Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Рассчетно-графическая работа
по дисциплине математический анализ
Интеграл функции одной переменной
Модуль 2
Вариант № 6

Выполнили:
Сиразетдинов А. Н. P3116
Шпинёва У. С. P3116
Лучинкин К.
Преподаватель:
Возианова А. В.

г. Санкт-Петербург
Университет ИТМО
2023г.

Содержание

1 Задание 1. Интегральная сумма **3**

1.1 Интегральная сумма 3

1.2 Последовательность интегральных сумм 4

2 Задание 5. Приближенные вычисления определенного интеграла **6**

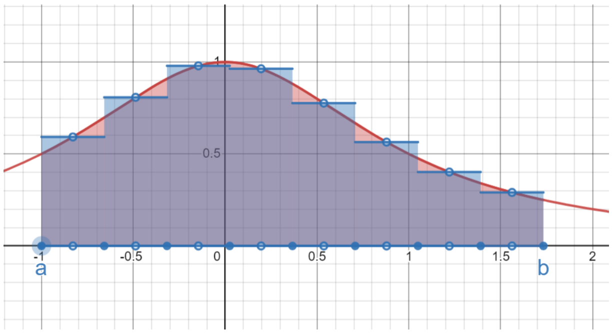
1 Задание 1. Интегральная сумма

1.1 Интегральная сумма

Задание

Исследуйте интегральную сумму функции $\frac{1}{1+x^2}$,заданной на отрезке $\left[-1;\sqrt{3}\right]$

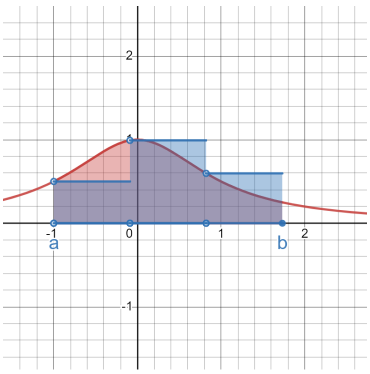
Интегральная сумма функции на заданном отрезке в виде ступенчатой фигуры



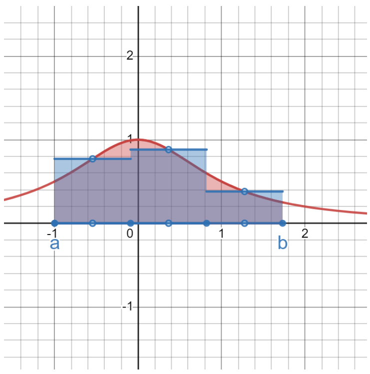
https://www.desmos.com/calculator/w21pp71fpr

Исследование ступенчатой фигуры

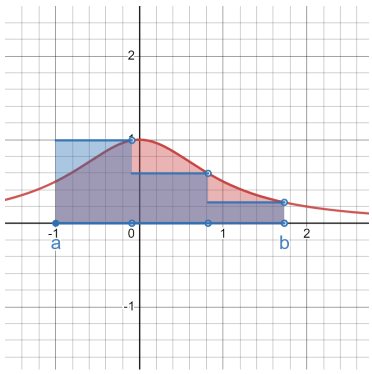
Рассмотрим разбиение на 3, 8 и 50 ступеней:



Крайнее левое положение точек

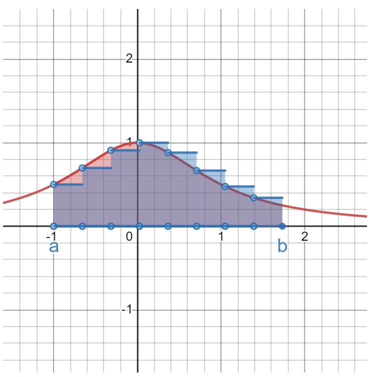


Промежуточное положение точек

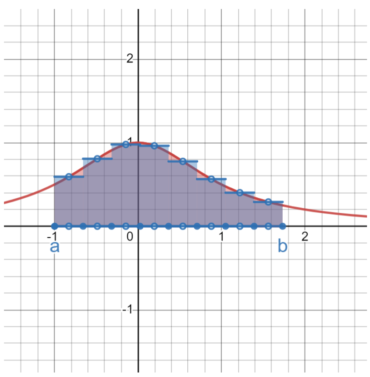


Крайнее правое положение точек

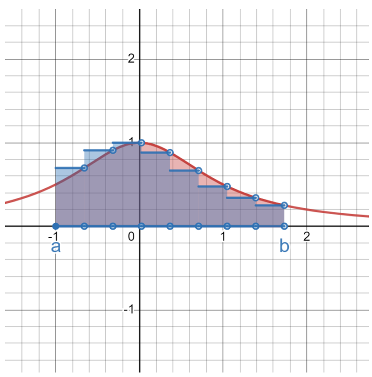
Рис. 1: Разбиение на 3 ступени



Крайнее левое положение точек

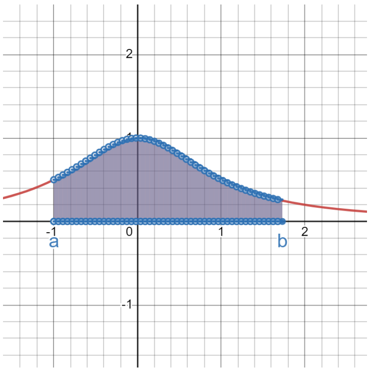


Промежуточное положение точек

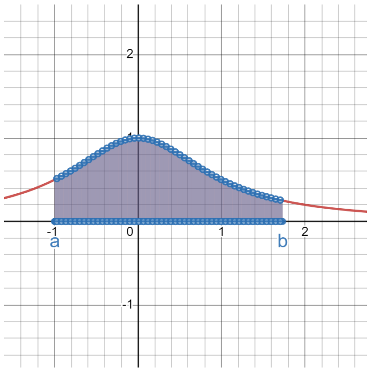


Крайнее правое положение точек

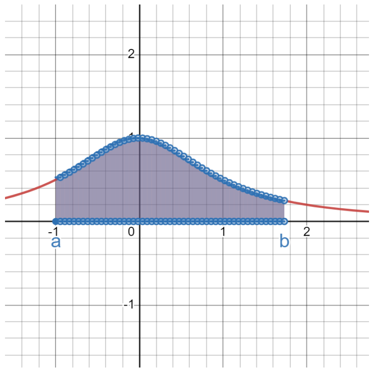
Рис. 2: Разбиение на 8 ступеней



Крайнее левое положение точек



Промежуточное положение точек



Крайнее правое положение точек

Рис. 3: Разбиение на 50 ступеней

Заключение

В процессе выполнения первой части первого задания были построены ступенчатые фигуры по графику. Ступенчатая фигура тем точнее, чем мельче разбиение и чем ближе выбранные точки к серединам разбиений

1.2 Последовательность интегральных сумм

Интегральная сумма

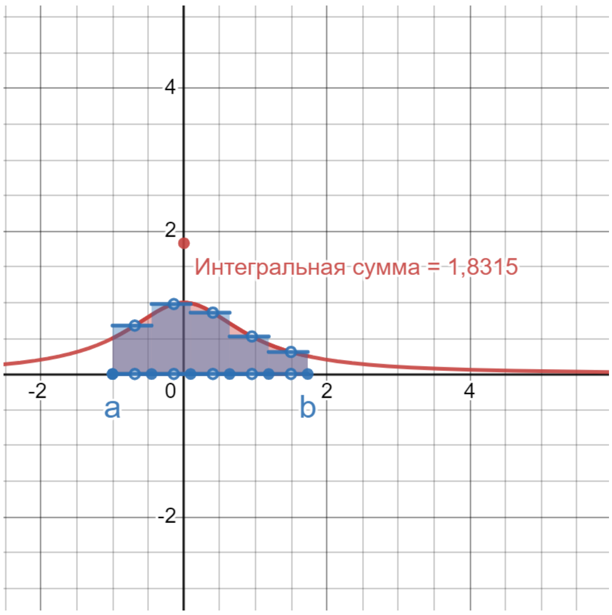
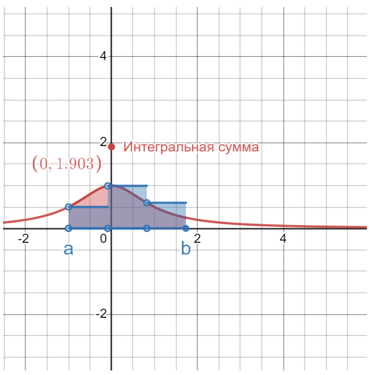
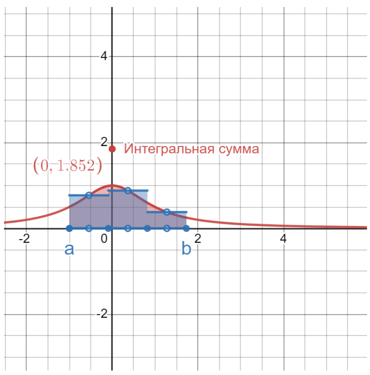


Рис. 4: Подсчет интегральной суммы

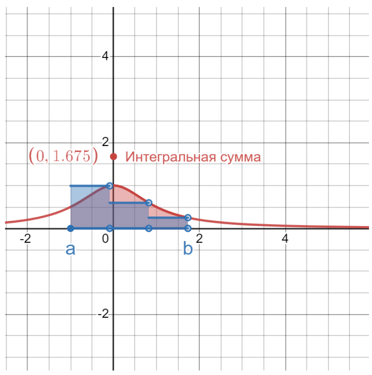
Исследование значения с ростом n при различных положениях точек



Крайнее левое положение точек

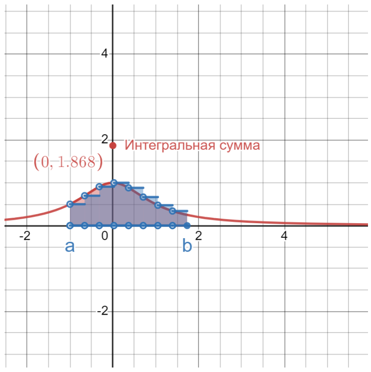


Промежуточное положение точек

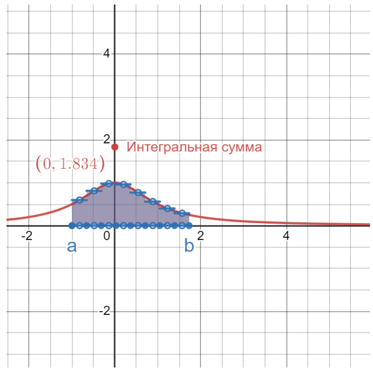


Крайнее правое положение точек

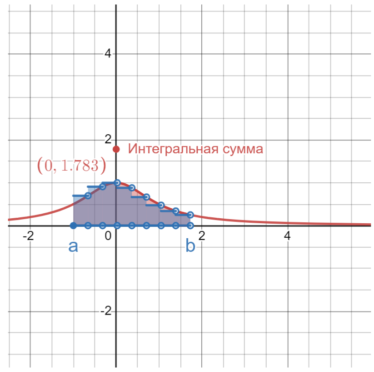
Рис. 5: Разбиение на 3 ступени



Крайнее левое положение точек

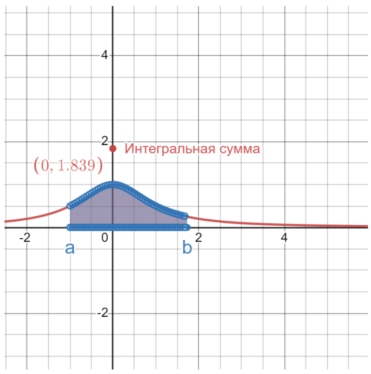


Промежуточное положение точек

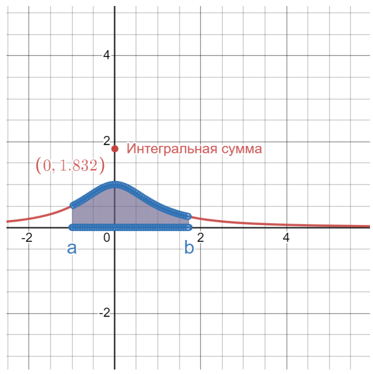


Крайнее правое положение точек

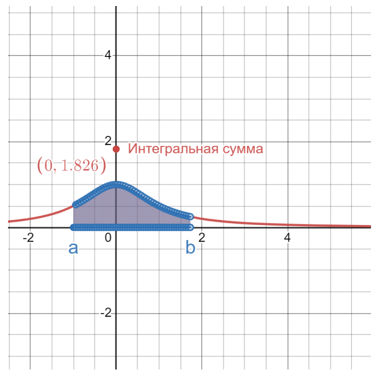
Рис. 6: Разбиение на 8 ступеней



Крайнее левое положение точек



Промежуточное положение точек



Крайнее правое положение точек

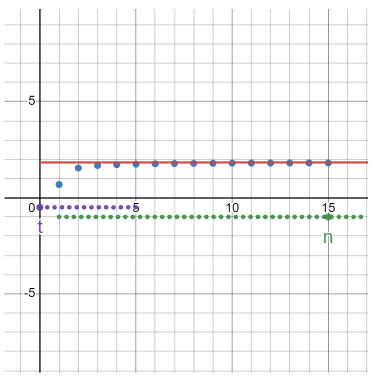
Рис. 7: Разбиение на 50 ступеней

Аналитическое вычисление интеграла

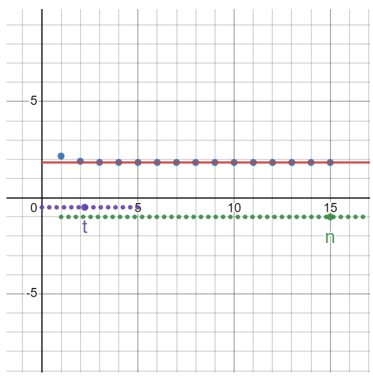
$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{12} \approx 1,8326$$

Интегральная сумма тем точнее, чем мельче разбиение и чем ближе выбранные точки к серединам разбиений

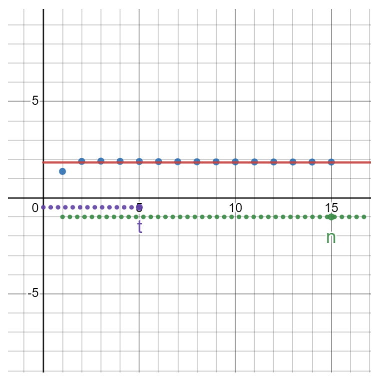
Последовательность интегральных сумм



Крайнее левое положение точек



Промежуточное положение точек



Крайнее правое положение точек

Рис. 8: Зависимость от расположения точек
`https://www.desmos.com/calculator/zrwq9vbkt0`

Заключение

В процессе выполнения части 2 задания 1 были сравнены значения интегральных сумм и аналитического исчисления. Можно сделать вывод, что вычисление определенного интеграла достаточно точное и его точность прямо пропорциональна количеству точек, которые мы выбираем и их близость к середине разбиений

2 Задание 5. Приближенные вычисления определенного интеграла

Задание

Найти приближенное значение интеграла $\int_0^{10} e^{-x}dx = 0,999955$ методами прямоугольников, трапеций, парабол , Боде при h=1. Сделать анализ полученных результатов.

Метод прямоугольников

Отрезок $[a;b]$ разбивается на равные промежутки длины h, t - положение точки в разбиении

$$h = \frac{b-a}{n}$$
$$\epsilon_i = x_{i-1} + h * t$$
$$\int_a^b f(x)dx \approx h * \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1} + h * t\right)$$

Требуемая точность достигается при $n = 10\_000$ и $t = 0.5$

```
def rectangle_method(f, a, b, n, t):
  h = (b - a) / n
  result = sum([f(a + (i - t) * h) for i in range(1, n + 1)]) * h
  return result
```

Метод трапеций

$$x_i = a + ih$$
$$h = \frac{b-a}{n}$$
$$\int_a^b f(x)dx \approx h * \left(\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i\right)$$

Требуемая точность достигается при $n = 10\_000$

```
def trapezoid_method(f, a, b, n):
  h = (b - a) / n
  result = 0.5 * f(a)
    + sum([f(a + i*h) for i in range(1, n)])
    + 0.5 * f(b)
  result *= h
  return result
```

Метод парабол

$$x_j = a + jh$$
$$h = \frac{b-a}{N}$$
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{N/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{N/2} f(x_{2j-1}) + f(x_N)\right)$$

Требуемая точность достигается при $n = 90$

```
def parabola_method(f, a, b,n):
  h = (b - a) / n
  return (h / 3) * (sum([(f(a + h * (i - 1))
    + 4 * f(a + h * i)
    + f(a + h * (i + 1))) for i in range(1, n, 2)]))
```

Метод Боде

Имея N разбиений

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x)dx \approx \frac{2h}{45}\left(7(f(x_0)+f(x_N)) + 32\left(\sum_{i\in 1,3,5,\ldots,N-1} f(x_i)\right) + 12\left(\sum_{i\in 2,6,10,\ldots,N-2} f(x_i)\right) + 14\left(\sum_{i\in 4,8,12,\ldots,N-4} f(x_i)\right)\right)$$

Дает точность в 2 знака после запятой

```
def bode_method(f, a, b, h):
  splitting = [(a + h*i) for i in range(0, int((b - a) / h) + 1)]
  n = len(splitting)
  return (2 * h / 45 ) * (7 * (f(splitting[0]) + f(splitting[-1]))
    + 32 * (sum([f(splitting[i]) for i in range(1, n, 2)]))
    + 12 * (sum([f(splitting[i]) for i in range(2, n - 1, 4)]))
    + 14 * (sum([f(splitting[i]) for i in range(4, n - 3, 4)])))
```

Заключение

	Метод прямоугольникв	Метод трапеций	Метод парабол	Метод Боде
N	10_000	10_000	90	При N = 10 точность не достигнута

Самый удобный, быстрый и точный метод - парабол.

https://colab.research.google.com/drive/1oaMYtnWpOiJltNrdXcKLQt34urXhq8pk?usp=sharing