Функция Лагранжа.

(*) ну пусть 0 потенц. энергии будет на уровне Ox.

№1.

Дано:

$m,\ g,\ f = a\cos\varphi$

а) т. A колеб-ся гориз-но по з-ну f

б) т. A колеб-ся верт-но по з-у f

L - ?

Решение:

плоский маятник ⇒ ⇒ рассм-ем дв-е в двумерной системе на пл-ти.

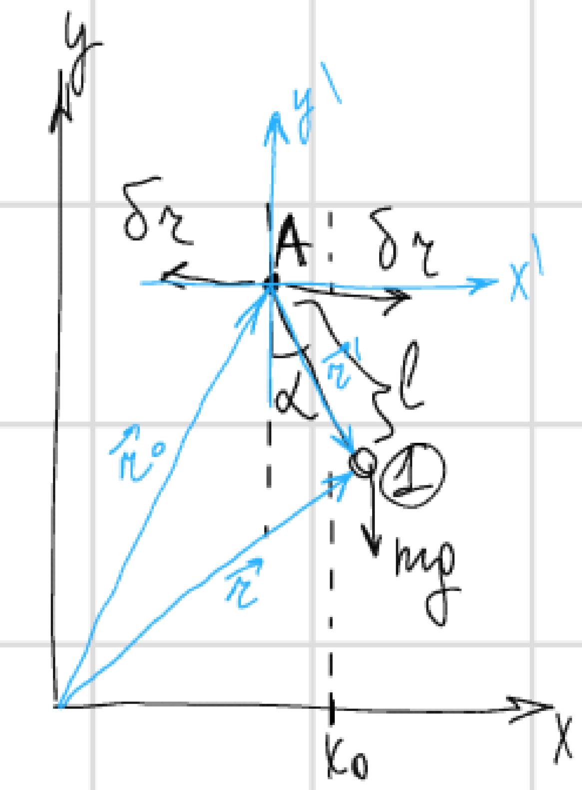
а) $$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) = \frac{m}{2}\left(\left(-\dot\varphi a\sin\varphi + \dot\alpha l\cos\alpha\right)^2 + \left(\dot\alpha l\sin\alpha\right)^2\right) = \frac{m}{2}\left(\left(\dot\varphi a\sin\varphi\right)^2 - \dot\varphi\dot\alpha a l\sin 2\alpha + \left(\dot\alpha l\right)^2\right)$$

$$U = mg\left(y_0 - l\cos\alpha\right)$$

$$\boxed{L = \frac{m}{2}\left(\left(\dot\varphi a\sin\varphi\right)^2 - \dot\varphi\dot\alpha a l\sin 2\alpha + \left(\dot\alpha l\right)^2\right) - mg\left(y_0 - l\cos\alpha\right)}$$

Рисунок:

а)



З-н дв-я:

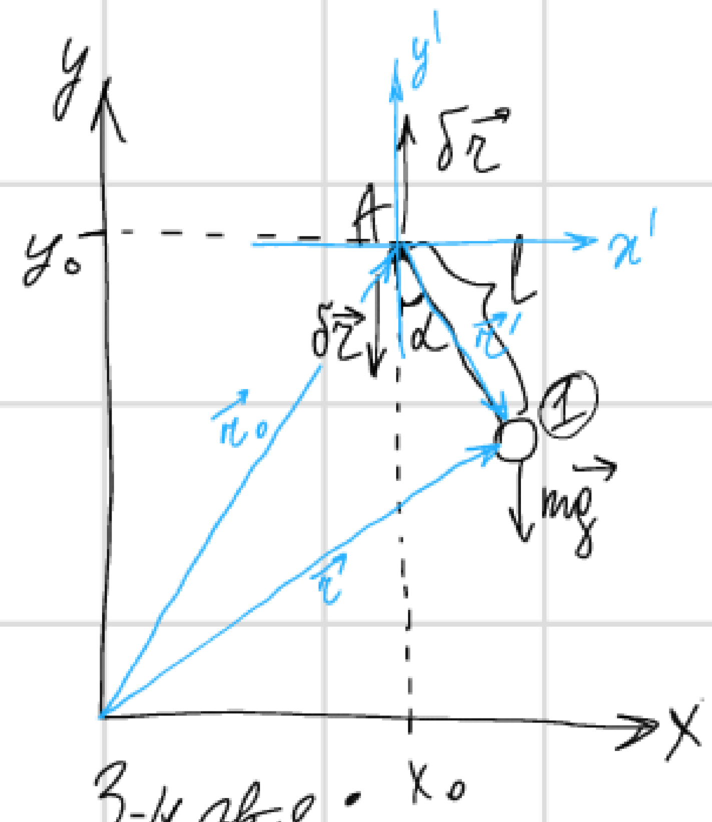
$$\begin{cases} x_A = x_0 + a\cos\varphi(t) \\ y_A = const = y_0 \\ x_1 = x_A + l\sin\alpha(t) \\ y_1 = y_A - l\cos\alpha(t) \end{cases}$$

б) $$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) = \frac{m}{2}\left(\left(l\cos\alpha\,\dot\alpha\right)^2 + \left(-a\sin\varphi\,\dot\varphi + l\sin\alpha\,\dot\alpha\right)^2\right) = \frac{m}{2}\left(\left(l\dot\alpha\right)^2 + \left(a\sin\varphi\,\dot\varphi\right)^2 - 2a\dot\varphi\dot\alpha\sin\varphi\sin\alpha\right)$$

$$U = mg\left(y_0 + a\cos\varphi - l\cos\alpha\right)$$

$$\boxed{L = \frac{m}{2}\left(\left(l\dot\alpha\right)^2 + \left(a\sin\varphi\,\dot\varphi\right)^2 - 2a\dot\varphi\dot\alpha\sin\varphi\sin\alpha\right) - mg\left(y_0 + a\cos\varphi - l\cos\alpha\right)}$$

б)



З-н дв-я:

$$\begin{cases} x_A = const = x_0 \\ y_A = y_0 + a\cos\varphi(t) \\ x_1 = x_A + l\sin\alpha(t) \\ y_1 = y_A - l\cos\alpha(t) \end{cases}$$

№2.

Дано:

m, l, α

$L - ?$

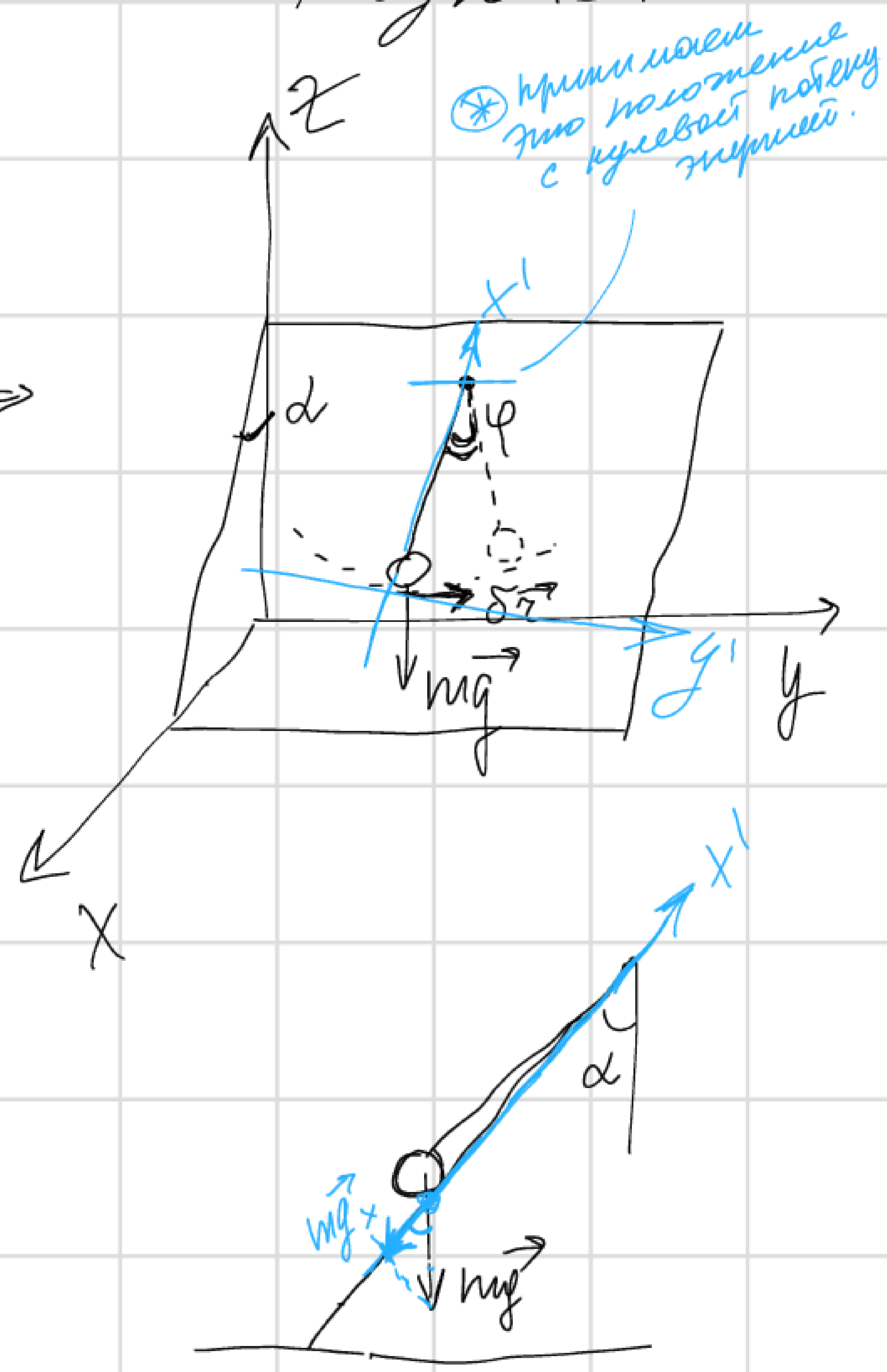
Решение:

Дв-е сов-ся в пл-ти $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ одно ур-е связи

Маятник дв-ся по окр-ти $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ еще одно ур-е связи

$S = 3 \cdot 1 - 2 = 1$
обобщ. коорд.

Рисунок:



Рассмотрим две непоср-но на пл-ти, приняв новую СК $x'Oy'$:

$$\begin{cases} x' = l\cos\varphi \\ y' = l\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}' = -\dot{\varphi} l \sin\varphi \\ \dot{y}' = \dot{\varphi} l \cos\varphi \end{cases}$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) = \frac{m}{2}(\dot{\varphi} l)^2$$

Проекция на Ox' силы тяж-ти:

$$F_{x'} = -mg\cos\alpha$$

Теперь рассм. потенц. эн. в $x'Oy'$:

$$U = (F_{x'}, l) = F_{x'} l \cos\varphi = -mg\cos\alpha \cdot l\cos\varphi$$

$$\boxed{L = \frac{m}{2}(\dot{\varphi} l)^2 + mgl\cos\alpha \cdot \cos\varphi}$$

№3.

Дано: m, g

L в УСК

Решение:

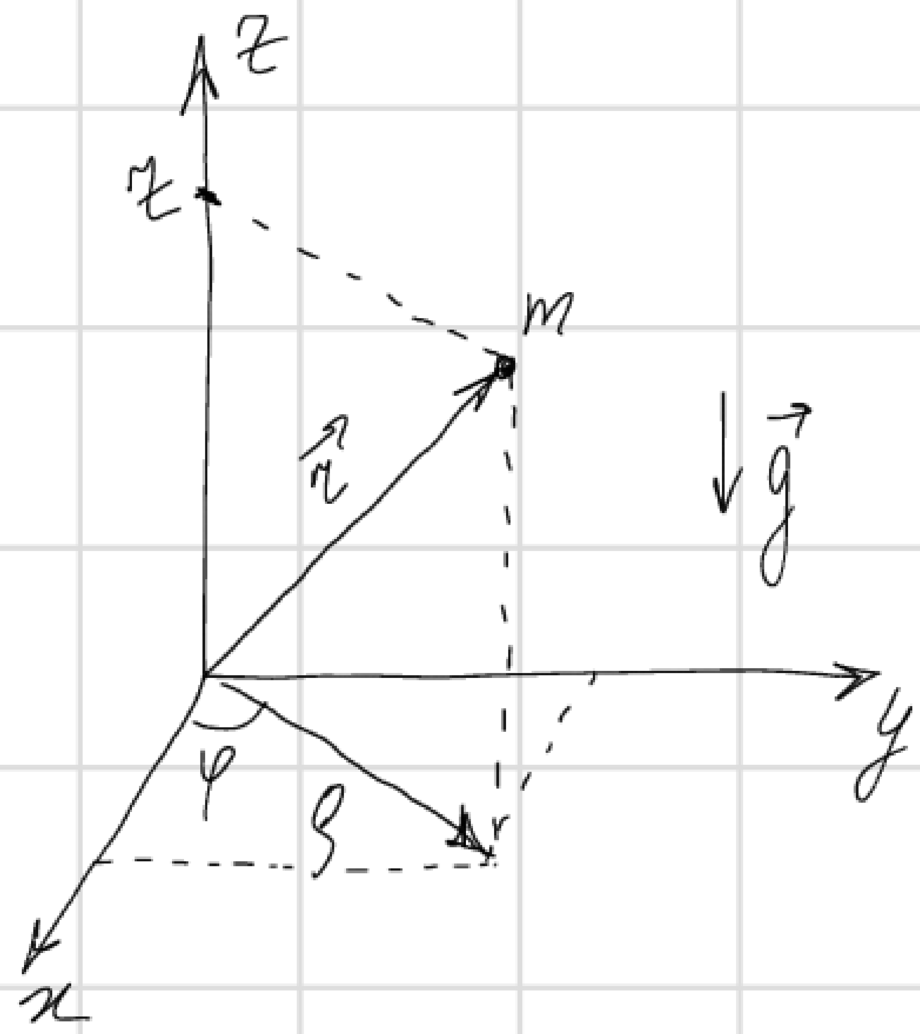
$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) =$$

$$= \frac{m}{2}\left((\dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\dot{\varphi})^2 + (\dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho} - (\rho\dot{\varphi})^2\right)$$

$$U = mgz$$

$$\boxed{L = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho} - (\rho\dot{\varphi})^2\right) - mgz}$$

Рисунок:



З-н дв-я:

$$\begin{cases} x = \rho(t)\cos\varphi(t) \\ y = \rho(t)\sin\varphi(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

№4.

⊛ Я не поняла, здесь имелось ввиду двит-е m_2 свободное или удерж-ся прямой a? Я так подумала, что точка свободно по пл-ти дв-ся, a – радиус-вектор

Дано: m_1, m_2, g, a

L - ?

Решение:

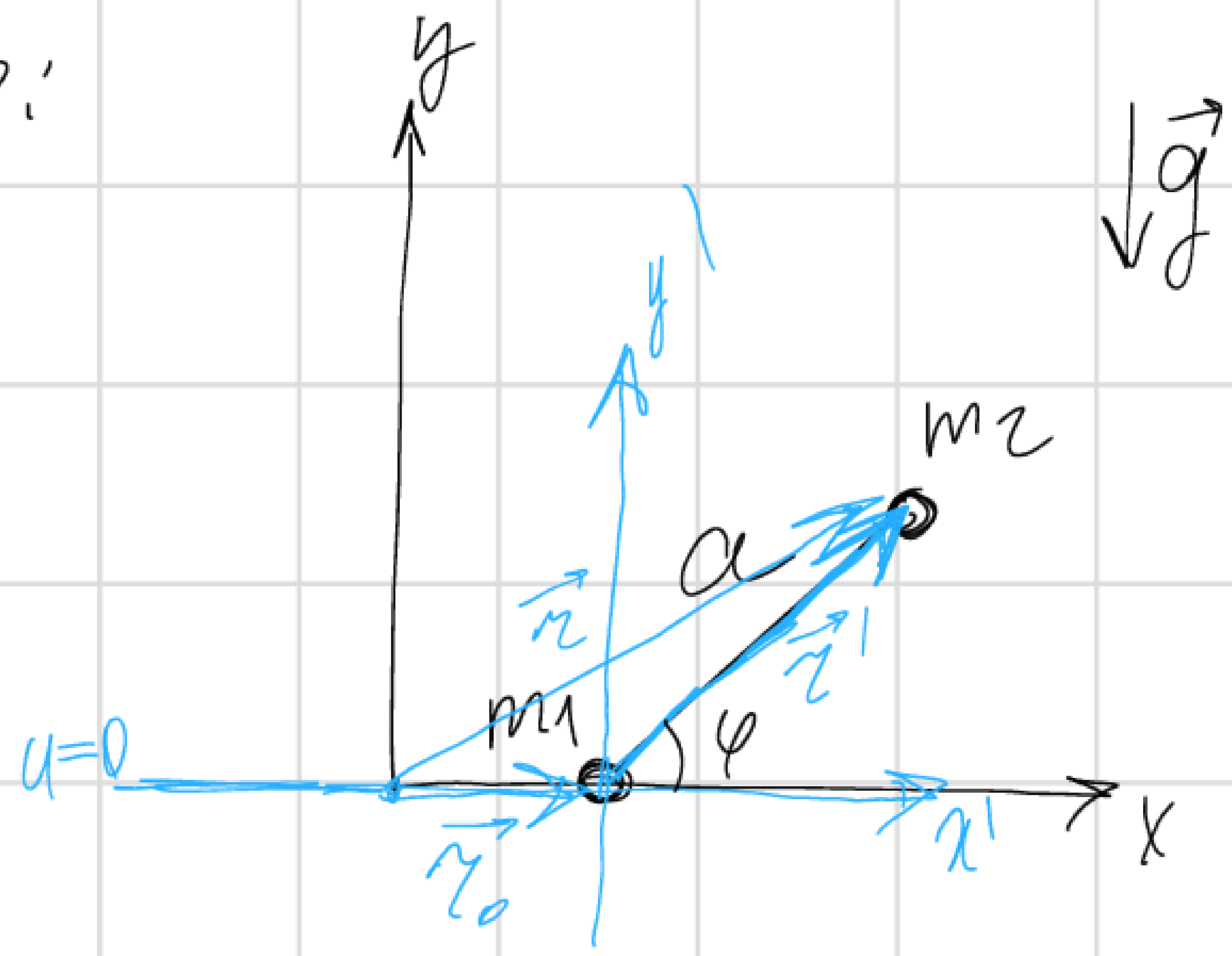
Выберем обобщ. коорд-ты:

2 декарт. коорд.
2 мат. точки
1 ур-е связи (прямая)

$$s = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x, a, \varphi) = 0$$

Рисунок:



$$T = \sum_i T_i = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) =$$

$$= \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\left((\dot{x} + \dot{a}\cos\varphi - a\sin\varphi\dot{\varphi})^2 + (\dot{a}\sin\varphi + a\cos\varphi\dot{\varphi})^2\right) = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\Big(\dot{x}^2 + (\dot{a}\cos\varphi)^2 +$$

$$+ (a\sin\varphi\dot{\varphi})^2 + 2\dot{x}\dot{a}\cos\varphi - 2\dot{x}a\sin\varphi\dot{\varphi} - 2\dot{a}\cos\varphi a\sin\varphi\dot{\varphi} +$$

$$+ (\dot{a}\sin\varphi)^2 + 2\dot{a}\sin\varphi a\cos\varphi\dot{\varphi} + (a\cos\varphi\dot{\varphi})^2\Big) =$$

З-н дв-я:

$$\begin{cases} x_1 = x(t) \\ y_1 = 0 \\ x_2 = x_1 + a(t)\cos\varphi(t) \\ y_2 = a(t)\sin\varphi(t) \end{cases}$$

$$= \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{a}^2 + (a\dot{\varphi})^2 + 2\dot{x}\left(\dot{a}\cos\varphi - a\sin\varphi\dot{\varphi}\right)\right) =$$

$$= \frac{\dot{x}^2}{2}(m_1+m_2) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{a}^2 + (a\dot{\varphi})^2 + 2\dot{x}\left(\dot{a}\cos\varphi - a\sin\varphi\dot{\varphi}\right)\right)$$

$$U = \sum_i U_i = \overset{=0}{m_1 g y_1} + m_2 g y_2 = m_2 g a \sin\varphi$$

$$\boxed{L = \frac{\dot{x}^2}{2}(m_1+m_2) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{a}^2 + (a\dot{\varphi})^2 + 2\dot{x}\left(\dot{a}\cos\varphi - a\sin\varphi\dot{\varphi}\right)\right) - m_2 g a \sin\varphi}$$

(*) в принципе тут наверно a — const, тогда все проще...

№5.

Дано:

m_1, m_2

$\alpha = 45^\circ$

g

$L - ?$

Решение:

Выберем обобщ-е коорд.:

1) Ур-е связи:

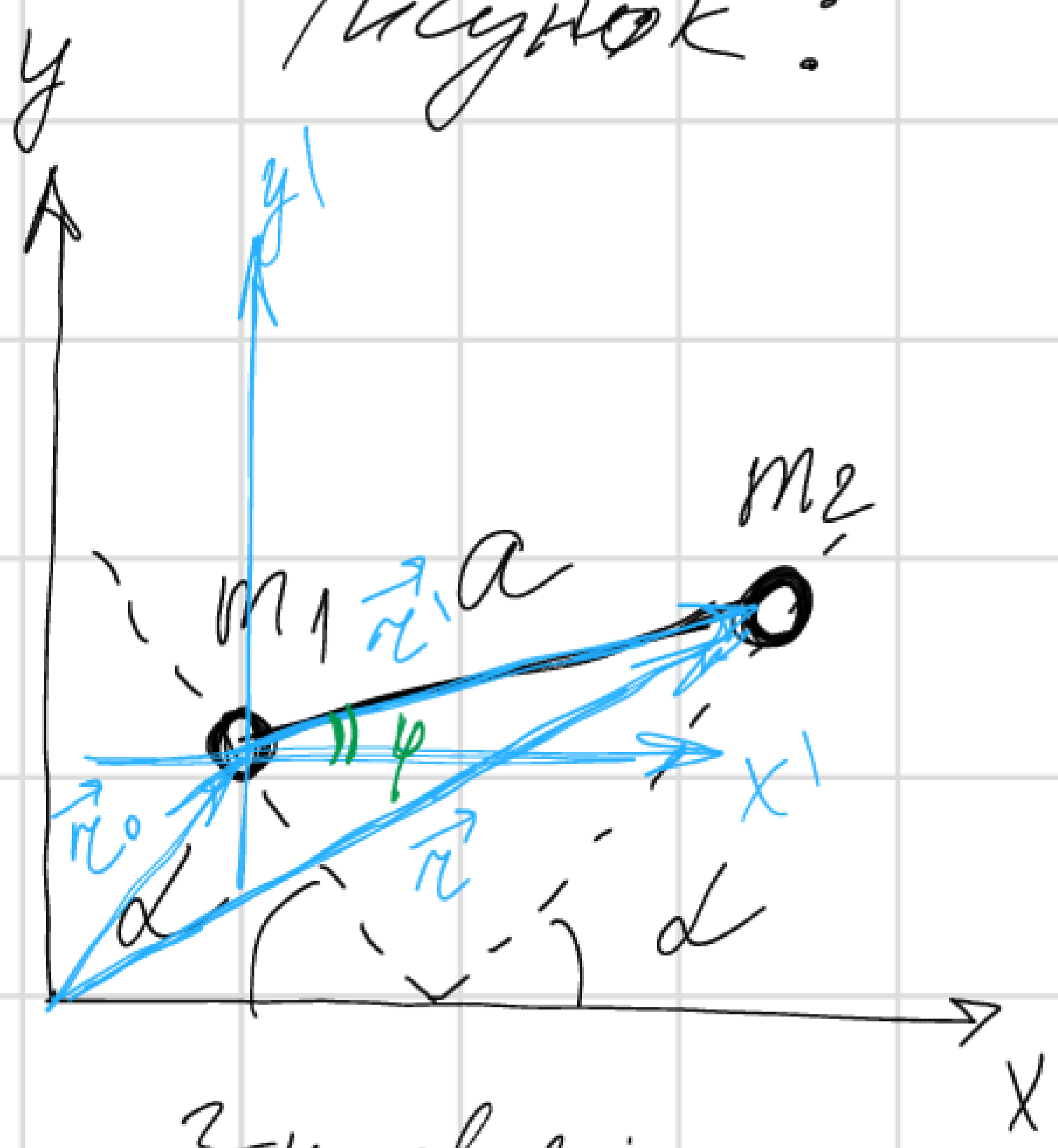
$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -x_1 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}\right] \Rightarrow 2 \text{ ур-е связи}$$

2) 2 мат. точки

3) 2 декарт. координаты

$$S = 2\cdot 2 - 2 = 2 \Rightarrow f(x, \varphi) = 0$$

Рисунок:



З-н дв-е:

$$\begin{cases} x_1 = x(t) \\ y_1 = -x(t) \\ x_2 = x_1 + a\cos\varphi(t) \\ y_2 = y_1 + a\sin\varphi(t) \end{cases}$$

$$T = \sum_i T_i = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) =$$

$$= \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{x}^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\left(\dot{x} - a\sin\varphi\dot{\varphi}\right)^2 + \left(-\dot{x} + a\cos\varphi\dot{\varphi}\right)^2\right) =$$

$$= m_1\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}^2 - 2a\sin\varphi\dot{\varphi} + (a\sin\varphi\dot{\varphi})^2 + \dot{x}^2 + 2a\cos\varphi\dot{\varphi} + (a\cos\varphi\dot{\varphi})^2\right) =$$

$$= m_1\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\left(2\dot{x}^2 - 2a\dot{\varphi}(\sin\varphi - \cos\varphi) + (a\dot{\varphi})^2\right) =$$

$$= \dot{x}^2(m_1+m_2) - m_2\left(a\dot{\varphi}(\sin\varphi - \cos\varphi) + \frac{(a\dot{\varphi})^2}{2}\right)$$

$$U = \sum_i U_i = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = -m_1 g x + m_2 g(-x + a\sin\varphi) =$$

$$= -gx(m_1+m_2) + m_2 g a \sin\varphi$$

$$\boxed{L = \dot{x}^2(m_1+m_2) - m_2\left(a\dot{\varphi}(\sin\varphi - \cos\varphi)\right) + \frac{(a\dot{\varphi})^2}{2} + gx(m_1+m_2) - m_2 g a \sin\varphi}$$