивление эквивалентного источника составляет $R^* = R_1 \parallel R \parallel R_2$.

Задание 2

1. Выбрать компоненты сумматора по заданным весовым коэффициентам $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.2$. Резистор R_1 взять произвольно из диапазона от 1 до 10 кОм. Резистор R_2 определить из соотношения $\frac{R_2}{R_1} = \frac{\alpha}{\beta} = 2$. Наконец, найти резистор R из соотношения

$$\alpha + \beta = 0.6 = \frac{1}{1 + \frac{R_1 \parallel R_2}{R}}$$

или $\frac{R}{R_1 \parallel R_2} = \frac{3}{2}$.

2. Собрать схему сумматора на макетной плате. Подать синусоидальное напряжение с амплитудой порядка 2 В на вход E_1 и постоянное напряжение +5 В на вход E_2 . Измерить по осциллографу уровень постоянной и амплитуду переменной составляющих в суммарном сигнале U . Подавая сигналы на первый и второй входы сумматора поочередно при коротком замыкании на свободном входе, измерить коэффициенты α , β . По методу двух нагрузок измерить внутреннее сопротивление сумматора R^* . Проверить совпадение результатов измерений с теоретическими оценками.

2.3. H -параметры

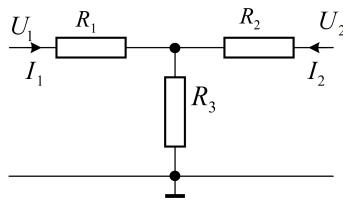


Рис. 20. Т-образная схема

Задание 3

1. Проверить формулы для H -параметров T -образной схемы на рис. 20.

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_3 \parallel R_2 & \frac{R_3}{R_1 + R_2} \\ -\frac{R_3}{R_3 + R_2} & \frac{R_3}{R_3 + R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix}.$$

2. В Micro-Cap открыть файл hrag.cir. По левой схеме с коротким замыканием на выходе ($U_2 = 0$) и источником тока I_1 на входе измерить U_1 , I_2 и вычислить $h_{11} = \frac{U_1}{I_1}$, $h_{21} = \frac{I_2}{I_1}$. По правой схеме с холостым ходом на входе и источником напряжения U_2 на выходе измерить U_1 , I_2 и вычислить $h_{12} = \frac{U_1}{U_2}$, $h_{22} = \frac{I_2}{U_2}$. Сопоставить результаты измерений с теорией.

Чтобы «заставить» Micro-Cap вычислить значения токов и напряжений в схеме, однократно запустить моделирование через меню Analysis/AC. Тут же закрыть не представляющий интереса график. Не лишне выучить комбинацию горячих клавиш Alt_2 – Enter – F3. Значения токов и напряжений выводить на схему по соответствующим элементам на панели инструментов.

2.4. Звезда и треугольник

Задание 4

1. Проверить формулы для X -параметров звезды на рис. 20:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

2. Открыть файл xrag.cir. Пересчитать параметры представленной там звезды в параметры треугольника:

$$R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}, \quad R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}, \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}.$$

Установить вычисленные значения резисторов в схемы с треугольниками. Проверить правильность пересчета, сравнив изменившиеся значения X -параметров звезд и треугольников.

По левым схемам с $I_2 = 0$ измеряются напряжения U_1 , U_2 и вычисляются $X_{11} = \frac{U_1}{I_1}$, $X_{21} = \frac{U_2}{I_1}$. По правым с $I_1 = 0$ измеряются U_1 , U_2 и вычисляются $X_{12} = \frac{U_1}{I_2}$, $X_{22} = \frac{U_2}{I_2}$.

2.5. Лестничные структуры

Передаточная матрица блока лестничной структуры на рис. 21 с резисторами $R_1 = 1$ и $R_2 = \alpha$ легко вычисляется:

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{\alpha} & \frac{1+\alpha}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix}.$$

Подстановка значений A -параметров в

$$A_{11} + \frac{A_{12}}{w} = A_{21}w + A_{22} = \gamma$$

дает уравнение $w^2 - w - \alpha = 0$ для характеристического сопротивления и значение $\gamma = \frac{w-1}{w}$ для коэффициента передачи напряжения/тока при характеристической нагрузке. Положительное значение характеристического сопротивления составляет

$$w = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}.$$

Имеется ряд значений α , при которых оно вычисляется без радикала:

$$(\alpha = 2, w = 2, \gamma = \frac{1}{2}), (\alpha = 6, w = 3, \gamma = \frac{2}{3}), (\alpha = 12, w = 4, \gamma = \frac{3}{4}).$$

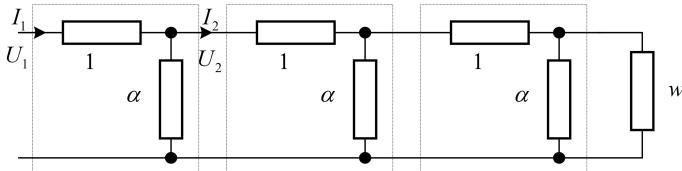


Рис. 21. Лестничная структура

Задание 5

1. Открыть файл aраг.cir с четырехзвенной лестничной схемой с $\alpha = 2, \gamma = \frac{1}{2}$, нагруженной на характеристическое сопротивление $w = 2$ кОм. Исследовать значения напряжений в узлах и токов в ветвях.

2. Повторить это исследование при $\alpha = 6, \gamma = \frac{2}{3}$, установив на схеме номиналы четырех вертикальных резисторов $R_{2j} = 6$ кОм и нагрузки $w = 3$ кОм. Проделать это для $\alpha = 12, \gamma = \frac{3}{4}$ ($R_{2j} = 12$ кОм, $w = 4$ кОм) и для $\alpha = 1, \gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = 0.38$ ($R_{2j} = 1$ кОм, $w = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$ кОм).

3. Открыть файл dac.cir со схемой 4-разрядного цифроаналогового преобразователя (ЦАП), который преобразует двоичный позиционный код (X_3, X_2, X_1, X_0) в пропорциональное напряжение

$$OUT = X_32^3 + X_22^2 + X_12^1 + X_0.$$

Снять зависимость напряжения OUT от двоичного кода (X_3, X_2, X_1, X_0) , изменяя его в диапазоне от $(0, 0, 0, 0) = 0$ до $(1, 1, 1, 1) = 15$.

2.6. Задачи для самопроверки

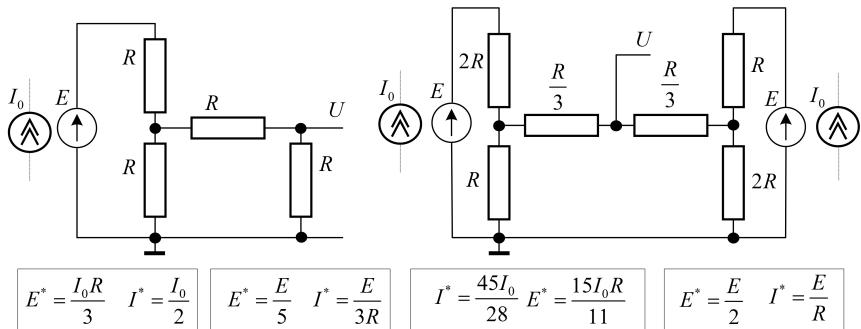


Рис. 22. К определению параметров эквивалентных генераторов

1. Для каждой из двух схем на рис. 22 найдите параметры $E^* = U_{os}$, $R^* = \frac{U_{os}}{I_{sc}}$ эквивалентного источника напряжения и параметры $I^* = I_{sc}$, $R^* = \frac{U_{os}}{I_{sc}}$ эквивалентного источника тока. Ответы – на рисунке.

2. Проделайте то же самое, заменив в схемах источники напряжения E источниками тока I_0 . Ответы – на рисунке.

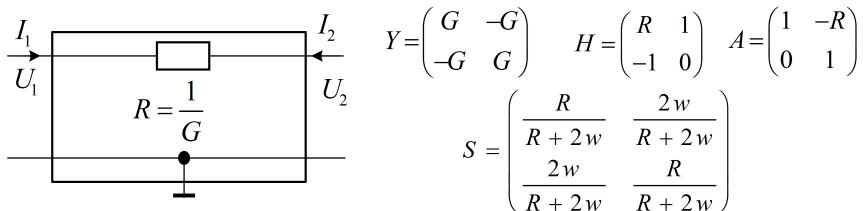


Рис. 23. Элементарный трехполюсник и его параметры

3. Для трехполюсника на рис. 23 найдите матрицы Y , H , A и S -параметров. Ответы – на рисунке.

Учебное издание

Григорьев Александр Алексеевич
Григорьев Иван Александрович

БЕЗЫНЕРЦИОННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

Учебно-методическое пособие

Редактор *О. П. Котова*. Корректор *И. А. Волкова*

Подписано в печать 30.12.2020. Формат 60×84 1/16.

Усл. печ. л. 1,8. Уч.-изд.л. 1,2. Тираж 200 экз. Заказ 38

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

E-mail: polygraph@mipt.ru