

Расчетно-графическая работа
по дисциплине математический анализ
Интеграл функции одной переменной
Модуль 2
Вариант № 6

Выполнили:
Сиразетдинов А. Н. Р3116
Шпинёва У. С. Р3116
Лучинкин К.
Преподаватель:
Возианова А. В.

Содержание

1	Задание 1. Интегральная сумма	3
1.1	Интегральная сумма	3
2	Задание 2. Площадь фигуры	5
3	Задание 4. Приложение Рядов. Шпинева Ульяна. Вариант 6	6
3.1	Задание 1	6
3.2	Задание 2	7
3.3	Задание 3	7
4	Задание 3. Ряд Тейлора	9
4.1	Задание	9

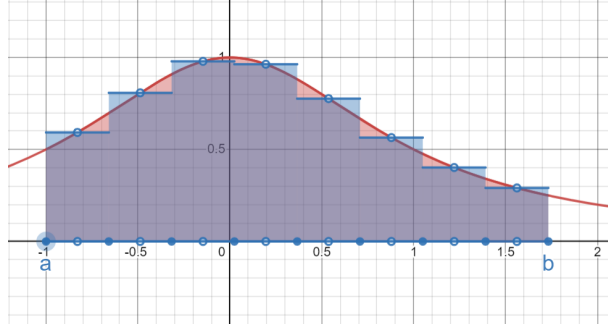
1 Задание 1. Интегральная сумма

1.1 Интегральная сумма

Задание

Исследуйте интегральную сумму функции $\frac{1}{1+x^2}$, заданной на отрезке $[-1; \sqrt{3}]$

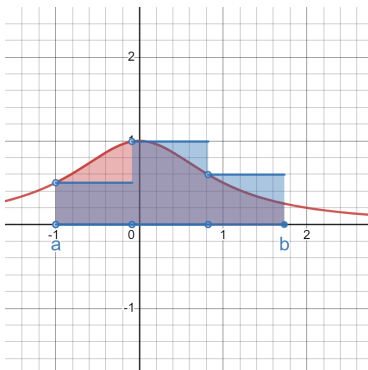
Интегральная сумма функции на заданном отрезке в виде ступенчатой фигуры



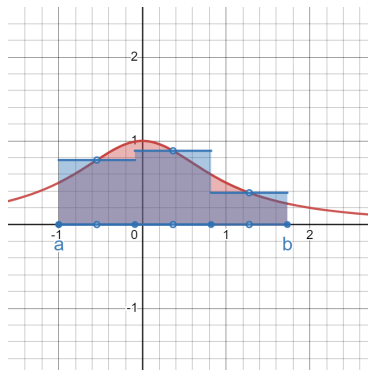
<https://www.desmos.com/calculator/w21pp71fpr>

Исследование ступенчатой фигуры

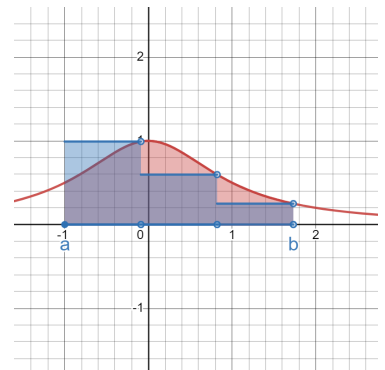
Рассмотрим разбиение на 3, 8 и 50 ступеней:



Крайнее левое положение точек

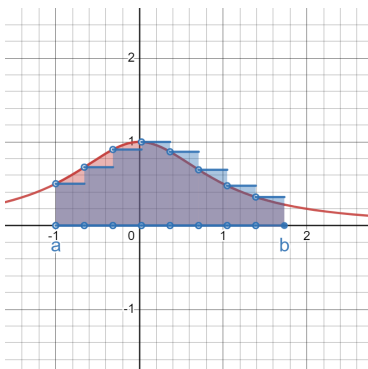


Промежуточное положение точек

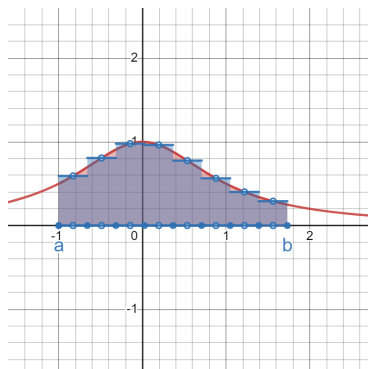


Крайнее правое положение точек

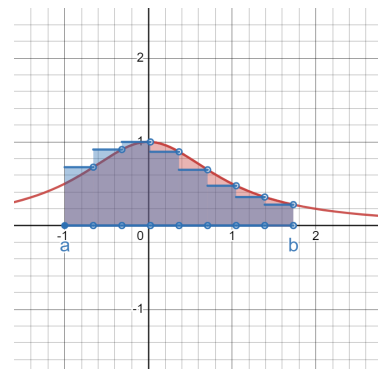
Рис. 1: Разбиение на 3 ступени



Крайнее левое положение точек

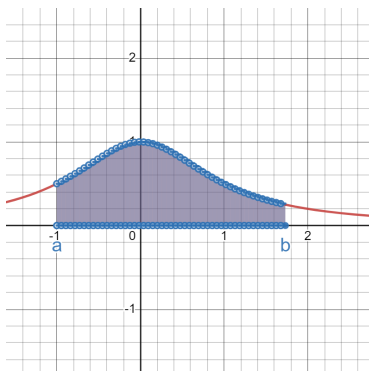


Промежуточное положение точек

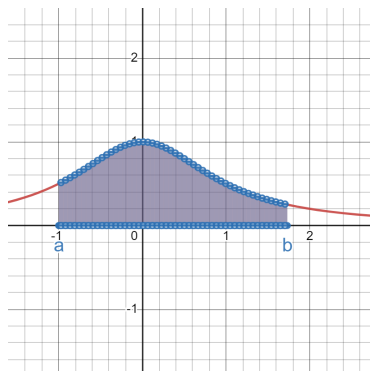


Крайнее правое положение точек

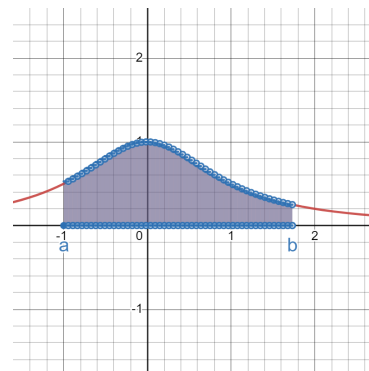
Рис. 2: Разбиение на 8 ступеней



Крайнее левое положение точек



Промежуточное положение точек



Крайнее правое положение точек

Рис. 3: Разбиение на 50 ступеней

Закключение

В процессе выполнения первой части первого задания были построены ступенчатые фигуры по графику. Ступенчатая фигура тем точнее, чем мельче разбиение и чем ближе выбранные точки к серединам разбиений

1.2 Последовательность интегральных сумм

Интегральная сумма

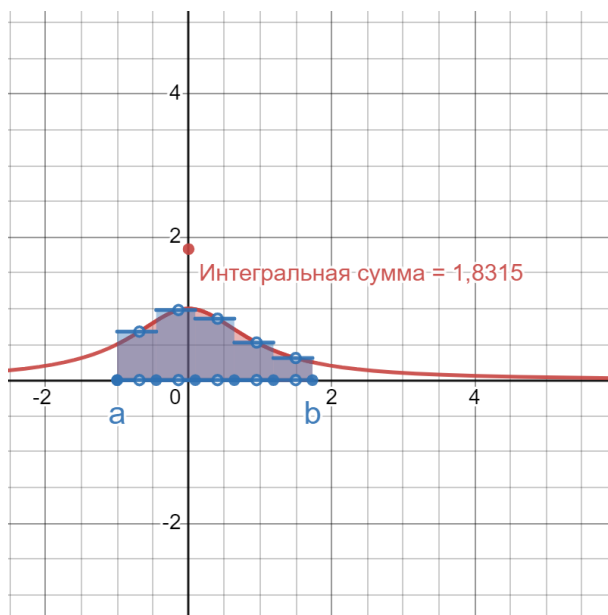
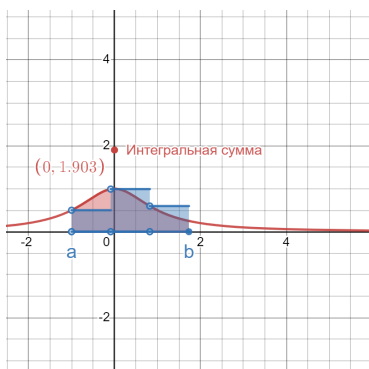
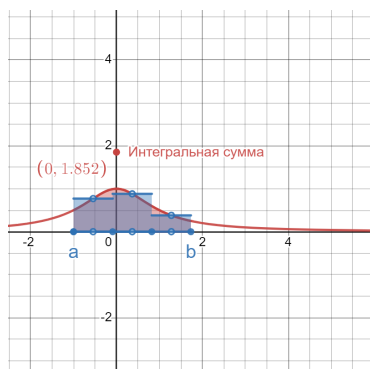


Рис. 4: Подсчет интегральной суммы

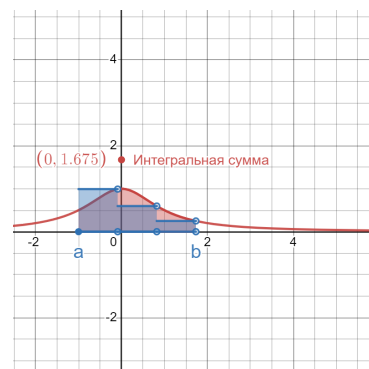
Исследование значения с ростом n при различных положениях точек



Крайнее левое положение точек

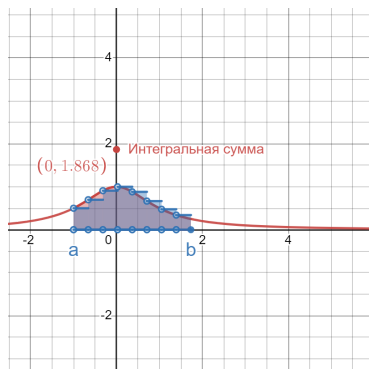


Промежуточное положение точек

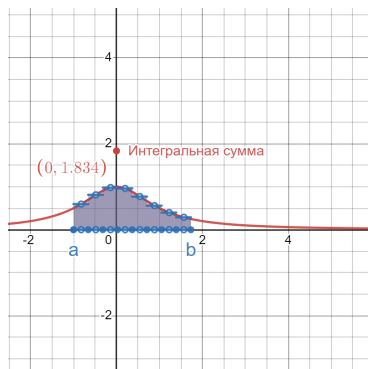


Крайнее правое положение точек

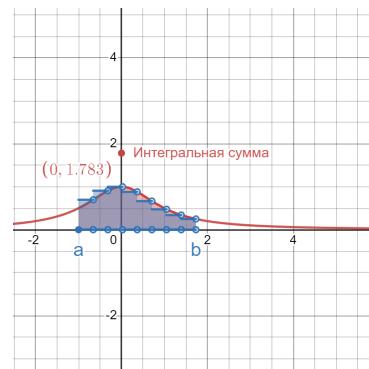
Рис. 5: Разбиение на 3 ступени



Крайнее левое положение точек

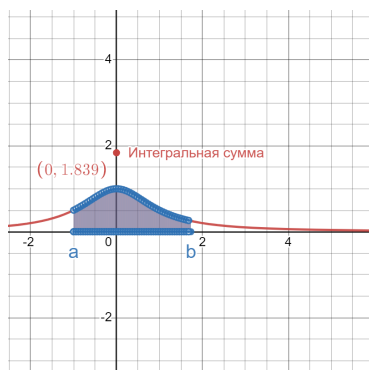


Промежуточное положение точек

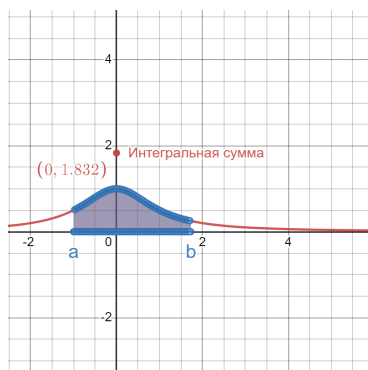


Крайнее правое положение точек

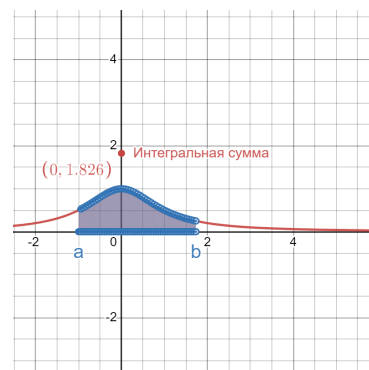
Рис. 6: Разбиение на 8 ступеней



Крайнее левое положение точек



Промежуточное положение точек



Крайнее правое положение точек

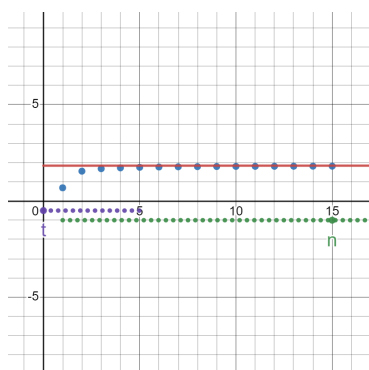
Рис. 7: Разбиение на 50 ступеней

Аналитическое вычисление интеграла

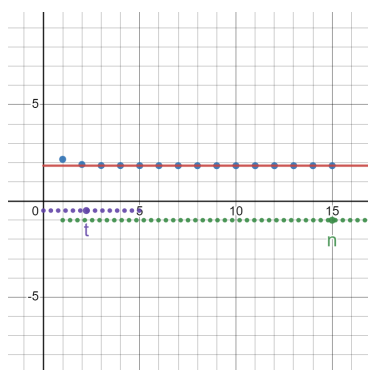
$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_{-1}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{12} \approx 1,8326$$

Интегральная сумма тем точнее, чем мельче разбиение и чем ближе выбранные точки к серединам разбиений

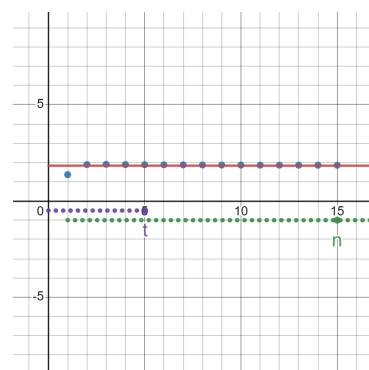
Последовательность интегральных сумм



Крайнее левое положение точек



Промежуточное положение точек



Крайнее правое положение точек

Рис. 8: Зависимость от расположения точек
<https://www.desmos.com/calculator/zrwq9vbkto>

Заключение

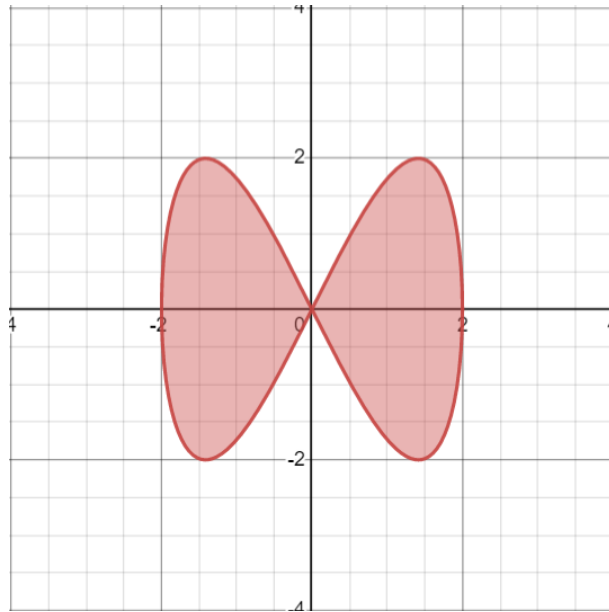
В процессе выполнения части 2 задания 1 были сравнены значения интегральных сумм и аналитического исчисления. Можно сделать вывод, что вычисление определенного интеграла достаточно точное и его точность прямо пропорциональна количеству точек, которые мы выбираем и их близость к середине разбиений

2 Задание 2. Площадь фигуры

Задание

Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой Лиссажу $x = 2\sin t$, $y = 2\sin 2t$

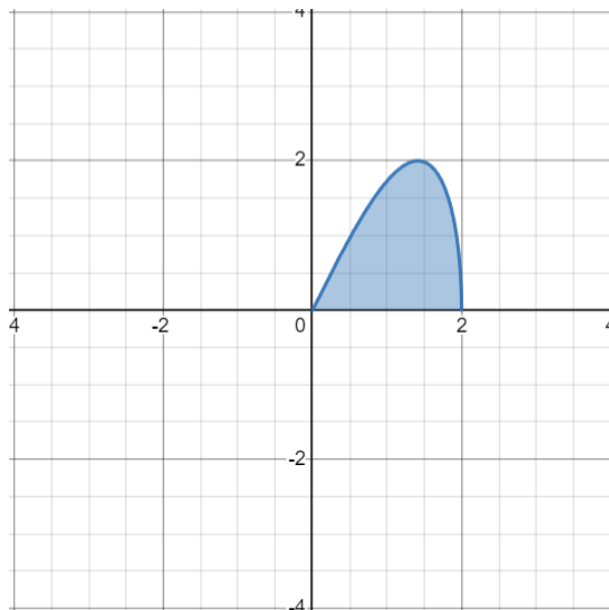
График кривой:



<https://www.desmos.com/calculator/2y0dajpihq>

Кривая симметрична относительно обеих осей координат: если заменить t на $(\pi - t)$, то переменная x не меняется, а y изменяет только свой знак; следовательно, кривая симметрична относительно оси Ox . При замене же t на $(\pi + t)$ переменная y не меняется, а x меняет только свой знак. Это значит, что кривая симметрична относительно оси Oy .

В силу симметричности фигуры, для нахождения ее площади достаточно рассмотреть только четверть, значение на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$



Тогда искомая площадь будет равна полученному результату, умноженному на 4:

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(x) x'_t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot \sin 2t \cdot 2 \cdot \cos t dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot \sin t \cdot \cos^2 t dt = -32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t d(\cos t) = -32 \cdot \frac{\cos^3 t}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{3}$$

Исследуем сходимость $\int_1^\infty \frac{dx}{(x^\alpha+1)\arctg(x)}$
Сравним с $\lim_{x \rightarrow \infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x^\alpha + 1)\arctg(x)(\frac{1}{x^\alpha})} < \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x^\alpha + 1)\frac{\pi}{2}(\frac{1}{x^\alpha})},$$

поскольку $\arctg(x) < \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x^\alpha + 1)\frac{\pi}{2}(\frac{1}{x^\alpha})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{\frac{\pi}{2}x^\alpha + \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

Тогда по предельному признаку сравнения $\int_1^\infty \frac{dx}{(x^\alpha+1)\arctg(x)}$ сходится или расходится одновременно с $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$.

Таким образом $\int_1^\infty \frac{dx}{(x^\alpha+1)\arctg(x)}$ расходится при $\alpha \leq 1$ и сходится при $\alpha > 1$

3 Задание 5. Приближенные вычисления определенного интеграла

3.1 Задание

Найти приближенное значение интеграла $\int_0^{10} e^{-x} dx = 0,999955$ методами прямоугольников, трапеций, парабол, Боде при $h=1$. Сделать анализ полученных результатов.

3.2 Метод прямоугольников

Отрезок $[a; b]$ разбивается на равные промежутки длины h, t - положение точки в разбиении

$$h = \frac{b-a}{n}$$
$$\epsilon_i = x_{i-1} + h * t$$
$$\int_a^b f(x) dx \approx h * \sum_{i=1}^n f(x_{i-1} + h * t)$$

Требуемая точность достигается при $n = 10_000$ и $t = 0.5$

```
def rectangle_method(f, a, b, n, t):  
    h = (b - a) / n  
    result = sum([f(a + (i - t) * h) for i in range(1, n + 1)]) * h  
    return result
```

3.3 Метод трапеций

$$x_i = a + ih$$
$$h = \frac{b-a}{n}$$
$$\int_a^b f(x) dx \approx h * \left(\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right)$$

Требуемая точность достигается при $n = 10_000$

```
def trapezoid_method(f, a, b, n):  
    h = (b - a) / n  
    result = 0.5 * f(a)  
        + sum([f(a + i*h) for i in range(1, n)])  
        + 0.5 * f(b)  
    result *= h  
    return result
```

3.4 Метод парабол

$$x_j = a + jh$$
$$h = \frac{b-a}{N}$$
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{N/2-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{N/2} f(x_{2j-1}) + f(x_N) \right)$$

Требуемая точность достигается при $n = 90$

```
def parabola_method(f, a, b, n):  
    h = (b - a) / n  
    return (h / 3) * (sum([(f(a + h * (i - 1))  
        + 4 * f(a + h * i)  
        + f(a + h * (i + 1))) for i in range(1, n, 2)]))
```


3.5 Метод Боде

Имея N разбиений

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x)dx \approx \frac{2h}{45} \left(7(f(x_0) + f(x_N)) + 32 \left(\sum_{i \in \{1,3,5,\dots,N-1\}} f(x_i) \right) + 12 \left(\sum_{i \in \{2,6,10,\dots,N-2\}} f(x_i) \right) + 14 \left(\sum_{i \in \{4,8,12,\dots,N-4\}} f(x_i) \right) \right)$$

Дает точность в 2 знака после запятой

```
def bode_method(f, a, b, h):
    splitting = [(a + h*i) for i in range(0, int((b - a) / h) + 1)]
    n = len(splitting)
    return (2 * h / 45 ) * (7 * (f(splitting[0]) + f(splitting[-1]))
        + 32 * (sum([f(splitting[i]) for i in range(1, n, 2)]))
        + 12 * (sum([f(splitting[i]) for i in range(2, n - 1, 4)]))
        + 14 * (sum([f(splitting[i]) for i in range(4, n - 3, 4)])))
```

3.6 Заключение

	Метод прямоугольникв	Метод трапечий	Метод парабол	Метод Боде
N	10_000	10_000	90	При N = 10 точность не достигнута

Самый удобный, быстрый и точный метод - парабол. <<<<< HEAD =====>>>>> 822853a (end of task5) <https://colab.research.google.com/drive/1oaMYtnWpOiJltNrdXcKLQt34urXhospusp=sharing>

4 Задание 4. Приложение Рядов. Сиразетдинов Азат. Вариант 28

4.1 Задание 1

Вычислить приближенно значение функции $\cos 48^\circ$ с точностью 0,0001

Возьмем табличное разложение

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\cos 48^\circ = \cos(0,8378)$$

1 член последовательности:

$$\frac{0,8378^0}{1!} \approx 1$$

2 член последовательности:

$$(-1) * \frac{0,8378^2}{2!} \approx -0,35095$$

3 член последовательности:

$$\frac{0,8378^4}{4!} \approx 0,02052$$

4 член последовательности:

$$(-1) * \frac{0,8378^6}{6!} \approx -0,00048$$

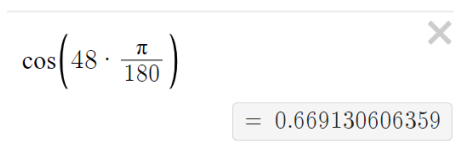
4 член последовательности:

$$\frac{0,8378^8}{8!} \approx 0$$

Дальнейшие члены не будут изменять точность

$$\cos(0,8378) \approx 1 - 0,35095 + 0,02052 - 0,00048 \approx 0,66909 \approx 0,6691$$

Проверка:



$\cos\left(48 \cdot \frac{\pi}{180}\right)$
= 0.669130606359

4.2 Задание 2

Разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью 0,0001

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x^5)}{x^3} dx$$

Возьмем табличное разложение

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x^5)}{x^3} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{5n}}{n}}{x^3} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{5n}}{n x^3} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^{n-1} x^{5n-3}}{n} dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{5n-2}}{n(5n-2)} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^{5n-2} (5n-2)} \end{aligned}$$

Подсчитаем первые члены последовательности:

1 член последовательности:

$$\frac{1}{2^3 * 3} \approx 0,04167$$

2 член последовательности:

$$\frac{-1}{2 * 2^8 * 8} \approx -0,00024$$

3 член последовательности:

$$\frac{1}{3 * 2^{13} * 13} \approx 0$$

Дальнейшие члены не будут изменять точность

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x^5)}{x^3} \approx 0,04167 - 0,00024 = 0,04143 \approx 0,0414$$

Проверка:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x^5)}{x^3} dx$$

×

= 0.041425604099

4.3 Задание 3

Найти в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Ограничиться четырьмя членами ряда.

$$\begin{aligned} y'' &= xy' - \ln y \\ y(2) &= 1 \\ y'(2) &= -1 \end{aligned}$$

Решение в виде ряда Тейлора:

$$\begin{aligned} y(x) &= y(2) + y'(2)(x-2) + \frac{y''(2)(x-2)^2}{2!} + \frac{y'''(2)(x-2)^3}{3!} \\ 1) \quad y'' &= xy' - \ln y \\ y''(2) &= 2y'(2) - \ln y(2) = 2(-1) - \ln 1 = -2 \\ 2) \quad y''' &= (xy' - \ln y)' = y' + xy'' - \frac{1}{y} \\ y'''(2) &= y'(2) + 2y''(2) - \frac{1}{y(2)} = -1 + 2(-2) - 1 = -4 \end{aligned}$$

Подставим значения в ряд:

$$\begin{aligned} y(x) &= y(2) + y'(2)(x-2) + \frac{y''(2)(x-2)^2}{2!} + \frac{y'''(2)(x-2)^3}{3!} = \\ &= 1 - (x-2) + \frac{-2(x-2)^2}{2} + \frac{-4(x-2)^3}{6} = \\ &= 1 - (x-2) - (x-2)^2 - \frac{2(x-2)^3}{3} \end{aligned}$$

5 Задание 4. Приложение Рядов. Шпинева Ульяна. Вариант 6

5.1 Задание 1

Вычислить приближенно значение функции $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ с точностью 0,0001

Возьмем табличное разложение

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$
$$e^{-\frac{2}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{2}{3})^k}{k!}$$
$$n = 0 :$$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^0}{0!} = 1$$

$$n = 1 :$$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^1}{1!} \approx -0,66667$$

$$n = 2 :$$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^2}{2!} \approx 0,22222$$

$$n = 3 :$$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^3}{3!} \approx -0,04938$$

$$n = 4 :$$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^4}{4!} \approx 0,00823$$

$$n = 5 :$$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^5}{5!} \approx -0,00109$$

$$n = 6 :$$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^6}{6!} \approx 0,00012$$

$$n = 7 :$$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^7}{7!} \approx -0,00001$$

Дальнейшие члены не будут изменять точность

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} \approx 1 - 0,66667 + 0,22222 - 0,04938 + 0,00823 - 0,00109 + 0,00012 - 0,00001 = 0,51342$$

Проверка:

$$\frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}$$



= 0.513417119033

5.2 Задание 2

Разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью 0,0001

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+x^4)dx$$

Возьмем табличное разложение

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+x^4)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{4n}}{n}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^{n-1}x^{4n}}{n}dx == \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{4n+1}}{n(4n+1)} \Big|_0^{\frac{1}{2}} =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^{4n+1}(4n+1)}$$

Подсчитаем первые члены последовательности:

$n = 1 :$

$$\frac{1}{2^5 \cdot 5} \approx 0,00625$$

$n = 2 :$

$$\frac{-1}{2 \cdot 2^9 \cdot 9} \approx -0,00011$$

$n = 3 :$

$$\frac{1}{3 \cdot 2^{13} \cdot 13} \approx 0$$

Дальнейшие члены не будут изменять точность

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+x^4)dx \approx 0,00625 - 0,00011 = 0,00614$$

Проверка:

$\int_0^{0.5} \ln(1+x^4)dx$

$= 0.00614451521797$

5.3 Задание 3

Найти в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Ограничиться четырьмя членами ряда.

$$y' = y^2 - 3x$$
$$y(1) = 2$$

Решение в виде ряда Тейлора:

$$y(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)(x-1)^2}{2!} + \frac{y'''(1)(x-1)^3}{3!}$$

$$1) y' = y^2 - 3x$$

$$y'(1) = 2^2 - 3 = 1$$

$$2) y'' = (y^2 - 3x)' = 2yy' - 3$$

$$y''(1) = 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 = 1$$

$$3) y''' = (2yy' - 3)' = 2y'y' + 2yy''$$

$$y'''(1) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Подставим значения в ряд:

$$\begin{aligned} y(x) &= y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)(x-1)^2}{2!} + \frac{y'''(1)(x-1)^3}{3!} = \\ &= 2 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^3 \end{aligned}$$

6 Задание 3. Ряд Тейлора

6.1 Задание

Исследуйте ряд Тейлора функции в точке. Изобразите графически несколько различных частичных сумм ряда и график исходной функции. Проведите анализ полученных результатов.

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{7-2x}\right), \quad x_0 = 3$$

Найдем первые 5 производных и их значения в точке x_0

$$f(3) = \ln(1) = 0$$

$$1) f'(x) = \frac{3}{(x-2)(7-2x)}$$

$$f'(3) = 3$$

$$2) f''(x) = \frac{12x-33}{(-2x^2+11x-14)^2}$$

$$f''(3) = 3$$

$$3) f'''(x) = \frac{72x^2-396x+558}{(-2x^2+11x-14)^3}$$

$$f'''(3) = 18$$

$$4) f^{IV}(x) = \frac{576x^3-4752x^2+13392x-12870}{(-2x^2+11x-14)^4}$$

$$f^{IV}(3) = 90$$

$$5) f^V(x) = \frac{5760x^4-63360x^3+267840x^2-514800x+378792}{(-2x^2+11x-14)^5}$$

$$f^V(3) = 792$$

Подставим значения в ряд:

$$\begin{aligned} f(x) &= y(3) + y'(3)(x-3) + \frac{y''(3)(x-3)^2}{2!} + \frac{y'''(3)(x-3)^3}{3!} + \frac{y^{IV}(3)(x-3)^4}{4!} + \\ &+ \frac{y^V(3)(x-3)^5}{5!} + \dots = \\ &= 0 + 3 \cdot (x-3) + 3 \cdot \frac{(x-3)^2}{2!} + 18 \cdot \frac{(x-3)^3}{3!} + 90 \cdot \frac{(x-3)^4}{4!} + 792 \cdot \frac{(x-3)^5}{5!} + \dots = \\ &= 0 + 3 \cdot (x-3) + \frac{1 \cdot 3}{2} \cdot (x-3)^2 + \frac{3 \cdot 3}{3} \cdot (x-3)^3 + \frac{5 \cdot 3}{4} \cdot (x-3)^4 \\ &+ \frac{11 \cdot 3}{5} \cdot (x-3)^5 + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{n} (x-3)^n \end{aligned}$$

Найдем область сходимости:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2^n + (-1)^{n+1})(n+1)}{n(2^{n+1} + (-1)^{n+2})} \right| = \frac{1}{2}$$

Рассмотрим граничные точки:

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{n} \geq \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2^n - 1}{n}$$

Сравним ряд с гармоническим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n - 1}{2^n \cdot n}}{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow \text{ряд расходится}$$

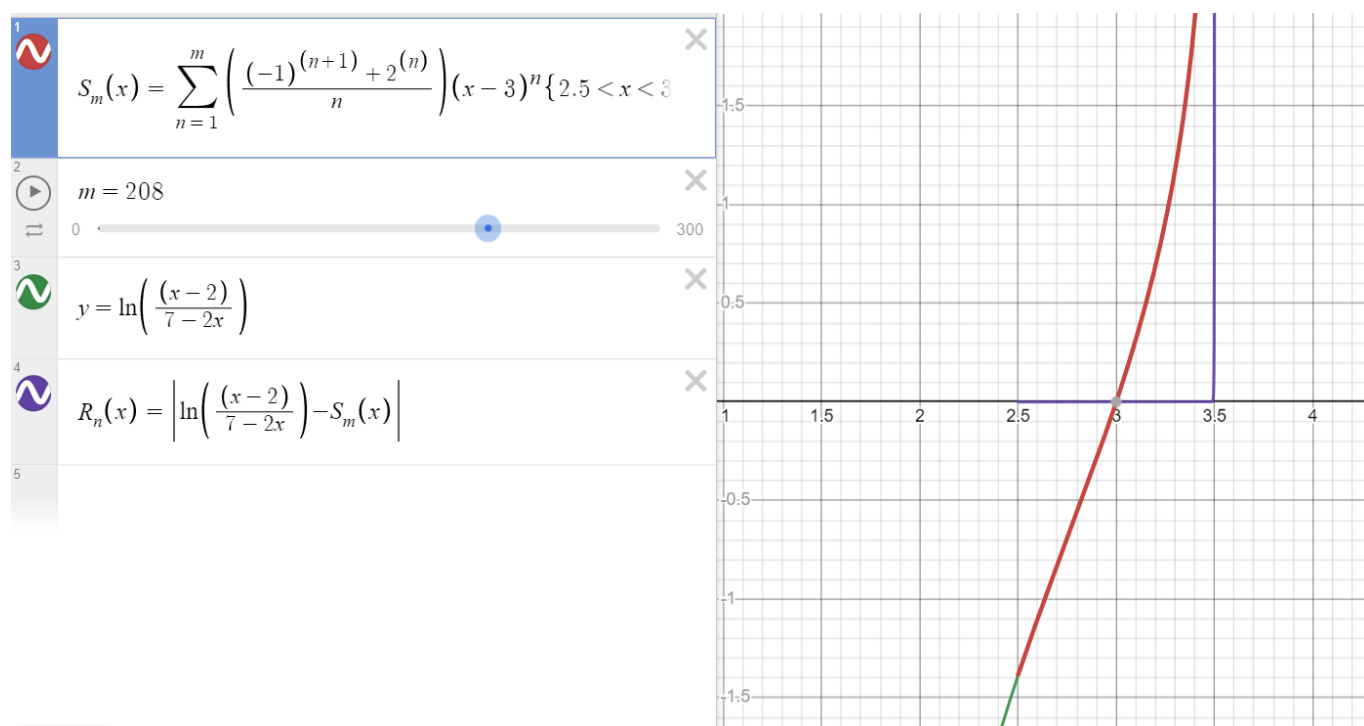
$$\frac{1}{(-2)^n} \cdot \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{n}$$

Рассмотрим первые 3 члена ряда:

$$-\frac{3}{2}, \frac{3}{8}, -\frac{3}{8}$$

Модуль каждого последующего члена ряда не меньше предыдущего, а значит ряд расходится по признаку Лейбница

Таким образом область сходимости исходного ряда: $(2, 5; 3, 5)$



<https://www.desmos.com/calculator/8d2svsbywe?lang=ru>