INFO0501

ALGORITHMIQUE AVANCÉE

COURS 2

GRAPHES
NOTIONS DE BASE ET REPRÉSENTATION

UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Pierre Delisle
Département de Mathématiques, Mécanique et Informatique
Septembre 2021

Plan de la séance

- Notions de base sur les graphes
- Représentation des graphes en mémoire

- Bibliographie
  - T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, "Algorithmique", 3e édition, Dunod, 2010

NOTIONS DE BASE SUR LES GRAPHES

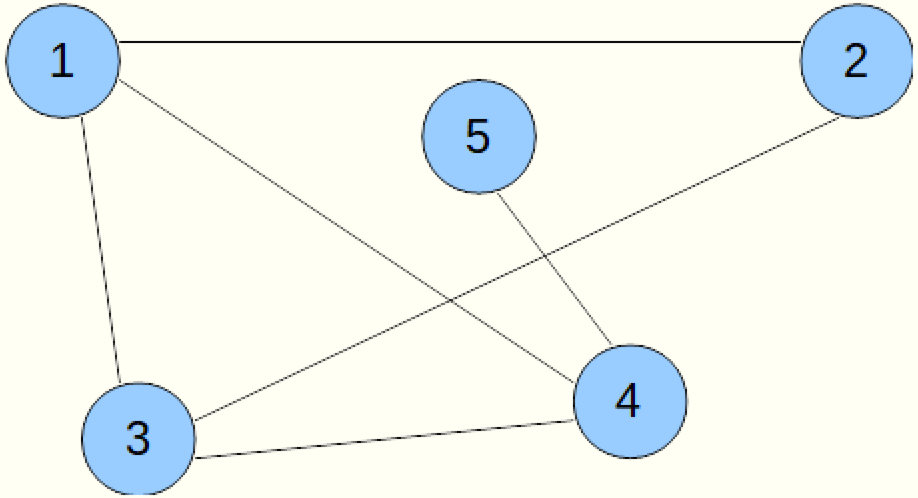

Calais
Lille
A26
A16
Arras
Amiens
Cherbourg
Le Havre
A29
A1
Laon
Rouen
Beauvais
Reims
Luxembourg
Caen
A13
A4
A4
A84
PARIS
A31
A28
Dreux
N4
Nancy
Chartres
A26
Alençon
A31
A11
A5
Troyes
Rennes
Quimper
Le Mans
A77
Auxerre
A10
Orleans
A71
A6
Tours
Angers
Dijon
A85
Nantes
A36
Bourges
Nevers
A87
A39
Poitiers
A20
Montluçon
La Rochelle
A10
A6
N10
A89
Lyon
A43
Limoges
Clermont
Ferrand
Angouleme
Saint-Etienne
Brive
A75
A7
Grenoble
A89
Bordeaux
Bergerac
N88
A20
Cahors
Rodez
A65
Montauban
Millau
Avignon
Nimes
Auch
Toulouse
Montpellier
Nice
Biarritz
Pau
A8
Marseille
A64
A61
A9
Perpignan

Graphes ?

- Les graphes permettent de modéliser une multitude de problèmes
- Omniprésents en informatique
  - Réseaux
  - Systèmes distribués
  - Optimisation combinatoire
  - ……
- Les algorithmes pour les manipuler sont fondamentaux

Graphe non orienté

- Un graphe non orienté … $G = (S, A)$
- … est défini par deux ensembles
  - Ensemble S des *sommets*
  - Ensemble A des *arêtes*
- Une arête, un élément a de A $a = \{x, y\}$
  - Est défini par une paire de sommets distincts x et y de S
  - N'apparaît pas plusieurs fois dans A
- On dit que
  - x et y sont *incidents* à a
  - x et y sont les *extrémités* de a
  - x et y sont *adjacents*



- $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$
- 1 et 2 sont adjacents
- 2 et 5 ne sont pas adjacents

Graphe orienté

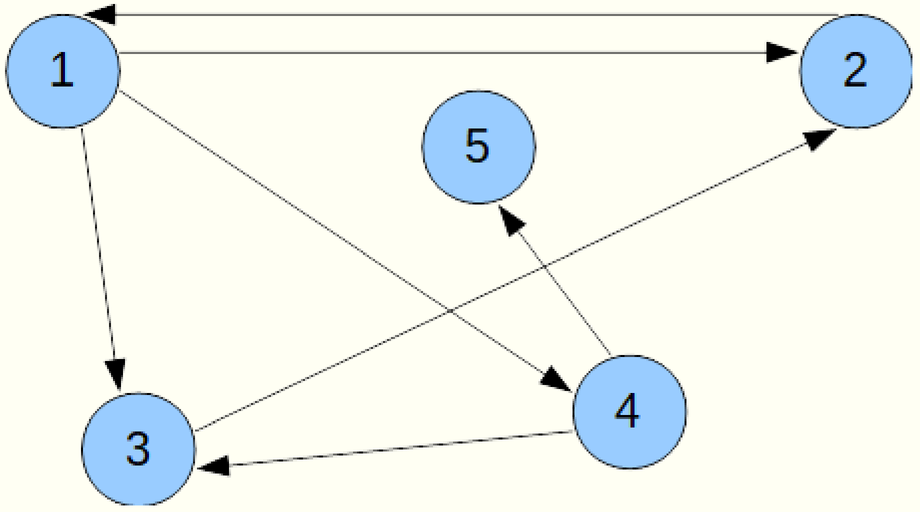
- Un graphe orienté …

$G = (S, A)$

- … est défini par deux ensembles
  - Ensemble S des *sommets*
  - Ensemble A des *arcs*
- Une arc, un élément a de A

$a = \{x, y\}$

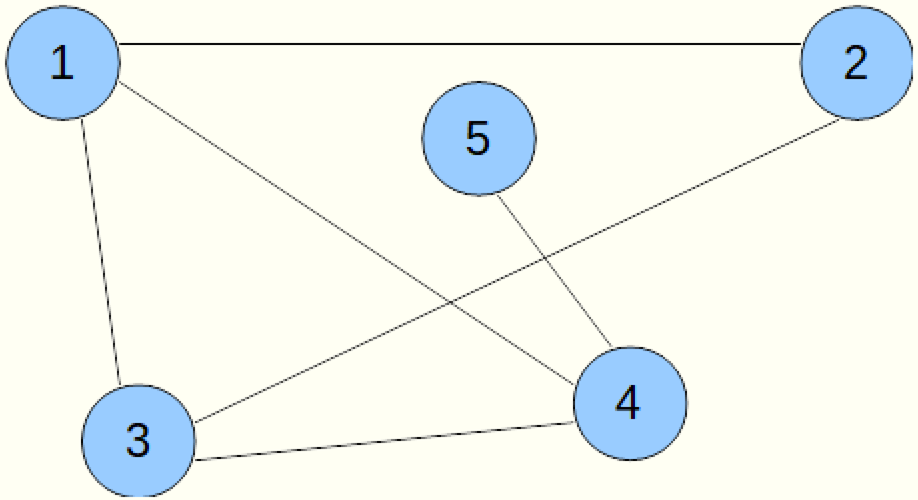
  - Est défini par un couple de sommets distincts x et y de S
  - N'apparaît pas plusieurs fois dans A
  - Mais on peut avoir (x,y) et (y, x), qui sont deux arcs distincts
- On dit que
  - a admet x comme *origine*, ou *extrémité initiale*
  - a admet y comme *extrémité finale* ou *terminale*



- $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2),(1, 3),(1, 4),(2, 1),(3, 2),(4, 3),(4, 5)\}$

Graphe fini

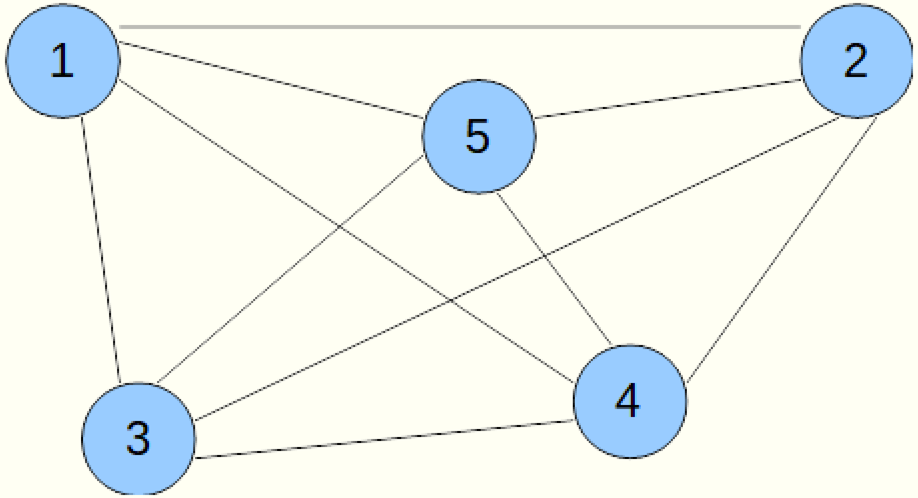
- Le cardinal de S
  - Est appelé *ordre* du graphe (nombre de sommets)
  - $n = |S|$
- Le cardinal de A
  - Est appelé *taille* du graphe (nombre d'arêtes ou arcs)
  - $m = |A|$
- Les cardinaux de S et de A sont finis



- L'ordre du graphe n est 5
- La taille du graphe m est 6

Graphe complet (ou clique)

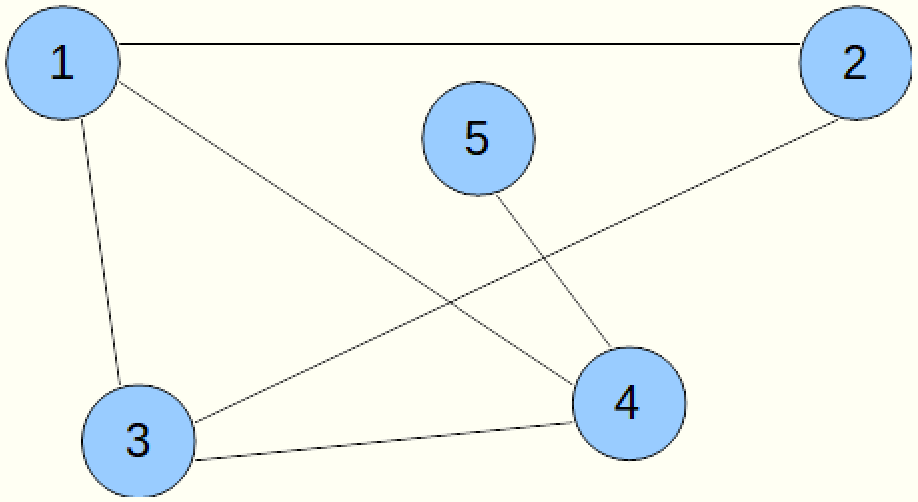
- Un graphe complet à n sommets …
  - Noté K_n
- … est un graphe non orienté d'ordre n dont deux sommets quelconques sont adjacents
  - Il est donc de taille $n(n-1) / 2$



- Graphe complet d'ordre 5
- La taille du graphe est de 5 * 4 / 2 = 10

Graphe partiel et sous-graphe

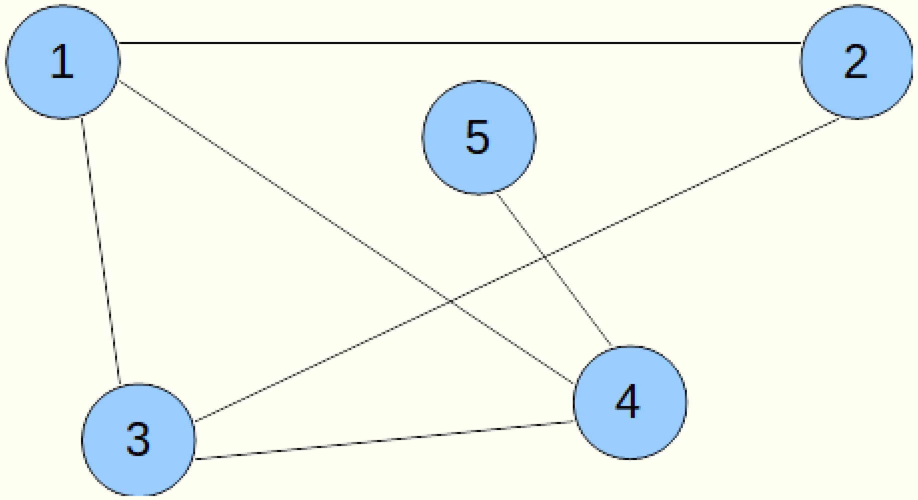
- Un graphe partiel de $G = (S, A)$ est un graphe
  - Ayant le même ensemble de sommets S que G
  - Ayant pour ensemble d'arêtes une partie de A
- Étant donnée une partie Y de S…
- … un sous-graphe F de G engendré par Y
  - Est un graphe ayant pour ensemble de sommets Y
  - Une arête (arc) de G donnant naissance à une arête (arc) de F si et seulement si les deux extrémités de cette arête (arc) sont dans Y
- Autrement dit, un sous graphe F d'un graphe G est un graphe composé de certains sommets de G et de toutes les arêtes qui relient ces sommets dans G



- $G' = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{(1, 2),(2, 3),(3, 4),(4, 5)\})$ est un graphe partiel
- $G = (\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\})$ est un sous-graphe complet d'ordre 3

Degré d'un sommet

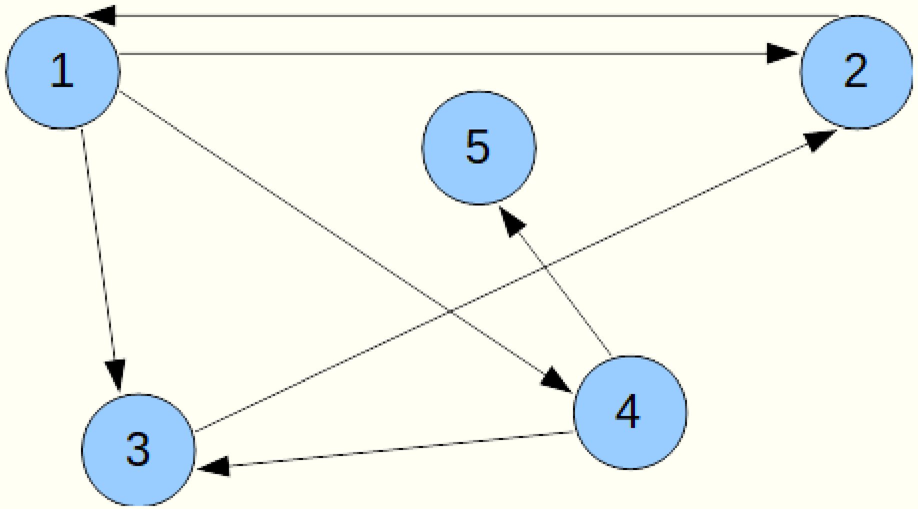
- Étant donné un sommet x d'un graphe G non orienté
  - Le degré de x est le nombre d'arêtes incidentes à x
  - Les autres extrémités de ces arêtes constituent l'ensemble des voisins de x
- Autrement dit, le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité
- Dans un graphe orienté, on parle de degré entrant et sortant selon l'orientation des arcs



- Degré de 1 : 3, Degré de 5 : 1
- 3, 4 et 2 sont les voisins de 1

Prédécesseur et Successeur

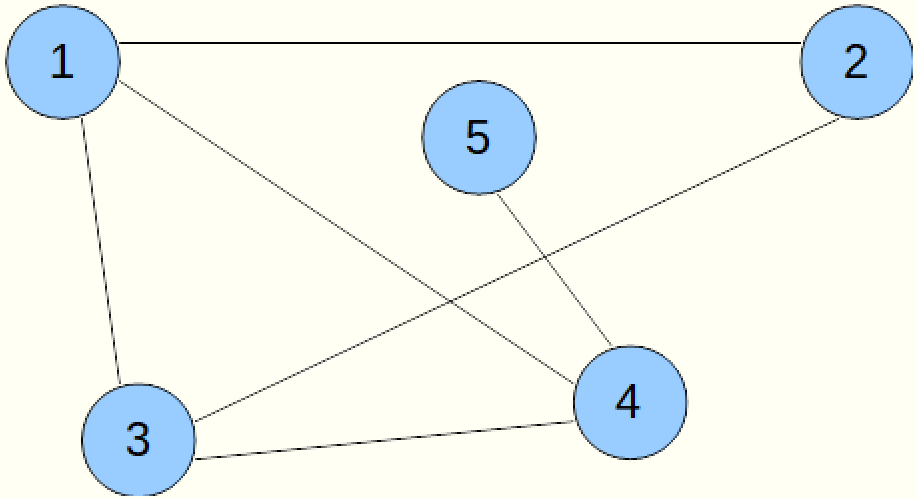
- *y* est un *prédécesseur* de *x*
  - Si l'arc (*y*,*x*) existe
- *y* est un *successeur* de *x*
  - Si l'arc (*x*,*y*) existe
- Quand le prédécesseur de *x* est unique
  - Ce sommet est le *père* de *x*
  - *x* est un *fils* de ce sommet



- 1 est un prédécesseur de 3
- 5 est un successeur de 4
- 1 est le père de 4
- 4 est le fils de 1

Chaîne et Cycle

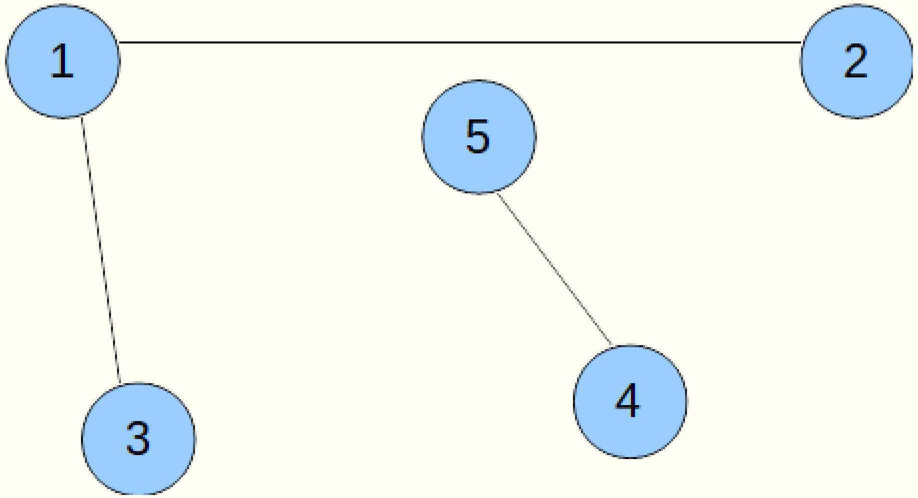
- Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté
- Une chaîne est une suite
  - $s_1 a_1 s_2 a_2 \ldots s_{k-1} a_{k-1} s_k$
  - Avec $s_i \in S$, $a_j \in A$ et $a_j = \{s_j, s_{j+1}\}$
- Autrement dit, une chaîne est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au sommet suivant
- Un cycle est une chaîne dont les deux extrémités coïncident et composée d'arêtes distinctes



- (2, 1, 3, 4, 5) est une chaîne de longueur 4
- (1, 2, 3, 4, 1) est un cycle de longueur 4

Graphe connexe

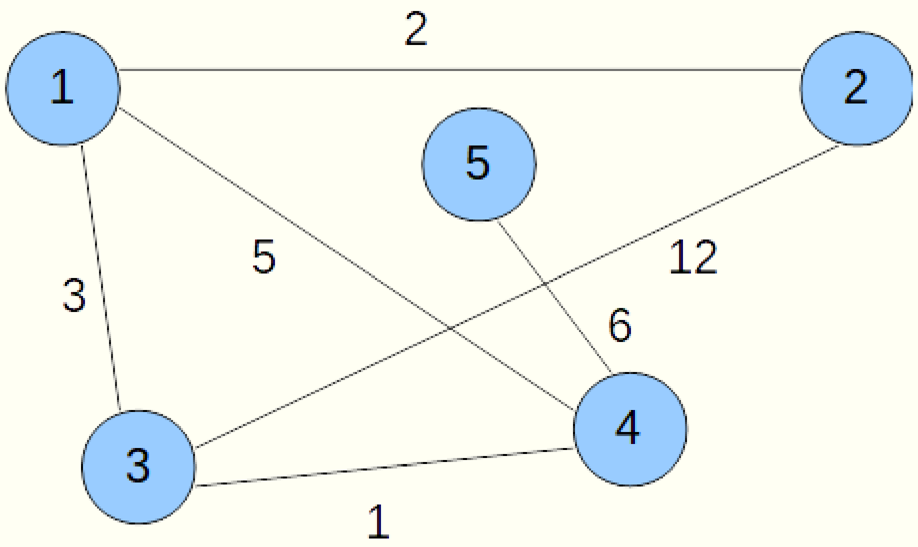
- Un graphe est connexe si, pour toute paire de sommets, il existe une chaîne les joignant
- Une composante connexe d'un graphe est un sous-graphe connexe maximal
  - On ne peut y ajouter d'autres sommets en conservant la connexité du sous-graphe
- À noter d'un arbre est un graphe connexe et sans cycle



- Ce graphe n'est pas connexe
- Ce graphe possède 2 composantes connexes
- Les 2 sous-graphes sont des arbres

Graphe pondéré

- Graphe dont les arêtes ou les arcs sont munis d'une valuation
  - Coût ou poids ou longueur
- Le coût (ou poids, ou longueur) d'un graphe partiel ou d'une chaîne est alors la somme des coûts des arêtes ou des arcs le constituant
- Une plus courte chaîne entre deux sommets est, parmi les chaînes qui la relient, une chaîne de poids minimum



- Le poids de la chaîne (2, 1, 3, 4, 5) est 12
- C'est la plus courte chaîne reliant 2 et 5

Représentation informatique

- On suppose les sommets de G numérotés par les entiers de 1 à $|S|$, chaque sommet étant repéré par son numéro
- Deux structures de données sont souvent utilisées pour représenter un graphe
  - Listes d'adjacences
  - Matrice d'adjacences

FLASHBACK

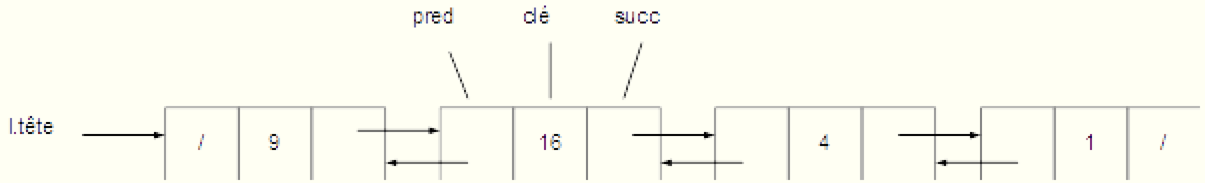
Listes chaînées

Listes chaînées

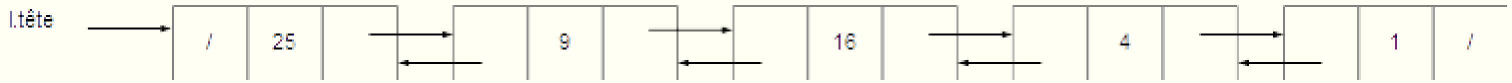
- Objets arrangés linéairement
  - Ordre déterminé par un pointeur dans chaque objet
- Liste doublement chaînée
  - Chaque élément/objet x comporte 3 attributs
    - *clé*
    - *succ* $\rightarrow$ pointeur sur le successeur de x dans la liste (NIL pour le dernier élément de la liste)
    - *préd* $\rightarrow$ pointeur sur le prédécesseur de x dans la liste (ou NIL pour le premier élément de la liste)
  - tête $\rightarrow$ pointeur sur le premier élément (NIL si vide)

Listes (doublement) chaînées

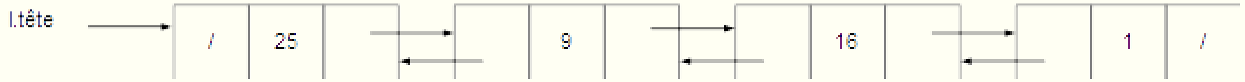
- Liste représentant l'ensemble {9, 16, 4, 1}



- Liste après insertion d'un élément dont la clé vaut 25



- Liste après suppression de l'élément dont la clé vaut 4



- RECHERCHER-LISTE (l, k)
  - $O(n)$
- INSÉRER-LISTE (l, x)
  - $O(1)$
- SUPPRIMER-LISTE (l, x)
  - $O(1)$ si on a déjà un pointeur sur l'élément x à supprimer
  - $O(n)$ si on supprime à partir de la clé k

Liste ou tableau ?

	Insertion/ Suppression	Mémoire	Accès aléatoire
Tableau	☹	☹	☺
Liste	☺	☺	☹

FIN DU FLASHBACK

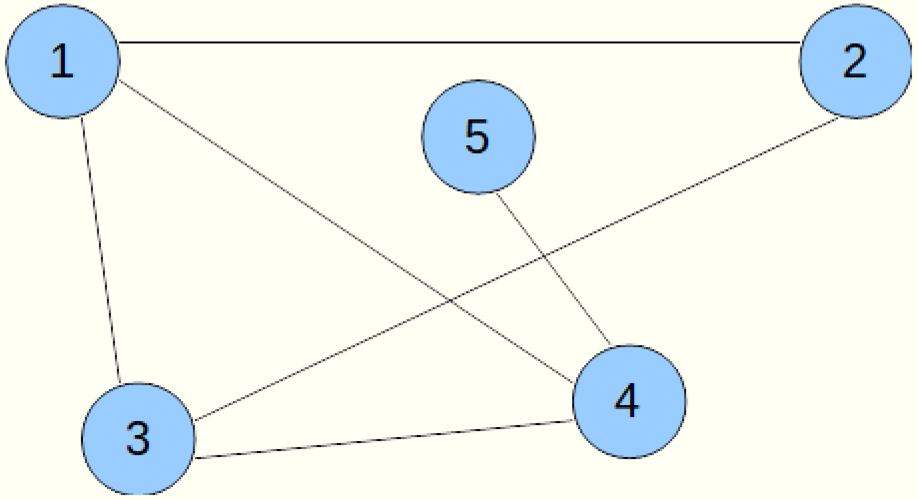
Listes chaînées

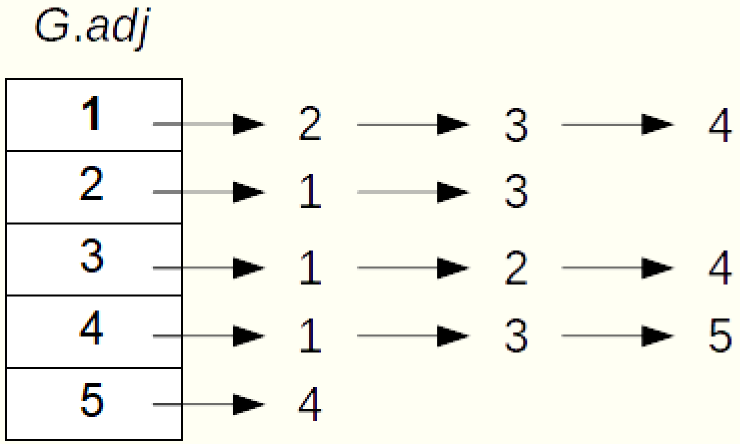
Listes d'adjacences

- On suppose donnés (ex. lus dans un fichier)
  - L'ordre du graphe
  - L'ensemble des arêtes $\{x, y\}$ du graphe
- On définit un tableau *adj* de $|S|$ listes
  - Les $|S|$ cases du tableau correspondent aux sommets 1, 2, … $|S|$ du graphe
- Pour chaque $u \in S$
  - La liste $adj[u]$ est une liste de sommets v
  - …tels qu'il existe un arc $(u, v) \in A$
- Autrement dit
  - Le pointeur en position u est la tête d'une liste chaînée qui contient les sommets adjacents au sommet u
  - Un voisin v de u doit appartenir à la liste correspondant au sommet u
- *adj* → attribut du graphe

Listes d'adjacences

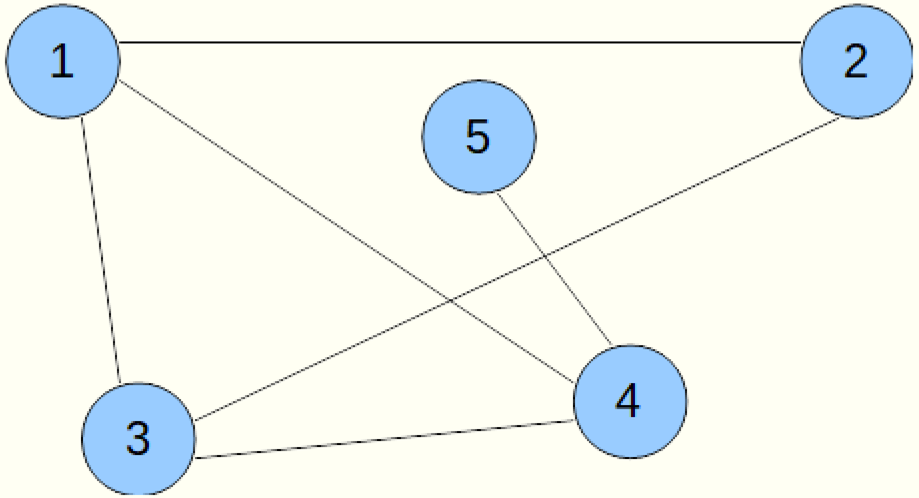
- Somme des longueurs de toutes les listes d'adjacences du graphe
  - Graphe orienté $\rightarrow$ $|A|$
  - Graphe non orienté $\rightarrow$ $2|A|$
- Quantité de mémoire requise
  - $O\ (S + A)$
- Graphes pondérés
  - On stocke le poids $p(u,v)$ de l'arc (u,v) avec le sommet v dans la liste de u





Matrice d'adjacences

- On suppose donnés (ex. lus dans un fichier)
  - L'ordre du graphe
  - L'ensemble des arêtes $\{x, y\}$ du graphe
- On définit une matrice carrée *adj* à $|S|$ lignes et $|S|$ colonnes, telle que
  - $adj[i, j] = 1$ si $(i, j) \in A$ (i et j sont adjacents)
  - $adj[i, j] = 0$ sinon
  - $adj[k, k]$ sera pris égal à 0 ou 1 selon le problème
- Quantité de mémoire requise
  - $O(S^2)$ (peu importe la densité du graphe)
- Graphe non orienté
  - $adj[i,j] = \text{adj}[j,i] = 1$
- Graphe pondéré
  - On remplace le 1 par le poids $p(u,v)$ de l'arc (u,v)



adj	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	0
2	1	0	1	0	0
3	1	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1
5	0	0	0	1	0

Listes d'adjacences ou matrice d'adjacences ?

- Espace mémoire ?
  - On peut sauver de l'espace mémoire avec les listes d'adjacences si le graphe est peu dense
- Recherche d'un arc ?
  - Listes d'adjacences → parcours d'une liste → O(n)
  - Matrice d'adjacences → accès direct → $O(1)$
- Dépend de l'algorithme que l'on veut implémenter

PROCHAIN COURS

GRAPHES
ALGORITHMES ÉLÉMENTAIRES