

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

*Кафедра радиотехники и систем управления*

## **ПАССИВНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ**

Методические указания  
к лабораторной работе

по курсу *Радиотехнические цепи и сигналы*

*Составители:* А.А. Григорьев, И.В. Филатов

МОСКВА  
МФТИ  
2020

ББК 621.396.6

Р е ц е н з е н т  
Кандидат технических наук *А.Л. Ларин*

**Пассивные электрические цепи:** методические указания к лабораторной работе по курсу *Радиотехнические цепи и сигналы* / сост.: А.А. Григорьев, И.В. Филатов.– М.: МФТИ, 2020.  
– 44 с.

Цель работы состоит в том, чтобы уяснить подходы к анализу электрических RLC-цепей во временной и частотной областях и приобрести практические навыки экспериментального исследования характеристик этих цепей. Исследования проводятся как в реальных физических экспериментах, так и моделированием в программе MicroCap. Предназначено для слушателей курса «Электрические цепи и сигналы».

**ББК 621.396.6**

- © Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2020
- © Григорьев А.А., Филатов И.В.,  
составление, 2020

# **Содержание**

<b>1. Предмет исследования</b>	<b>4</b>
<b>2. Временная область</b>	<b>5</b>
<b>3. Частотная область</b>	<b>7</b>
<b>4. Связь временной и частотной областей</b>	<b>11</b>
<b>5. Импедансы и адmittансы</b>	<b>13</b>
<b>6. Мощность реактивной системы</b>	<b>15</b>
<b>7. Частотные и фазовые характеристики</b>	<b>17</b>
<b>8. Задание</b>	<b>22</b>
8.1. Интегрирующие и дифференцирующие звенья . . . . .	24
8.2. RC-звенья второго порядка . . . . .	28
8.3. Мостовые схемы . . . . .	31
8.4. Последовательный резонанс . . . . .	35
8.5. Параллельный резонанс . . . . .	37
8.6. Смешанные резонансы . . . . .	41

# 1. Предмет исследования

Работа посвящена исследованию пассивных электрических RLC-цепей, построенных из резисторов, индуктивностей и конденсаторов. Все эти цепи являются линейными стационарными системами. Методы, применяемые при их анализе, в равной мере относятся ко всем системам этого рода.

С категорией системы мы сталкиваемся всякий раз, когда начинаем размышлять о том или ином объекте в терминах воздействия – входного сигнала  $x(t)$  – и порождаемого этим воздействием отклика – сигнала  $y(t)$  на выходе, рис. 1а. В электрических цепях система – это чаще всего четырехполюсник, рис. 1б, со входом  $e(t)$  и выходом  $u(t)$ . Но и двухполюсник, рис. 1с, также можно рассматривать как систему, объявив, к примеру, ток  $i(t)$  входом, а напряжение  $u(t)$  – выходом.

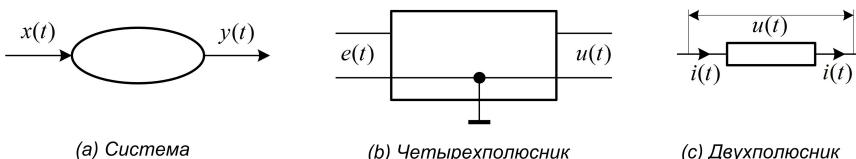


Рис. 1. К понятию системы

Система **линейна**, если для нее выполняется *принцип суперпозиции*: отклик на линейную комбинацию  $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$  воздействий  $x_1(t), x_2(t)$  с коэффициентами  $\alpha, \beta$  равен сумме  $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$  откликов  $y_1(t), y_2(t)$  на каждое из этих воздействий в отдельности с теми же весовыми коэффициентами.

Система **стационарна** (инвариантна во времени), если сдвиг по времени воздействия – переход от  $x(t)$  к  $x(t - \tau)$  – вызывает такой же сдвиг отклика – переход от  $y(t)$  к  $y(t - \tau)$ .

Аппарат описания стационарных линейных систем составляет один из важнейших разделов математической физики. Известные методы анализа делятся на два большие класса, относящиеся к временной и частотной областям. Между этими классами существует тесная связь, и каждый из них дает специфические приемы экспериментального исследования характеристик систем.

Цель работы состоит в том, чтобы освоить математический

аппарат анализа стационарных линейных систем и приобрести навыки экспериментального исследования характеристик простых RLC-цепей во временной и частотной областях.

## 2. Временная область

Подадим на вход системы  $\delta$ -импульс  $\delta(t)$ . На выходе, рис. 2, получится некоторый отклик  $h(t)$ . Этот отклик называют *импульсной реакцией* (*импульсной характеристикой*) системы. Оказывается, что импульсная реакция дает исчерпывающее описание стационарной линейной системы, позволяя эффективно найти отклик на произвольное воздействие на входе.

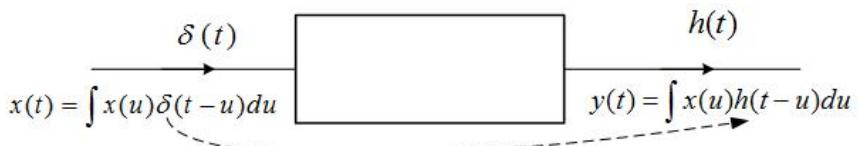


Рис. 2. Импульсная реакция системы

В самом деле, стационарность системы гарантирует, что откликом на сдвинутый  $\delta$ -импульс  $\delta(t - \tau)$  будет сдвинутая на то же  $\tau$  импульсная реакция  $h(t - \tau)$ . Далее, произвольный вход  $x(t)$  можно представить континуальной суммой сдвинутых  $\delta$ -импульсов с весами  $x(\tau)$ :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau.$$

Но в линейной системе работает принцип суперпозиции, согласно которому отклик на взвешенную сумму воздействий можно найти как такую же сумму откликов на каждое из них. Поэтому

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = (x * h)(t).$$

Получившееся интегральное представление отклика известно как *интеграл Диамеля* или *свертка* входа  $x(t)$  с импульсной реакцией  $h(t)$ .

Свертку

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u) du$$

можно рассматривать как операцию перемножения функций  $x(t), y(t)$ . Подобно обычному умножению, операция свертки коммутативна:  $((x * y) = (y * x))$  и ассоциативна:  $((x * y) * z) = (x * (y * z))$ .

Импульсная реакция тривиальной системы, отклик которой совпадает с воздействием, – это  $\delta$ -импульс:  $h(t) = \delta(t)$ . Поэтому  $(x(u) * \delta(u))(t) = x(t)$ . В частности, это остается справедливым и когда  $x(t) = \delta(t)$ . Поэтому  $(\delta(u) * \delta(u))(t) = \delta(t)$ .

Выделен класс *реализуемых* систем, удовлетворяющих принципу причинности. Отклик на выходе такой системы не может появиться раньше воздействия. Поэтому импульсные реакции реализуемых систем – это *правосторонние* функции, равные нулю на отрицательной полуоси:  $h(t) = 0$  при  $t < 0$ .

Класс правосторонних функций замечателен тем, что в нем как производная  $\partial x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ , так и первообразная  $\partial^{-1}x(t) = \int x(u)du$  определены однозначно. Свертка двух правосторонних функций также является правосторонней. Более того, свертка двух таких функций совпадает со сверткой первообразной от одной из них с производной от другой:

$$(x * y)(t) = (\partial^{-1}x(u) * \partial y(u))(t),$$

в чем легко убедиться интегрированием по частям, рассмотрев интеграл в бесконечных пределах от дифференциала

$$d_u[\partial^{-1}x(u)y(t-u)] = x(u)y(t-u)du - \partial^{-1}x(u)\partial y(t-u)du.$$

Импульсные реакции  $h(t)$  не годятся для экспериментального исследования – неясно, как  $\delta$ -импульс подать на вход системы физически. Вместо них исследуются *переходные характеристики*  $h_0(t)$  – реакции на единичную ступень  $\theta(t)$  – первообразную от  $\delta$ -импульса:

$$\theta(t) = \partial^{-1}\delta(t) = \int_{-\infty}^t \delta(u)du = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Переходная характеристика  $h_0(t)$  – это первообразная от импульсной реакции  $h(t)$ , поскольку

$$h_0(t) = (\theta * h) = (\partial\theta * \partial^{-1}h) = (\delta * \partial^{-1}h) = \partial^{-1}h(t) = \int_0^t h(u)du.$$

Более того, переходная характеристика также позволяет найти отклик  $y(t)$  на произвольное входное воздействие  $x(t)$ :

$$y(t) = (x * h)(t) = (\partial x * \partial^{-1}h) = (\partial x * h_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(u)}{du} h_0(t-u) du.$$

Переходные характеристики удобны еще и тем, что их значения безразмерны. Импульсные же реакции имеют размерность обратного времени  $\left[\frac{1}{T}\right]$ , наследуя это свойство от  $\delta$ -функции.

### 3. Частотная область

Система *безынерционна*, если ее отклик  $y(t)$  в данный момент  $t$  однозначно определяется значением входа  $x(t)$  в тот же момент. Для таких систем закон преобразования входа в выход задается просто числом  $K$ :  $y(t) = Kx(t)$ . Для безынерционного усилителя речь идет о его безразмерном коэффициенте передачи  $K$ , а для безынерционного двухполюсника (резистора) – о его сопротивлении:  $u(t) = Ri(t)$ .

В произвольной (динамической) системе отклик на выходе в данный момент определяется интегралом свертки и формально зависит от значений входа на всей временной оси. Существует, тем не менее класс сигналов, которые при прохождении через любую стационарную линейную систему сохраняют свою форму. Ограничившись такими сигналами, понятия коэффициента передачи и сопротивления удается отнести «спасти». Речь идет о комплекснозначных экспоненциальных сигналах вида

$$x(t) = x_p e^{pt} = |x_p| e^{j\varphi} e^{\delta t} e^{j\omega t} = |x_p| e^{\delta t} (\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)).$$

Временная форма этого сигнала определяется комплексной частотой  $p = \delta + j\omega$  (точкой в комплексной  $p$ -плоскости) и комплексной амплитудой  $x_p = |x_p| e^{j \arg x_p} = |x_p| e^{j\varphi}$ . Его вещественная и мнимая части – это гармонические колебания частоты  $\omega$

с амплитудой, нарастающей ( $\delta > 0$ ) или убывающей ( $\delta < 0$ ) по закону  $e^{\delta t}$ . Модуль и аргумент комплексной амплитуды  $x_p$  задают начальные значения амплитуды и фазы этих колебаний при  $t = 0$ . Точки  $p = j\omega$  на мнимой оси  $p$ -плоскости отвечают чисто гармонические колебания неизменной амплитуды. Это область гармонического анализа.

Подадим на вход системы сигнал  $x(t) = x_p e^{pt}$ . На выходе получим некоторый отклик  $y(t)$ , рис. 3. Рассмотрим сдвиг  $x(t - \tau) = x_p e^{p(t-\tau)} = e^{-p\tau} x(t)$  входа на произвольное  $\tau$ . Видно, что этот сдвиг является также и результатом умножения входа  $x(t)$  на число  $\lambda = e^{-p\tau}$ . Поскольку система стационарна, сдвиг воздействия приводит к такому же сдвигу отклика. А поскольку она линейна, умножение воздействия на  $\lambda$  вызывает умножение отклика на то же  $\lambda$ . Поэтому

$$y(t - \tau) = \lambda y(t) = e^{-p\tau} y(t) \quad \text{при всех } \tau.$$

Но этому функциональному уравнению удовлетворяет единственная непрерывная функция  $y(t) = y_p e^{pt}$  с некоторой комплексной амплитудой  $y_p$ .

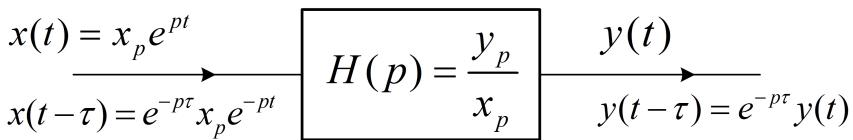


Рис. 3. К определению передаточной функции

Таким образом, воздействие  $x(t) = x_p e^{pt}$  на входе стационарной линейной системы дает отклик  $y(t) = y_p e^{pt}$  в той же форме, но с иной комплексной амплитудой  $y_p$ . Это позволяет вести коэффициент передачи  $H(p) = \frac{y_p}{x_p}$ , который определяет закон преобразования комплексной амплитуды воздействия в амплитуду отклика:  $y_p = H(p)x_p$ .

Комплекснозначная функция  $H(p)$ , определенная в комплексной  $p$ -плоскости  $p = \delta + j\omega$ , известна как *передаточная функция* системы. Она дает ее исчерпывающее описание в частотной области, подобно тому как импульсная реакция  $h(t)$  дает алтернативное описание в области временной. Ограничение передаточ-

ной функции на мнимую ось  $p$ -плоскости известно как *комплексный коэффициент передачи* системы:  $K(j\omega) = H(p)|_{p=j\omega}$ .

Тригонометрическая форма представления этого коэффициента

$$K(j\omega) = K_i + jK_q = |K(j\omega)| e^{j \arg K(j\omega)},$$

где

$$|K(j\omega)| = \sqrt{K_i^2 + K_q^2}, \quad \arg K(j\omega) = \arctg \frac{K_q}{K_i},$$

приводит к определениям *амплитудно-частотной характеристики* системы (АЧХ)  $|K(j\omega)|$  и ее *фазочастотной характеристики* ( $\Phi$ ЧХ)  $\psi(\omega) = \arg K(j\omega)$ . Ясно, что пара АЧХ-ФЧХ вполне определяет комплексный коэффициент передачи. В присторечии их называют просто частотной и фазовой характеристиками.

Физический смысл введенных понятий иллюстрирует рис. 4, на котором показан результат прохождения гармонического колебания с комплексной амплитудой  $x_p = x_m e^{j\varphi}$  (амплитудой  $x_m$  и начальной фазой  $\varphi$ ) через систему с АЧХ  $|K(j\omega)|$  и ФЧХ  $\psi(\omega)$ . Видно, что АЧХ определяет закон преобразования амплитуды гармонического колебания, а ФЧХ – фазовый сдвиг между колебаниями на выходе и входе.

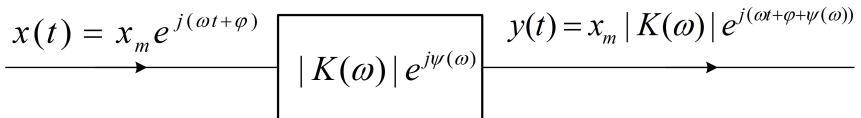


Рис. 4. Смысл АЧХ и ФЧХ

Фазовый сдвиг  $\psi(\omega)$  можно интерпретировать как сдвиг выходного сигнала вдоль оси времени:

$$\omega t + \varphi + \psi(\omega) = \omega(t - \tau_p) + \varphi, \quad \tau_p = -\frac{\psi(\omega)}{\omega}.$$

Величину  $\tau_p$  называют *фазовой задержкой*. При  $\psi(\omega) > 0$  эта задержка отрицательна – опережение. При  $\psi(\omega) < 0$  она положительна – запаздывание.

Временной сдвиг медленно меняющейся огибающей квазигармонического сигнала определяет *групповую задержку*

$\tau_g = -\frac{d\psi(\omega)}{d\omega}$ . Пусть на входе присутствует сумма двух гармоник с близкими частотами:

$$x(t) = e^{j\omega t} + e^{j(\omega+\Delta\omega)t} = e^{j\omega t} \left(1 + e^{j\Delta\omega t}\right).$$

Это гармоническое колебание, амплитуда которого  $|1 + e^{j\Delta\omega t}|$  медленно изменяется между максимальным значением 2 при  $t = 0$  и нулем при  $\Delta\omega t = \pi$ . Проследим за времененным положением этого максимума в отклике  $y(t)$  на выходе системы с фазовой характеристикой  $\psi(\omega)$ :

$$y(t) = e^{j[\omega t + \psi(\omega)]} + e^{j[(\omega + \Delta\omega)t + \psi(\omega + \Delta\omega)]} = e^{j[\omega t + \psi(\omega)]} \left(1 + e^{j(\Delta\omega t + \Delta\psi)}\right),$$

где  $\Delta\psi = \psi(\omega + \Delta\omega) - \psi(\omega)$ . Видно, что максимум амплитуды отклика  $|1 + e^{j(\Delta\omega t + \Delta\psi)}|$  достигается в ненулевой момент  $t = -\frac{\Delta\psi}{\Delta\omega} \neq 0$ . В пределе при  $\Delta\omega \rightarrow 0$  максимум оказывается смещенным как раз на групповую задержку:  $t = \tau_g = -\frac{d\psi(\omega)}{d\omega}$ . На тех интервалах, где фазовая характеристика убывает, групповая задержка положительна – запаздывание. Там, где она нарастает, групповая задержка отрицательна – опережение. В этих диапазонах частот система предсказывает будущее (на глубину  $\tau_g$ ).

У системы с линейной фазовой характеристикой  $\psi(\omega) = -\omega\tau$  фазовая и групповая задержки совпадают:  $\tau_p = \tau_g = \tau$ . Такими свойствами обладает идеальная линия задержки  $y(t) = x(t - \tau)$  с  $H(p) = e^{-pt}$ . Система с неравномерной групповой задержкой нарушает временную форму сигнала – обладает *дисперсией*.

Экспериментальное измерение АЧХ и ФЧХ – это наиболее распространенный метод исследования свойств динамических систем, известный как *гармонический анализ*. Комплексность сигналов, фигурирующих при формальном построении передаточных функций, не создает серьезных трудностей при экспериментальном исследовании. Вместо комплексного сигнала  $x(t) = x_p e^{pt}$  на вход системы подается вещественный сигнал

$$\operatorname{Re}(x(t)) = \frac{x_p e^{pt} + x_p^* e^{p^* t}}{2} = |x_p| e^{\delta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

который тестирует систему сразу на двух частотах –  $p$  и  $p^*$ . На выходе получается

$$y(t) = \frac{H(p)x_p e^{pt} + H(p^*)x_p^* e^{p^* t}}{2}.$$

Этот отклик оказывается вещественным, если  $H(p^*) = H^*(p)$ . Последнее выражает факт вещественности системы в терминах свойства ее передаточной функции. Для вещественной системы с  $H(p) = |H|e^{j\psi}$  эксперимент по измерению значения  $H(p)$  сводится к измерению амплитуды и фазового сдвига отклика

$$y(t) = |H||x_p|e^{\delta t} \cos(\omega t + \varphi + \psi).$$

В тех случаях, когда нужно проанализировать воздействие на систему вещественного сигнала

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

с амплитудой  $x_m$  и начальной фазой  $\varphi$ , его преобразуют в комплексный эквивалент

$$x^+(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) + jx_m \sin(\omega t + \varphi) = x_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}.$$

Комплексная амплитуда этого эквивалента  $x_p = x_m e^{j\varphi}$  характеризует как амплитуду, так и фазу исходного вещественного сигнала, а сам этот сигнал восстанавливается как вещественная часть комплексного эквивалента:  $x(t) = \operatorname{Re}(x^+(t))$ . Широко используемая при расчете электрических цепей с гармоническими сигналами трехэтапная процедура – переход к комплексной форме воздействия, отыскание комплексного отклика, выделение его вещественной части – известна как *метод комплексных амплитуд*.

## 4. Связь временной и частотной областей

Связь между временной и частотной областями устанавливается интегральное преобразование Фурье, которое дает разложение произвольного сигнала  $x(t)$  по гармоническим функциям  $e^{j\omega t}$ , отвечающим точкам  $p = j\omega$  на мнимой оси  $p$ -плоскости:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{j\infty} x(j\omega) e^{j\omega t} dj\omega.$$

Коэффициенты этого разложения задает функция  $x(j\omega)$  – *амплитудный спектр* сигнала  $x(t)$ :

$$x(j\omega) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Для правосторонних сигналов  $x(t)$ , равных нулю на отрицательной полуоси, это преобразование удается продолжить с мнимой оси  $j\omega$  во всю  $p$ -плоскость. В результате получается преобразование Лапласа, которое каждому правостороннему сигналу ставит в соответствие его  $p$ -образ

$$x(p) = L[x(t)] = \int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt$$

и позволяет представить сигнал разложением по функциям  $e^{pt}$ :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} x(p)e^{pt}dp, \quad p = \delta + j\omega.$$

Для обоих преобразований выполняется *теорема о свертке*, согласно которой образ свертки сигналов совпадает с результатом поточечного перемножения их образов:

$$F[(x*y)] = F[x]F[y] = x(j\omega)y(j\omega); \quad L[(x*y)] = L[x]L[y] = x(p)y(p).$$

Во временной области отклик  $y(t)$  на выходе системы – это свертка воздействия  $x(t)$  с импульсной реакцией  $h(t)$ :  $y(t) = (x * h)(t)$ . А это означает, что образ отклика можно найти как произведение образа воздействия на образ импульсной реакции:

$$\begin{aligned} F[y(t)] &= F[x(t)]F[h(t)] \Rightarrow y(j\omega) = x(j\omega)h(j\omega), \\ L[y(t)] &= L[x(t)]L[h(t)] \Rightarrow y(p) = x(p)h(p). \end{aligned}$$

Видно, что фурье-образ  $h(j\omega)$  импульсной реакции  $h(t)$  – это отношение  $\frac{y(j\omega)}{x(j\omega)}$  комплексной амплитуды гармонического отклика  $y(j\omega)e^{j\omega t}$  к комплексной амплитуде воздействия  $x(j\omega)e^{j\omega t}$ , то есть – комплексный коэффициент передачи системы:

$$K(j\omega) = F[h(t)] = \int_{-\infty}^\infty h(t)e^{-j\omega t}dt.$$

Аналогично,

$$H(p) = L[h(t)] = \int_0^\infty h(t)e^{-pt}dt.$$

Таким образом, комплексный коэффициент передачи системы – это фурье-образ ее импульсной реакции, а передаточная функция реализуемой системы – ее лаплас-образ. Это и устанавливает двойственность между описаниями систем во временной и частотной областях.

Преобразование Лапласа – это основной инструмент нахождения импульсных реакций и переходных характеристик систем с известными передаточными функциями  $H(p)$ . Элементарно проверяется, что

$$L[\delta(t)] = 1; \quad L[\theta(t)] = \frac{1}{p}.$$

Поэтому

$$L[h(t)] = H(p); \quad L[h_0(t)] = L[(\theta * h)(t)] = \frac{H(p)}{p}.$$

В тех случаях, когда  $H(p)$  является рациональной функцией (отношением двух многочленов от  $p$ ), для нахождения импульсной реакции или переходной характеристики достаточно разложить  $H(p)$  или  $H(p)/p$  в сумму элементарных дробей вида  $\frac{1}{p+\mu}$  и воспользоваться тем, что  $\frac{1}{p+\mu} = L[e^{-\mu t}]$ .

## 5. Импедансы и адmittансы

Двухполюсник, рис. 5а, можно рассматривать как систему, входом которой является ток  $i(t)$ , а выходом – напряжение  $u(t)$ . Для передаточной функции такой системы  $Z(p) = \frac{u_p}{i_p}$ , определенной как отношение комплексной амплитуды напряжения к комплексной амплитуде тока, используется специальное название – *импеданс* (комплексное сопротивление). Поменяв ролями ток с напряжением, можно ввести комплексную проводимость – *адmittанс* (или *имmittанс*)  $Y(p) = \frac{i_p}{u_p} = \frac{1}{Z(p)}$ . Как правило, импедансы и адmittансы рассматривают в области гармонического анализа – на мнимой оси  $p$ -плоскости:  $Z(j\omega)$ ,  $Y(j\omega)$ .

Пусть на емкости  $C$  действует напряжение  $u(t) = u_p e^{pt}$  с комплексной амплитудой  $u_p$ . Тогда комплексная амплитуда тока через емкость

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = Cu_p p e^{pt} = i_p e^{pt}$$

составляет  $u_p p C$ . Для адmittанса и импеданса конденсатора это дает:  $Y(p) = \frac{i_p}{u_p} = pC$ ,  $Z(p) = \frac{1}{pC}$ . Приведенные на рис. 5б формулы для импедансов резистора и индуктивности получаются по аналогии.

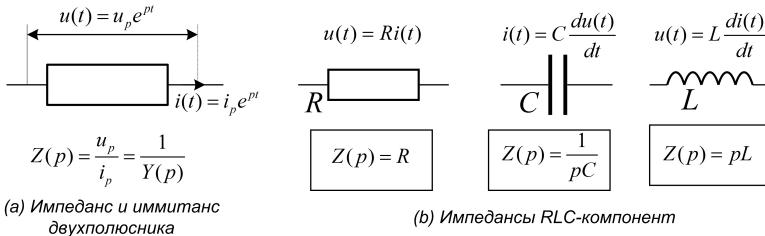


Рис. 5. Импедансы двухполюсников

Соотношение  $u_p = Z(p)i_p$  по форме аналогично закону Ома:  $u(t) = Ri(t)$ . Только оно связывает не мгновенные значения напряжения и тока, а их комплексные амплитуды. Поэтому при расчете электрических цепей для комплексных амплитуд напряжений и токов можно без ограничений применять весь арсенал традиционных методов и приемов, опирающихся на закон Ома. Для построения уравнений цепи можно применять метод контурных токов или метод узловых потенциалов. Топологию цепей можно упрощать, применяя теорему об эквивалентном генераторе. В конечном итоге расчет любой цепи сводится к решению системы линейных уравнений для комплексных амплитуд.

Для примера, на рис. 6 приведен вывод законов сложения импедансов при последовательном соединении двухполюсников и сложения проводимостей – при параллельном соединении.

Значение импеданса  $Z(j\omega)$  – это точка в комплексной  $Z$ -плоскости, рис. 7. На вещественной положительной полуоси этой плоскости лежат активные импедансы – резисторы. Их отличает отсутствие фазового сдвига между напряжением и током. Точки на отрицательной вещественной полуоси представляют отрицательные сопротивления. На мнимой оси  $Z$ -плоскости лежат *реактивные* импедансы – идеальные индуктивности  $Z = j\omega L$  или емкости  $Z = -j/\omega C$ . Для положительных реактивных импедансов (индуктивностей) фазовый сдвиг между напряжением и током составляет  $\arg(j) = +\pi/2$ . Отрицательные

реактивные импедансы (емкости) дают фазовый сдвиг  $-\pi/2$ .

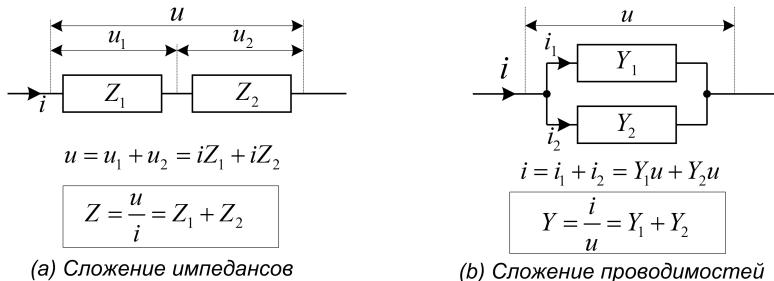


Рис. 6. Законы сложения

Чисто активные и реактивные импедансы с нулевыми мнимой или вещественной частями – это, скорее, идеальные элементы. Импеданс любого физического двухполюсника обладает как активной, так и реактивной составляющими. Физический импеданс относят к реактивным, если представляющая его точка лежит близко к мнимой оси. Реактивный импеданс относят к индуктивным, если эта точка лежит в верхней полуплоскости, и к емкостным – если в нижней. Степень идеальности реактивного импеданса  $Z$  в технике принято характеризовать значением тангенса угла потерь  $\tan \alpha$ , рис. 7.

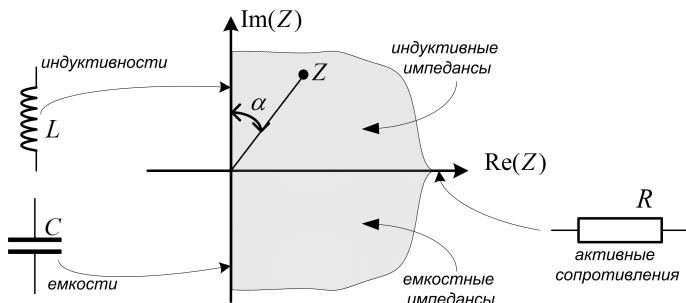


Рис. 7. Плоскость импедансов

## 6. Мощность реактивной системы

Пусть к двухполюснику с импедансом  $Z = |Z|e^{j\arg Z} = |Z|e^{j\varphi}$  приложено гармоническое напряжение  $u(t) = u_m \cos \omega t$  с комплексным эквивалентом  $u^+(t) = u_p e^{j\omega t} = u_m e^{j\omega t}$ . Комплексный

эквивалент протекающего по двухполюснику тока  $i^+(t) = i_p e^{j\omega t}$  определяется его комплексной амплитудой

$$i_p = \frac{u_p}{Z} = \frac{u_m}{|Z|} e^{-j\varphi} = i_m e^{-j\varphi},$$

а сам этот ток имеет вид  $i(t) = \operatorname{Re}(i^+(t)) = i_m \cos(\omega t - \varphi)$ .

Для мгновенной мощности на двухполюснике это дает:

$$\begin{aligned} P(t) &= u(t)i(t) = u_m i_m \cos \varphi \cos^2 \omega t + u_m i_m \sin \varphi \cos \omega t \sin \omega t = \\ &= P(1 + \cos 2\omega t) + Q \sin 2\omega t, \end{aligned}$$

где

$$P = \frac{u_m i_m}{2} \cos \varphi, \quad Q = \frac{u_m i_m}{2} \sin \varphi.$$

Величины  $P$  и  $Q$  называют *активной* и *реактивной мощностями*. Среднее по времени значение мгновенной мощности  $P(t)$  равно активной мощности  $P$ . Это мощность, необратимо рассеиваемая в двухполюснике виде тепла. Добавка  $Q \sin 2\omega t$  с нулевым средним описывает обратимые перетоки энергии между источником и двухполюсником. Для индуктивных импедансов с  $\varphi > 0$  реактивная мощность  $Q$  положительна, для емкостных – отрицательна.

Комплексную мощность  $P^+ = P + jQ$  можно выразить непосредственно через комплексные амплитуды  $u_p$ ,  $i_p$  напряжения и тока на двухполюснике:

$$P^+ = P + jQ = \frac{u_p i_p^*}{2} = \frac{Y^* |u_p|^2}{2} = \frac{Z |i_p|^2}{2}.$$

В самом деле, пусть  $u_p = u_m e^{j\varphi_u}$  и  $i_p = i_m e^{j\varphi_i}$ . Тогда

$$u_p i_p^* = u_m i_m e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = u_m i_m (\cos \varphi + j \sin \varphi); \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i.$$

При последовательном соединении двухполюсников по ним протекает единый ток, а импедансы суммируются. Поэтому полная комплексная мощность  $P^+ = Z \frac{|i_p|^2}{2}$  оказывается равной сумме мощностей на каждой из компонент. То же относится и к параллельному соединению, когда едино напряжение, а суммируются проводимости. В RL- и RC-цепях знаки реактивных мощностей на всех L или C компонентах одинаковы. Поэтому модуль

полной реактивной мощности  $|Q|$  равен сумме модулей реактивных мощностей на компонентах – вся обратимо запасаемая в компонентах энергия поступает от источника. В RLC-цепях это не так. Возможны перетоки энергии между LC-компонентами внутри схемы.

## 7. Частотные и фазовые характеристики

Передаточные функции LRC-цепей всегда оказываются **рациональными** функциями комплексной частоты  $p = \delta + j\omega$ , то есть отношениями двух многочленов от  $p$ :

$$H(p) = \frac{B(p)}{A(p)}; \quad A(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i, \quad B(p) = \sum_{j=0}^m b_j p^j.$$

С точностью до масштабного множителя такая функция определяется набором своих нулей  $\beta_i$  (корней многочлена  $B(p)$ ) и полюсов  $\alpha_j$  (корней  $A(p)$ ). С учетом возможных нулей и полюсов в бесконечно удаленной точке  $p = \infty$  число нулей совпадает с числом полюсов. Число полюсов передаточной функции называют *порядком* системы.

Свойство вещественности системы ( $H^*(p) = H(p^*)$ ) обеспечивает вещественность коэффициентов  $a_i, b_j$  многочленов числителя и знаменателя. Если число  $\mu$  является корнем многочлена с вещественными коэффициентами, то и сопряженное число  $\mu^*$  также является его корнем. Поэтому нули и полюсы передаточной функции вещественной системы либо вещественны, либо образуют комплексно сопряженные пары. В разложении на множители вещественному корню  $\mu$  отвечает линейный фактор  $(p - \mu)$ , а паре сопряженных корней – квадратный трехчлен  $(p^2 + bp + c)$  с отрицательным дискриминантом.

Значение многочлена в точке – это произведение расстояний до его корней. Поэтому положений нулей и полюсов передаточной функции полностью определяет поведение АЧХ и ФЧХ системы. Разложение многочленов числителя и знаменателя на линейные множители приводит передаточную функцию к виду

$$H(p) = A \frac{\prod_{i=1}^m (p - \beta_i)}{\prod_{k=1}^n (p - \alpha_k)}.$$

Представив каждый из линейных множителей ( $p - \mu$ ),  $\mu = \beta_i, \alpha_k$  в тригонометрической форме

$$p - \mu = |p - \mu| e^{j \arg(p - \mu)} = l_\mu(\omega) e^{j \varphi_\mu(\omega)}, \quad p = j\omega,$$

придем к следующим представлениям для АЧХ и ФЧХ:

$$|K(j\omega)| = A \frac{\prod_{i=1}^m l_{\beta_i}(\omega)}{\prod_{k=1}^n l_{\alpha_k}(\omega)}; \quad \arg K(j\omega) = \sum_{i=1}^m \varphi_{\beta_i}(\omega) - \sum_{k=1}^n \varphi_{\alpha_k}(\omega).$$

Видно, что значение АЧХ в точке  $\omega$  пропорционально отношению произведения расстояний  $l_{\beta_i}$  от точки  $j\omega$  до всех нулей к произведению расстояний  $l_{\alpha_k}$  от этой точки до всех полюсов.

Каждый нуль или полюс вносит вклад  $\varphi(\omega)$  в фазочастотную характеристику. Чтобы найти ФЧХ системы в целом, следует из суммы вкладов нулей вычесть сумму вкладов полюсов.

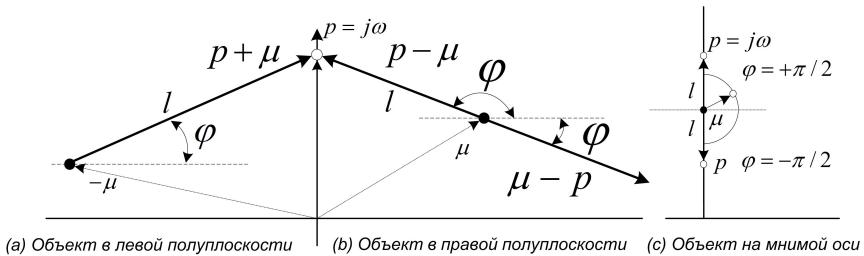


Рис. 8. Вклады нуля/полюса в АЧХ и ФЧХ

Объекту (нулю или полюсу  $\mu$ ) в левой  $p$ -полуплоскости, рис. 8, отвечает линейный множитель  $(p - (-\mu)) = (p + \mu)$ . Объект в правой полуплоскости может представлять либо множитель  $p - \mu$ , либо множитель  $\mu - p$  противоположного знака. Вклады этих объектов в АЧХ и ФЧХ на рисунке представляют длину  $l$  и угол наклона  $\varphi$  выделенного жирным вектора. При варьировании частоты точка  $p = j\omega$  перемещается вверх-вниз вдоль мнимой оси. Значения вкладов  $l, \varphi$  при этом изменяются. Эти изменения определяют поведение АЧХ и ФЧХ. Вклад объекта в левой полуплоскости нарастает до  $\pi/2$  при  $\omega \rightarrow \infty$ . Вклад объекта в правой полуплоскости убывает, достигая при  $\omega \rightarrow \infty$  либо значения  $\pi/2$ , либо значения  $-\pi/2$  в зависимости от знака.

Полюсы устойчивой системы всегда лежат в левой полуплоскости. Положение же нулей произвольно. Если нуль и полюс оба лежат слева, то их вклады в ФЧХ взаимно компенсируются. Когда же нуль оказывается в правой полуплоскости, его вклад в изменение фазы добавляется ко вкладу полюса. Для систем с нулями в правой полуплоскости характерны аномально большие набеги фазы при изменении частоты от 0 до  $\infty$ . Такие системы называют *неминимально фазовыми*.

Показанный на рис. 8с случай объекта  $\mu$  на мнимой оси несколько специфичен. Специфика в том, что при  $\omega = \mu$  расстояние  $l$  обращается в нуль. АЧХ принимает в этой точке нулевое значение, если  $\mu$  – нуль, или обращается в бесконечность, если  $\mu$  – полюс. Когда точка  $\omega$  пересекает уровень  $\mu$ , аргумент разности  $p - \mu$  скачком меняет значение на  $\pi$ .

Наконец, нуль в точке  $p = 0$  дает вклад  $+\frac{\pi}{2}$  в ФЧХ (множитель  $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$  в числителе), полюс – вклад  $-\frac{\pi}{2}$  ( $j$  в знаменателе).

При анализе АЧХ систем с вещественными нулями и полюсами полезна техника **графов Боде**. Распространенность систем этого рода обусловлена тем, что в классах RL-, RC-цепей все полюсы всегда вещественны. О нулях этого сказать нельзя, но присутствие сопряженных пар нулей и в этих системах – это также скорее исключение, чем правило.

Граф Боде – это просто аппроксимация АЧХ в логарифмических осях координат. Рассмотрим систему с вещественными нулями  $-\beta_i$  и полюсами  $-\alpha_k$  на отрицательной полуоси частот. Выражение для модуля ее комплексного коэффициента передачи  $K(j\omega)$  можно привести к виду

$$|K(j\omega)| = K_0 \frac{\prod_{i=1}^m \left| \frac{j\omega}{\beta_i} + 1 \right|}{\prod_{k=1}^n \left| \frac{j\omega}{\alpha_k} + 1 \right|}.$$

Перейдем к логарифмическому масштабу по оси ординат, выразив значение  $K$  в децибелах:

$$K(\text{dB}) = 20 \lg |K| = 20 \lg K_0 + 20 \sum_{i=1}^m \lg \left| \frac{j\omega}{\beta_i} + 1 \right| - 20 \sum_{k=1}^n \lg \left| \frac{j\omega}{\alpha_k} + 1 \right|.$$

Каждое слагаемое типа  $20 \lg \left| \frac{j\omega}{\mu} + 1 \right|$  хорошо аппроксимируется

ломаной:

$$20 \lg \left| \frac{j\omega}{\mu} + 1 \right| \sim \begin{cases} 0 & \text{при } \omega \ll \mu, \\ 20 \lg \omega - 20 \lg \mu & \text{при } \omega \gg \mu. \end{cases}$$

График этой ломаной в логарифмическом масштабе по оси частот показан на рис. 9.

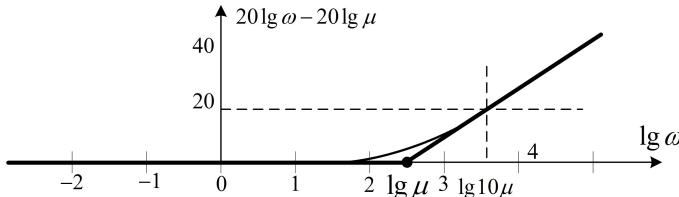


Рис. 9. График Боде одночного нуля

Точка излома находится как раз на частоту  $\lg \mu$  нуля (полюса). До нее значение постоянно – составляет 0 dB. После излома оно нарастает по линейному закону. Каждая *декада* (увеличение частоты в 10 раз) дает нарастание на 20 dB. Это составляет примерно 6 dB *на октаву* (на двукратное увеличение частоты). Ломаная линия  $20 \lg \omega - 20 \lg \mu$  неплохо аппроксимирует плавный график частотной характеристики. Известно, что ошибка аппроксимации не превышает 3 dB ( $\sqrt{2}$  раз). Значения 20 dB на декаду или 6 dB на октаву, характеризующие вклад в АЧХ одиночного нуля или полюса, хорошо известны в инженерной практике. Всем известно, например, что семиполюсной фильтр – это затухание  $-140$  dB на декаду в полосе задержания.

Аппроксимация ломаной линией и составляет суть техники построения графов Боде. Техника эта состоит в следующем: на логарифмической оси частот  $\lg \omega$  расставляем положения нулей  $\lg \beta_i$  и полюсов  $\lg \alpha_k$  и начинаем вести ломаную из  $-\infty$  логарифмической оси, то есть от нулевой частоты. По пересечении каждого нуля добавляем линейный рост с наклоном 20 dB на декаду, по пересечении полюса добавляем линейный спад с тем же наклоном. Если нулей или полюсов при  $p = 0$  нет, то начать построение ломаной следует с горизонтальной линии. Нуль передачи в нуле добавляет начальный рост со скоростью 20 dB на декаду, полюс в нуле – начальный спад с той же скоростью. Положение ломаной по вертикали уточняют в самом конце.

Для этого достаточно вычислить значение АЧХ на какой-нибудь одной конкретной частоте.

Пример построения графа Боде для системы с  $H(p) = 0.1 \frac{(p+10)(p+100)}{p(p+1)}$  показан на рис. 10. Имеется полюс в нуле, полюс в точке  $\lg 1 = 0$  и два нуля в точках  $\lg 10 = 1$  и  $\lg 100 = 2$ . Поскольку есть полюс в нуле, ломаную начинаем вести с наклоном  $-20 \text{ dB/декаду}$ . По пересечении полюса в точке  $\lg 1 = 0$  добавляем  $20 \text{ dB/декаду}$  к скорости спада. Получается спад со скоростью  $40 \text{ dB/декаду}$ . По пересечении каждого из нулей снижаем скорость спада на  $20 \text{ dB/декаду}$ . Положение получившейся ломаной по вертикали уточняем, оценив коэффициент передачи в бесконечности:  $K(\infty) = 0.1 = -20 \text{ dB}$ .

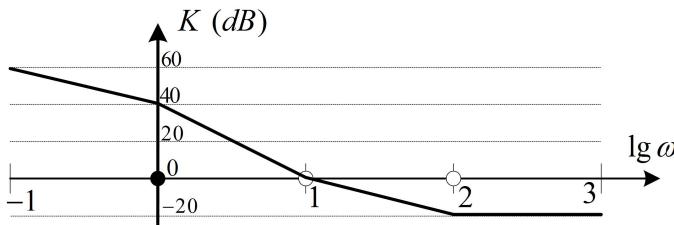


Рис. 10. Граф Боде

Графы Боде более или менее пригодны также и в тех ситуациях, когда имеются пары комплексно сопряженных объектов, расположенных близко к вещественной оси. С большого расстояния такая пара выглядит как один полюс или нуль кратности два. Однако они перестают адекватно отражать существование явлений при наличии высокодобротных сопряженных пар, лежащих вблизи от мнимой оси. Когда точка  $s = \frac{j\omega}{\omega_0}$  проходит мимо такого объекта, расстояние до него почти обращается в нуль. Это дает резкий выброс на АЧХ, если речь идет о полюсе, или столь же резкий провал, когда речь идет о нуле.

В разложении передаточной функции на множители паре сопряженных корней отвечает квадратный трехчлен  $(p^2 + bp + c)$ . Коэффициент  $c$  в нем имеет смысл квадрата характеристической частоты:  $c = \omega_0^2$ . Переход к относительной частоте  $s = \frac{p}{\omega_0}$  приводит этот трехчлен к канонической форме  $c(s^2 + 2\xi s + 1)$ ,  $2\xi = \frac{b}{\sqrt{c}}$  с корнями  $s_{\pm} = -\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2}$ . Положение этих корней на единич-

ной окружности  $s$ -плоскости определяет *постоянная затухания*  $\xi$ . Обратную величину  $Q = \frac{1}{2\xi}$  называют *добротностью*.

Трехчлен  $s^2 + 2\xi s + 1$  факторизуется в произведение

$$s^2 + 2\xi s + 1 = 2\xi s \left( 1 + Q \left( s + \frac{1}{s} \right) \right) = 2\xi s \left( 1 + ja(\omega) \right)$$

медленно меняющегося множителя  $s = \frac{j\omega}{\omega_0}$  и фактора

$$1 + ja(\omega) = 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right),$$

быстро меняющегося в окрестности резонансной частоты.

Функция  $a(\omega)$  известна как *обобщенная расстройка*. Она обращается в нуль на частоте  $\omega_0$  и быстро растет при уходе от этой частоты. Это и определяет поведение АЧХ и ФЧХ в окрестностях высокодобротных нулей или полюсов.

Полезно следующее линейное приближение для обобщенной расстройки в окрестности  $\omega_0$ :

$$a(\omega) = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \simeq 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}, \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0.$$

Модуль  $\sqrt{1 + a^2}$  резонансного фактора  $1 + ja(\omega)$ , равный единице при  $\omega = \omega_0$ , достигает значения  $\sqrt{2} \simeq 3$  dB в точках  $a(\omega) = \pm 1$ . Расстояние между этими точками – ширина  $\Delta\omega$  полосы обобщенной расстройки по уровню 3 dB – составляет  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ . Этот факт используется для экспериментального измерения добротности как отношения  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ .

В пределах полосы обобщенной расстройки ее аргумент  $\varphi(\omega) = \arg(1 + ja(\omega)) = \arctg a(\omega)$  почти линейно нарастает от  $-\pi/4$  до  $+\pi/4$ . Это определяет поведение фазовых характеристик в окрестности высокодобротных нулей или полюсов. Групповая задержка  $\tau_g = -\frac{d\varphi}{d\omega} \simeq -\frac{2Q}{\omega_0}$  почти постоянна в этой полосе.

## 8. Задание

Работа выполняется отчасти экспериментально – сборкой схем из навесных компонентов на индивидуальной макетной плате и их исследованием с помощью генератора сигналов и осциллографа, а по большей части – моделированием в программе MicroCap.

Все исследуемые MicroCap-модели подготовлены в .cir-файлах. Перед выполнением задания папку с этими файлами нужно скопировать в свою рабочую директорию. Программа MicroCap позволяет исследовать свойства электрических схем в частотной и временной областях.

Файл модели открывается через меню *File/Open*.

Переход в режим *AC* анализа частотных и фазовых характеристик исследуемой схемы выполняется через меню *Analysis/AC*. При переходе в этот режим предъявляется диалог *Limits* с таблицей описания выводимых графиков. Каждая строка таблицы описывает один график. Форма графика определяется записями в полях *X Expression* (всегда F или T) и *Y Expression*. Синтаксис записи Y-выражений достаточно прозрачен – знакомиться с ним будем по подготовленным моделям. В полях *X Range*, *Y Range* задаются диапазоны графиков по горизонтали и вертикали в форматах [конец, начало, шаг X-сетки] или [верхний предел, нижний предел, шаг Y-сетки]. В поле P задается номер плota, в котором будет выводиться график. В один плот можно поместить несколько графиков. Стирание номера отменяет вывод графика. Переход из диалога *Limits* к графикам – по клавише *Run*.

Находясь в режиме *AC*, можно пересчитать графики через меню *AC/Run*, вернуться к диалогу *Limits* через *AC/Limits* и выйти из режима *AC*, вернувшись к схеме, по *AC/Exit Analysis*.

Переходные характеристики изучаются в режиме *Transient* – меню *Analysis/Transient*.

Активно используется функция варьирования одного из параметров модели, доступная через диалог *Stepping* – меню *AC/Stepping* или *Transient/Stepping*. В этом диалоге нужно выбрать компонент из списка *Step What* и задать параметры варьирования [*From, To | Step Value*]. Не забыть поставить переключатель *Step It* в положение *Yes*. Задав варьирование, выйти из диалога по *Ok* и пересчитать графики по *Run*.

По щелчку в любой точке плota с графиками открывается окошко с текущими XY-координатами курсора. Фрагмент графика можно укрупнить, выделив его курсором в рамку. Отмена укрупнения – по клавише *Ctrl Home*.

Анализ схем во временной и частотной областях требует опре-

деленных аналитических навыков. Чтобы приобрести их, рекомендуется потратить некоторое время на решение приведенных в задании упражнений, которые сопровождаются разбором похожих примеров.

Курсивом в тексте заданий выделены те места, которые предполагают *фиксацию тех или иных результатов в отчете*.

## 8.1. Интегрирующие и дифференцирующие звенья

Два возможные варианта построения делителя напряжения из резистора  $R$  и конденсатора  $C$  приводят к интегрирующей и дифференцирующей цепям на рис. 11. Свойства обеих цепей определяются постоянной времени  $\tau = RC$  или характерной частотой  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ ,  $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$ .

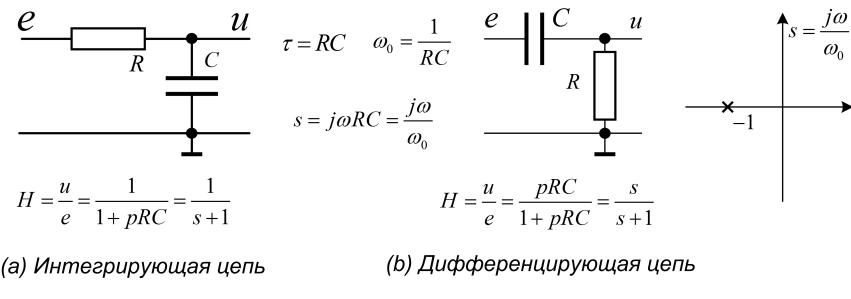


Рис. 11. Звенья первого порядка

Присутствие на входе интегрирующей цепи, рис. 11a, гармонического напряжения частоты  $j\omega = p$  с комплексной амплитудой  $e$  вызывает ток с амплитудой  $i = \frac{e}{Z} = \frac{e}{R + \frac{1}{pC}}$ . Его протекание по емкости  $C$  создает выходное напряжение  $u = i \frac{1}{pC}$ . Для передаточной функции  $H(p) = \frac{u}{e}$  получается  $H(p) = \frac{1}{1 + pRC}$ , или  $H(s) = \frac{1}{s + 1}$ ,  $s = pRC = \frac{j\omega}{\omega_0}$ . Аналогичным образом для передаточной функции дифференцирующей цепи, рис. 11b, получается  $H(s) = \frac{s}{s + 1}$ .

Оба эти четырехполюсника являются системами первого порядка с единственным полюсом в точке  $s = -1$ . Они различаются положениями нулей: нуль дифференцирующей цепи лежит в нуле – при  $s = 0$ , а нуль интегрирующей – в бесконечности.

Выражение

$$K(j\omega) = H(s)|_{s=\frac{j\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

для комплексного коэффициента передачи интегрирующей цепи приводит к следующим формулам для ее частотной и фазовой характеристик:

$$|K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}}; \quad \varphi(\omega) = \arg K(j\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

Интегрирующая цепь – это фильтр нижних частот (ФНЧ) с полосой пропускания от нуля до граничной частоты  $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$  (частоты среза). На границе полосы пропускания, при  $\omega = \omega_0$ ,  $|K(j\omega)|$  снижается с 1 до уровня  $\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.7 = -3 \text{ dB}$ .

Лаплас-образ  $\frac{H(p)}{p}$ ,  $H(p) = \frac{\omega_0}{p + \omega_0}$ , переходной характеристики интегрирующей цепи  $h_0(t)$  факторизуется в сумму элементарных дробей:

$$L[h_0](p) = \frac{H(p)}{p} = \frac{1}{p} \frac{\omega_0}{(p + \omega_0)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \omega_0}.$$

С учетом того, что  $\frac{1}{p} = L[\theta(t)]$ ,  $\frac{1}{p + \omega_0} = L[e^{-\omega_0 t}]$ , это дает следующее выражение для  $h_0(t)$ :

$$h_0(t) = \theta(t) - e^{-\omega_0 t} = \theta(t)(1 - e^{-t/\tau}).$$

Формулы для АЧХ, ФЧХ и переходной характеристики дифференцирующей цепи получаются по аналогии:

$$|K(j\omega)| = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}}; \quad \varphi(\omega) = \arg K(j\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right);$$

$$h_0(t) = \theta(t)e^{-\omega_0 t} = \theta(t)e^{-t/\tau}.$$

Дифференцирующая цепь – это фильтр верхних частот (ФВЧ) с полосой пропускания от частоты среза  $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$  до бесконечности. На границе полосы пропускания, при  $\omega = \omega_0$ ,

модуль коэффициента передачи  $|K(j\omega)|$  падает до уровня  $\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.7 = -3 \text{ dB}$  и обращается в нуль на нулевой частоте.

**Упражнение.** Проверьте формулы для частотной, фазовой и переходной характеристик дифференцирующей цепи.

**Упражнение.** Проверьте формулы для передаточных функций на рис. 12.

---

## ЗАДАНИЕ 1

1. На макетной плате собрать интегрирующую цепь с постоянной времени  $\tau \simeq 0.1 \text{ мс}$ ,  $f_0 = \frac{1}{2\pi\tau} \simeq 1600 \text{ Гц}$ . Для ориентировки,  $1 \text{ кОм} * 1 \text{ мкФ} = 1 \text{ мс}$ ,  $\frac{1}{2\pi} = 0.1592$ .

2. Подключить генератор синусоидальных сигналов и осциллограф. Экспериментально оценить *верхнюю граничную частоту*  $f_0$  по уровню  $\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.7 = -3 \text{ dB}$ . Измерить значения коэффициента передачи  $K(f)$  на частотах  $f = 2^n f_0$ ,  $n = [-2, 4]$ . Построить график Боде – зависимость  $20 \lg(K)$  от  $n = \log_2(f/f_0)$ .

3. Подключить генератор прямоугольных сигналов. По осциллограмме переходной характеристики оценить *постоянную времени*  $\tau$ , измерив время нарастания фронта импульса от нуля до уровня  $1 - 1/e \simeq 0.63$ . По экспериментальным данным проверить справедливость равенства  $f_0 = \frac{1}{2\pi\tau}$ .

4. Превратить интегрирующую цепь в дифференцирующую. Оценить *нижнюю граничную частоту*  $f_0$  по уровню  $\simeq 0.7 = -3 \text{ dB}$ . Измерив значения коэффициента передачи  $K(f)$  на частотах  $f = 2^n f_0$ ,  $n = [-4, 2]$ , построить график Боде. По осциллограмме переходной характеристики оценить *постоянную времени*  $\tau$ , измерив время спада вершины импульса от нуля до уровня  $1/e \simeq 0.37$ . Проверить равенство  $f_0 = \frac{1}{2\pi\tau}$ .

5. В MicroCap открыть модель **rcint.cir**. Изучить графики частотной и фазовой характеристик интегрирующей цепи (режим *AC*), оценить ее *верхнюю частоту*. Подключая и отключая резистор нагрузки  $R_L$  варьированием (*Stepping*)  $R_L = [10k, 10Meg|10Meg]$  от  $10k$  до  $\infty = 10 Meg$ , убедиться в том, что при его наличии передаточная функция цепи принимает вид:

$$H(p) = \frac{K_0}{1 + p\tau}; \quad K_0 = \frac{R_L}{R + R_L}, \quad \tau = (R||R_L)C.$$

Изучить переходную характеристику (режим *Transient*). По гра-

фику оценить *постоянную времени*. Проанализировать влияние резистора  $R_L = [10k, 10Meg|10Meg]$  ( $10Meg = \infty$ ).

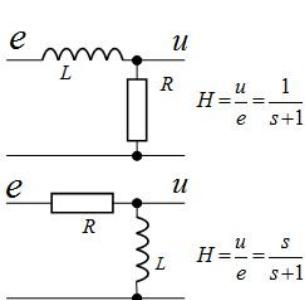
6. Открыть модель **rcdiff.cir**. Изучить частотную и фазовую характеристики дифференцирующей цепи, оценить ее *нижнюю частоту*. Проанализировать влияние резистора  $R_S$ , задав его варьирование  $R_S = [0, 10k|10k]$ . Убедиться в том, что при наличии  $R_S \neq 0$  передаточная функция принимает вид

$$H(p) = \frac{K_0 p \tau}{1 + p \tau}; \quad K_0 = \frac{R}{R + R_S}, \quad \tau = (R + R_S)C.$$

Изучить переходную характеристику. По графику оценить *постоянную времени*. Проанализировать влияние резистора  $R_S = [0, 10k|10k]$ .

7. Открыть модель **rcpower.cir**. Изучить (режим *AC*) графики частотной зависимости потребляемых интегрирующей цепью активной и реактивной мощностей (сверху) и графики мощностей на ее компонентах (снизу). Объяснить их поведение. *Проверить выполнение закона сложения мощностей на граничной частоте  $f_0$* . Подключая и отключая резистор  $R_L$  варьированием  $[1k, 1Meg|1Meg]$  ( $1Meg = \infty$ ), изучить его влияние на *распределение мощностей в схеме* при  $f = f_0$ .

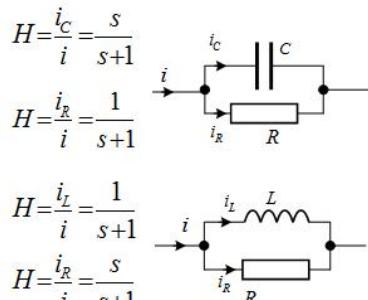
---



$$\boxed{s = j\omega RC}$$

$$s = j\omega \frac{L}{R}$$

RL делители напряжения



RC и RL делители тока

Рис. 12. Варианты реализации звеньев первого порядка

Альтернативные варианты реализации однополюсных звеньев показаны на рис. 12. Представив емкостной и индуктивный импедансы в виде  $Z_C = \frac{1}{pC} = \frac{R}{pRC} = \frac{R}{s}$ ,  $Z_L = pL = Rp\frac{L}{R} = sR$ , легко заметить, что замена емкостей индуктивностями в схеме

эквивалентна замене  $\frac{1}{s}$  на  $s$  в передаточной функции, а такая замена переводит интегрирующее звено в дифференцирующее.

Передаточная функция любой однополюсной системы приводится к виду

$$H(s) = \frac{as + b}{s + 1} = a \frac{s}{s + 1} + b \frac{1}{s + 1}, \quad s = \frac{p}{\omega_0},$$

и может быть реализована взвешенной суммой передаточных функций интегрирующего и дифференцирующего звеньев.

## 8.2. RC-звенья второго порядка

Передаточная функция произвольной двухполюсной системы приводится к виду  $H(s) = \frac{as^2 + bs + c}{s^2 + 2\xi s + 1}$  и представляется взвешенной суммой передаточных функций полиномиальных звеньев трех типов – фильтра верхних частот (ФВЧ), полосового фильтра (ПФ) и фильтра нижних частот (ФНЧ):

$$H(s) = \frac{as^2 + bs + c}{s^2 + 2\xi s + 1} = a \frac{s^2}{s^2 + 2\xi s + 1} + b \frac{s}{s^2 + 2\xi s + 1} + c \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1}.$$

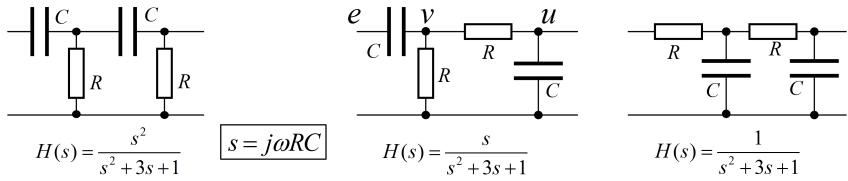
Эти звенья различаются положением нулей: у ФВЧ имеется нуль кратности два в нуле, у ФНЧ – нуль кратности два в бесконечности. Полосовой фильтр (ПФ) занимает промежуточное положение: один нуль в бесконечности, второй – в нуле.

При малых добротностях  $Q = \frac{1}{2\xi} < \frac{1}{2}$  такие звенья удается реализовать каскадным соединением звеньев первого порядка, как показано на рис. 13. Выбор пар одинаковых резисторов и конденсаторов дает звенья с  $2\xi = 3$ ,  $Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{3}$ . Полюсы их передаточных функций вещественны и находятся в точках  $s_{\pm} = -\mu_{\pm}$ ,  $\mu_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$  ( $\mu_+ \simeq 2.62$ ,  $\mu_- \simeq 0.38$ ).

Комплексный коэффициент передачи полосового звена с  $H(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 1}$ ,  $s = \frac{j\omega}{\omega_0}$ , приводится к виду

$$K(j\omega) = \frac{1}{3 + \left(s + \frac{1}{s}\right)} = \frac{1}{3} \frac{1}{(1 + ja(\omega))}; \quad a(\omega) = \frac{1}{3} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right).$$

Коэффициент передачи ФВЧ отличается множителем  $s = \frac{j\omega}{\omega_0}$  в числите, а коэффициент передачи ФНЧ – таким же множителем в знаменателе.



(c) Фильтр верхних частот

(b) Полосовой фильтр

(a) Фильтр низких частот

Рис. 13. Три варианта звеньев второго порядка

Граф Боде фильтра низких частот показан на рис. 14. На логарифмической оси относительной частоты  $\lg \frac{f}{f_0}$  показаны два полюса  $\lg \mu_{\pm} = \lg \left( \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right) = \pm 0.418$ . Ломаная линия графа приходит из минус бесконечности (от нулевой частоты) с уровнем 0 dB. Излом в полюсе  $\mu_-$  добавляет спад со скоростью 20 dB на декаду. Второй излом в полюсе  $\mu_+$  поднимает скорость спада до 40 dB на декаду. В нуле, на частоте  $f_0$ , достигается затухание  $\frac{1}{3} = -9.5$  dB.

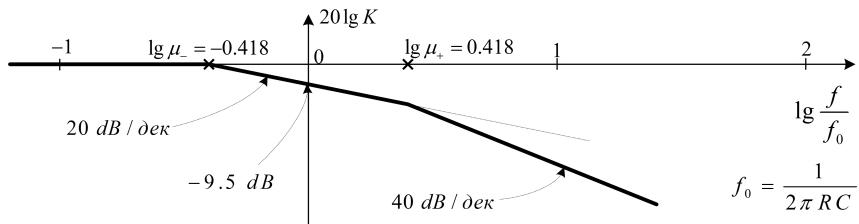


Рис. 14. Граф Боде двухполюсного фильтра низких частот

Переходные характеристики звеньев являются линейными комбинациями быстро и медленно затухающих экспонент  $e^{-(\mu_+) \frac{t}{\tau}}$ ,  $e^{-(\mu_-) \frac{t}{\tau}}$ ,  $\tau = RC$ . Характерные времена спада этих экспонент различаются в  $\mu_+/\mu_- \simeq 2.62/0.38 \sim 7$  раз.

**Пример.** Найдем передаточную функцию полосового звена на рис. 13b. Импеданс конденсатора приведем к виду  $Z = \frac{1}{pC} = \frac{R}{pCR} = \frac{R}{s}$ ,  $s = pRC = \frac{p}{\omega_0}$ , и примем резистор  $R$  за единицу измерения сопротивления. В этих единицах  $Z_R = 1$ ,  $Z_C = \frac{1}{s}$ . Запишем теперь условия равенства нулю сумм токов в узлах  $v$  и  $u$  на схеме:

$$\begin{aligned} \text{узел } v : \quad (e - v)s &= v + (v - u); & es &= v(s + 2) - u. \\ \text{узел } u : \quad (v - u) &= su; & v &= u(s + 1). \end{aligned}$$

Исключив в первом уравнении узловой потенциал  $v = u(s + 1)$ , придем к результату:  $H(s) = \frac{u}{e} = \frac{s}{s^2 + 3s + 1}$ .

**Пример.** Найдем переходную характеристику  $h_0(t)$  полосового звена с  $H(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 1}$ . Факторизация лаплас-образа  $h_0(t)$  в сумму элементарных дробей

$$L[h_0](s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{1}{s^2 + 3s + 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{s + \mu_-} - \frac{1}{s + \mu_+} \right)$$

дает

$$h_0(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( e^{-(\mu_-)u} - e^{-(\mu_+)u} \right) = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-\frac{3}{2}u} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}u\right), \quad u = t/\tau.$$

**Упражнение.** Получите формулы для передаточных функций и переходных характеристик ФНЧ и ФВЧ. Ответы:

$$\text{ФНЧ: } h_0(t) = \theta(u) - e^{-\frac{3}{2}u} \left\{ \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}u\right) + \frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}u\right) \right\}.$$

$$\text{ФВЧ: } h_0(t) = e^{-\frac{3}{2}u} \left\{ \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}u\right) - \frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}u\right) \right\}; \quad u = t/\tau.$$

**Упражнение.** По аналогии с рис. 14 постройте графы Боде ФВЧ и ПФ.

**Упражнение.** Проверьте формулу для передаточной функции полосового звена на рис. 15.

## ЗАДАНИЕ 2

1. Открыть модель **rc2pole.cir**. Изучить графики частотных и фазовых характеристик звеньев трех типов (режим *AC*).

По графикам частотных характеристик (в децибелах) оценить затухание на частоте  $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$  ( $20 \lg 1/3 \simeq -9.5 \text{ dB}$ ) и скорости его нарастания в полосах задержания в децибелах на декаду. По графикам фазовых характеристик измерить значения фазовых сдвигов в ФВЧ, ПФ и ФНЧ на частотах 0,  $f_0$ ,  $\infty$ . Оценить двухстороннюю полосу  $\Delta f$  пропускания ПФ по расстоянию между точками, в которых фазовый сдвиг принимает значение  $\pm\pi/4 = \pm 45^\circ$ . Проверить, что  $\Delta f \simeq 3f_0$ .

2. Открыть графики переходных характеристик (режим *Transient*). Оценить время  $\tau_-$  спада первого выброса переходной характеристики ФВЧ до уровня  $1/e \simeq 0.37$  и время  $\tau_+$  нарастания фронта переходной характеристики ФНЧ до уровня  $1 - 1/e \simeq 0.63$ . *Оценить отношение  $\tau_+/\tau_-$ .*

---

По форме переходной характеристики можно судить о поведении частотной характеристики системы в нуле и на бесконечности. Нуль коэффициента передачи на нулевой частоте проявляется себя спадом вершины импульса, нуль в бесконечности – отсутствием резкого перепада на выходе в ответ на перепад на входе.

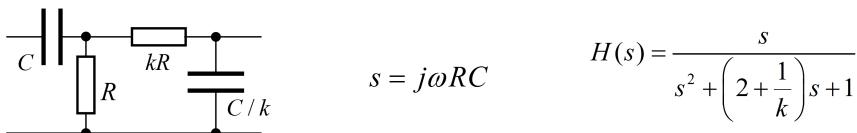


Рис. 15. Полосовой фильтр с почти независимыми звеньями

В изученных фильтрах влияние правого RC-звена на левое можно ослабить, сделав это звено высокоомным:  $R_2 = kR$  и  $C_2 = C/k$ ,  $k \gg 1$ , см. рис. 15. При  $k \rightarrow \infty$  получается tandem из двух независимых  $RC$ -звеньев со сквозной передаточной функцией типа  $\frac{1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s^2+2s+1}$ . Это позволяет достигать добротностей вплоть до  $Q = 1/2$ , отвечающих вещественному полюсу кратности два. Для достижения более высоких значений добротности требуются пары комплексно-сопряженных полюсов. Известно, что в классах RC- и RL-цепей реализуемы только апериодические системы с вещественными полюсами. Поэтому добротности  $Q > 1/2$  такими цепями принципиально недостижимы.

### 8.3. Мостовые схемы

Полезными специфическими свойствами отличаются схемные решения с топологией мостов, рис. 16а. Мостовую конфигурацию образуют четыре соединенные прямоугольником импедансы. Входной сигнал  $e$  прикладывается к одной диагонали моста, а выходной  $u$  – снимается с другой.

Выходной сигнал моста является разностным (дифференциальным). Он получается вычитанием выходов левого ( $Z_1/Z_2$ ) и

правого ( $Z_3/Z_4$ ) делителей напряжения. Передаточная функция моста – это разность передаточных функций двух делителей. Вычитание дает эффект взаимной компенсации сигналов, поступающих на выход моста по одному и другому пути. Это приводит к передаточным функциям с нетипичным расположением нулей – мостовыми схемами реализуются неминимально фазовые системы с нулями в правой полуплоскости и системы с комплексно-сопряженными парами нулей.

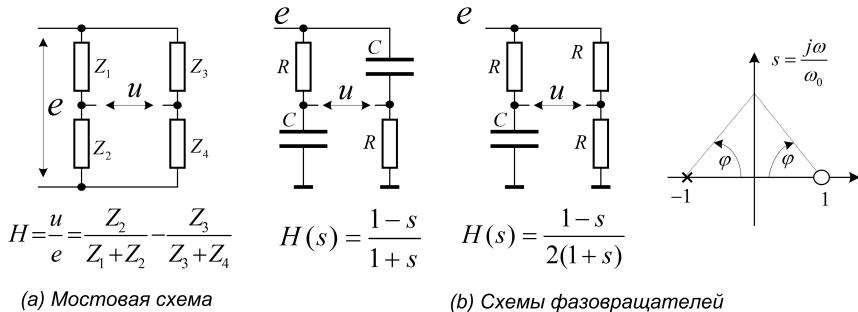


Рис. 16. Мостовые схемы

Простые примеры неминимально фазовых цепей показаны на рис. 16б. Их передаточные функции имеют полюс в левой полуплоскости при  $s = -1$  и симметрично расположенный нуль в правой полуплоскости при  $s = 1$ . Модуль коэффициента передачи этих цепей постоянен – расстояния от точки  $s = \frac{j\omega}{\omega_0}$  до полюса и нуля всегда одинаковы. Фазовая же характеристика отличается аномально большим набегом фазы – вклад полюса, изменяющийся от нуля до  $-\pi/2$ , суммируется с таким же вкладом нуля. Результатом становится фазовая характеристика  $\varphi(\omega) = -2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$  с вариацией от нуля до  $-\pi$ .

Схема двойного  $T$ -моста на рис. 17 топологически представляет собой фазовращатель на рис. 16б, в выходную диагональ которого включена дополнительная RC-цепочка. Приведенная на рисунке передаточная функция моста замечательна наличием пары комплексно сопряженных нулей в точках  $\pm j$  на мнимой оси  $s$ -плоскости. Ее полюсы вещественны и расположены в точках  $s = -\mu_{\pm}$ ,  $\mu_{\pm} = 2 \pm \sqrt{3}$  ( $\mu_+ \simeq 3.73$ ,  $\mu_- \simeq 0.27$ ,  $\mu_+/\mu_- \simeq 14$ ). Нули на мнимой оси дают эффект обращения в нуль модуля ко-

эффициента передачи при  $s = j$ , то есть при  $\omega = \omega_0 = 1/RC$ .

Двойной  $T$ -мост – это режекторный фильтр, который полностью подавляет частоту  $\omega_0$ . Его комплексный коэффициент передачи приводится к виду

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{4}{ja(\omega)}}; \quad a(\omega) = \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

Границы полосы режекции по уровню  $1/\sqrt{2} = -3$  dB достигаются при  $|a| = 4$ . Это дает  $\Delta\omega = 4\omega_0$ .

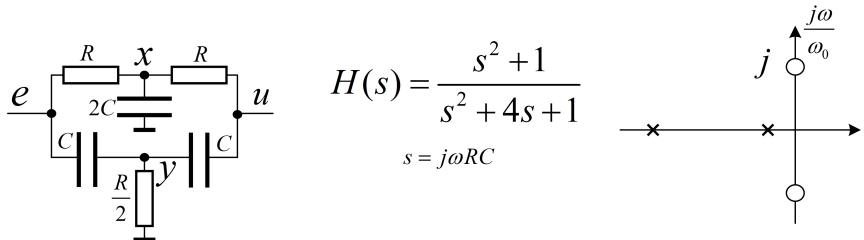


Рис. 17. Двойной Т-мост

**Пример.** Найдем передаточную функцию двойного  $T$ -моста. Приведем емкостной импеданс к виду  $Z = R/s$ ,  $s = j\omega RC$ , и примем резистор  $R$  за единицу сопротивления. Фигурирующие в схеме импедансы окажутся при этом равными  $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{s}; \frac{1}{2s}$ . Условия равенства нулю сумм токов в узлах  $x$  и  $y$  схемы на рис. 17 дают:

$$(e - x) + (u - x) = 2sx \Rightarrow e + u = 2x(1 + s),$$

$$s(e - y) + s(u - y) = 2y \Rightarrow e + u = 2y \frac{(1 + s)}{s}.$$

Отсюда  $y = xs$ . Теперь привлечем условие равенства нулю суммы токов в узле  $u$ :

$$u - x = (y - u)s \Rightarrow u(1 + s) = x + ys = x(1 + s^2); \quad x = u \frac{1 + s}{1 + s^2}.$$

Имеем

$$e + u = 2x(1 + s) = \frac{2u(1 + s)^2}{1 + s^2}.$$

Это и дает результат:  $H(s) = \frac{u}{e} = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 4s + 1}$ .

**Упражнение.** Покажите, что если в схему моста вместо резистора  $\frac{R}{2}$  поставить  $\frac{R}{2\mu}$  получится передаточная функция третьего порядка

$$H(s) = \frac{s^3 + s^2 + s + \mu}{s^3 + (3 + 2\mu)s^2 + (1 + 4\mu)s + 1}.$$

При  $\mu = 1$  эта дробь сокращается на  $(s + 1)$ . Аннигиляция нуля и полюса при  $s = -1$  и делает мост системой второго порядка.

**Упражнение.** Покажите, что переходная характеристика моста имеет вид суммы медленно растущей и быстро падающей экспонент:

$$h_0(t) = \left( \theta(t) - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-(\mu_-)\omega_0 t} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-(\mu_+)\omega_0 t}; \quad \mu_{\pm} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

### ЗАДАНИЕ 3

1. Открыть модель фазовращателя **phshift.cir**. Выяснить, на какой частоте реализуется наибольший диапазон перестройки фазы при варьировании  $R = [1k, 15k|2k]$ . Оценить границы этого диапазона.

2. Открыть модель двойного Т-моста **2tbridge.cir**. Изучить его частотную и фазовую характеристики. Измерить ширину  $\Delta f$  полосы режекции по уровню  $0.7 = -3$  dB. Проверить, что  $\Delta f = 4f_0$ . Изучить поведение характеристик при варьировании  $R = [3k, 7k|1k]$  и  $R = [4.8k, 5.2k|0.1k]$ . Объяснить характер изменения фазовой характеристики.

3. Подключив ко входу источник прямоугольного импульса, проанализировать переходную характеристику. Оценить время  $\tau_+$  спада первого пика до уровня  $1 - \frac{1}{e} \simeq 0.37$  и время нарастания вершины до уровня  $1 - \frac{1}{e} \simeq 0.63$ . Проверить выполнение формул  $\tau_{\pm} = \frac{1}{2\pi f_0 \mu_{\pm}}$ ,  $\mu_{\pm} = 2 \pm \sqrt{3}$ . Изучить влияние варьирования  $R = [3k, 7k|2k]$  на переходную характеристику.

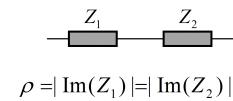
4. Открыть модель **2tdelay.cir**. Оценить частоты  $f_0$  и добротности  $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$  нулей передачи при  $R = [4.9k, 5.1k|0.1k]$  (режим *AC*). Полосы  $\Delta f$  измерять по интервалам изменения фазы на  $\pm 45^\circ$ . Подключить источник *E1* двухчастотного сигнала  $\sin 2\pi(f - df)t + \sin 2\pi(f + df)t$ ,  $df = 25$ . В режиме *Transient* измерить групповые задержки  $\tau_g$  при  $R = 4.9k$ ,  $f = 10.05k$  и

$R = 5.1k$ ,  $f = 9.95k$  как временные сдвиги нуля на графике отклика. Проверить формулу:  $\tau_g = \frac{Q}{\pi f}$ .

---

## 8.4. Последовательный резонанс

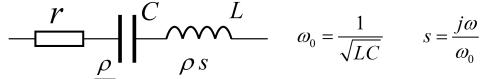
$$\operatorname{Im}(Z_1(\omega)) + \operatorname{Im}(Z_2(\omega)) = 0$$



$$\rho = |\operatorname{Im}(Z_1)| = |\operatorname{Im}(Z_2)|$$

$$r = \operatorname{Re}(Z_1 + Z_2) \quad Q = \frac{\rho}{r}$$

(a) Последовательный резонанс



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad s = \frac{j\omega}{\omega_0}$$

$$\rho = \frac{1}{\omega_0 C} = \omega_0 L = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad Q = \frac{\rho}{r}$$

(b) Последовательный контур

Рис. 18. Явление последовательного резонанса

Явление последовательного резонанса наблюдается, когда на некоторой частоте положительный индуктивный импеданс одного двухполюсника компенсируется отрицательным емкостным импедансом другого, рис. 18а. Суммарный импеданс оказывается при этом вещественным  $Z_1 + Z_2 = r$ , а модули мнимых частей импедансов одинаковыми – равными характеристическому сопротивлению  $\rho$ . На графике модуля суммарного импеданса в точке резонанса наблюдается выраженный провал, острота которого определяется добротностью резонанса  $Q = \rho/r$ .

В последовательном колебательном контуре, рис. 18б, резонанс наблюдается на частоте  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . На этой частоте модуль полного сопротивления контура падает до  $r$ . При характеристическом сопротивлении  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$  это дает добротность  $Q = \frac{\rho}{r}$ . Полный импеданс контура принимает вид

$$Z(s) = r + \rho \left( s + \frac{1}{s} \right) = r \left( 1 + ja(\omega) \right); \quad a(\omega) = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

На базе последовательного контура можно построить все три варианта полиномиальных двухполюсных звеньев – фильтр нижних частот (ФНЧ), полосовой фильтр (ПФ) и фильтр верхних частот (ФВЧ), рис. 19. При  $Q > \frac{1}{2}$  ( $2\xi < 1$ ) передаточные функции этих фильтров имеют пару комплексно-сопряженных полюсов  $s_{\pm} = -\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2}$ ,  $s = \frac{p}{\omega_0}$ , на единичной окружности.

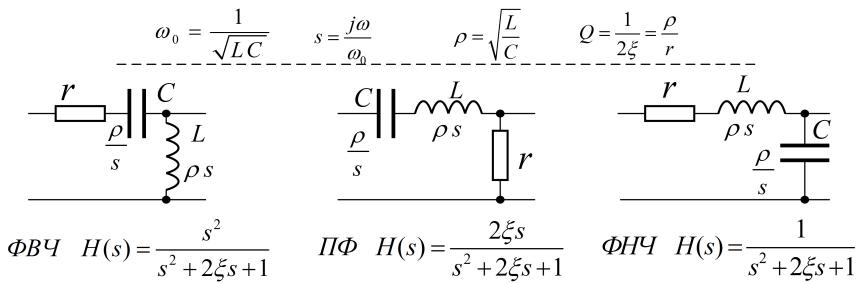


Рис. 19. Двухполюсные фильтры

Комплексный коэффициент передачи ПФ выражается через обобщенную расстройку  $a(\omega) = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$ :

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\xi} \left( s + \frac{1}{s} \right)} = \frac{1}{1 + ja(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2(\omega)}} e^{-j \arctg a(\omega)}.$$

У коэффициента передачи ФВЧ присутствует дополнительный множитель  $s = \frac{j\omega}{\omega_0}$  в числителе, у ФНЧ – такой же множитель в знаменателе. В окрестности резонанса, при  $\omega \simeq \omega_0$ , модули этих множителей малосущественны. Однако они дают существенные вклады  $\pm \frac{\pi}{2}$  в фазовые характеристики.

Комплексные полюсы проявляют себя колебательными процессами («звоном») на переходных характеристиках:

$$\Phi BЧ : \quad h_0(u) = e^{-\xi u} \left\{ \cos \eta u - \frac{\xi}{\eta} \sin \eta u \right\};$$

$$\Pi \Phi : \quad h_0(u) = \frac{2\xi}{\eta} e^{-\xi u} \sin \eta u;$$

$$\Phi HЧ : \quad h_0(u) = \theta(u) - e^{-\xi u} \left\{ \cos \eta u + \frac{\xi}{\eta} \sin \eta u \right\},$$

где  $u = \omega_0 t$ ,  $\eta = \sqrt{1 - \xi^2}$ ,  $2\xi = \frac{1}{Q}$ .

**Упражнение.** Проверьте формулы для передаточных функций на рис. 19.

**Упражнение.** Получите выражения для переходных характеристик. Подумайте над природой тождества:  $h_0^{\Phi BЧ}(u) + h_0^{\Pi \Phi}(u) + h_0^{\Phi HЧ}(u) = \theta(t)$ .

---

## ЗАДАНИЕ 4

1. На макетной плате собрать схему полосового фильтра, выбрав  $L \sim 200 \mu$ ,  $C \sim 1000 p$ ,  $r \sim 90$  ( $f_0 \sim 360k$ ,  $\rho \sim 450$ ,  $Q \sim 5$ ). Подключив генератор синусоидального сигнала, измерить *резонансную частоту*  $f_0$ , *коэффициент передачи*  $K(f_0)$  на ней и *ширину*  $\Delta f$  пика по уровню  $0.7 = -3 \text{ dB}$ . Оценить добротность как  $Q = f_0/\Delta f$ .
  2. Из тех же компонент собрать схемы фильтров верхних (ФВЧ) и нижних (ФНЧ) частот. Измерить *отношения*  $K(f_0)/K(0)$  для ФНЧ и  $K(f_0)/K(\infty)$  для ФВЧ.
  3. Подключив генератор прямоугольных импульсов, изучить переходные характеристики ФВЧ, ПФ и ФНЧ. Прикинув по осциллограммам *период колебаний* и *время их затухания* до уровня  $1/e = 0.37$ , дать *оценку резонансной частоты*  $f_0$  и *добротности*  $Q$ .
  4. Открыв в MscrpCap модель **rlc2pole.cir**, изучить частотные фазовые и переходные характеристики фильтров. Сравнить результаты моделирования с экспериментом.
  5. Открыть модель **groupdel.cir** полосового фильтра с  $f_0 = 100 k$ ,  $\rho = 2 k$ . Наблюдая в режиме *Transient* отклик на двухчастотный сигнал  $\sin 2\pi(f - df)t + \sin 2\pi(f + df)t$ , изучить *зависимость групповой задержки*  $\tau_g$  от  $R = 10, 20, 40, 100$ . Величину задержки измерять по временному сдвигу нуля отклика. Сравнить результаты с теорией:  $\tau_g = -\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{Q}{\pi f_0}$ .
  6. Открыв модель **lcpower.cir**, изучить графики распределения мощностей в резонансной LRC-цепи. Проверить *выполнение закона суммирования мощностей на частоте резонанса и на границах полосы пропускания*.
- 

На частоте резонанса суммарная реактивная мощность обращается в нуль. Поэтому в RL и RC-цепях, в которых знаки реактивных мощностей на всех компонентах одинаковы, резонансов наблюдать не может.

### 8.5. Параллельный резонанс

Параллельный резонанс – это явление, двойственное последовательному. Он наблюдается, когда взаимно уничтожаются мнимые части проводимостей двух параллельных ветвей,

рис. 20а. Полная проводимость оказывается при этом вещественной  $Y_1 + Y_2 = \frac{1}{R}$ , а одинаковые модули мнимых частей проводимостей определяют характеристическое сопротивление  $\frac{1}{\rho} = \text{Im}(Y_1) = \text{Im}(Y_2)$ . Параллельный резонанс ярко выражен при большой добротности  $Q = \frac{R}{\rho}$ , когда резонансное сопротивление значительно превышает характеристическое.

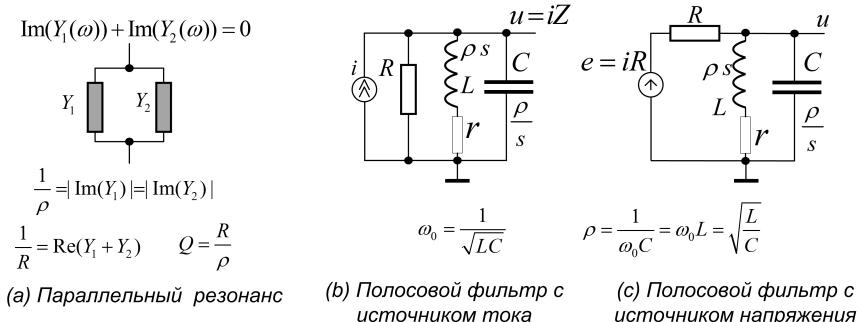


Рис. 20. Явление параллельного резонанса

Два эквивалентных варианта схемы полосового фильтра с параллельным колебательным контуром показаны на рис. 20б, с.

Канонический вариант реализуется в отсутствие последовательных потерь, когда  $r = 0$ . Тогда параллельный резонанс достигается точно на частоте  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , а передаточная функция  $H(s) = \frac{u}{i}$  (импеданс контура  $Z(s)$ ) принимает вид, обычный для полосовых фильтров второго порядка:

$$H(s) = Z(s) = \frac{u}{i} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\rho} \left( s + \frac{1}{s} \right)} = \frac{\rho s}{s^2 + 2\xi s + 1} = \frac{Q\rho}{1 + ja(\omega)},$$

где  $2\xi = \frac{1}{Q} = \frac{\rho}{R}$ , а  $a(\omega) = Q \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)$  – обобщенная расстройка. Сопротивление  $Q\rho$  контура на частоте резонанса вещественно и превышает его характеристическое сопротивление  $\rho$  в  $Q$  раз. Передаточная функция схемы с источником напряжения отличается делением на  $R$ :  $H(s) = \frac{u}{e} = \frac{u}{iR} = \frac{Z(s)}{R}$ .

Учет последовательных потерь  $r$  усложняет ситуацию. Причин две. Первая связана с тем, что при  $r \neq 0$  частота параллельного резонанса, строго говоря, отличается от  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Вторая

состоит в том, что при наличии потерь  $r$  сопротивление конура на нулевой частоте оказывается ненулевым – равным  $r||R$ .

Точное выражение для импеданса контура с последовательными потерями имеет вид

$$Z(s) = \frac{u}{i} = \frac{\varrho(s + \beta)}{s^2 + 2\xi s + 1 + \alpha\beta}; \quad \alpha = \frac{\rho}{R}, \beta = \frac{r}{\rho}, 2\xi = \alpha + \beta.$$

Полное затухание  $2\xi = \frac{1}{Q}$  равно сумме вкладов  $\alpha = \frac{\rho}{R}$  и  $\beta = \frac{r}{\rho}$ , вносимых последовательными и параллельными потерями.

При  $rR = \rho^2$  эти вклады одинаковы. Это дает хорошо известный рецепт пересчета последовательных потерь в эквивалентные параллельные:  $R = \frac{\rho^2}{r}$ .

Ненулевое значение  $r$  вызывает сдвиг нуля передаточной функции из нуля в точку  $s = -\beta$ . В окрестности резонанса влияние этого эффекта почти незаметно. Однако на малых частотах поведение системы меняется радикально – нуль проявляет себя нарастанием фазового сдвига от нуля на нулевой частоте до  $+\frac{\pi}{2}$ .

Последовательные потери  $r$  приводят к сдвигу частоты параллельного резонанса по закону  $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \beta^2}$ . Этот эффект ощутимо сказывается на частоте пересечения нуля фазовой характеристикой.

**Упражнение.** Получите выражение для импеданса  $Z(s)$  с учетом последовательных потерь.

**Упражнение.** Проверьте формулу  $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \beta^2}$  для частоты резонанса в параллельном контуре с последовательными потерями, приравняв мнимую часть суммы проводимостей ветвей к нулю.

## ЗАДАНИЕ 5

1. Открыть в MicroCap модель **parallel.cir** параллельного контура с  $f_0 = 100k$ ,  $\varrho = 570$ . По схеме оценить параметры  $\alpha = \frac{\rho}{R_0}$ ,  $\beta = \frac{R}{\rho}$ ,  $Q = \frac{1}{\alpha + \beta}$ .

2. Изучить кривые частотной зависимости модуля, аргумента, вещественной и мнимой частей импеданса контура. Измерить сопротивление контура  $R_0$  на резонансной частоте и полосу  $\Delta f$  пропускания по уровню  $0.7 = -3$  dB. Оценить его добротность как  $Q = \frac{R_0}{\rho} = \frac{f_0}{\Delta f}$ .

3. Изучить влияние на добротность последовательных потерь  $R$ , установив варьирование  $R = [0, 32|32]$ . Измерить добротность

при  $R = 0$ . Изучить влияние параллельных потерь  $R_0$ , установив варьирование  $R_0 = [10k, 1000k|1000k]$ . Измерить добротность при  $R_0 = 1000k$ . Оценить вклады каждого из резисторов  $R$ ,  $R_0$  в затухание  $\frac{1}{Q}$ .

4. Изучить зависимость частоты параллельного резонанса от  $R = [0, 150|50]$ . Частоту резонанса измерять по пересечению нуля фазовой характеристики. Проверить формулу  $f = f_0\sqrt{1 - \beta^2}$ .

5. Исследовать влияние последовательных потерь в области низких частот. Для этого установить частотный диапазон от  $1k$  до  $130k$  и варьировать  $R = [0, 20|2]$ . Оценить, при каком сопротивлении  $R$  фазовый сдвиг на частоте  $2k$  составляет  $\pi/4$ .

---

Тонкости, связанные со спецификой распределения омических потерь в контуре, мало сказываются на его поведении в окрестности резонанса. В инженерной практике крайне полезна приближенная техника приведения контуров к канонической параллельной схеме замещения путем пересчета всех омических потерь параллельно контуру, рис. 21.

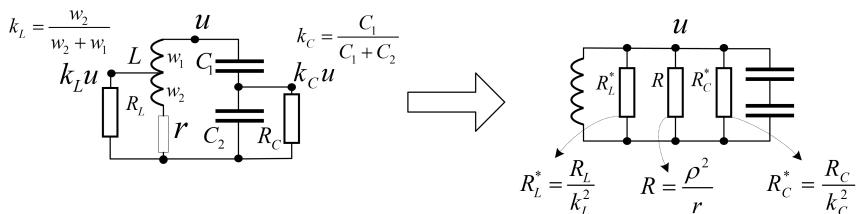


Рис. 21. Параллельный контур с потерями и его схема замещения

Последовательные потери  $r$  пересчитываются в параллельные  $R$  из условия совпадения вкладов в добротность:  $R = \frac{\rho^2}{r}$ .

Техника пересчета частично подключенных потерь  $R_L, R_C$  опирается на мощностные соображения: вводятся коэффициенты  $k_L, k_C$  подключения потерь – отношения напряжений на отводах к напряжению на всем контуре. При трансформаторном подключении коэффициент  $k_L$  определяется отношением чисел витков  $w_1, w_2$  в обмотках, при емкостном – отношением емкостей. Сопротивления эквивалентных параллельных потерь  $R_L^*, R_C^*$  определяются из условия равенства рассеиваемых мощ-

ностей:

$$P = \frac{(ku)^2}{R} = \frac{u^2}{R^*} \Rightarrow R^* = \frac{R}{k^2}.$$

## 8.6. Смешанные резонансы

В сложной RLC-схеме может наблюдаться сразу несколько последовательных и параллельных резонансов. Простой пример такого смешанного резонанса дает контур на рис. 22.



Рис. 22. Контур со смешанным резонансом

В его левой LC-ветви присутствует последовательный резонанс на частоте  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , а параллельное соединение двух ветвей дает параллельный резонанс на частоте  $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC_p}} = \omega_0\sqrt{1+\alpha}$ . Частота параллельного резонанса всегда выше частоты последовательного и приближается к ней при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Без учета параллельных потерь ( $R_0 = \infty$ ) импеданс этого контура имеет вид

$$Z(s) = \frac{\alpha\rho}{s} \frac{s^2 + 2\xi s + 1}{(s^2 + 2\xi s + 1 + \alpha)} = \frac{\alpha\rho}{s} \frac{1 + ja(\omega)}{(1 + ja_p(\omega))},$$

где  $s = \frac{j\omega}{\omega_0}$ ,  $2\xi = \frac{r}{\rho} = \frac{1}{Q}$ , а

$$a(\omega) = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right); \quad a_p(\omega) = Q_p \left( \frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right); \quad Q_p = Q\sqrt{1+\alpha}.$$

В отсутствие потерь ( $r = 0, \xi = 0$ ), рис. 22, имеется полюс в нуле, пара нулей в точках  $s = \pm j$ , ( $\omega = \omega_0$ ) и пара полюсов при

$s = \pm j\sqrt{1+\alpha}$  ( $\omega = \omega_p = \omega_0\sqrt{1+\alpha}$ ). Эти объекты и определяют поведение частотной и фазовой характеристик системы.

Полюс в нуле вносит фазовый сдвиг на  $-\frac{\pi}{2}$ , см. рис. 23. При пересечении нуля добавляется сдвиг на  $+\pi$ , а при пересечении полюса такой же сдвиг вычитается. На интервале между нулем и полюсом – между последовательным и параллельным резонансами – фазовый сдвиг принимает значение  $+\frac{\pi}{2}$ , что отвечает индуктивному импедансу. Вне этого интервала импеданс контура оказывается емкостным.

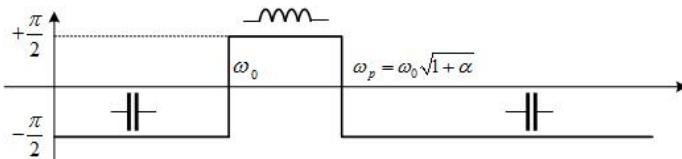


Рис. 23. Фазовая характеристика контура без потерь

При добавлении потерь  $r$  сопряженные нули и полюсы смещаются с мнимой оси в левую  $s$ -полуплоскость, рис. 22. Фазовая характеристика, не меняясь по существу, сглаживается, а провал и выброс на частотной характеристике в точках  $\omega_0$ ,  $\omega_p$  становятся конечными:

$$Z(\omega_0) = \frac{r}{1 + j\frac{1}{\alpha Q}} \simeq r; \quad Z(\omega_p) = k^2 Q_p \varrho_p \left(1 - j \frac{1}{k Q_p}\right) \simeq k^2 Q_p \varrho_p,$$

где  $k = \frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{C}{C+C_0}$  – коэффициент подключения контура.

Главный эффект от добавления параллельных потерь  $R_0$  – это сдвиг полюса при  $s = 0$  в ненулевую точку на вещественной оси, рис. 22. В результате импеданс контура на нулевой частоте становится конечным – равным  $R_0$ . Параллельные потери заметно влияют также и на положение пары сопряженных полюсов, снижая их добротность, но почти не оказывают влияния на положение нулей.

**Упражнение.** Получите выражение для импеданса контура с последовательными потерями.

## ЗАДАНИЕ 6

- Открыть модель **combined.cir** с  $f_0 = 100k$ ,  $\rho = 15.9k$ ,  $Q \simeq 10$ ,  $\alpha = 1$ . Изучить графики частотной и фазовой характе-

ристик, а также графики частотных зависимостей вещественной и мнимой частей импеданса.

2. Измерить частоты  $f_p, f_0$  последовательного и параллельного резонансов по точкам пересечения нуля фазовой характеристикой. Измерить полосы  $\Delta f_p, \Delta f_0$ , в которых фазовая характеристика изменяется в диапазоне  $\pm 45^\circ$  в окрестностях резонансов. Оценить добротности  $Q_p = \frac{f_p}{\Delta f_p}$ ,  $Q = \frac{f_0}{\Delta f_0}$ , проверить, что  $f_p = f_0\sqrt{2}$ ,  $Q_p = Q\sqrt{2}$ .

3. Измерить сопротивление контура на частотах последовательного и параллельного резонансов, сравнить результаты с теоретическими значениями:  $r, k^2\rho_p Q_p$ . Снять зависимости сопротивления на частоте параллельного резонанса от  $R = [500 : 2000|500]$  и емкости  $C_0 = [100p, 300p|100p]$ . Сопоставить их с теорией. Осмыслить характер изменения графиков при варьировании  $R$  и  $C_0$ .

4. Обнулить последовательные потери  $r$  и варьированием  $R_0 = [10k, 100k|10k]$  подобрать сопротивление параллельных потерь так, чтобы достичь того же резонансного сопротивления, что и при  $r = 1590$ . Проверить закон пересчета:  $R_0 r = k^2 \rho_p^2$ . Обратить внимание, что параллельные потери не снижают добротность последовательного резонанса.

5. Варьируя  $R_0 = [80k, 10Meg|10Meg]$  при  $r = 1590$ , изучить, влияние  $R_0$  на поведение частотной и фазовой характеристик на низких частотах – в диапазоне *Frequency Range* = 1 k, 180 k.

---

Передаточная функция любой LRC-цепи рациональна – является отношением двух многочленов. К сожалению, это вовсе не означает, что свойства любой цепи можно легко исследовать аналитическими средствами. Проблему создает отыскание корней знаменателя – полюсов системы. Эта задача не решается в общем виде уже для цепей с тремя полюсами. К примеру, попытка учесть параллельные потери в контуре на рис. 22 приводит к многочлену третьей степени в знаменателе, найти положение единственного вещественного корня которого аналитически не удается. Ситуация осложняется невозможностью построения теории возмущений, которая позволяла бы делать внятные выводы о движении корней многочлена при варьировании его коэффициентов. Известно, что зависимости положений корней от значений коэффициентов могут быть весьма сингулярными.

Учебное издание

# ПАССИВНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Методические указания  
к лабораторной работе

по курсу *Радиотехнические цепи и сигналы*

Составители: **Григорьев Александр Алексеевич**  
**Филатов Иван Васильевич**

Редактор *Л.В. Себоева*. Корректор *Н.Е. Кобзева*  
Компьютерная верстка *Н.Е. Кобзева*

Подписано в печать 10.02.2015. Формат 60×84 1/16.

Усл. печ. л. 2,75. Уч.-изд.л. 2,6. Тираж 200 экз. Заказ

---

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования «Московский  
физико-технический институт (государственный университет)»  
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
Тел.: (495)408-52-28. E-mail: [rio@mipt.ru](mailto:rio@mipt.ru)

---

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»  
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
Тел.: (495)408-84-30. E-mail: [polygraph@mipt.ru](mailto:polygraph@mipt.ru)