**Функция Лагранжа**

**Задача 1.** Найти функцию Лагранжа для плоского маятника, точка подвеса которого:

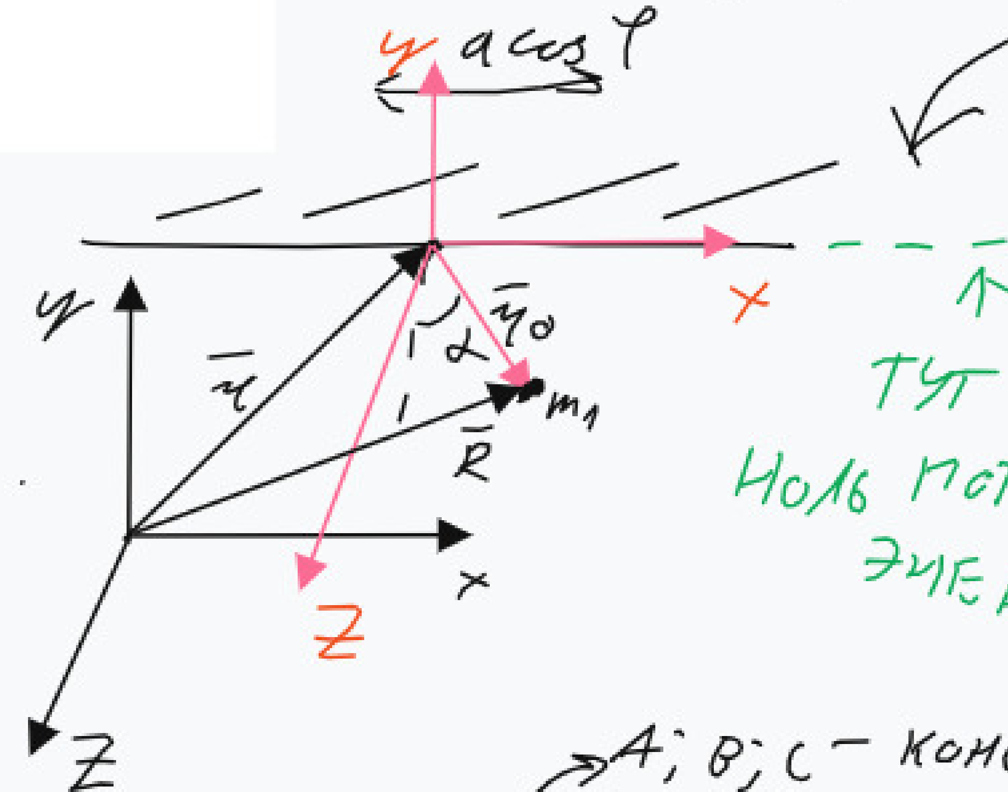
б) совершает горизонтальные колебания по закону $a\cos\varphi$;

в) совершает вертикальные колебания по закону $a\cos\varphi$.

$l$ – длина маятника

Буду решать, исходя из того, что $\alpha$ – обобщенная координата (единственная и неповторимая 🤩🤩)

Решение




Тут ноль потенциальной энергии.

а) $L = T - П$

$T = \frac{m}{2}V^2$

$\bar R = \bar r + \bar r_0$

$\dot{\bar R} = \dot{\bar r} + \dot{\bar r}_0$

$\bar V = \underbrace{\dot{\bar r}}_{\bar V_{пер}} + \underbrace{\dot{\bar r}_0}_{\bar V_{отн}}$

$A; B; C$ – константы.

$\bar r = \begin{pmatrix} A + a\cos\varphi \\ B \\ C \end{pmatrix}$

Мне про $a$ и $\varphi$ ничего не говорили, считаю $\varphi(t)$ и $a(t)$

$\bar r_0 = \begin{pmatrix} l\sin\alpha \\ -l\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

$\bar V = \begin{pmatrix} \dot a\cos\varphi - a\sin\varphi\dot\varphi + l\cos\alpha\dot\alpha \\ l\sin\alpha\dot\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

$\dot{\bar r} = \begin{pmatrix} -a\sin\varphi\dot\varphi + \dot a\cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\dot{\bar r}_0 = \begin{pmatrix} l\cos\alpha\dot\alpha \\ l\sin\alpha\dot\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

$T = \frac{m}{2}\left[(\dot a\cos\varphi - a\sin\varphi\dot\varphi + l\cos\alpha\dot\alpha)^2 + l^2\sin^2\alpha\,\dot\alpha^2 + 0\right]$

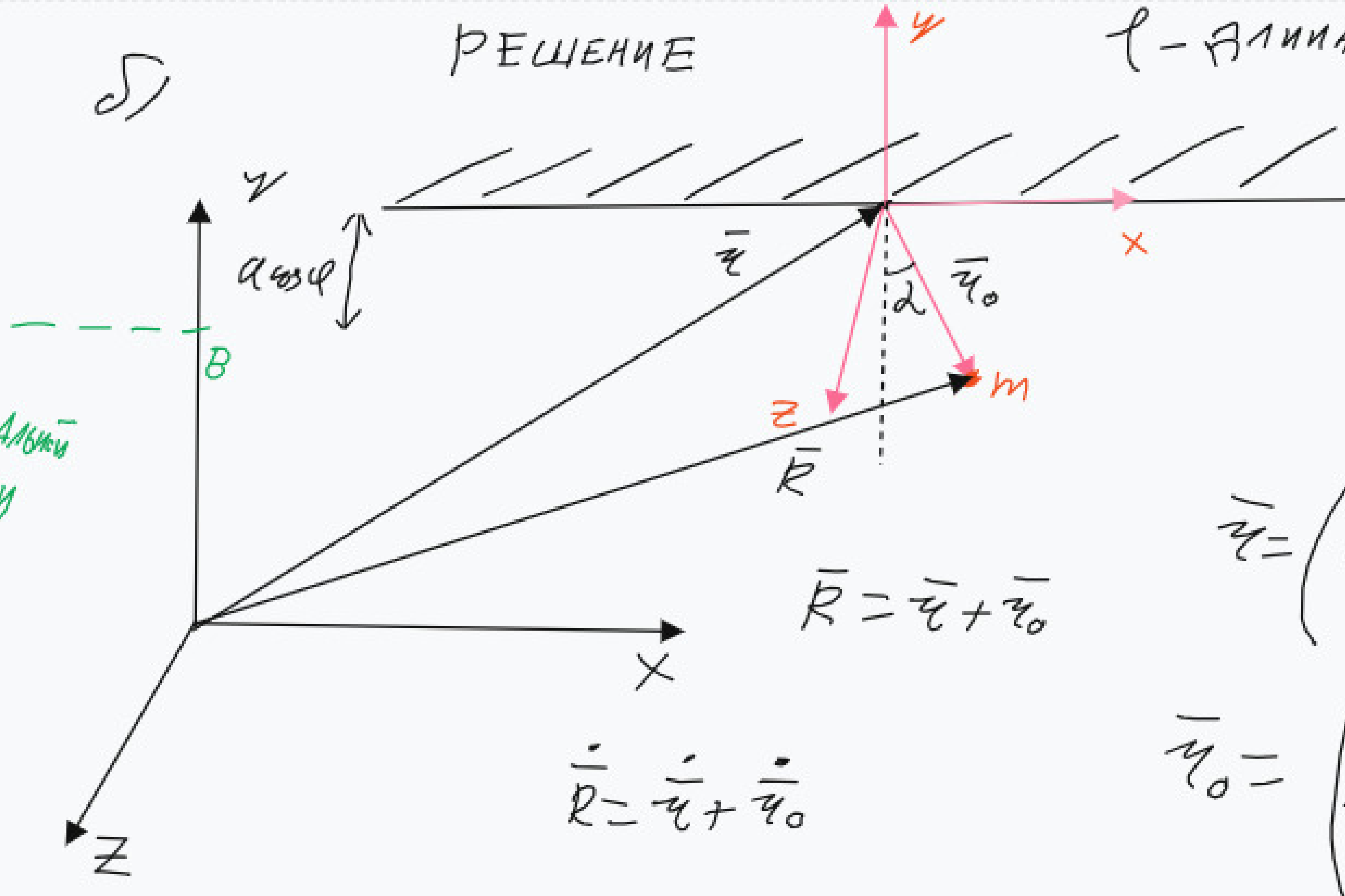
$П = -mgl\cos\alpha$

$L = \frac{m}{2}\left[(\dot a\cos\varphi - a\sin\varphi\dot\varphi + l\cos\alpha\dot\alpha)^2 + l^2\sin^2\alpha\,\dot\alpha^2 + 0\right] + mgl\cos\alpha$

б) РЕШЕНИЕ

$l$ – длина маятника

буду решать, исходя из того, что $\alpha$ – обобщенная координата (единственная и неповторимая 🤩🤩)




$$\bar{R} = \bar{r} + \bar{r}_0$$

$$\dot{\bar{R}} = \dot{\bar{r}} + \dot{\bar{r}}_0$$

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} A \\ B + a\cos\varphi \\ C \end{pmatrix}$$

мне про $a$ и $\varphi$ ничего не говорили, считаю $\varphi(t)$ и $a(t)$

$$\bar{r}_0 = \begin{pmatrix} l\sin\alpha \\ -l\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\bar{r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{a}\cos\varphi - a\sin\varphi\,\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{V} = \dot{\bar{R}} = \begin{pmatrix} l\cos\alpha\,\dot{\alpha} \\ \dot{a}\cos\varphi - a\sin\varphi\,\dot{\varphi} + l\sin\alpha\,\dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\bar{r}}_0 = \begin{pmatrix} l\cos\alpha\,\dot{\alpha} \\ +l\sin\alpha\,\dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L = T - П$$

$$T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}\left[l^2\cos^2\alpha\,\dot{\alpha}^2 + (\dot{a}\cos\varphi - a\sin\varphi\,\dot{\varphi} + l\sin\alpha\,\dot{\alpha})^2 + 0\right]$$

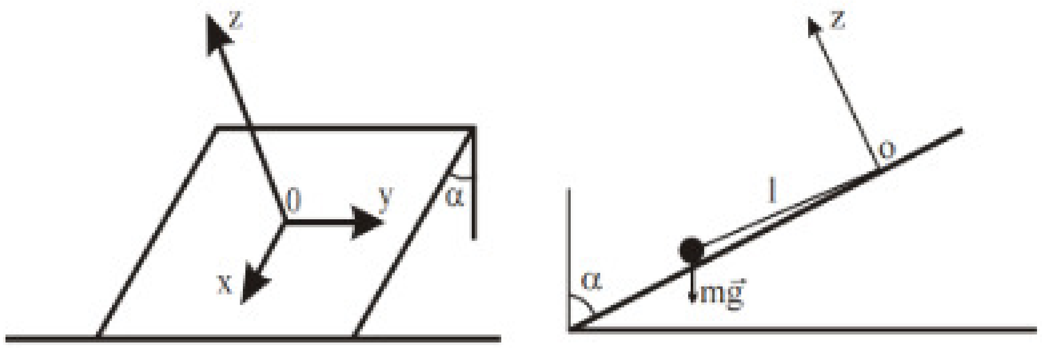
$$П = mg(a\cos\varphi - l\cos\alpha)$$

$$T - П = \frac{m}{2}\left[l^2\cos^2\alpha\,\dot{\alpha}^2 + (\dot{a}\cos\varphi - a\sin\varphi\,\dot{\varphi} + l\sin\alpha\,\dot{\alpha})^2 + 0\right] - mg(a\cos\varphi - l\cos\alpha)$$

$Q_4 = 0$

$Q_5 = 0$

**Задача 2.** Математический маятник массы m и длины l совершает колебания в плоскости, расположенной под углом α к вертикали (рис а и б). Определить функцию Лагранжа.




$L - ?$

$F = 3N - L$

N → материальные точки.

L → число связей

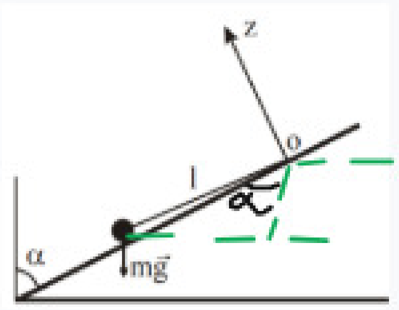
F → степени свободы

$L = 2$

Так как вдоль неподвижной плоскости + натянутая нить на плоскости

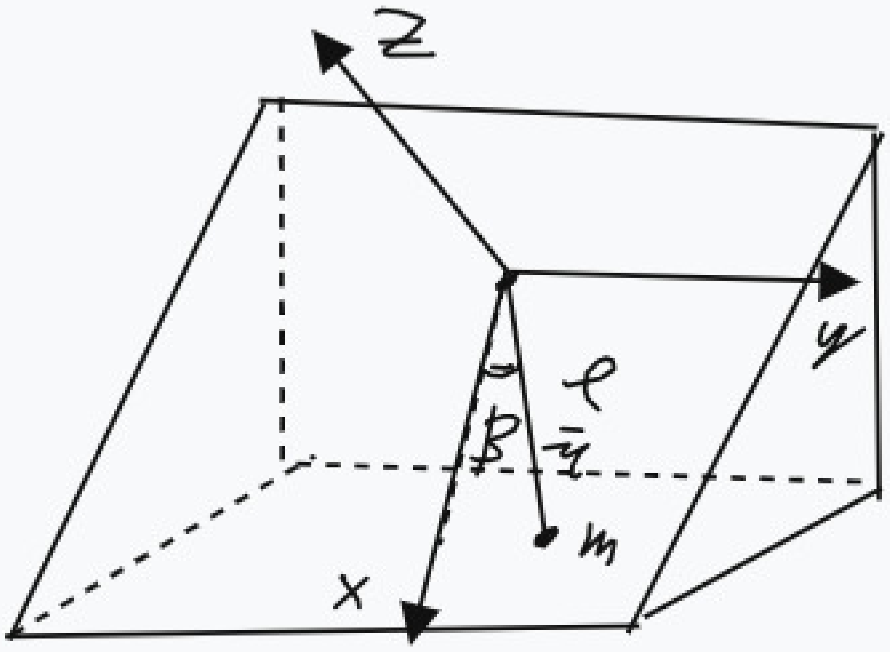
$F = 1$

$L = T - П$




Ноль потенциальной энергии

$П = -mgl\cos\alpha$




$$\bar{r} = \begin{pmatrix} l\cos\beta \\ l\sin\beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{V} = \dot{\bar{r}} = \begin{pmatrix} -l\sin\beta\,\dot{\beta} \\ l\cos\beta\,\dot{\beta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(l^2\sin^2\beta\,\dot{\beta}^2 + l^2\cos^2\beta\,\dot{\beta}^2\right) = \frac{m}{2}l^2\dot{\beta}^2$$

$$L = T - П = \frac{ml^2}{2}\dot{\beta}^2 + mgl\cos\alpha$$

# Функция Лагранжа.

№3

Цилиндрическая с.к.: $q_1 = r$; $q_2 = \varphi$; $q_3 = z$

$x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$; $z = z$

$L = T - П$

$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}$
$\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi}$
$\dot{z} = \dot{z}$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}\left((\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2 + (\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi})^2\right) =$$

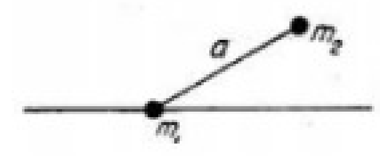
$$= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2 - 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi + \dot{z}^2 + \dot{r}^2\sin^2\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi + r^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2\right) =$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

$П = 0$

$L = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$

**Задача 4.** Напишите функцию Лагранжа системы состоящей из точки массой $m_1$ движущейся по горизонтальной прямой, и точки массой $m_2$, движущейся в вертикальной плоскости, в поле силы тяжести (см. рисунок).




Дано
$m_1$
$m_2$
$d$

Число степеней свободы:

$$F = 3N - L = 3\cdot 2 - 3 = 3$$

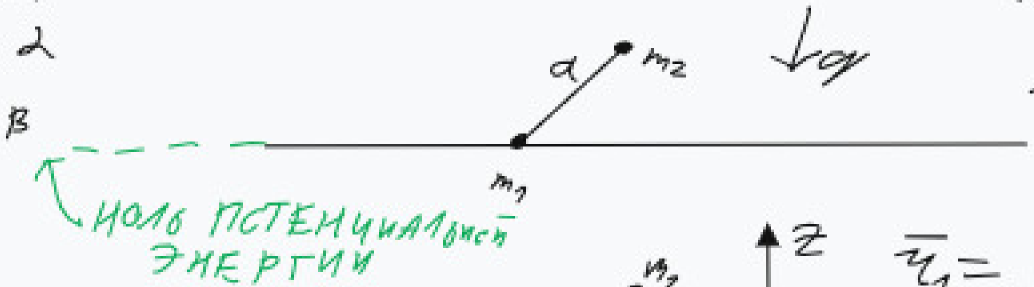
$N$ — число материальных точек

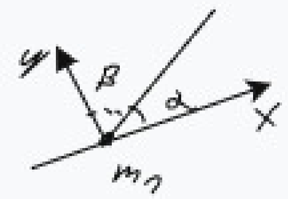
$L$ — число связей (+2, так как $m_1$ вдоль прямой; +1, так как $m_2$ и $m_1$ соединены палкой)

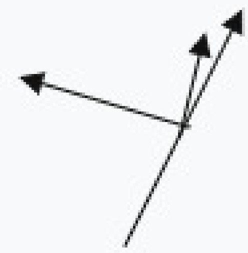
Выберем обобщенные координаты так

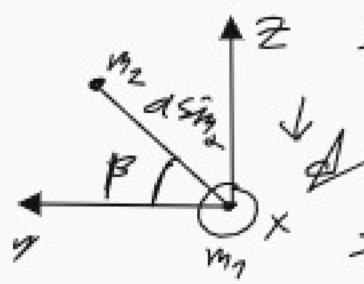
$q_1 = x_1$
$q_2 = \alpha$
$q_3 = \beta$

$$L = T - П$$






$$\bar r_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \bar r_2 = \begin{pmatrix} x + d\cos\alpha \\ d\cos\beta\sin\alpha \\ d\sin\beta\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\dot{\bar r}_1 = \begin{pmatrix} \dot x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dot{\bar r}_2 = \begin{pmatrix} \dot x - d\sin\alpha\,\dot\alpha \\ d\cos\beta\cos\alpha\,\dot\alpha - d\sin\beta\sin\alpha\,\dot\beta \\ d\cos\beta\sin\alpha\,\dot\beta + d\sin\beta\cos\alpha\,\dot\alpha \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{m_1}{2}\dot x^2 + \frac{m_2}{2}\left[(\dot x - d\sin\alpha\,\dot\alpha)^2 + (d\cos\beta\cos\alpha\,\dot\alpha - d\sin\beta\sin\alpha\,\dot\beta)^2 + (d\cos\beta\sin\alpha\,\dot\beta + d\sin\beta\cos\alpha\,\dot\alpha)^2\right] =$$

$$= \frac{m_1\dot x^2}{2} + \frac{m_2}{2}\left[(\dot x^2 - 2d\sin\alpha\,\dot\alpha\dot x + d^2\sin^2\alpha\,\dot\alpha^2) + (d^2\cos^2\beta\cos^2\alpha\,\dot\alpha^2 - \cancel{2d^2\sin\beta\cos\beta\cos\alpha\sin\alpha\,\dot\beta\dot\alpha} + \right.$$

$$\left. + d^2\sin^2\beta\sin^2\alpha\,\dot\beta^2) + (d^2\cos^2\beta\sin^2\alpha\,\dot\beta^2 + \cancel{2d^2\sin\beta\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\,\dot\alpha\dot\beta} + d^2\sin^2\beta\cos^2\alpha\,\dot\alpha^2)\right]$$

$$T = \frac{m_1\dot x^2}{2} + \frac{m_2}{2}\left[d^2\cos^2\alpha\,\dot\alpha^2 + d^2\sin^2\alpha\,\dot\beta^2 + \dot x^2 + d^2\sin^2\alpha\,\dot\alpha^2 - 2d\sin\alpha\,\dot\alpha\dot x\right] =$$

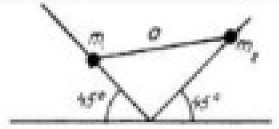
$$= \frac{m_1\dot x^2}{2} + \frac{m_2}{2}\left[d^2\dot\alpha^2 + d^2\sin^2\alpha\,\dot\beta^2 + \dot x^2 - 2d\sin\alpha\,\dot\alpha\dot x\right] =$$

$$= \frac{(m_1+m_2)}{2}\dot x^2 + \frac{m_2}{2}\left[d^2(\dot\alpha^2 + \sin^2\alpha\,\dot\beta^2) - 2d\sin\alpha\,\dot\alpha\dot x\right]$$

$$П = m_2 g d\sin\alpha\sin\beta$$

$$L = \frac{(m_1+m_2)}{2}\dot x^2 + \frac{m_2}{2}\left[d^2(\dot\alpha^2 + \sin^2\alpha\,\dot\beta^2) - 2d\sin\alpha\,\dot\alpha\dot x\right] - m_2 g d\sin\alpha\sin\beta$$

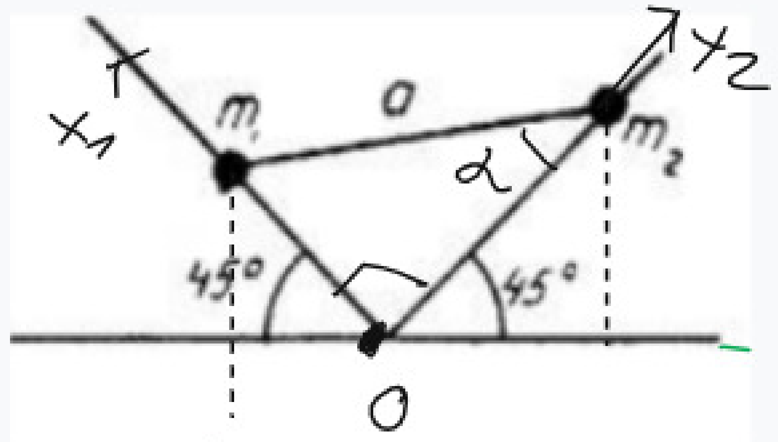
**Задача 5.** Напишите функцию Лагранжа системы точек массы, которых $m_1$ и $m_2$, движущихся по прямым, образующим угол $45^\circ$ с горизонтом, в поле силы тяжести (см. рисунок).




Дано

$m_1 \; m_2$

$L - ?$




Ноль потенциальной энергии

РЕШЕНИЕ

$$F = 3 \cdot N - L$$

$N$ — число материальных точек (2)

$F$ — количество степеней свободы

$L$ — число связей

В качестве обобщенной координаты выберу угол $\alpha$

$L =$ ( +2 так как $m_1$ может двигаться только вдоль прямой
+2 так как $m_2$ может двигаться только вдоль прямой
+1 так как $m_1$ и $m_2$ связаны палкой )

$$F = 6 - 5 = 1$$

$$L = T - П$$

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} =$$

$$v_1 = \dot{x}_1 \qquad x_1 = a\sin\alpha; \; \dot{x}_1 = a\cos\alpha\,\dot{\alpha}$$

$$v_2 = \dot{x}_2 \qquad x_2 = a\cos\alpha; \; \dot{x}_2 = -a\sin\alpha\,\dot{\alpha}$$

$$= \frac{m_1 a^2 \cos^2\alpha\,\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{m_2 a^2 \sin^2\alpha\,\dot{\alpha}^2}{2}$$

$$П = m_2 a\cos\alpha \sin 45^\circ + m_1 a \sin\alpha \sin 45^\circ$$

$$L = m_1 a\left(\frac{a\cos^2\alpha\,\dot{\alpha}^2 + \sin\alpha\sqrt{2}}{2}\right) + m_2 a\left(\frac{\cos\alpha\sqrt{2} + a\sin^2\alpha\,\dot{\alpha}^2}{2}\right)$$