Forma cuadrática para el modelo de Harry-Markovitz

Varianza covarianza

$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2 \\ \sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$

$a = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix}$ donde α es un porcentaje de inversión

$a^T\Sigma\alpha = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2 \\ \sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix} = \alpha^2\sigma_1^2+\sigma_2^2(1-\alpha)^2-2\alpha(1-\alpha)\sigma_2\sigma_1$

$FC = \alpha^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2(1-\alpha)^2 - 2\alpha(1-\alpha)\sigma_2\sigma_1$

$\min\limits_{\alpha} a^T\Sigma\alpha$

$\frac{dFC}{d\alpha} = 0$

$\alpha^* = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ si no hay covarianza

$\alpha^* = \frac{\sigma_2^2-\sigma_2\sigma_1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_2\sigma_1}$ si hay covarianza

Generalización de forma cuadrática y el mínimo

Σ_{nXn}

a_{nX1}

$FC = a'\Sigma a$

$\min\limits_{\alpha} a'\Sigma a$

s.t.$i'a = 1$

Por el lagrange (λ : es un número mayor a cero)

$L = a'\Sigma a - \lambda(i'a-1)$

$\frac{dL}{da} = a'\Sigma - \lambda i' = 0$

$\frac{dL}{d\lambda} = (i'a-1) = 0$

De la primera:

1) $a'\Sigma = \lambda i'$

2) $i'a = 1$

Se transpone la 1) y se tiene:

$\Sigma a = \lambda i$

Despejando a :

1a) $a = \lambda\Sigma^{-1}i$

Sustituyendo en la segunda:

$i'(\lambda\Sigma^{-1}i) = 1$

Arreglando términos:

$\lambda i'_{1xn}\Sigma^{-1}_{nxn}i_{nx1} = 1$

Por tanto:

$\lambda = (i'_{1xn}\Sigma^{-1}_{nxn}i_{nx1})^{-1}$

Finalmente sustituyendo en la 1a)

$a^*_{nx1} = (i'_{1xn}\Sigma^{-1}_{nxn}i_{nx1})^{-1}\Sigma^{-1}_{nxn}i_{nx1}$

Mínimo de FC

$\frac{dFC^2}{d^2a} = 2\Sigma > 0$

Práctica de selección de cartera óptima

De la base de datos anexa de 27 precios de emisoras de México realiza lo siguiente:

1) Tomar tasas de crecimieno diario

2) Calcular la matriz de variaza covarianza de las 27

3) Elige 6 de ellas con la varianza menor

4) Aplica la minimización del riesgo y calcula el riesgo para todos los posibles pares sobre las 6 elegidas

5) Aplica la minimización del riesgo y calcula el riesgo para todos los posibles tercias sobre las 6 elegidas

6) Aplica la minimización del riesgo y calcula el riesgo para todos los posibles cuartetos sobre las 6 elegidas

7) Aplica la minimización del riesgo y calcula el riesgo para todos las 6 elegidas

8) Aplica la minimización del riesgo y calcula el riesgo para todos las 27 emisoras

9) Interpreta los resultados de 4 a 8 indicando cuáles son las emiosaras preferidas en cada inciso

10) Explica cuáles son las mejores carteras

Modelo de factor común
Método alternativo para econtrar una dinámica común
de múltiples series de tiempo

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ y_{3t} \\ y_{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} f_t + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \\ \varepsilon_{4t} \end{bmatrix}$$

Donde $\varepsilon_{jt} \sim N(0, \sigma_j^2)$ donde $j = 1, ..., 4$
En forma matricial
$y_t = Hf_t + \varepsilon_t$
Descomposición de la varianza:
$var(y_{jt}) = \lambda_1^2 var(f_t) + \sigma_j^2 + 2cov(\varepsilon_t, f_t)$
Pero se asume $cov(\varepsilon_t, f_t) = 0$
$var(y_{jt}) = \lambda_1^2 var(f_t) + \sigma_j^2$
Dividiendo entre $var(y_{jt})$:
$1 = \lambda_1^2 \frac{var(f_t)}{var(y_{jt})} + \frac{\sigma_j^2}{var(y_{jt})}$
Descomppsición de la varianza:
100=%Común+%específico
Estimación: (λ, σ^2, f_t) para la siguiente clase

Práctica 2: generar un proceso para el modelo de factor dinámico con 4 series

Parámetros:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 = 0.8 \\ \lambda_2 = 0.5 \\ \lambda_3 = 0.3 \\ \lambda_4 = 0.1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 = 1 \\ \sigma_2^2 = 2 \\ \sigma_3^2 = 4 \\ \sigma_4^2 = 1.5 \end{bmatrix}$$

Dinámica para f_t :
$f_t = c + \phi_1 f_{t-1} + v_t$
Donde $v_t \sim N(0, 1)$
$c = 1$
$\phi_1 = 0.3$
Procedimiento:
Paso 1:
$f_0 = \frac{c}{1-\phi_1}$
Paso 2:
Obtener un error $v_1 \sim N(0, 1)$
Paso 3:
$f_1 = c + \phi_1 f_0 + v_1$
Paso 4:

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ y_{3t} \\ y_{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} f_1 + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{41} \end{bmatrix}$$

Obtener 4 errores $\varepsilon_1 \sim N(0, \sigma_1^2), \varepsilon_2 \sim N(0, \sigma_2^2), \varepsilon_3 \sim N(0, \sigma_3^2), \varepsilon_4 \sim N(0, \sigma_4^2)$
Paso 5:

$f_2 = c + \phi_1 f_1 + v_2$

Repetir de 2 a 5, 500 veces, es decir, $T = 500$

Graficar la y_t contra f_t

Nota: se pueden generar los 500 errores de v_t y los 500 ε_{jt} para $j = 1, 2, 3, 4$ y entonces aplicar una fórmula y copiarla 500 veces