Обобщенные силы. ответ

№1.

Дано:
m, g, $Q^d=0$

у. Л II, Q — ?

Решение:

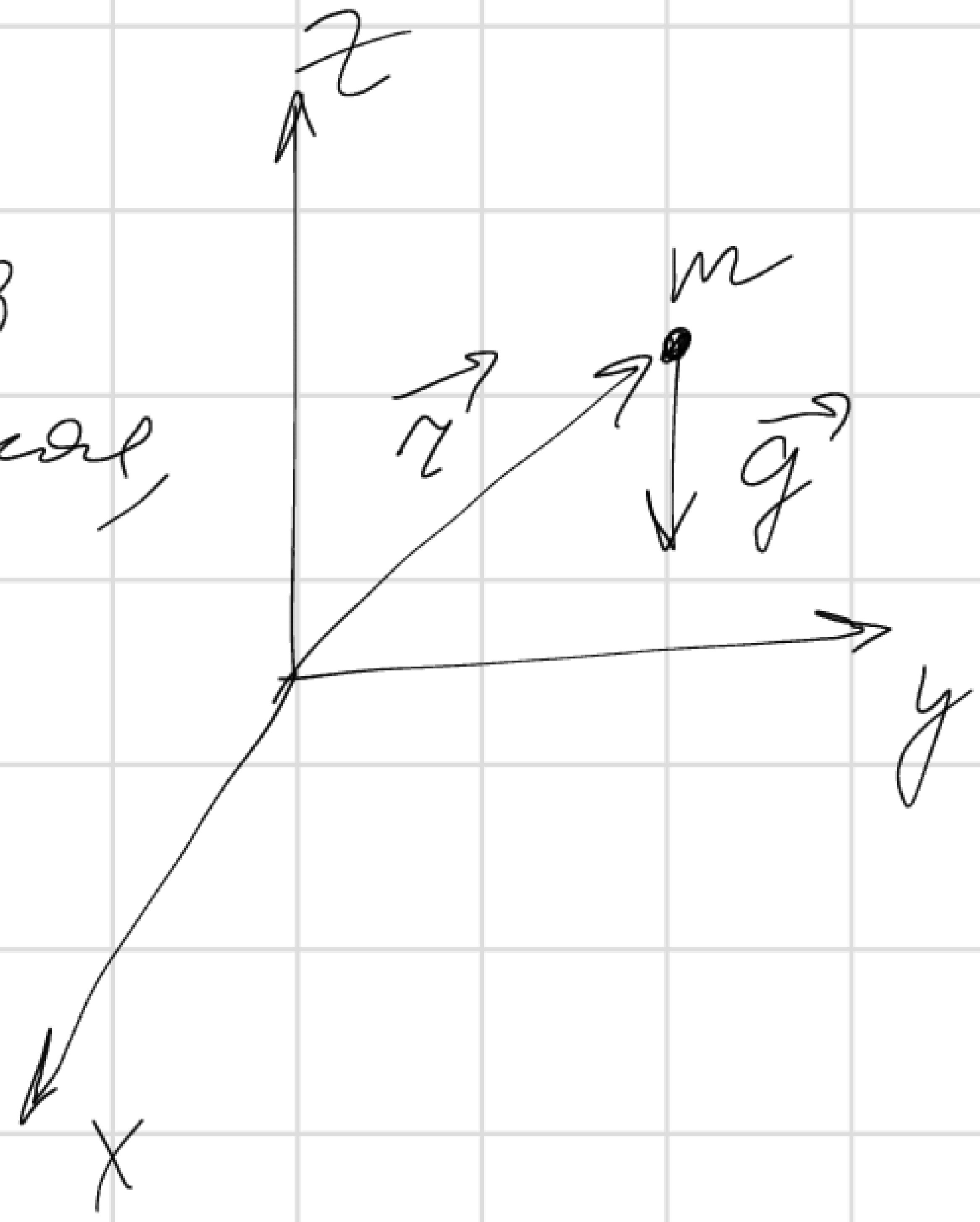
По условию дана одна мат. точка к тому же свободная, т.е. на нее никакие связи не наложены

$$\Downarrow$$

$$s = 3\cdot 1 - 0 = 3$$

число степеней свободы точки = число незав-х координат.

Рисунок:



Остановимся в ДСК.

Чтобы получить ур-е Лагранжа, необходимо найти кинет. и потенц. эн.

$$\begin{cases} T = \dfrac{m\dot{\vec r}^2}{2} \\ U = m(\vec g, \vec r) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) \\ U = -mgz \end{cases}$$

Ф-я Лагранжа: $L = T - U = \dfrac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) + mgz$

Ур-е Лагранжа II рода:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot x}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(m\dot x\right) - 0 = m\ddot x = Q_x^{\alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot y}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial t}(m\dot y) - 0 = m\ddot y = Q_y^{\alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot z}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(m\dot z\right) + mg = m(\ddot z + g) = Q_z^{\alpha} = 0 \end{cases}$$

По определению обобщенные силы:

$$Q = \sum_i F_i \frac{\delta r_i}{\delta q}$$, где F_i — заданные силы

В нашем случае дана $F = mg$:

$$Q = \frac{-mg\,\delta r_i}{\delta q} = -\frac{\partial U}{\partial q}$$

$$\begin{cases} Q_x = -\dfrac{\partial}{\partial x}(mgz) = 0 \\ Q_y = -\dfrac{\partial}{\partial y}(mgz) = 0 \\ Q_z = -\dfrac{\partial}{\partial z}(mgz) = mg \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q = mg}$$

№2. не оригинально (вариант решения Трефилова К.)

Дано:

$m, g, Q^{д} = 0$

$z = a\cos\omega t$

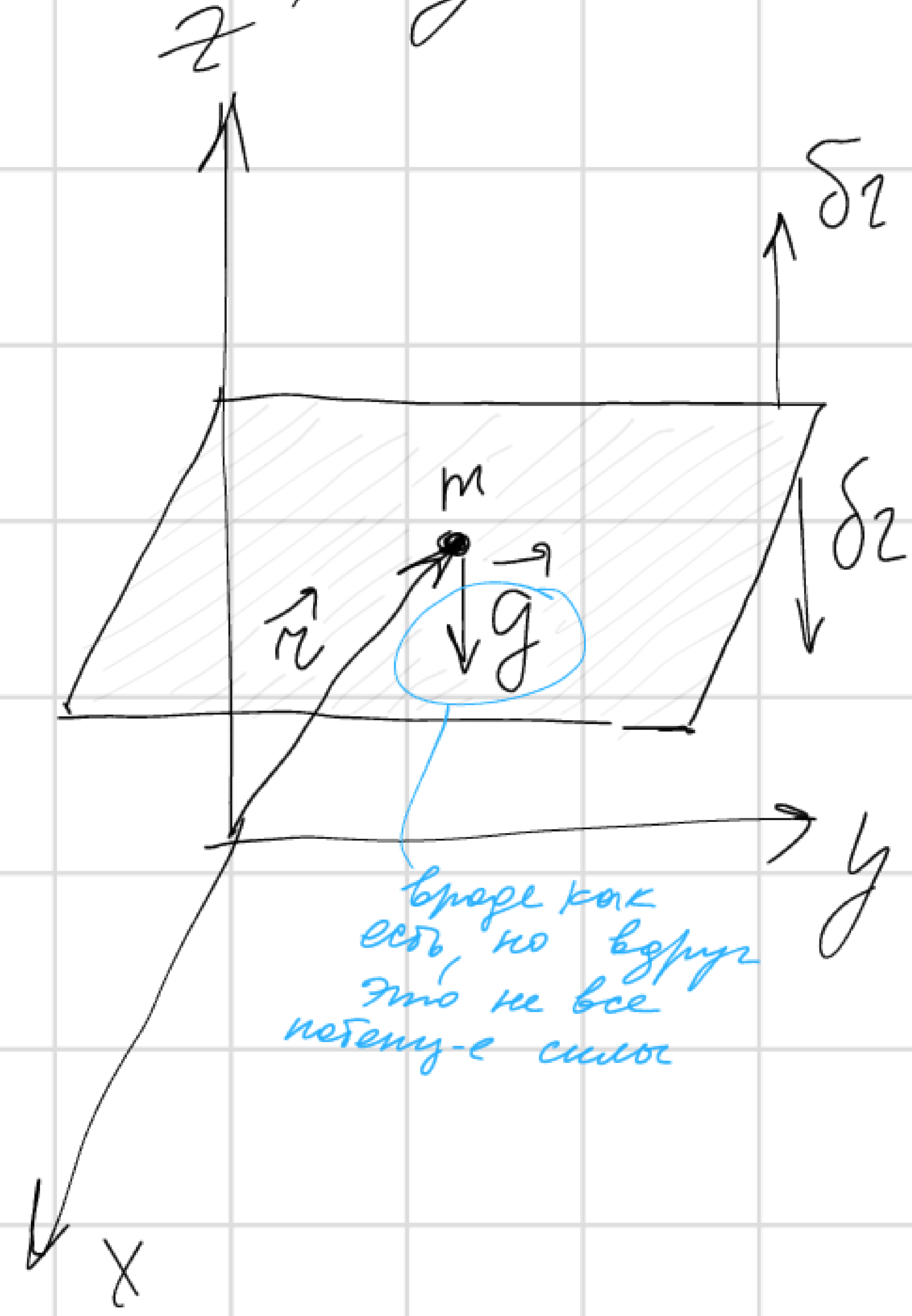
у.Л II, Q — ?

Решение:

* по условию не заданы как будто явно силы, но есть з-н дв-я →

→ ур-е Лагранжа через кинет. эн-ю:

Рисунок:



$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = m\ddot{x} = Q_x = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = m\ddot{y} = Q_y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial T}{\partial z} = m\ddot{z} = -ma\omega^2\cos\omega t = Q_z \end{cases}$$

* а нельзя просто из ур. Л взять обобщенные силы?

типо $Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2} = Q_z = -ma\omega^2\cos\omega t$

то же самое же будет?

пока под вопросом

№3.

Дано:

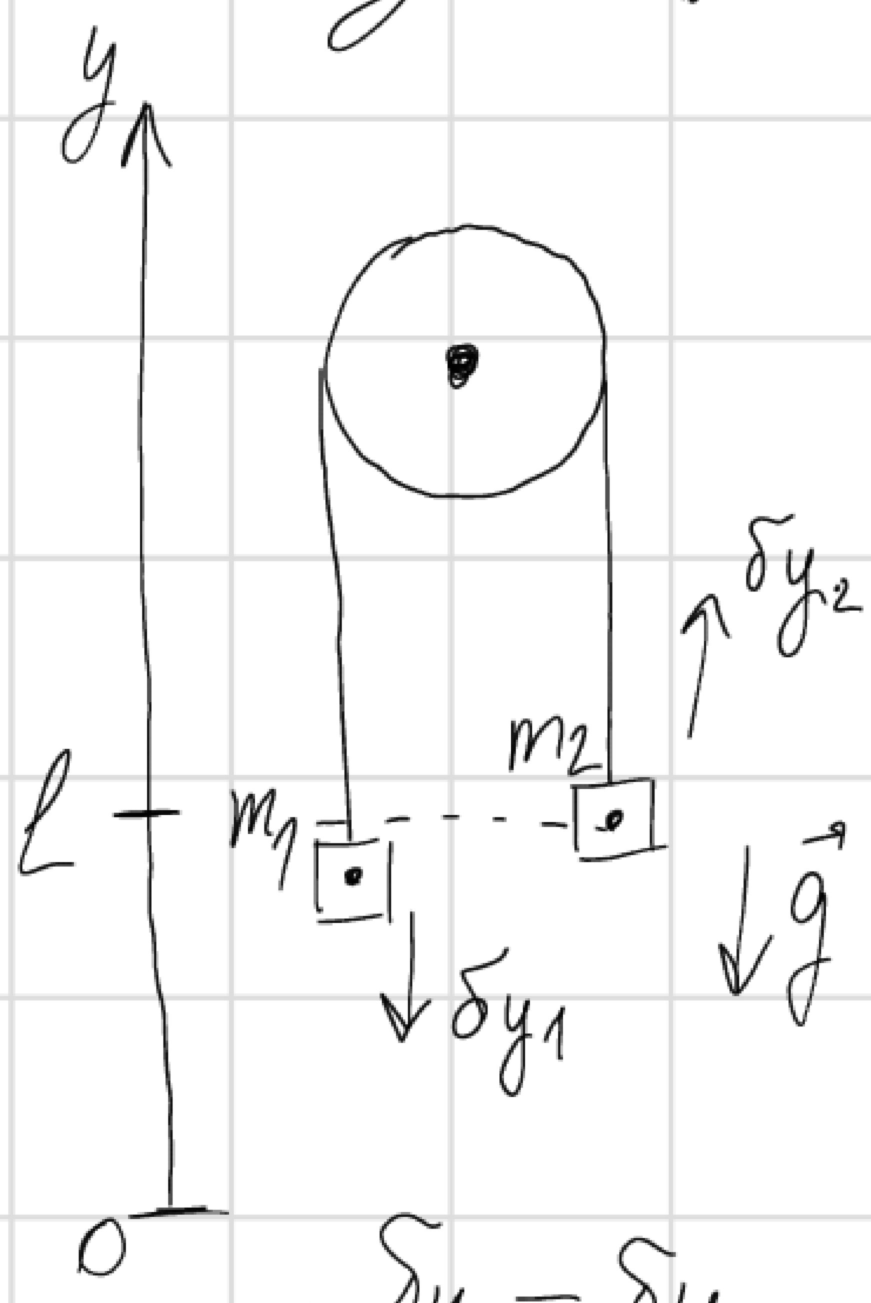
$m_1, m_2, g, Q^{д}=0$

$y.Л\,II,\ Q - ?$

Решение:

Будем рассм-ть две вдоль одной оси координаты y.

Рисунок:



$-\delta y_1 = \delta y_2$

пусть l – нач. положе

В силу нерастяжимости нити точки m_1 и m_2 дв-ся с одинак-й ск-тью ($v_1 = v_2$):

Кинетическая эн-я системы:

$$T = \frac{m_1 \dot{y}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{y}^2}{2} = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{y}^2$$

Потенциальная эн-я:

$$\begin{cases} U_1 = m_1 g y \\ U_2 = m_2 g (l + (l - y)) \end{cases} \Rightarrow U_{общ} = m_1 g y + m_2 g (l + (l - y)) =$$

$$= g(m_1 y + m_2 2l - m_2 y) =$$

$$= g m_2 2l + y g (m_1 - m_2)$$

Ф-я Лагранжа:

$$L = T - U = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{y}^2 - g m_2 2l - y g (m_1 - m_2)$$

Ур-е Лагранжа:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t}\left((m_1 + m_2)\dot{y}\right) + g(m_1 - m_2) = (m_1 + m_2)\ddot{y} + g(m_1 - m_2) = Q^{д} = 0}$$

Обобщенная сила:

$$\boxed{Q_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(g m_2 2l + y g (m_1 - m_2)\right) = -g(m_1 - m_2)}$$