Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Рассчетно-графическая работа
по дисциплине математический анализ
Интеграл функции одной переменной
Модуль 2
Вариант № 6

Выполнили:
Сиразетдинов А. Н. P3116
Шпинёва У. С. P3116
Лучинкин К.
Преподаватель:
Возианова А. В.

г. Санкт-Петербург
Университет ИТМО
2023г.

Содержание

1 Задание 1. Интегральная сумма **3**

1.1 Интегральная сумма . . . 3

1.2 Последовательность интегральных сумм . . . 4

2 Задание 5. Приближенные вычисления определенного интеграла **6**

2.1 Задание . . . 6

2.2 Метод прямоугольников . . . 6

2.3 Метод трапеций . . . 6

2.4 Метод парабол . . . 6

2.5 Метод Боде . . . 7

2.6 Заключение . . . 7

3 Задание 4. Приложение Рядов. Сиразетдинов Азат. Вариант 28 **8**

3.1 Задание 1 . . . 8

3.2 Задание 2 . . . 8

3.3 Задание 3 . . . 9

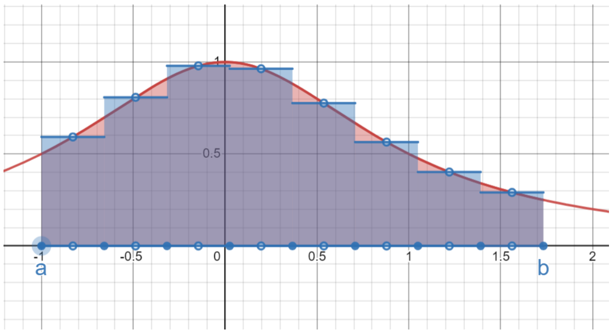
1 Задание 1. Интегральная сумма

1.1 Интегральная сумма

Задание

Исследуйте интегральную сумму функции $\frac{1}{1+x^2}$,заданной на отрезке $\left[-1; \sqrt{3}\right]$

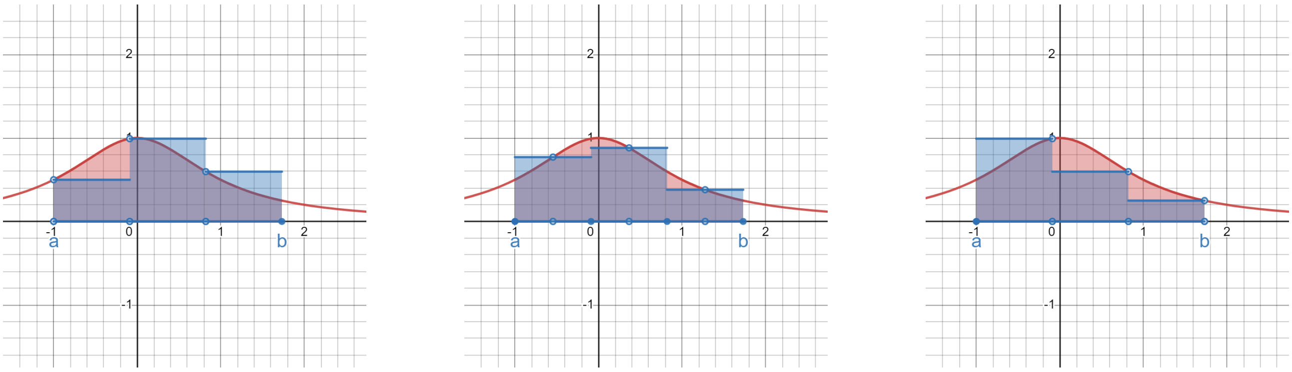
Интегральная сумма функции на заданном отрезке в виде ступенчатой фигуры



`https://www.desmos.com/calculator/w21pp71fpr`

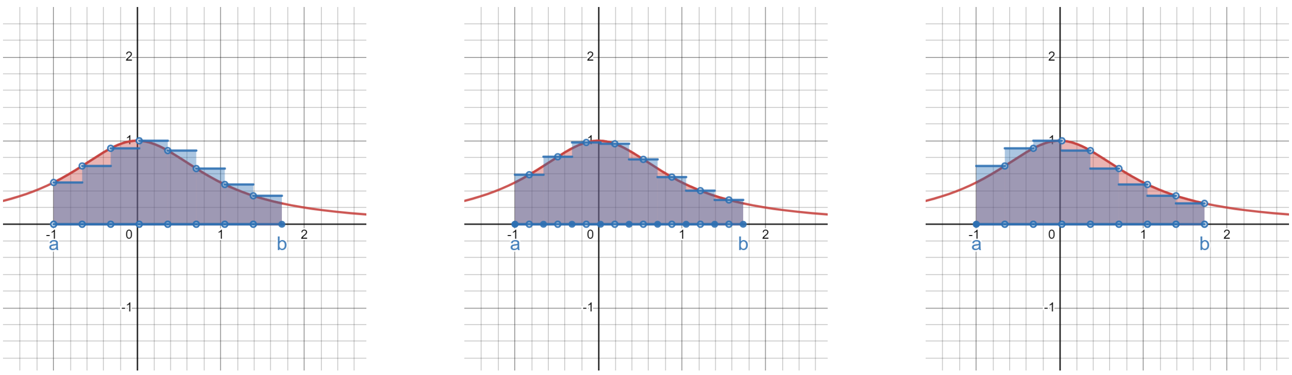
Исследование ступенчатой фигуры

Рассмотрим разбиение на 3, 8 и 50 ступеней:



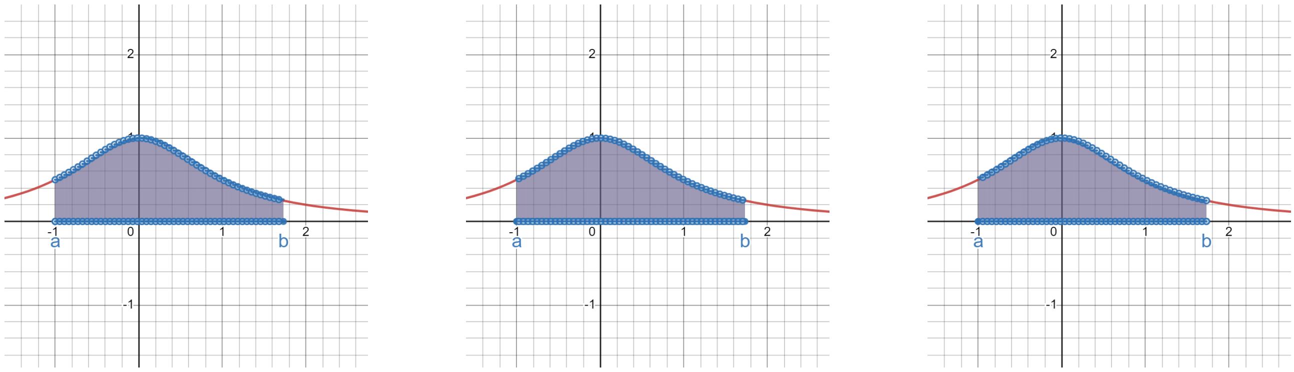
Крайнее левое положение точек | Промежуточное положение точек | Крайнее правое положение точек

Рис. 1: Разбиение на 3 ступени



Крайнее левое положение точек | Промежуточное положение точек | Крайнее правое положение точек

Рис. 2: Разбиение на 8 ступеней



Крайнее левое положение точек Промежуточное положение точек Крайнее правое положение точек

Рис. 3: Разбиение на 50 ступеней

Заключение

В процессе выполнения первой части первого задания были построены ступенчатые фигуры по графику. Ступенчатая фигура тем точнее, чем мельче разбиение и чем ближе выбранные точки к серединам разбиений

1.2 Последовательность интегральных сумм

Интегральная сумма

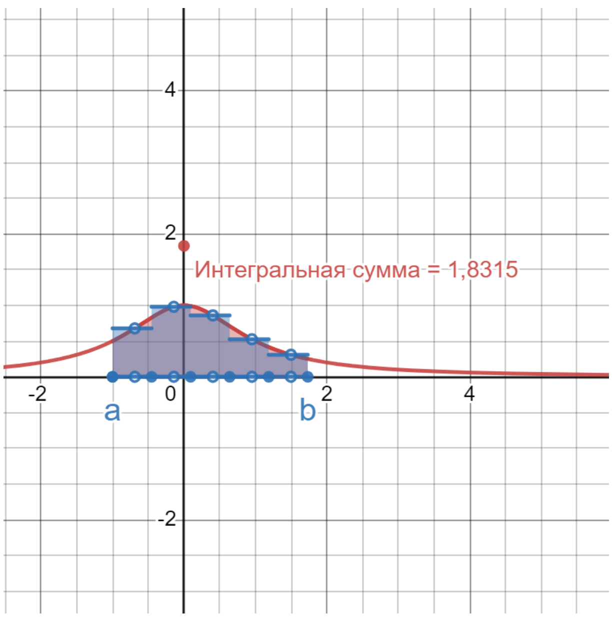
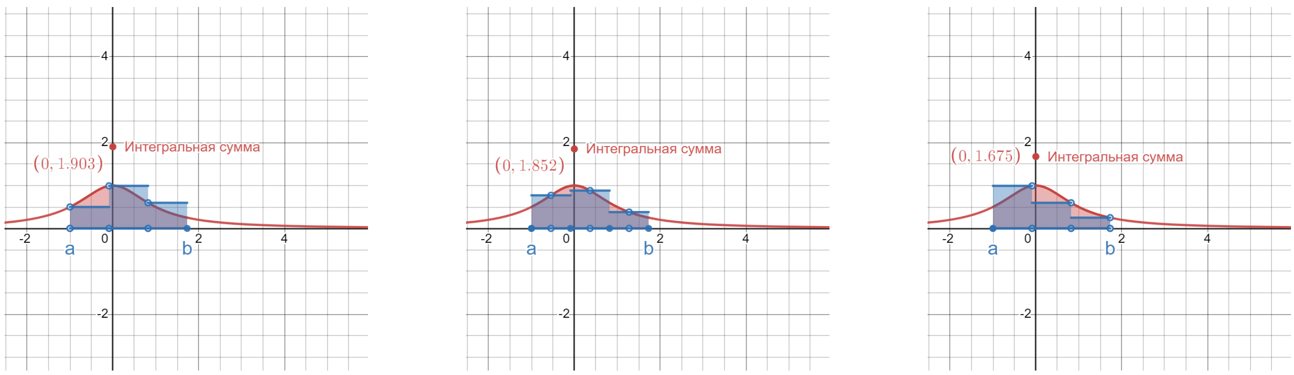


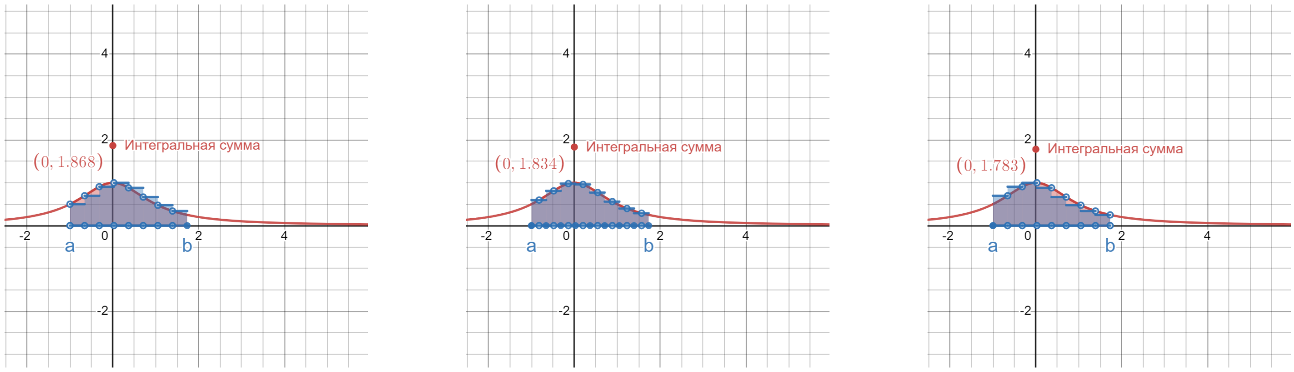
Рис. 4: Подсчет интегральной суммы

Исследование значения с ростом n при различных положениях точек



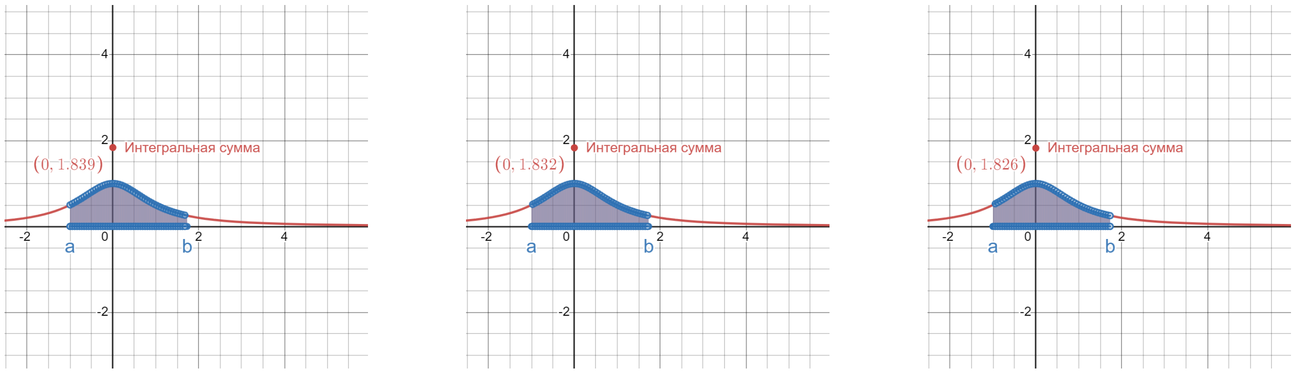
Крайнее левое положение точек Промежуточное положение точек Крайнее правое положение точек

Рис. 5: Разбиение на 3 ступени



Крайнее левое положение точек Промежуточное положение точек Крайнее правое положение точек

Рис. 6: Разбиение на 8 ступеней



Крайнее левое положение точек Промежуточное положение точек Крайнее правое положение точек

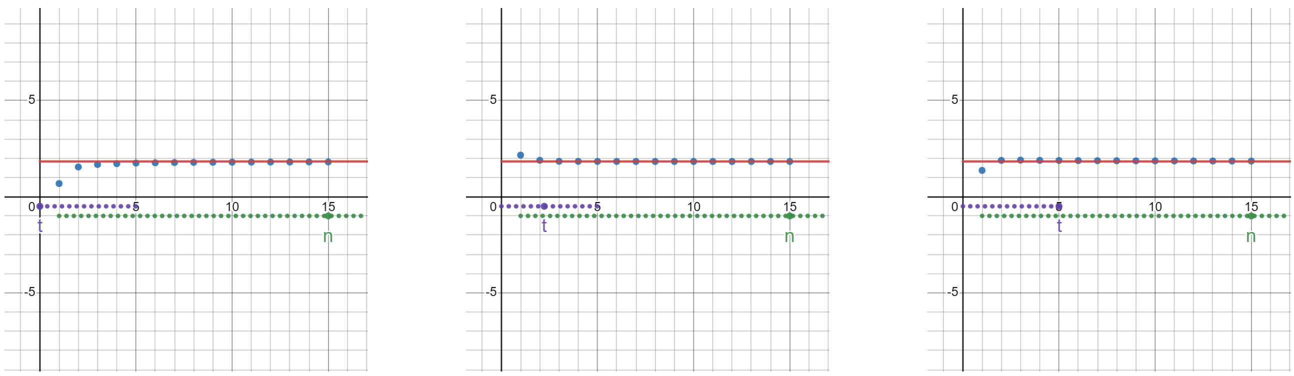
Рис. 7: Разбиение на 50 ступеней

Аналитическое вычисление интеграла

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{12} \approx 1,8326$$

Интегральная сумма тем точнее, чем мельче разбиение и чем ближе выбранные точки к серединам разбиений

Последовательность интегральных сумм



Крайнее левое положение точек Промежуточное положение точек Крайнее правое положение точек

Рис. 8: Зависимость от расположения точек
`https://www.desmos.com/calculator/zrwq9vbkt0`

Заключение

В процессе выполнения части 2 задания 1 были сравнены значения интегральных сумм и аналитического исчисления. Можно сделать вывод, что вычисление определенного интеграла достаточно точное и его точность прямо пропорциональна количеству точек, которые мы выбираем и их близость к середине разбиений

2 Задание 5. Приближенные вычисления определенного интеграла

2.1 Задание

Найти приближенное значение интеграла $\int_0^{10} e^{-x} dx = 0,999955$ методами прямоугольников, трапеций, парабол , Боде при h=1. Сделать анализ полученных результатов.

2.2 Метод прямоугольников

Отрезок $[a;b]$ разбивается на равные промежутки длины h, t - положение точки в разбиении

$$h = \frac{b-a}{n}$$
$$\epsilon_i = x_{i-1} + h * t$$
$$\int_a^b f(x)dx \approx h * \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1} + h * t\right)$$

Требуемая точность достигается при $n = 10\_000$ и $t = 0.5$

```
def rectangle_method(f, a, b, n, t):
  h = (b - a) / n
  result = sum([f(a + (i - t) * h) for i in range(1, n + 1)]) * h
  return result
```

2.3 Метод трапеций

$$x_i = a + ih$$
$$h = \frac{b-a}{n}$$
$$\int_a^b f(x)dx \approx h * \left(\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i\right)$$

Требуемая точность достигается при $n = 10\_000$

```
def trapezoid_method(f, a, b, n):
  h = (b - a) / n
  result = 0.5 * f(a)
    + sum([f(a + i*h) for i in range(1, n)])
    + 0.5 * f(b)
  result *= h
  return result
```

2.4 Метод парабол

$$x_j = a + jh$$
$$h = \frac{b-a}{N}$$
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{N/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{N/2} f(x_{2j-1}) + f(x_N)\right)$$

Требуемая точность достигается при $n = 90$

```
def parabola_method(f, a, b,n):
  h = (b - a) / n
  return (h / 3) * (sum([(f(a + h * (i - 1))
    + 4 * f(a + h * i)
    + f(a + h * (i + 1))) for i in range(1, n, 2)]))
```

2.5 Метод Боде

Имея N разбиений

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x)dx \approx \frac{2h}{45}\left(7(f(x_0)+f(x_N)) + 32\left(\sum_{i\in 1,3,5,\dots,N-1} f(x_i)\right) + 12\left(\sum_{i\in 2,6,10,\dots,N-2} f(x_i)\right) + 14\left(\sum_{i\in 4,8,12,\dots,N-4} f(x_i)\right)\right)$$

Дает точность в 2 знака после запятой

```
def bode_method(f, a, b, h):
  splitting = [(a + h*i) for i in range(0, int((b - a) / h) + 1)]
  n = len(splitting)
  return (2 * h / 45 ) * (7 * (f(splitting[0]) + f(splitting[-1]))
    + 32 * (sum([f(splitting[i]) for i in range(1, n, 2)]))
    + 12 * (sum([f(splitting[i]) for i in range(2, n - 1, 4)]))
    + 14 * (sum([f(splitting[i]) for i in range(4, n - 3, 4)])))
```

2.6 Заключение

	Метод прямоугольникв	Метод трапеций	Метод парабол	Метод Боде
N	10_000	10_000	90	При N = 10 точность не достигнута

Самый удобный, быстрый и точный метод - парабол.

https://colab.research.google.com/drive/1oaMYtnWpOiJltNrdXcKLQt34urXhq8pk?usp=sharing

3 Задание 4. Приложение Рядов. Сиразетдинов Азат. Вариант 28

3.1 Задание 1

Вычислить приближенно значение функции $\cos 48°$ с точностью 0,0001

Возьмем табличное разложение

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\cos 48° = \cos(0,8378)$$

1 член последовательности:

$$\frac{0,8378^0}{1!} \approx 1$$

2 член последовательности:

$$(-1) * \frac{0,8378^2}{2!} \approx -0,35095$$

3 член последовательности:

$$\frac{0,8378^4}{4!} \approx 0,02052$$

4 член последовательности:

$$(-1) * \frac{0,8378^6}{6!} \approx -0,00048$$

4 член последовательности:

$$\frac{0,8378^8}{8!} \approx 0$$

Дальнейшие члены не будут изменять точность

$$\cos(0,8378) \approx 1 - 0,35095 + 0,02052 - 0,00048 \approx 0,66909 \approx 0,6691$$

Проверка:

$$\cos\left(48 \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

$= 0.669130606359$

3.2 Задание 2

Разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью 0,0001

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x^5)}{x^3} dx$$

Возьмем табличное разложение

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x^5)}{x^3} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{5n}}{n}}{x^3} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{5n}}{n x^3} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^{n-1} x^{5n-3}}{n} dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{5n-2}}{n(5n-2)} \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^{5n-2}(5n-2)}$$

Подсчитаем первые члены последовательности:

1 член последовательности:

$$\frac{1}{2^3 * 3} \approx 0,04167$$

2 член последовательности:

$$\frac{-1}{2 * 2^8 * 8} \approx -0,00024$$

3 член последовательности:

$$\frac{1}{3 * 2^{13} * 13} \approx 0$$

Дальнейшие члены не будут изменять точность

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x^5)}{x^3} \approx 0,04167 - 0,00024 = 0,04143 \approx 0,0414$$

Проверка:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln\left(1+x^5\right)}{x^3} dx$$

$= 0.041425604099$

3.3 Задание 3

Найти в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Ограничиться четырьмя членами ряда.

$$y'' = xy' - \ln y$$
$$y(2) = 1$$
$$y'(2) = -1$$

Решение в виде ряда Тейлора:

$$y(x) = y(2) + y'(2)(x-2) + \frac{y''(2)(x-2)^2}{2!} + \frac{y'''(2)(x-2)^3}{3!}$$

1) $y'' = xy' - \ln y$

$$y''(2) = 2y'(2) - \ln y(2) = 2(-1) - \ln 1 = -2$$

2) $y''' = (xy' - \ln y)' = y' + xy'' - \dfrac{1}{y}$

$$y'''(2) = y'(2) + 2y''(2) - \frac{1}{y(2)} = -1 + 2(-2) - 1 = -4$$

Подставим значения в ряд:

$$y(x) = y(2) + y'(2)(x-2) + \frac{y''(2)(x-2)^2}{2!} + \frac{y'''(2)(x-2)^3}{3!} =$$
$$= 1 - (x-2) + \frac{-2(x-2)^2}{2} + \frac{-4(x-2)^3}{6} =$$
$$= 1 - (x-2) - (x-2)^2 - \frac{2(x-2)^3}{3}$$