AR(p)

$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + ... + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$

Donde $\varepsilon_t \sim NIID(0, \sigma_\varepsilon^2)$

Estacionariedad del proceso: tendrá media y varianza constante en el tiempo

$y_t - \phi_1 y_{t-1} - ... - \phi_p y_{t-p} = c + \varepsilon_t$

Operador de rezagos (L):

$(1 - \phi_1 L - ... - \phi_p L^p) y_t = \phi(L) y_t$

Donde $\phi(L)$ es un polinomio de orden p

$\phi(L) y_t = c + \varepsilon_t$

Condición:

$(1 - \phi_1 L - ... - \phi_p L^p) = 0$

Ejemplo: $p = 1$

$1 - \phi_1 L = 0$

Despejando $L = 1/\phi_1$,si el proceso es estacionario se requiere que por tanto $|L| > 1$ yaque $|\phi_1| < 1$

Ejemplo $p = 2$ el polinomio de orden dos es:

$1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = 0$

Condición de estacionariedad

$|\phi_1| < 1$ y $|\phi_2| < 1$ y el producto $|\phi_2 \phi_2| < 1$ y la suma $\phi_1 + \phi_2 \neq 1$

Raíces del polinomio (L_1, L_2):

$1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = 0$

Por tanto:

$(L - L_1)(L - L_2) = 0$

$(L - L_1)(L - L_2) = L^2 - (L_1 + L_2)L + L_1 L_2 = 0$

Relación entre las raíces del polinomio y ϕ :

$-\frac{1}{\phi_2} + \frac{\phi_1}{\phi_2} L + L^2 = 0$

$-(L_1 + L_2) = \frac{\phi_1}{\phi_2}$

$L_1 L_2 = -\frac{1}{\phi_2}$

Verificar la estacionariedad

Las ráices del polinomio:

$(1 - \phi_1 L - ... - \phi_p L^p) = 0$

Deberán ser mayores que 1 en valor absoluto

Ej 1:

$1 - 1.1L + 0.18L^2 = \varepsilon_t$

La media es cero $\mu_y = 0$ ya que no tiene constante

$\varepsilon_t \sim NIID(0, 1)$

$1 - 1.1L + 0.18L^2 = 0$

Raíces:

$L_1 = 5.0$

$L_2 = 1.1111$

Entonces el proceso es estacionario

Ej 2:

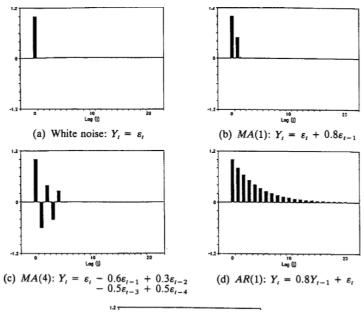
$1 - 1.1L - 0.18L^2 = \varepsilon_t$

Verificar:

$1 - 1.1L - 0.18L^2 = 0$

$L_1 = 0.803\,46$,
$L_2 = -6.914\,6$
No es estacionario
Práctica parte 1
1) DGP de $T = 500$ de los dos procesos anteriores, valores inciales de 0
2) Para el proceso estacionario, calcular las autocovarianzas y autocorrelación de orden 20 y graficarlas
Yule-Walker equations:
$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + ... + \phi_p\gamma_p + \sigma_\varepsilon^2$
$\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 + ... + \phi_p\gamma_{p-1}$
$\gamma_2 = \phi_1\gamma_1 + ... + \phi_p\gamma_{p-2}$
...
$\gamma_p = \phi_1\gamma_{p-1} + ... + \phi_p\gamma_0$
Sistema de $p + 1$ ecuaciones con $p + 1$ incognitas:
$\gamma_0 - \phi_1\gamma_1 - .... - \phi_p\gamma_p = \sigma_\varepsilon^2$
$\gamma_1 - \phi_1\gamma_0 - .... - \phi_p\gamma_{p-1} = 0$
$\gamma_2 - \phi_1\gamma_1 - .... - \phi_p\gamma_{p-2} = 0$
...
$\gamma_p - \phi_1\gamma_{p-1} - .... - \phi_p\gamma_0 = 0$
Sistema lineal
$A_{p+1Xp+1}\gamma_{p+1} = b_{p+1}$
Despejando γ :
$\gamma = A^{-1}b$
El término de error puede afectar al proceso por una media móvil
Orden 1:
$u_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}$
Orden q:
$u_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + ... + \theta_q\varepsilon_{t-q}$
Por lo tanto el proces quedaría como:
$y_t = c + u_t$: ARMA(0,q)
$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + u_t$: ARMA(1,q)
$\phi(L)y_t = c + u_t$: ARMA(p,q)
ARMA(1,1): estacionario $|\phi_1| < 1$
$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}$
Momentos
$\mu_y = E[y_t] = \frac{c}{1-\phi_1}$
Varianza del ARMA
Expresandolo en desviaciones respecto de la media se tiene:
$y_t - \mu_y = \phi_1(y_{t-1} - \mu_y) + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}$
Yule-Walker:
$(y_t - \mu_y)(y_t - \mu_y) = (\phi_1(y_{t-1} - \mu_y) + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1})(y_t - \mu_y)$
Tomando el valor esperado:
$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1 E[\varepsilon_{t-1}(y_t - \mu_y)]$
$E[\varepsilon_{t-1}(y_t - \mu_y)] = E[\varepsilon_{t-1}(\phi_1(y_{t-1} - \mu_y) + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1})] =$
$E[\varepsilon_{t-1}(\phi_1(\phi_1(y_{t-2} - \mu_y) + \varepsilon_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1})] = \phi_1\sigma_\varepsilon^2 + \theta_1\sigma_\varepsilon^2$

Por tanto:
$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2 + \phi_1\theta_1\sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2\sigma_\varepsilon^2$
Segunda:
$(y_t - \mu_y)(y_{t-1} - \mu_y) = (\phi_1(y_{t-1} - \mu_y) + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1})(y_{t-1} - \mu_y)$
$\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 + \theta_1\sigma_\varepsilon^2$
Tercera:
$(y_t - \mu_y)(y_{t-2} - \mu_y) = (\phi_1(y_{t-1} - \mu_y) + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1})(y_{t-2} - \mu_y)$
$\gamma_2 = \phi_1\gamma_1$
Práctica parte 2
Para $T = 500$
Tres Yule-Walker equations
ARMA(1,2)
ARMA(2,1)
ARMA(2,2)
DGP
MA(1)
$u_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}$
$\theta_1 = 1.1$
$\varepsilon_t \sim NIID(0, 1)$
MA(2)
$u_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}$
$\theta_1 = 1.1$
$\theta_2 = 0.2$
$\varepsilon_t \sim NIID(0, 1)$
ARMA(1,2)
$y_t = 1 + 0.5y_{t-1} + u_t$
ARMA(2,1)
$y_t = 1 + 0.3y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + u_t$
ARMA(2,2)
$y_t = 1 + 0.3y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + u_t$
Verificar la estacionariedad (obtener las raíces del polinomio)
Derivación de las autocorrelaciones:
$\rho_p = \frac{\gamma_p}{\gamma_0}$
Las autocovarianzas serán distintas hasta $q + 1$
Graficarlas las autocovarianzas de orden 20
MA(2):
$u_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}$ donde ε_t es ruido blanco
$E[u_t] = 0$
$var(u_t) = \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2\sigma_\varepsilon^2 + \theta_2^2\sigma_\varepsilon^2$
Autocovarianzas:
$E[u_tu_{t-1}] = E[(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-2} + \theta_2\varepsilon_{t-3})] = \theta_1\sigma_\varepsilon^2 + \theta_2\theta_1\sigma_\varepsilon^2$
$E[u_tu_{t-2}] = E[(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-2} + \theta_1\varepsilon_{t-3} + \theta_2\varepsilon_{t-4})] = \theta_2\sigma_\varepsilon^2$
$E[u_tu_{t-3}] = E[(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-3} + \theta_1\varepsilon_{t-4} + \theta_2\varepsilon_{t-5})] = 0$
De $q + 1$ en adelante las autocovarianzas serán cero
Entonces como es la gráfica de la autocorrelación de un MA(2)?



Las tres primeras son diferentes de cero

Entonces como es la gráfica de la autocorrelación de un MA(1)?

Las dos primeras son diferentes de cero

Entonces como es la gráfica de la autocorrelación de un MA(0)?

La primera es diferentes de cero

Práctica parte 3

DGP con T=500 b) c) y d), graficar las autocorrelaciones donde $\varepsilon_t \sim NIID(0,1)$ y valores iniciales de cero

Calcular el sesgo de la media y varianza muestrales contra las poblacionales