# INFO0501

## ALGORITHMIQUE AVANCÉE

### COURS 4

### ARBRES COUVRANTS DE POIDS MINIMAL

UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Pierre Delisle
Département de Mathématiques, Mécanique et Informatique
Septembre 2021

# Plan de la séance

- Arbres couvrants de poids minimal
- Algorithme de Kruskal
  - Structure de données pour ensembles disjoints
- Algorithme de Prim
  - Structure de file de priorités

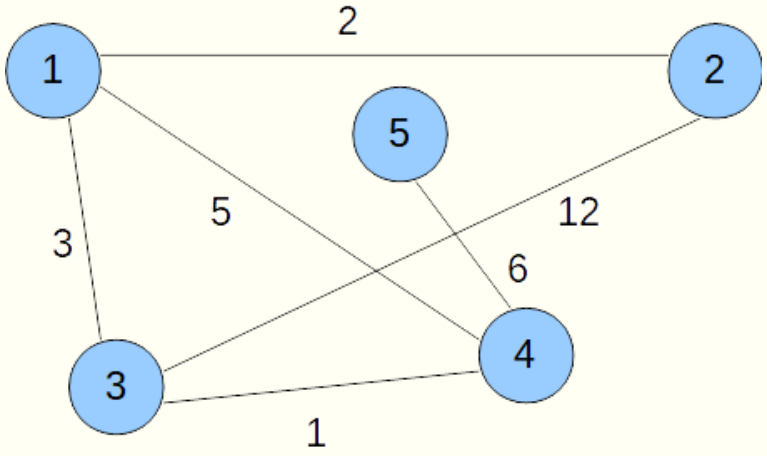
- Bibliographie
  - T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, "Algorithmique", 3e édition, Dunod, 2010

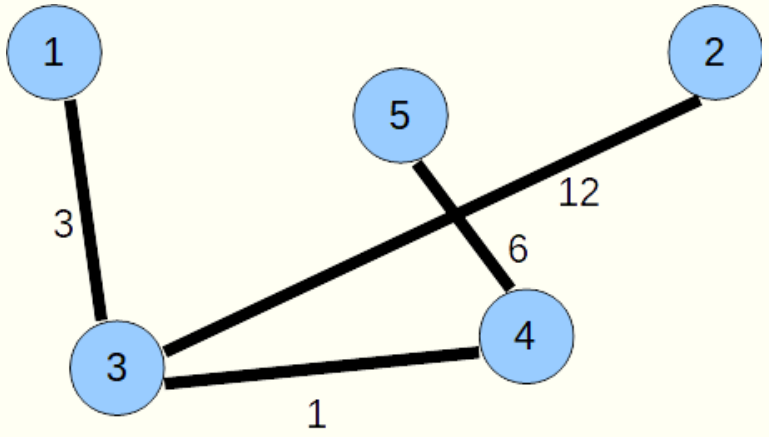
# PROBLÈME DE L'ARBRE COUVRANT DE POIDS MINIMAL

# Définition du problème

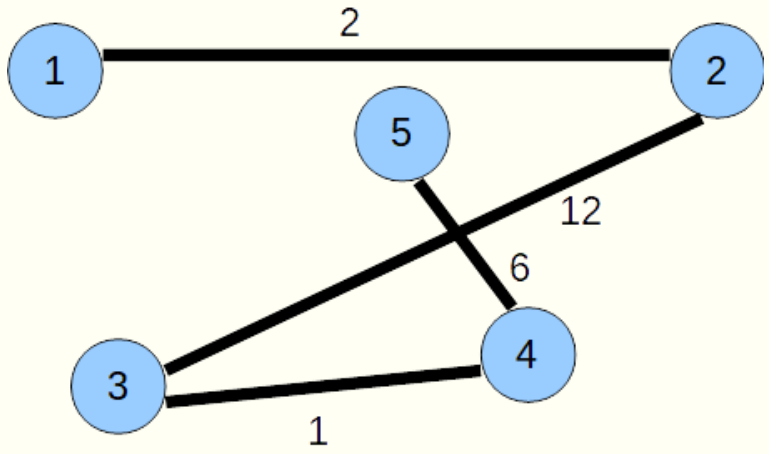
- Étant donné un graphe non orienté pondéré
- On cherche un graphe partiel de ce graphe
- … qui soit un arbre …
- … et qui soit de coût minimum

- Graphe partiel : l'arbre a pour ensemble de sommets tous les sommets du graphe initial
  - On dit que c'est un arbre couvrant
- En anglais : minimum spanning tree
- On suppose le graphe initial connexe




Arbre couvrant
(de poids 22)




Arbre couvrant
(de poids 21)

# Applications

- Réseaux
  - On estime le coût des liaisons directes entres toutes les machines à relier
  - Puis on cherche à réaliser un réseau connexe à coût minimum
- Traitement d'images
  - On représente une image sous forme de pixels
  - On veut déterminer des régions dans l'image
  - Graphe : chaque pixel est un sommet à 8 voisins
  - On value les arêtes par la différence de gris
  - On construit l'arbre couvrant minimum, puis on sépare

# Construction d'un arbre couvrant minimal

- Soit un graphe $G = (S, A)$
  - Non orienté
  - Connexe
  - Fonction de pondération p → attribue un poids $p(u, v)$ à chaque arête $(u, v)$
- Stratégies gloutonnes
  - On construit l'arbre arête par arête
  - … en ajoutant à chaque étape une arête appropriée de $A$

ACM-GÉNÉRIQUE ($G$, $p$)
  $E = \varnothing$
  Tant que $E$ ne forme pas un arbre couvrant
    Trouver une arête $(u, v)$ appropriée
    $E = E \cup (u, v)$
  Retourner $E$

- 2 algorithmes principaux → Kruskal et Prim
  - Utilisent cette stratégie gloutonne
  - Utilisent une règle différente pour choisir l'arête $(u, v)$ appropriée

# ALGORITHME DE KRUSKAL

# Principe de l'algorithme

- Pour déterminer un arbre couvrant de poids minimal d'un graphe connexe à $|S|$ sommets, ...
- ... on sélectionne les arêtes d'un graphe partiel initialement sans arête ...
- ... en itérant $|S| - 1$ fois l'opération suivante
  - Choisir une arête de poids minimal ne formant pas un cycle avec les arêtes précédemment choisies

- Exemple 1 : fonctionnement de l'algorithme de Kruskal

# Mise en oeuvre

- Trier les arêtes par ordre de poids croissants
- Tant qu'on n'a pas retenu $|S| - 1$ arêtes
  - Considérer, dans l'ordre du tri, la 1ère arête non examinée
  - Si elle forme un cycle avec celles précédentes, la rejeter, sinon la garder
- Il reste à résoudre un problème
  - Comment déterminer si une arête choisie à l'étape $i$ forme un cycle avec les arêtes précédemment choisies ?

# Principe : gérer l'évolution des composantes connexes

- Pour qu'une arête $(u,v)$ ferme un cycle, il faut que ses extrémités aient été précédemment reliées par une chaîne
  - Donc aient été dans une même composante connexe
- Nous allons donc gérer l'évolution des composantes connexes au fur et à mesure du choix des arêtes
  - Par tableau → plus simple mais moins efficace
  - Par ensembles disjoints → efficace

# Gérer l'évolution des composantes connexes par tableau

- Initialement, le graphe ne contient aucune arête
  - Chaque sommet est une composante connexe
  - On initialise chaque sommet à son indice $i$ dans un tableau de longueur $|S|$
- Chaque fois qu'une arête $\{u, v\}$ est candidate
  - On compare les valeurs aux indices $u$ et $v$ dans le tableau
    - Si valeurs égales, $u$ et $v$ sont dans la même composante connexe $\rightarrow$ ajouter l'arête créerait alors un cycle donc on ne la retient pas
    - Si valeurs différentes, on garde l'arête $\{u, v\}$, on donne à l'indice de $v$ la valeur de l'indice de $u$, ainsi que tout sommet d'indice $v$
    - Autrement dit, après sélection de l'arête $\{u,v\}$, tous les sommets de la composante connexe de $u$ et de la composante connexe de $v$ ne forment qu'une seule composante connexe et ont le même indice
- Exemple 2 : Gestion des composantes connexes par tableau

# Remarques

- Après la sélection d'une arête valide
  - On doit parcourir tout le tableau pour mettre à jour les indices de composantes connexes
  - $\mathcal{O}(S)$
- On peut réduire ce temps par l'utilisation d'une **structure de données pour ensembles disjoints**

# STRUCTURES DE DONNÉES POUR ENSEMBLES DISJOINTS

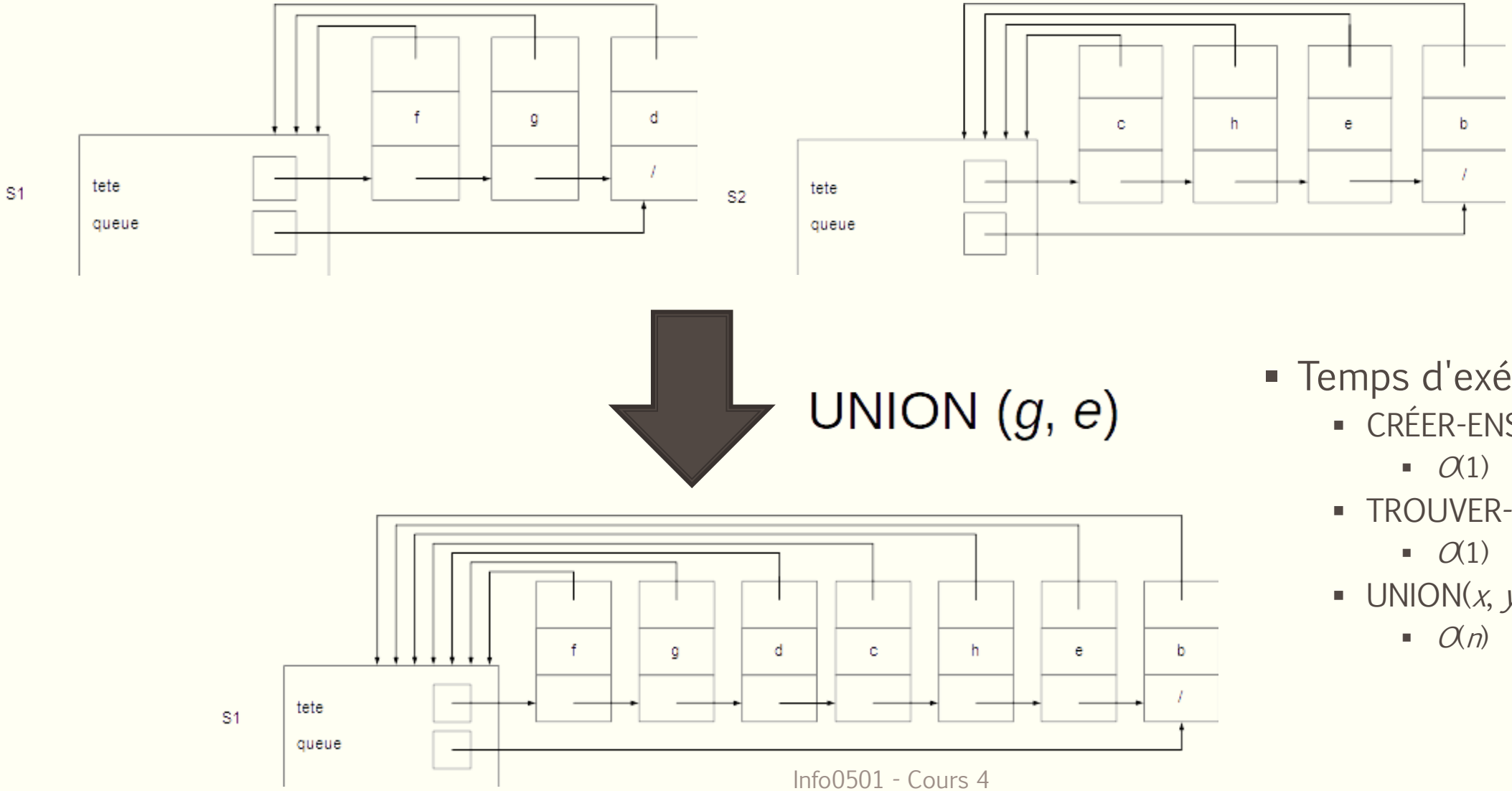
# Ensembles disjoints

- On veut regrouper $n$ éléments distincts dans une collection $S = \{S_1, S_2, \ldots S_k\}$ d'ensembles dynamiques disjoints
  - Chaque élément fait partie d'un seul ensemble
  - Chaque ensemble est identifié par un représentant
- Opérations sur les ensembles disjoints
  - CRÉER-ENSEMBLE ($x$)
  - TROUVER-ENSEMBLE ($x$)
  - UNION ($x$, $y$)

# Opérations sur les ensembles disjoints

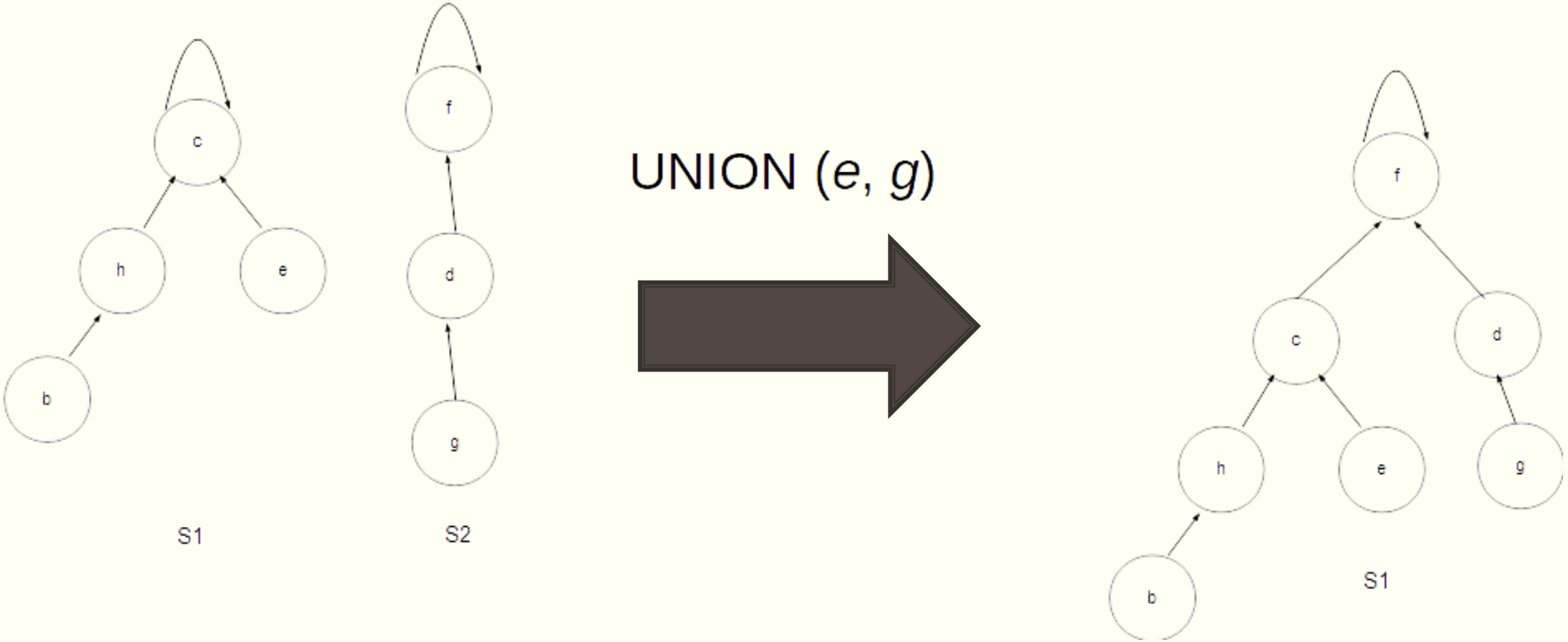
- CRÉER-ENSEMBLE ($x$)
  - À partir d'un pointeur sur un objet $x$
  - Crée un nouvel ensemble dont le seul membre (et le représentant) est $x$
  - Ensembles disjoints
    - $x$ ne doit pas être déjà membre d'un autre ensemble
- TROUVER-ENSEMBLE ($x$)
  - Retourne un pointeur vers le représentant de l'ensemble contenant $x$
- UNION ($x$, $y$)
  - Réunit les ensembles dynamiques qui contiennent $x$ et $y$...
  - ... appelés $S_x$ et $S_y$
  - ... dans un nouvel ensemble qui est l'union de $S_x$ et $S_y$
  - Le représentant du nouvel ensemble sera un élément quelconque d'un des 2 ensembles
  - Détruit les ensembles initiaux $S_x$ et $S_y$
- Exemple 3
  - Application d'une structure de données d'ensembles disjoints
  - Détermination des composantes connexes d'un graphe non orienté

# Représentation d'ensembles disjoints par listes chaînées




- Temps d'exécution
  - CRÉER-ENSEMBLE($x$) ?
    - $O(1)$
  - TROUVER-ENSEMBLE($x$) ?
    - $O(1)$
  - UNION($x$, $y$) ?
    - $O(n)$

# Représentation d'ensembles disjoints par arbres



# Algorithme de Kruskal avec utilisation d'ensembles disjoints

- On crée un ensemble disjoint pour chaque sommet de $G$
- On trie les arêtes de $G$
- Pour chaque arête prise par ordre croissant
  - Si l'origine et l'extrémité ne font pas partie du même ensemble, conserver l'arête et réunir les deux ensembles
- Les arêtes retenues constituent alors un arbre couvrant de poids minimal de $G$

# ALGORITHME DE PRIM

# Principe de l'algorithme

- Permet de trouver un arbre couvrant de poids minimum sans devoir trier les arêtes
- On étend, de proche en proche, un arbre couvrant des parties des sommets du graphe
  - En atteignant un sommet supplémentaire à chaque étape …
  - … en prenant l'arête la plus légère parmi celles qui joignent l'ensemble des sommets déjà couverts …
  - … à l'ensemble des sommets non encore couverts
- Un tableau de distances *d* permet de connaître la distance entre chaque sommet non couvert et l'ensemble des sommets couverts

- Exemple 4 : Fonctionnement de l'algorithme de Prim – Implémentation par tableau

# Remarques

- Après la mise à jour des distances entre le pivot actuel et ses voisins
  - On doit parcourir tout le tableau $d$ pour déterminer le pivot de l'itération suivante
  - $O(S)$
- On peut réduire ce temps par l'utilisation d'une **file de priorités min implémentée par tas**

# FLASHBACK

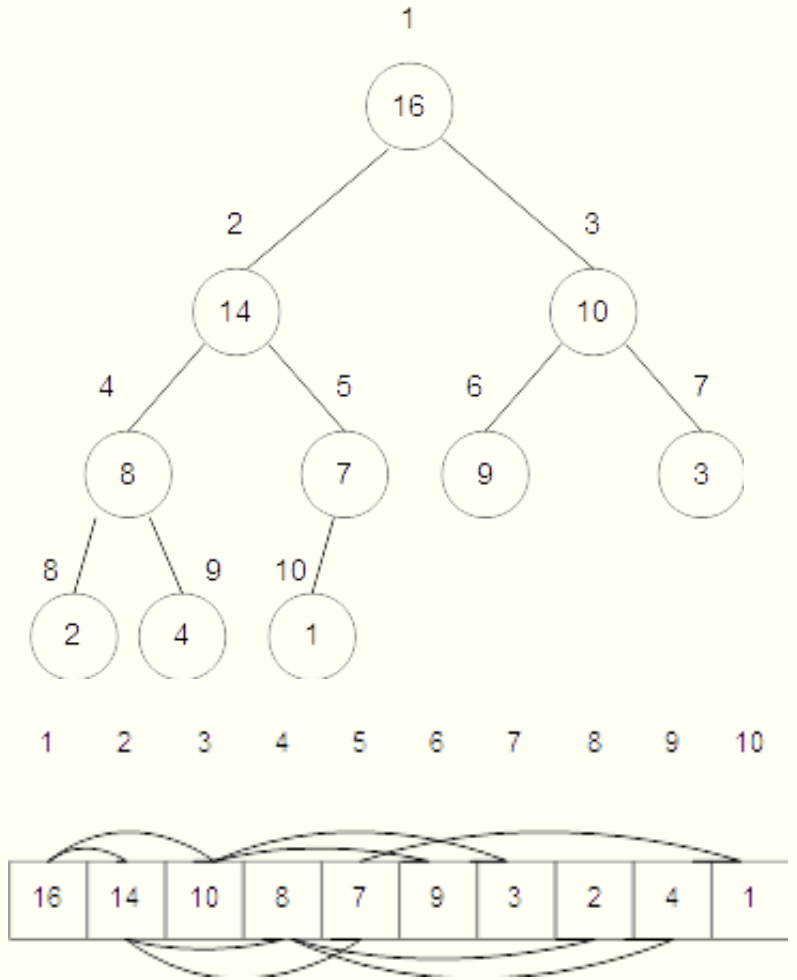
Tas

# Tas (binaire)

- Tableau ayant des caractéristiques spécifiques sur l'emplacement des éléments
  - Peut être vu (mais non stocké) comme un arbre binaire presque complet
- Plusieurs utilisations
  - Tri
  - Files de priorités
  - ...

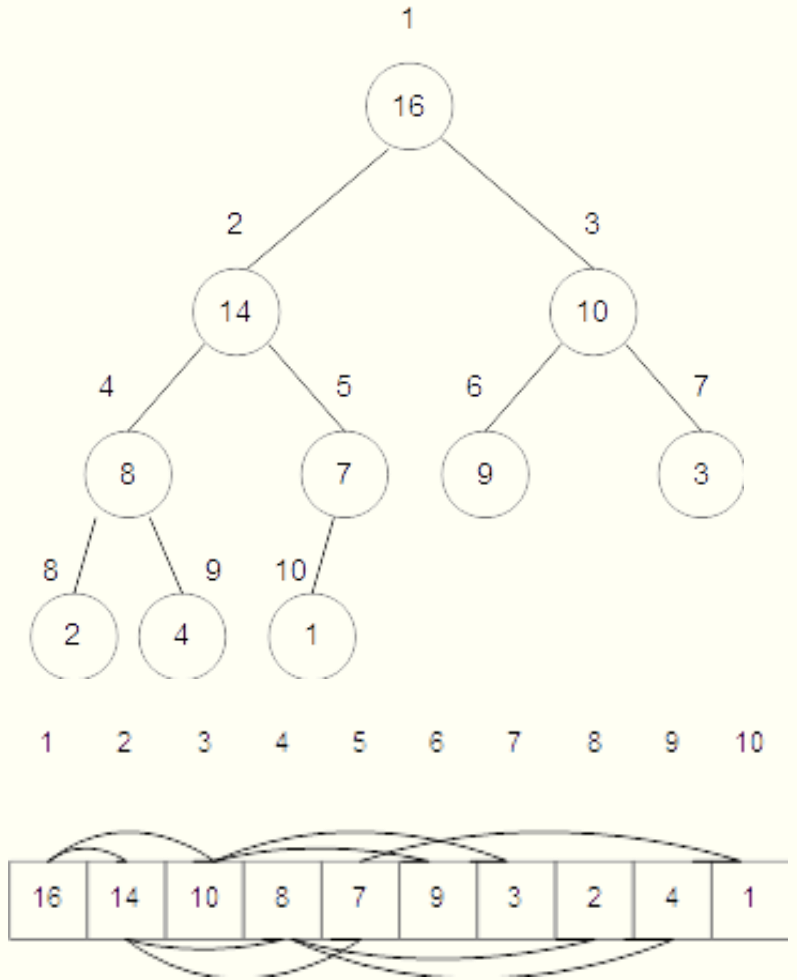
# Tas (binaire)

- Chaque nœud de l'arbre correspond à un élément du tableau
- L'arbre est complètement rempli à tous les niveaux
  - Sauf éventuellement le dernier qui est rempli de gauche à droite
- Un tableau *t* représentant un tas possède 2 attributs
  - longueur : nombre maximum d'éléments
  - taille : nombre d'éléments du tas effectivement rangés dans le tableau
- Éléments valides du tas → *t* [1 .. *t.taille*]



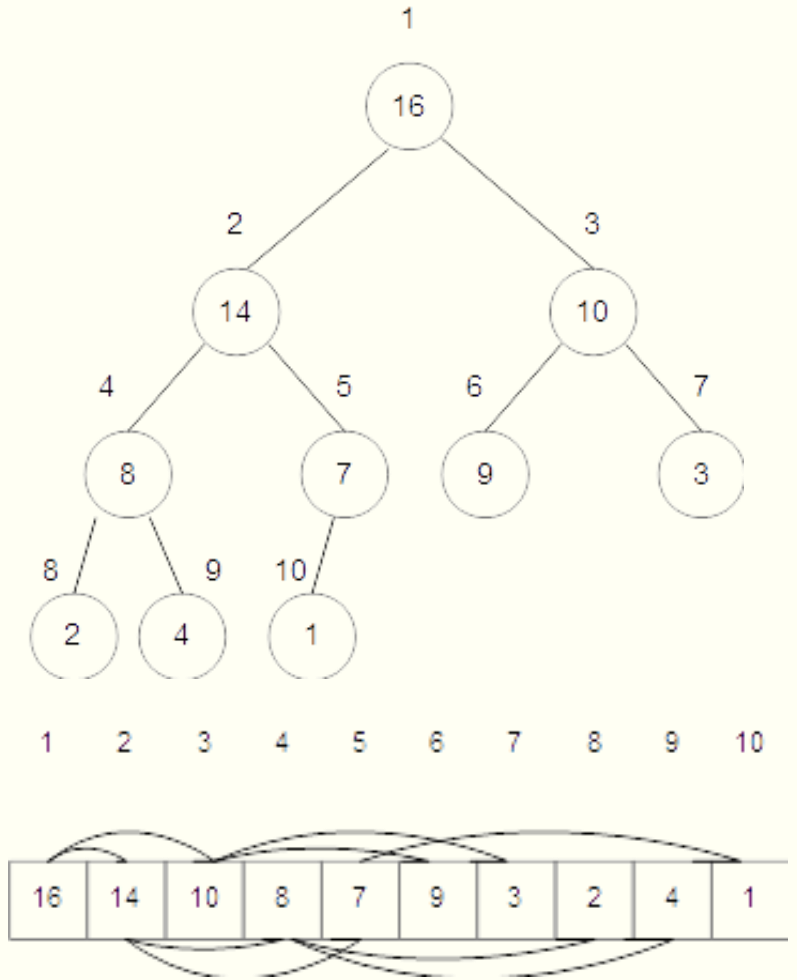
# Tas (binaire)

- Racine de l'arbre
  - $t$ [1]
- Étant donné l'indice $i$ d'un nœud, on peut calculer
  - L'indice de son parent PARENT($i$)
    - $\lfloor i / 2 \rfloor$
  - L'indice de son enfant de gauche GAUCHE($i$)
    - $2i$
  - L'indice de son enfant de droite DROITE($i$)
    - $2i + 1$



# Tas (binaire)

- Propriété de tas (ici pour un tas max)
  - Pour chaque nœud *i* autre que la racine
    - La valeur d'un nœud est au plus égale à celle du parent
    - $t[\text{PARENT}(i)] \geq t[i]$
- Plus grand élément stocké à la racine
- Hauteur d'un nœud
  - Nombre d'arcs sur le chemin le plus long reliant le nœud à une feuille
- Hauteur d'un tas de *n* éléments
  - Hauteur de la racine
  - $\Theta(\lg n)$



# Conservation de la propriété de tas

- Une modification du tableau doit assurer la conservation de la propriété de tas
- Procédure ENTASSER-MAX($t$, $i$)
  - Suppose que les arbres binaires enracinés en GAUCHE($i$) et DROITE($i$) sont des tas max
  - … mais que $t[i]$ puisse être plus petit que ses enfants
  - … violant ainsi la propriété de tas max
  - On fait alors descendre la valeur de $t[i]$ dans le tas max de sorte à rétablir la propriété de tas
- Fonctionnement de ENTASSER-MAX
  - À chaque étape, on détermine le plus grand des éléments $t[i]$, GAUCHE($i$) et DROITE($i$)
  - Si $t[i]$ est le max, on a déjà un tas max
  - Sinon, on échange $t[i]$ avec l'enfant qui est le max et on rappelle ENTASSER-MAX récursivement
- Exemple 5
  - ENTASSER-MAX avec $t = \langle 16,4,10,14,7,9,3,2,8,1 \rangle$
- Temps d'exécution proportionnel à la hauteur de l'arbre
  - $O(\lg n)$

# Construction d'un tas

- Pour convertir un tableau $t[1..n]$ (avec $n = t.longueur$) en tas max
  - On utilise la propriété suivante
    - Les éléments du sous-tableau $t[(n/2 + 1) .. n]$ sont tous des feuilles de l'arbre, donc des tas max à 1 élément
  - On utilise la procédure ENTASSER-MAX sur les autres nœuds de l'arbre, à l'envers
- Exemple 6
  - CONSTRUIRE-TAS-MAX avec $t = \langle 4,1,3,2,16,9,10,14,8,7 \rangle$
- Temps d'exécution : O($n$) appels à ENTASSER-MAX
  - $O(n \lg n)$ (une analyse plus fine peut démontrer que c'est en fait $O(n)$

# Tri par tas

- Démarre en construisant un tas max avec le tableau d'entrée
- Principe
  - Élément maximal du tableau → racine de l'arbre $t[1]$
  - On peut donc le placer à sa position finale correcte, à la fin du tableau, en l'échangeant avec $t[n]$
  - … et en enlevant le nœud $n$ du tas en décrémentant $t.taille$
  - On rétablit ensuite la propriété de tas max en appelant ENTASSER-MAX sur la racine
  - Et on répète le processus jusqu'à arriver à un tas de taille 1
- Exemple 7
  - TRI-PAR-TAS avec $t = \langle 16,14,10,8,7,9,3,2,4,1 \rangle$
- CONSTRUIRE-TAS-MAX
  - $O(n \lg n)$ (ou $O(n)$, mais ça ne change pas le résultat)
- $n$ appels à ENTASSER-MAX
  - $O(n \lg n)$
- Temps d'exécution
  - $\Theta(n \lg n)$
  - (Comme le tri par fusion)
- Trie sur place
  - (Comme le tri par insertion)

# FIN DU FLASHBACK

Tas

# Algorithme de Prim – Implémentation par file de priorités

- Utilise un tas-min à la place du tableau *d* pour stocker les distances des sommets non encore couverts
  - Cette version de l'algorithme sera vue en TD

# PROCHAIN COURS

# STRUCTURES DE DONNÉES DYNAMIQUES