Mechanikai rendszerek mozgásegyenletének levezetése Lagrange-formalizmussal

Győri Ferenc Norbert

April 2020

1. Bevezetés

Egy tömegpont pályájának függvényét álltalánosan a következő formában adjuk meg $x : I \subseteq \mathbb{R}^{3N}$, ahol $I \subseteq \mathbb{R}$, vagyis a mozgás pályáját egy olyan függvénnyel adjuk meg, amely az idő egy pillanatához egy számhármast rendel. Ez a számhármas megadja a test térbeli pozícióját egy koordináta rendszerben. Ezt a függvényt röviden $x(t)$-vel szoktuk jelölni. Egy vizsgált test esetén ezt a függvényt úgy találhatjuk meg ha ismerjük testnek a megfigyelés kezdetén az állapotát (pozícióját és sebességét) valamint ismerjük a test mozgás egyenletét. A mozgásegyenletek felírásának menetét fogom bemutani.

2. Dinamika alaptörvénye

A newtoni dinamika alapvető állítása, hogy nem a mozgás fenntartásához, hanem a mozgásállapot megváltoztatásához van szükség külső hatásra. Ez a külső hatás az erő. Ennek értelmében, ha ismerjük egy test állapotát egy t0 időpillanatban és ismerjük a testre ható erőket akkor ezek felhasználásával le tudjuk írni a test mozgását.

Ha a testre ható eredő erőt behelyezésijük newton második törvényében leírt dinamika alaptörvényébe akkor megkapjuk a test mozgásegyenletét.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

A mozgás egyenlet és a test kezdeti feltételeinek ismeretében le tudjuk írni a test pályáját, az egyes időpontokhoz tartozó sebességeket és gyorsulásokat.

Ha több testből állítunk össze egy mechanikai rendszert akkor a rendszer mozgását a fentiek alapján le lehet írni. Egy mechanikai rendszer mozgását egy másodrendű differenciálegyenlet rendszerrel tudjuk leírni. Másodrendű differenciálegyenletekről beszélünk mivel a rendszert alkotó testekre külön fel kell írnunk a dinamika alaptételét, ami egy másodrendű differenciálegyenlet. A mozgást leíró differenciálegyenlet rendszer annyi egyenletből fog állni amennyi a rendszer szabadsági fokszáma.

3. Kényszerek

A mozgásegyenlet felírását azonban nagyban megnehezítik a kényszerfeltételek. Ezek a kényszerek erők formájában hatnak a rendszerre. A kényszereket általában egy $f(r, \dot{r}, t) = 0$ alakú matematikai függvénnyel adjuk meg. Ezek a függvények csoportosíthatok aszerint, hogy mely változóktól függnek.

	reonom	szkleronom
holonom	$f(r,t)=0$	$f(r)=0$
anholonom	$f(r,\dot{r},t)=0$	$f(r,\dot{r})=0$

A holonom kényszer közvetlen geometriai jelentéssel bíró kényszer, azaz megadjuk a tér egy alterét, amely altéren a testnek mozognia kell. Erre tipikus példák amikor a testnek a talaj síkján kell mozognia vagy fel van függesztve egy kötélre és kötél által meghatározott gömb felületén mozoghat a test.

Tehát a mozgásegyenlet megoldását tovább bonyolítja, hogy a dinamika alaptörvénye alapján felirt egyenleteinkből származó megoldásoknak csak azon halmaza lesz helyes, amelyek kielégítik a kényszeregyenleteket is.

4. Szabadsági fok

A szabadsági fok egy anyagi rendszer állapotának egyértelmű meghatározásához szükséges, egymástól független mennyiségek száma. Háromdimenziós térben az anyagi pontnak a szabadsági foka 3 hiszen x, y, z tengely mentén meg kell adni a tömegpont helyét. Ha a vizsgált testet merev testként modellezzük akkor a szabadsági fokok száma 6 lesz mivel a pozíción kívül a test kiterjedéséből fakadóan az orientációját is meg kell tudnunk adni.

Ha több test mozgását szeretnénk leírni akkor a rendszer szabadsági fokát a rendszert alkotó testek szabadságifokainak összege határozza meg. N db tömegpontból álló rendszer esetén a rendszer szabadsági foka N*3 lesz.

Azonban, hogy a rendszer tényleges szabadságfokát megkapjuk le kell vonni a testekből adódó szabadságifokok összegéből a kényszeregyenletek számát.

Az így kapott szabadsági fokszám tehát megadja, hogy hány egymástól független skalárral irható le a rendszer mozgása. Ezeket a skalárokat álltalános koordinátáknak nevezzük. Az álltalános koordináták tetszőlegesen választhatók. Az álltalános koordináták helyes megválasztásával a kényszerfeltételek azonossággá válnak, így könnyebbé téve a számolást.

5. Mozgásegyenlet felírásának módszerei

A mozgásegyenlet felírásának egyik módszere a már fent említett, mikor Newton második axiómája alapján a modell elemei közötti erőegyensúlyok figyelembevételével írjuk le az egyenleteket. Ezt a módszer szintetikus módszernek nevezzük. Ennek a módszernek a hátránya, hogy nagyon kell ügyelni az erők felírásakor azok előjel helyességére, valamint, hogy a kényszerfeltételekkel explicit módon kell foglalkozni. Komplex rendszerek esetén ezek a hátrányok komoly nehézséget okoznak.

A másik megoldás az analitikus módszer. Ekkor a rendszerelemek energia tartalmából kiindulva, differenciálással jutunk el ez erőegyensúlyt kifejező egyenletekig. Mivel az elemek energia tartalmát leíró tagokban az elmozdulások négyzete szerepel, ezzel a módszerrel jóval nehezebb előjel hibát véteni. Így összetettebb rendszerekre is viszonylag egyszerű az egyenletek generálása.

6. Lagrange mechanika

A Lagrange mechanika a Hamilton-elv alapján épül fel, azaz a hatáselv szerint. A fizikában a hatáselv a mozgás természetéről tett állítás, amiből egy erőhatás alatt álló test pályája meghatározható, illetve a kölcsönhatás és átalakulás egyenletei levezethetők. A befutott pálya olyan, amelynek mentén számított hatás stacionárius, így a pályát nem az erőhatásokra bekövetkező gyorsulások alapján próbáljuk felépíteni, hanem a stacionárius hatás alapján választjuk ki a lehetséges pályák közül.

Ha egy mechanikai rendszert jellemezni tudunk egy $L(q, \dot{q}.t)$ függvénnyel s a rendszer helyzetét a t_1 és t_2 pillanatban $q^{(1)}$ és $q^{(2)}$ koordináták jellemzik, akkor a két helyzet között úgy fog mozogni a rendszer, hogy az

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt$$

minimális legyen, ahol az S integrált hatásfüggvénynek, L függvényt pedig Lagrange függvénynek nevezzük.

7. Lagrange függvény

Azanalitikus módszer alkalmazásához szükség van a rendszer Lagrange függvényének a felírásához. Ez a függvény jellemzi a rendszer dinamikáját a rendszerben található összenergián keresztül. A Lagrange-függvény konzervatív mechanikai rendszerekben a rendszert alkotó testek kinetikus és potenciális energiájának a különbségeként írható fel

$$L = T - V$$

$$L = L(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n, t)$$

Definíció szerint a Lagrange-függvény csak az álltalános koordinátáktól azok időszerinti első deriváltjaiktól és explicit az időtől függ. A fent látható $q_i, i \in \{1, ..., n\}$ a rendszert leíró álltalános koordináták, n-et pedig a rendszer szabadsági fokának nevezzük.

8. Testek energiái

A Lagrange függvény felírásához a rendszert alkotó testek energiáit kell összegezni, a mozgási és a potenciális energiáit. A mozgási energia (kinetikus energia) a mozgásban levő testek energiája, melyet mozgásuk folytán képesek munkavégzésre fordítani, ennél fogva a munkából származtatjuk. Egy kiterjedt test mozgási energiája a test haladási és forgási kinetikus energiájának összegeként adódik.

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2$$

A testek potenciális erőterekben képesek munkát végezni. A munkavégzés képességének a mértékét nevezzük potenciális energiának. A potenciális energia nagyságát mindig valamilyen nulla energiaszinthez viszonyítják. A mechanikai rendszereknél a leggyakrabban előforduló potenciális energia a gravitációs potenciál energia és a rugalmas potenciális energia. Egy test gravitációs potenciális energiája egyenlő a munkával, amelyet az állandó gravitációs erő végez, amikor a testet egy adott helyzetből egy másikba mozgatja, h magasságba. Ez képlettel a következőként irható fel:

$$U_g = mgh$$

Egy rugalmas húrban vagy rugóban tárolt rugalmas potenciális energia, ha rugó merevsége k, x megnyúlás esetén a Hooke-törvény integrálásából számítható:

$$U_r = \frac{1}{2}kx^2$$

Előbbiek a jellemzően előforduló poenciális energiűk.

9. Euler-Lagrange egyenlet

Ha ismerjük egy rendszer Lagrange függvényét akkor az Euler-Lagrange egyenletbe vagy másnéven másodfajú Lagrange egyenletbe behelyettesítve és elvégezve az egyenletben kijelölt deriválásokat megkapjuk a rendszer mozgásegyenletét.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Az egyenletben szereplő parciális deriváltakat $F(y, \dot{y}, t) = \frac{\partial L}{\partial q}$ kanonikus erőnek, $p(y, \dot{y}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ kanonikus impulzusnak nevezzük.

A másodfajú Lagrange egyenlet a következő formában is felirható:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_n - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

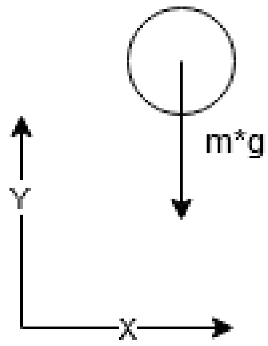
Ahol Q a rendszerre ható egyéb erők (például surlódás) erők teljesítményéből származtatjuk

$$Q_n = \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_n}$$

10. Példák mechanikai rendszerek mozgásegyenletének levezetésére

10.1. Tömegpont mozgása síkban

Első példánkban egy szabadon mozgó tömegpont mozgásegyenletét fogjuk levezetni, és ábrázolni a mozgás pályáját különböző kezdeti feltételek mellett. A példa nem igényli a Lagrange formalizmus használatát viszont ezen az egyszerű példán keresztül könnyű szemléltetni a módszer alapvető lépéseit.



1. ábra. Tömegpont szabadtest ábrája

Az ábrán látható m tömegű anyagi pont mozgását az xy síkon fogjuk leírni a könnyeb ábrázolhatóság okán.

Első lépésként a test térbeli elhelyezkedését kell leírni. Mivel a tömegpont csupán a pozíciójával jellemezhető, így ennek leírására alkalmas a tömeg pont helyvektora amelyet x, y skalárokkal tudunk jelölni

Következő lépésben a kényszerfeltételeket kell felsorolni. Az álltalános háromdimenziós térben való mozgáshoz képes most csak a síkban mozoghatunk, azaz egyenlettel megfogalmazva $z = 0$. Mivel egy tömegpontunk van és egy kényszerfeltételünk ezért a szabadsági fokok száma $3 - 1 = 2$

Miután megállapítottuk, hogy mennyi a rendszer szabadsági foka a rendszert a szabadsági fokok számának megfelelően álltalános koordinátákkal kell kifejezni hiszen csak ezek szerepelhetnek a Lagrange formalizmusban. Jelen esetben az imént felvett x, y koordináták álltalános koordináták is egyben.

Ezután kifejezzük az álltalános koordinátákat és azok időszerinti deriváltjait amik jelen esetben: x, y, v_x, v_y lesznek.

Ezek felhasználásával fel kell írnunk a rendszer mozgási és potenciális energiáit

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x + v_y)^2$$

$$V = mgy$$

Így a Lagrange függvény

$$L = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) - mgy$$

A következőben felírjuk az Euler-Lagrange-egyenletet és elvégezzük a szükséges parciális deriválásokat. X koordináta menti mozgásegyenlet:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_x} = mv_x$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial v_x} = ma_x$$

Az első egyenlet az x menti deriválások után:

$$ma_x = 1$$

X koordináta menti mozgásegyenlet:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -mg$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_x} = mv_y$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial v_x} = ma_y$$

Az második egyenlet az y menti deriválások után:

$$ma_y = -mg$$

Az egyenleteket m-mel leosztva a test mozgása a következőként irható le

$$a_x = 0 \quad a_y = -g$$

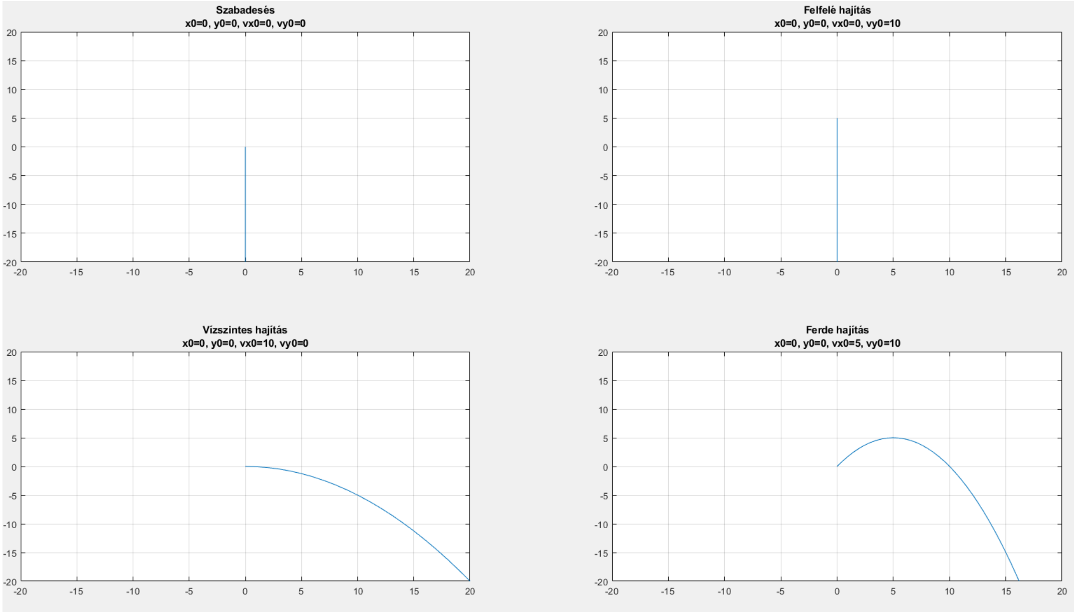
Látható, hogy a test x irányban nem gyorsul tehát egyenletes mozgást végez, y irányban pedig a gyorsulása konstans, vagyis egyenletesen változó mozgást végez.

Ha az egyenleteket kétszer integráljuk az idő szerint akkor megkapjuk az $x(t),\ y(t)$ függvényeket

$$\int\int a_x(t)dt = \int v_{0x} = v_{0x}t + x_0$$

$$\int\int a_y(t)dt = \int -gt + v_{0y} = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}t + y_0$$

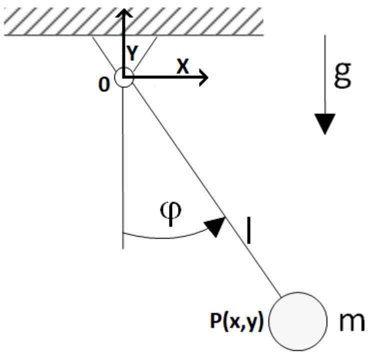
Látható, hogy az integrálások hatására megjelentek konstansok, amelyek nem mások, mint a rendszer kezdeti feltételei. Ezek helyére konkrét értéket helyettesítve a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását kapjuk. A kezdeti feltételtől függően a mozgás lehet, szabadesés, felfele hajitás vízszintes hajitás vagy ferdehajitás is.



2. ábra. Tömegpont pályája különböző kezdeti feltételek melett

10.2. Matematikai inga mozgásegyenlete

A matematikai inga egy elhanyagolható tömegű l hosszúságú fonalra függesztett, m tömegű pontszerű testből áll, amelyre szabad erőként csak a nehézségi erő hat.



3. ábra. Matematikai inga

A tömegpont pozícióját az x, y koordinátákkal tudjuk leírni a Descartes koordinátarendszerben. Az inga mozgását az xy síkon végzi, valamint van a mozgásának egy kényszerfeltétele azaz, hogy az inga csak a fonal által meghatározott körpályán mozoghat, azaz a kényszeregyenlet $x^2 + y^2 = l^2$ Az inga mozgása tehát egyetlen álltalános koordinátával leírható. Ez az álltalános koordináta a fonal függőlegessel bezárt szöge. Fejezzük ki az eddigi koordinátainkat az álltalános koordinátákkal.

$$x = l \sin(\theta)$$

$$y = -l\cos(\theta)$$

Látható hogyha a kényszeregyenletbe behelyezésijük a koordináták általános koordinátával való leírását akkor az egyenlet azonosan igaz lesz. A Lagrange függvényben szereplő függvényeink a szög (θ) és ennek időszerinti első deriváltja a szögsebesség(ω) lesznek. Az inga kinetikus energiájának felírásához szükséges a kerületi sebesség szögsebességgel való kifejezésére.

$$v = l\omega$$

Tehát a rendszer kinetikus energiája:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\omega)^2$$

A potenciális energia a fonal felfüggesztési pontjához képest pedig:

$$V = mgy = -mgl\cos(\theta)$$

Így a Lagrange függvény:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\omega^2 + mgl\cos(\theta)$$

Az imént meghatározott Lagrange függvényt helyettesítsük be az Euler Lagrange egyenletbe és végezzük el a parciális deriválásokat.

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega} = ml^2\omega$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \omega} = ml^2\epsilon$$

A mozgásegyenlet tehát:

$$ml^2\epsilon = -mgl\sin(\theta)$$

$$\epsilon = -\frac{g}{l}\sin(\theta)$$

A kapott egyenlet egy homogén nem lineáris differenciálegyenlet. Hogy meg tudjuk oldani ezt feladatot ahhoz linearizálni kell a differenciálegyenletet. Kis szög változások esetén a $\sin(\theta)$ közelíthető a szöggel. Ezt felhasználva a megoldandó differenciálegyenlet a következő lesz:

$$\epsilon = -\frac{g}{l}\theta$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$$

Mivel a fonal hossza és a gravitációs gyorsulás pozitiv számok ezért a karakterisztikus egyenlet megoldása következő komplex konjugáltpár:

$$\lambda = \pm\frac{g}{l}j$$

.

Ha az $ay'' + by' + cy = 0$ másodrendű, lineáris, állandóegyütthatós, homogén differenciálegyenlet a $\lambda 2 + b\lambda + c = 0$ karakterisztikus egyenletének megoldásai$\lambda = \pm\beta j$, akkor a differenciálegyenlet általános megoldása:

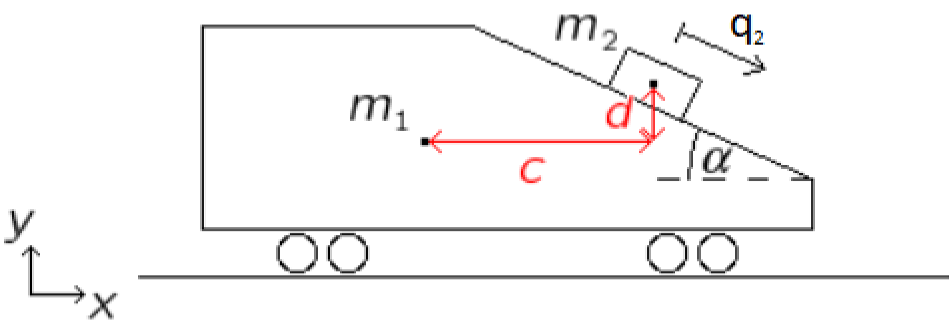
$$y = C_1 \cos(\beta x) + C_1 \sin(\beta x)$$

Tehát a mozgásegyenlet megoldása:

$$\theta(t) = \omega_0 \cos(\frac{g}{l}t) + \theta_0 \sin(\frac{g}{l}t)$$

10.3. Több testből álló mechanikai rendszer mozgásegyenlete

Egy m_1 tömegű kocsi vízszintes irányban tud elmozdulni. A kocsin egy α hajlásszögű lejtő található, amire egy m_2 tömegű testet helyezünk. Az m_2 tömegű test tömegközéppontjának a kocsitömegközéppontjához viszonyított kezdeti helyzete az ábrán látható.



4. ábra. Több testből álló rendszer

A test mozgását az xy skon szeretnénk leírni Jelöljük a kocsi tömegközépontját x_1 és y_1 koordináttákkal valamint a kocsira helyezett test tömegközéppontját x_2 és y_2 koordinátákkal.

Ezután írjuk le a kényszerfeltételeket. Első kényszerfeltétel hogy a kocsinak a talajon kell mozognia, egyenlettel kifejezve $y_1 = konstans$. Ez a konstans azt mutatjameg hogy a kocsi tömegközéppontja milyen messze van a talajtól(x tengelytől). A második kényszerfeltétel hogy a 2-es testnek a kocsin található leejtőn kell mozognia. Ez formálisan leírva: $y_2 - y_1 - d = -\tan(\alpha)(x_2 - x_1 - c)$ Ezek alapján megállapítható a rendszer szabadsági foka ami $4 - 2 = 2$, tehát a rendszer két féle független mozgást képes végezni.

A Lagrange függvény felírásához a koordinátáinkat ki kell fejezni általános koordinátákkal. Első általános koordinátánk legyen $q_1 = x_1$ amely koordináta kifelyezi a kocsi x tengely menti pozicióját. A második q_2 koordináta a 2-es test leejtő menti mozgását fogja jellemezni. q_2 pozitív, ha a test lefelé mozdul el, és negatív, ha felfelé.

Most fejezzük ki az eredeti koordinátáinkat és időszerinti első deriváltjaikat az álltalános koordinátákkal.

$$x_1 = q_1$$

$$y_1 = k$$

Az első általános koordinátát úgy vettük fel hogy a kocsi x tengely menti mozgását írja le pont úgy ahogy tette az x_1, y_1 pedig jelezzuk hogy egy konstans mennyiség. A második testre a koordináták általános koordinátákkal kifejezve:

$$x_2 = q_1 + c + q_2 \cos(\alpha)$$

$$y_2 = k + d - q_2 \sin(\alpha)$$

Ezeknél a koordinátákat arendszer ábrán látható alapállapota alapján írjuk fel. Tehát kitudtuk fejezni az eredeti koordinátákat az általunk felvett két általános koordinátával. Ezután írjuk fel az eredeti koordináták idő szerinti első deriváltjait az álltalános koordináták segítségével.

$$\dot{x}_1 = \dot{q}_1$$

$$\dot{y}_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cos(\alpha)$$

$$\dot{y}_2 = -\dot{q}_2 \sin(\alpha)$$

Ezek segítségével határozzuk meg rendszer energiáit. Mivel a rendszert két test alkotja így a mozgási energia a két test mozgási energiájának az összege lesz

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1(v_{x1}^2 + v_{x1}^2) + \frac{1}{2}m_2(v_{y1}^2 + v_{y1}^2) \\
&= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\
&= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + 0) + \frac{1}{2}m_2((\dot{q}_1 + \dot{q}_2\cos(\alpha))^2 + (-\dot{q}_2\sin(\alpha))^2) \\
&= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos(\alpha) + \dot{q}_2^2\cos^2(\alpha) + \dot{q}_2^2\sin^2(\alpha)) \\
&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_1^2 + m_2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos(\alpha) + \frac{1}{2}m_2(\dot{q}_2^2\cos^2(\alpha) + \dot{q}_2^2\sin^2(\alpha)) \\
&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_1^2 + m_2\cos(\alpha)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2
\end{aligned}$$

Az első sorban látható a kinetikus energia definiciója. Ezután a sebesség vektorokat x és y irányú komponensekre bontjuk. Így már betudjuk helyettesíteni az általános koordinátákkal kifejezett változókat.

A helyzeti energiát is hasonló képpen a két test helyzeti energájaként kaphatjuk meg

$$\begin{aligned}
V &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \\
&= m_1 g k + m_2 g(k + d - q_2\sin(\alpha)) \\
&= -m_2 g\sin(\alpha)q_2 + m_1 g k + m_2 g(k + d)
\end{aligned}$$

Elsősorban itt is a definició szerinti képlet szerepel, amely kifelezésbe betudjuk helyetesíteni az általános koordinátákkal kifejezett változókat.

A kiszámolt össz energiák felhasználásával felírható a Lagrange függvény

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_1^2 + m_2\cos(\alpha)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 + m_2 g\sin(\alpha)q_2 - m_1 g k - m_2 g(k + d)$$

Következő lépésként az imént meghatározott Lagrange függvényt behelyetesítjük az Euler Lagrange egyenletbe és elvégezzük a parciális deriválásokat az általános koordináták szerint.

q_1 szerinti deriváltak

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2)\dot{q}_1 + m_2 \cos(\alpha)\dot{q}_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{q}_1 + m_2 \cos(\alpha)\ddot{q}_2$$

Vagyis az eredmény:

$$(m_1 + m_2)\ddot{q}_1 + m_2 \cos(\alpha)\ddot{q}_2 = 0$$

q_2 szerinti deriváltak

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = m_2 g \sin(\alpha)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2 \cos(\alpha)\dot{q}_1 + m_2\dot{q}_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = m_2 \cos(\alpha)\ddot{q}_1 + m_2\ddot{q}_2$$

Vagyis az eredmény:

$$m_2 \cos(\alpha)\ddot{q}_1 + m_2\ddot{q}_2 = m_2 g \sin(\alpha)$$

Hivatkozások

[1] A Lagrange mechanika alapjai
`https://web.cs.elte.hu/ tibb/docs/lagrange.pdf`

[2] Mozgás és megjelenítése
`https://fizipedia.bme.hu/index.php/Mozgás_és_megjelenítése`

[3] Drótos G.: Fejezetek az elméleti mechanikából
`http://theorphys.elte.hu/ drotos/Faem/Lagrange.pdf`

[4] Lagrangian mechanics
`https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian_mechanics`

[5] Györgyi Géza: Elméleti Mechanika „A”
`http://glu.elte.hu/ gyorgyi/teaching/Elmeleti_Mechanika/jegyzet/emjegyzet.pdf`