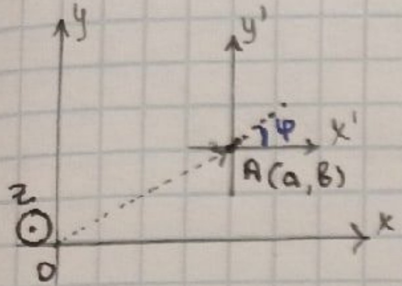
Задача 1. (Лекция 1) + Лекция 3

Построить матрицу поворота на угол φ вокруг точки $A(a,b)$ на пл-ти.



y П1 * Мы используем умножение на матрицу слева.

$$\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{столбец}}{b} = M \times \underset{\text{столбец}}{a}$$

* $P_4(P_3(P_2(P_1))) \longrightarrow M_4 \times M_3 \times M_2 \times M_1$

Мы знаем матрицу поворота на угол φ вокруг начала координат $O(0,0)$. След-но, мы можем перенести т. $A(a,b)$ в начало координат $O(0,0)$, выполнить поворот и вернуть т. A обратно.

→ Матрица переноса на вектор (c,d): $T(c,d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad T^{-1}(c,d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & -d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T(-c,-d)$

→ Матрица поворота вокруг $(0,0)$ на φ: $R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi; \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi; \\ z' = z. \end{cases}$

$$v' = Mv = \underbrace{T(a,b) \times R_z(\varphi) \times T^{-1}(a,b)}_{M} \times v = \boxed{T(a,b) \times R_z(\varphi) \times T(-a,-b)} \times v.$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & -a\cos\varphi + b\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & -a\sin\varphi - b\cos\varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & -a\cos\varphi + b\sin\varphi + a \\ \sin\varphi & \cos\varphi & -a\sin\varphi - b\cos\varphi + b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $M = T(a,b)\,R_z(\varphi)\,T^{-1}(a,b) = T(a,b)\,R_z(\varphi)\,T(-a,-b)$

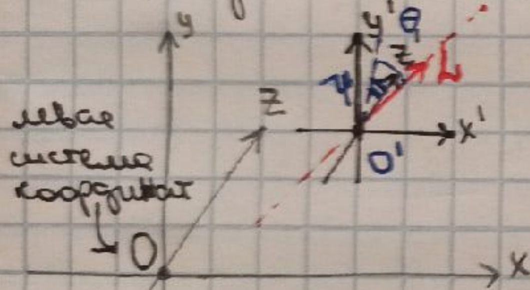
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & -a\cos\varphi + b\sin\varphi + a \\ \sin\varphi & \cos\varphi & -a\sin\varphi - b\cos\varphi + b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $M = T(a,b)\, R_z(\varphi)\, T^{-1}(a,b) = T(a,b)\, R_z(\varphi)\, T(-a,-b)$.

Задача 3. (Лекция 3)

Построить матрицу поворота на угол φ вокруг прямой L в 3D-пр-ве проходящей через т. $A=(a,b,c)$ и имеющей направляющий вектор (l,m,n) с единичным модулем. $O' = A = (a,b,c)$



Решение: 1) Совместим ось L с координатной осью Z. (и.б. X или Y)

- Повернём L вокруг оси y' на θ (против часовой стрелки), поэтому с минусом.
  Итог: ось L лежит в пл-ти $y'O'z'$. $R_y(-\theta)$
- Повернём L вокруг оси x' на ψ (по час. стрелке)
  Итог: ось L совпало с z'. $R_x(\psi)$
- Перенесём O' в т. $O(0,0,0)$.
  Итог: ось L совпала с z. $T(-a,-b,-c)$.

$$* R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$* R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

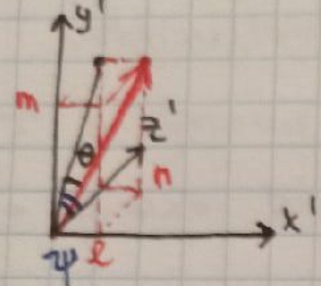
Итог. матрица: $Q = T(-a,-b,-c) \cdot R_x(\psi)\, R_y(-\theta)$.

2) Поворот вокруг оси Z на φ $R_z(\varphi)$

3) Вернуть L обратно: Q^{-1}.

2021/3/11 21:43

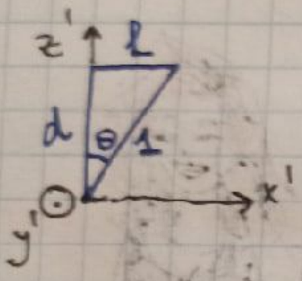
Итог: $M = Q^{-1} R_z(\varphi)\, Q = \underbrace{R_y(\theta)\, R_x(-\psi)\, T(a,b,c)}_{Q^{-1}}\; R_z(\varphi)\; \underbrace{T(-a,-b,-c)\, R_x(\psi)\, R_y(-\theta)}_{Q}$

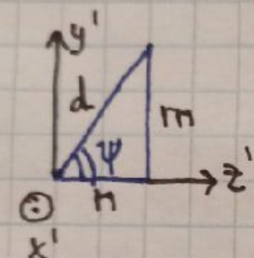


Вычислим синусы и косинусы для углов ψ и θ.

$$d = \sqrt{m^2+n^2} \longrightarrow \begin{cases} \sin\theta = \frac{l}{1} = l \\ \cos\theta = \frac{d}{1} = d. \end{cases}$$

$$\boxed{R_y(\theta) = \begin{pmatrix} d & 0 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -l & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$





$$\begin{cases} \sin\psi = \frac{m}{d} \\ \cos\psi = \frac{n}{d} \end{cases}$$

$$\boxed{R_x(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n/d & -m/d & 0 \\ 0 & m/d & n/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$R_y(-\theta) = \begin{pmatrix} d & 0 & -l & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_x(-\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n/d & m/d & 0 \\ 0 & -m/d & n/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1}(a,b,c) = T(-a,-b,-c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $M = \underbrace{R_y(\theta)\, R_x(-\psi)\, T(a,b,c)}_{Q^{-1}} \cdot R_z(\varphi)\; \underbrace{T(-a,-b,-c)\, R_x(\psi)\, R_y(-\theta)}_{Q}.$

Задача 8.

Q^{-1}

Задача 8.
Пусть первый поворот совершается вокруг оси x на угол $\frac{\pi}{2}$, а второй – вокруг оси y на тот же угол. Найти результирующий поворот.

Кватернион: $\Lambda = \cos\theta + \bar{\xi}\sin\theta = \lambda_0 + \lambda_1 \bar{i}_1 + \lambda_2 \bar{i}_2 + \lambda_3 \bar{i}_3 = |\Lambda|\left(\frac{\lambda_0}{|\Lambda|} + \frac{\bar{\lambda}}{|\Lambda|}\right)$ – поворот на 2θ вокруг оси $\bar{\xi}$.

$|\Lambda| = 1 = \sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}$

Из лекции „Кватернионы II". $\lambda_0 = \cos\frac{\varphi}{2}$, $\lambda_1 = l\sin\frac{\varphi}{2}$, $\lambda_2 = m\sin\frac{\varphi}{2}$, $\lambda_3 = n\sin\frac{\varphi}{2}$

где l, m, n – направляющие косинусы оси вращения.

$x,\ \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow$
$(l,m,n) = (1,0,0)$

$$\Lambda_{x,\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i}_1 \qquad \Lambda_{y,\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i}_2$$

$$\Lambda = \Lambda_{y,\frac{\pi}{2}} \circ \Lambda_{x,\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i}_2\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i}_1\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\bar{i}_1 + \frac{1}{2}\bar{i}_2 - \frac{1}{2}\bar{i}_3$$

$|\Lambda| = \sqrt{4\cdot\frac{1}{4}} = 1 \longrightarrow \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}, \rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3},$

$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{cases} l = \frac{1\cdot 2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ m = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ n = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Ответ. Результирующий поворот: на угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ вокруг оси, с направляющими косинусами: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.