In [1]:
```
import numpy as np
import math
import scipy.stats as sps
import matplotlib.pyplot as plt

%matplotlib inline
```

## 7.Доверительные интервалы. Задачи 1 и 2.

Условие 1. Сгенерируйте выборку $X_1, \ldots, X_{100}$ из распределения $D_\beta$ в теоретических задачах 6.1, 6.3, 6.4, 6.5. В задачах 6.1, 6.3, 6.4 возьмите $\theta = 10$, в задаче 6.5 возьмите $(\theta, \lambda) = (10, 3)$. Для уровня доверия $\alpha = 0.95$ для всех $n \leq 100$ постройте доверительные интервалы, полученные в теоретических задачах. Изобразите их на графиках в координатах $(n, \theta)$, используя matplotlib.pyplot.fill_between.

Условие 2. Для $n = 100$ оцените вероятность попадания истинного значения $\theta$ в интервал (в каждой задаче). Для этого сгенерируйте достаточно много выборок (предложить, сколько нужно выборок), постройте по каждой из них интервалы и определите, сколько раз в интервалы попадает истинное значение $\theta$. Таким способом будет построена бернуллиевская выборка, по ней оцените вероятность.

In [2]:
```
#задаваемые константы
theta = 10
alpha = 0.95
lambd = 3
n = 100
num_of_samples = 100000
```

In [3]:
```
#вспомним функцию для визуализации доверительных интервалов.
def draw_confidence_interval(left, # левая граница интервала
                             right, # правая граница интервала
                             estimation = None, # если задано, то рисуется график оценки
                             sample = None, # если задано, то рисуется точки выборки
                             ylim = (None, None)): # ограничение по оси y

    plt.figure(figsize=(15, 7))
    size = np.linspace(0, len(left), len(left))
    if(sample is not None):
        plt.scatter(size, sample, alpha = 0.2, s = 40, label = 'sample')
    if(estimation is not None):
        plt.plot(size, estimation, color='green', linewidth = 2.5, label = 'estimation')
    if(ylim is not (None, None)):
        plt.ylim(ylim)
    plt.fill_between(size, left, right, alpha = 0.15)
    plt.xlabel('Size')
    plt.title('Sample by size')
    plt.grid()
    plt.show()
```

### Теоретическая задача 6.1

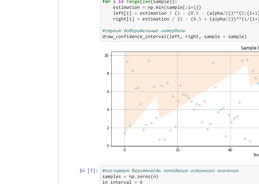
Выборка $X_1, \ldots, X_n$ $R[0, \theta]$

A) Статистика $S(x) = \overline{X}$. Теоретический доверительный интервал: $\theta \in \left(\frac{\overline{X}}{0.5 + \varepsilon}, \frac{\overline{X}}{0.5 - \varepsilon}\right)$, где $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{12n}} \cdot z_{\frac{1+\alpha}{2}}$

In [4]:
```
#генерируем выборку
sample = sps.uniform.rvs(size = n, scale = theta)

#посчитаем левую и правую границы
left = np.zeros(len(sample))
right = np.zeros(len(sample))
for i in range(len(sample)):
    estimation = np.average(sample[:i+1])
    left[i] = estimation / ((1/2) + (1 / np.sqrt(12 * (1-alpha) * (i+1))))
    right[i] = estimation / ((1/2) - (1 / np.sqrt(12 * (1-alpha) * (i+1))))

#строим доверительные интервалы
draw_confidence_interval(left, right, sample = sample)
```




In [5]:
```
#посчитаем вероятность попадания истинного значения
samples = np.zeros(n)
in_interval = 0

for i in range(num_of_samples):
    samples = sps.uniform.rvs(size = n, scale = theta)
    estimation = np.average(samples[:n+1])
    left = estimation / ((1/2) + (1 / np.sqrt(12 * (1 - alpha) * (n+1))))
    right = estimation / ((1/2) - (1 / np.sqrt(12 * (1 - alpha) * (n+1))))
    if (theta >= left and theta <= right):
        in_interval = in_interval + 1

#вероятность попадания истинного значения theta в интервал
print('{}'.format(in_interval / num_of_samples))
```

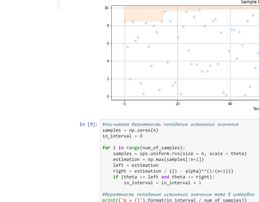
```
p = 0.99997
```

Б) Статистика $S(x) = X_{(1)}$. Теоретический доверительный интервал: $\theta \in \left(\frac{X_{(1)}}{1 - \sqrt[n]{0.5 - (\alpha/2)}}, \frac{X_{(1)}}{1 - \sqrt[n]{0.5 + (\alpha/2)}}\right)$

In [6]:
```
#генерируем выборку
sample = sps.uniform.rvs(size = n, scale = theta)

#посчитаем левую и правую границы
left = np.zeros(len(sample))
right = np.zeros(len(sample))
for i in range(len(sample)):
    estimation = np.min(sample[:i+1])
    left[i] = estimation / (1 - (0.5 - (alpha/2))**(1/(i+1)))
    right[i] = estimation / (1 - (0.5 + (alpha/2))**(1/(i+1)))

#строим доверительные интервалы
draw_confidence_interval(left, right, sample = sample)
```




In [7]:
```
#посчитаем вероятность попадания истинного значения
samples = np.zeros(n)
in_interval = 0

for i in range(num_of_samples):
    samples = sps.uniform.rvs(size = n, scale = theta)
    estimation = np.min(samples[:n+1])
    left = estimation / (1 - (0.5 - (alpha/2))**(1/(n+1)))
    right = estimation / (1 - (0.5 + (alpha/2))**(1/(n+1)))
    if (theta >= left and theta <= right):
        in_interval = in_interval + 1

#вероятность попадания истинного значения theta в интервал
print('{}'.format(in_interval / num_of_samples))
```

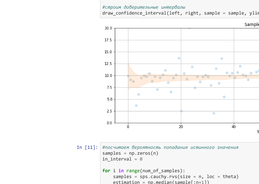
```
p = 0.94859
```

В) Статистика $S(x) = X_{(n)}$. Теоретический доверительный интервал: $\theta \in \left(\frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{\alpha/2}}, \right)$

In [8]:
```
#генерируем выборку
sample = sps.uniform.rvs(size = n, scale = theta)

#посчитаем левую и правую границы
left = np.zeros(len(sample))
right = np.zeros(len(sample))
for i in range(len(sample)):
    estimation = np.max(sample[:i+1])
    left[i] = estimation
    right[i] = estimation / ((1 - alpha)**(1/(i+1)))

#строим доверительные интервалы
draw_confidence_interval(left, right, sample = sample)
```




In [9]:
```
#посчитаем вероятность попадания истинного значения
samples = np.zeros(n)
in_interval = 0

for i in range(num_of_samples):
    samples = sps.uniform.rvs(size = n, scale = theta)
    estimation = np.max(samples[:n+1])
    left = estimation
    right = estimation / ((1 - alpha)**(1/(n+1)))
    if (theta >= left and theta <= right):
        in_interval = in_interval + 1

#вероятность попадания истинного значения theta в интервал
print('{}'.format(in_interval / num_of_samples))
```

```
p = 0.94932
```

**Выводы: Исходя из подсчитанных вероятностей, лучший интервал получен для $\overline{X}$.**

**Статистика** $S(x) = \overline{X}$ **:** $p = 0.99997$

**Статистика** $S(x) = X_{(1)}$ **:** $p = 0.94859$

**Статистика** $S(x) = X_{(n)}$ **:** $p = 0.94932$

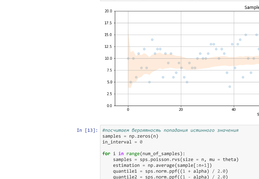
### Теоретическая задача 6.3

Выборка $X_1, \ldots, X_n$ $Cauchy[\theta, 1]$. Теоретический асимптотический доверительный интервал: $\theta \in \left(\hat{\mu} - U_{\frac{1+\alpha}{2}} \frac{\pi}{2\sqrt{n}}, \hat{\mu} - U_{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)$, where $U_\alpha$ - $\alpha$-квантиль стандартного нормального распределения

In [10]:
```
#генерируем выборку
sample = sps.cauchy.rvs(size = n, loc = theta)

#посчитаем левую и правую границы
left = np.zeros(len(sample))
right = np.zeros(len(sample))
for i in range(len(sample)):
    estimation = np.median(sample[:i+1])
    quantile1 = sps.norm.ppf((1 + alpha) / 2.0)
    quantile2 = sps.norm.ppf((1 - alpha) / 2.0)
    left[i] = estimation - np.pi * quantile1 / (2 * np.sqrt(i+1))
    right[i] = estimation - np.pi * quantile2 / (2 * np.sqrt(i+1))

#строим доверительные интервалы
draw_confidence_interval(left, right, sample = sample, ylim = (0, 20))
```




In [11]:
```
#посчитаем вероятность попадания истинного значения
samples = np.zeros(n)
in_interval = 0

for i in range(num_of_samples):
    samples = sps.cauchy.rvs(size = n, loc = theta)
    estimation = np.median(sample[:n+1])
    quantile1 = sps.norm.ppf((1 + alpha) / 2.0)
    quantile2 = sps.norm.ppf((1 - alpha) / 2.0)
    left = estimation - quantile1 * np.pi/(estimation) / (np.sqrt(i+1))
    right = estimation - quantile2 * np.pi/(estimation) / (np.sqrt(i+1))
    if (theta >= left and theta <= right):
        in_interval = in_interval + 1

#вероятность попадания истинного значения theta в интервал
print('{}'.format(in_interval / num_of_samples))
```

```
p = 1.0
```

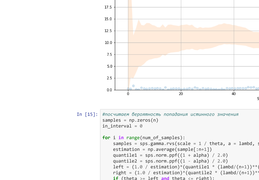
### Теоретическая задача 6.4

Выборка $X_1, \ldots, X_n$ $Pois(\theta)$. Теоретический асимптотический доверительный интервал: $\theta \in \left(\overline{X} - U_{\frac{1+\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\overline{X}}}{\sqrt{n}}, \overline{X} - U_{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\overline{X}}}{\sqrt{n}}\right)$, where $U_\alpha$ - $\alpha$-квантиль стандартного нормального распределения

In [12]:
```
#генерируем выборку
sample = sps.poisson.rvs(size = n, mu = theta)

#посчитаем левую и правую границы
left = np.zeros(len(sample))
right = np.zeros(len(sample))
for i in range(len(sample)):
    estimation = np.average(sample[:i+1])
    quantile1 = sps.norm.ppf((1 + alpha) / 2.0)
    quantile2 = sps.norm.ppf((1 - alpha) / 2.0)
    left[i] = estimation - quantile1 * np.sqrt(estimation) / (np.sqrt(i+1))
    right[i] = estimation - quantile2 * np.sqrt(estimation) / (np.sqrt(i+1))

#строим доверительные интервалы
draw_confidence_interval(left, right, sample = sample, ylim = (0, 20))
```




In [13]:
```
#посчитаем вероятность попадания истинного значения
samples = np.zeros(n)
in_interval = 0

for i in range(num_of_samples):
    samples = sps.poisson.rvs(size = n, mu = theta)
    estimation = np.average(sample[:n+1])
    quantile1 = sps.norm.ppf((1 + alpha) / 2.0)
    quantile2 = sps.norm.ppf((1 - alpha) / 2.0)
    left = estimation - quantile1 * np.sqrt(estimation) / (np.sqrt(n+1))
    right = estimation - quantile2 * np.sqrt(estimation) / (np.sqrt(n+1))
    if (theta >= left and theta <= right):
        in_interval = in_interval + 1

#вероятность попадания истинного значения theta в интервал
print('{}'.format(in_interval / num_of_samples))
```

```
p = 1.0
```

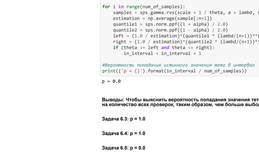
### Теоретическая задача 6.5

Выборка $X_1, \ldots, X_n$ $Gamma(\theta, \lambda)$ Теоретический асимптотический доверительный интервал ($\lambda$ известно): $\theta \in \left(\frac{\lambda}{\overline{X}} U_{\frac{1+\alpha}{2}} \frac{\lambda}{\sqrt{n}}, \frac{\lambda}{\overline{X}} U_{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)$, where $U_\alpha$ - $\alpha$-квантиль стандартного нормального распределения

In [14]:
```
#генерируем выборку
sample = sps.gamma.rvs(size = 1 / theta, a = lambd, size = n)

#посчитаем левую и правую границы
left = np.zeros(len(sample))
right = np.zeros(len(sample))
for i in range(len(sample)):
    estimation = np.average(sample[:i+1])
    quantile1 = sps.norm.ppf((1 + alpha) / 2.0)
    quantile2 = sps.norm.ppf((1 - alpha) / 2.0)
    left[i] = (1.0 / estimation)*(quantile1 * (lambd/(i+1))**(0.5) + lambd)
    right[i] = (1.0 / estimation)*(quantile2 * (lambd/(i+1))**(0.5) + lambd)

#строим доверительные интервалы
draw_confidence_interval(left, right, sample = sample, ylim = (0, 20))
```




In [15]:
```
#посчитаем вероятность попадания истинного значения
samples = np.zeros(n)
in_interval = 0

for i in range(num_of_samples):
    sample = sps.gamma.rvs(scale = 1 / theta, a = lambd, size = n)
    estimation = np.average(sample[:n+1])
    quantile1 = sps.norm.ppf((1 + alpha) / 2.0)
    quantile2 = sps.norm.ppf((1 - alpha) / 2.0)
    left = (1.0 / estimation)*(quantile1 * (lambd/(n+1))**(0.5) + lambd)
    right = (1.0 / estimation)*(quantile2 * (lambd/(n+1))**(0.5) + lambd)
    if (theta >= left and theta <= right):
        in_interval = in_interval + 1

#вероятность попадания истинного значения theta в интервал
print('{}'.format(in_interval / num_of_samples))
```

```
p = 0.0
```

**Выводы: Чтобы выяснить вероятность попадания значения теты в доверительный интервал, достаточно подсчитать количество попаданий на количество всех проверок, таким образом, чем больше выборок мы сгенерируем - тем лучше. В результате, получаем:**

**Задача 6.3: p = 1.0**

**Задача 6.4: p = 1.0**

**Задача 6.5: p = 0.0**