Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Рассчетно-графическая работа
по дисциплине математический анализ

Интеграл функции одной переменной

Модуль 2
Вариант № 6

Выполнили:
Сиразетдинов А. Н. P3116
Шпинёва У. С. P3116
Лучинкин К.
Преподаватель:
Возианова А. В.

г. Санкт-Петербург
Университет ИТМО
2023г.

Содержание

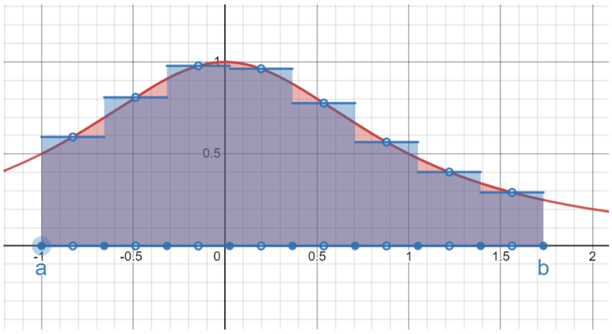
1 Задание 1. Интегральная сумма

1.1 Интегральная сумма

Задание

Исследуйте интегральную сумму функции $\frac{1}{1+x^2}$,заданной на отрезке $\left[-1; \sqrt{3}\right]$

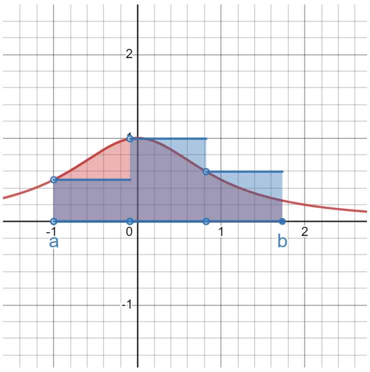
Интегральная сумма функции на заданном отрезке в виде ступенчатой фигуры



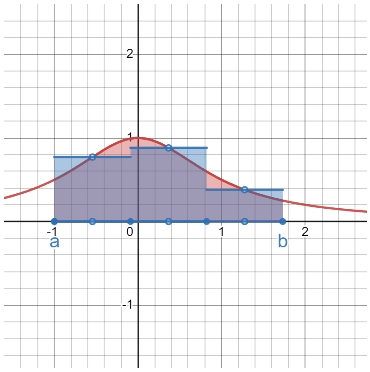
https://www.desmos.com/calculator/w21pp71fpr

Исследование ступенчатой фигуры

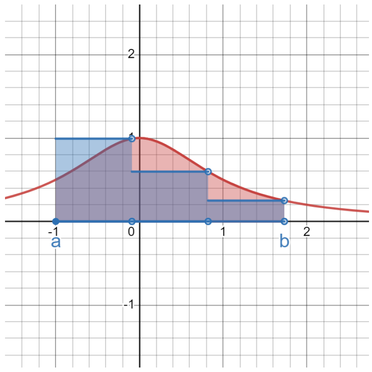
Рассмотрим разбиение на 3, 8 и 50 ступеней:



Крайнее левое положение точек

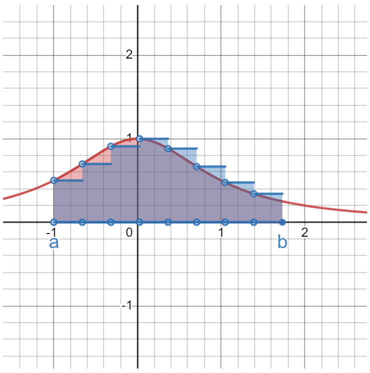


Промежуточное положение точек

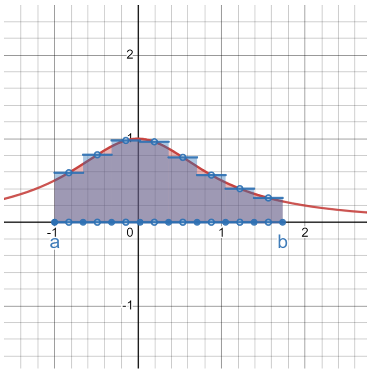


Крайнее правое положение точек

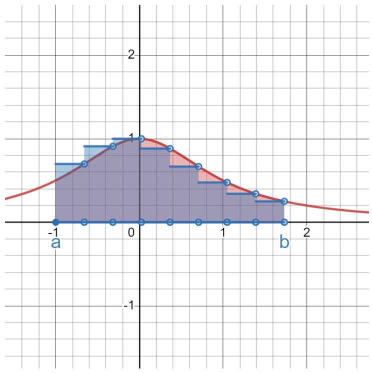
Рис. 1: Разбиение на 3 ступени



Крайнее левое положение точек

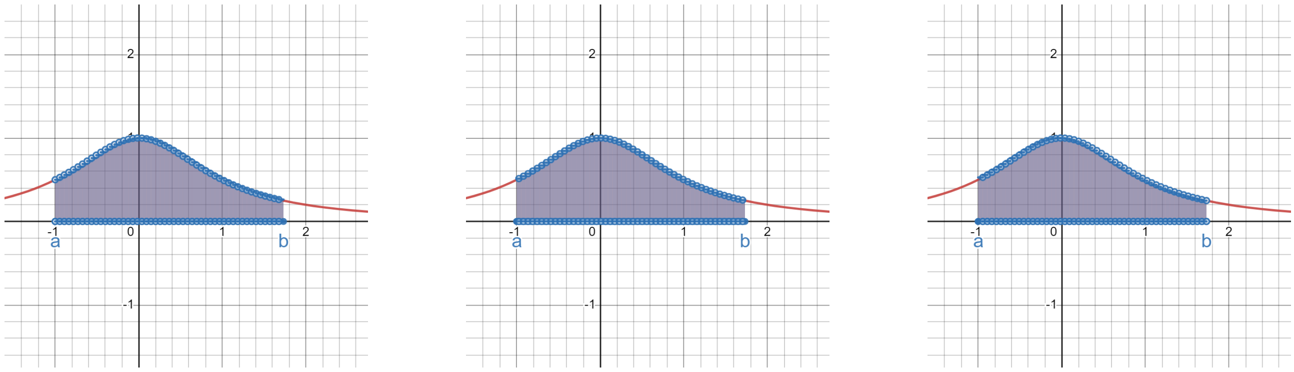


Промежуточное положение точек



Крайнее правое положение точек

Рис. 2: Разбиение на 8 ступеней



Крайнее левое положение точек Промежуточное положение точек Крайнее правое положение точек

Рис. 3: Разбиение на 50 ступеней

Заключение

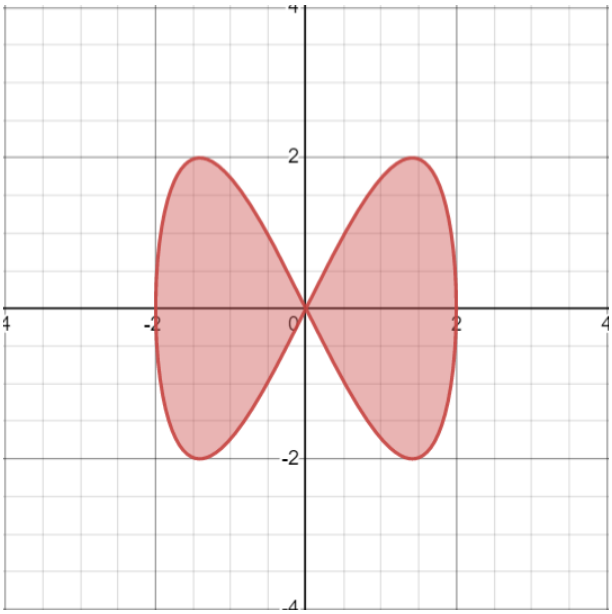
В процессе выполнения первого задания были построены ступенчатые фигуры по графику и исследованы зависимости точности вычислений от количества и положения точек. Точность вычисления прямо пропорциональна количеству точек, которые мы берем на отрезке. Так же следует брать точки приближенные к середине дробления, потому что в иных случаях результат получится менее точным.

2 Задание 2. Площадь фигуры

Задание

Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой Лиссажу $x = 2sint$, $y = 2sin2t$

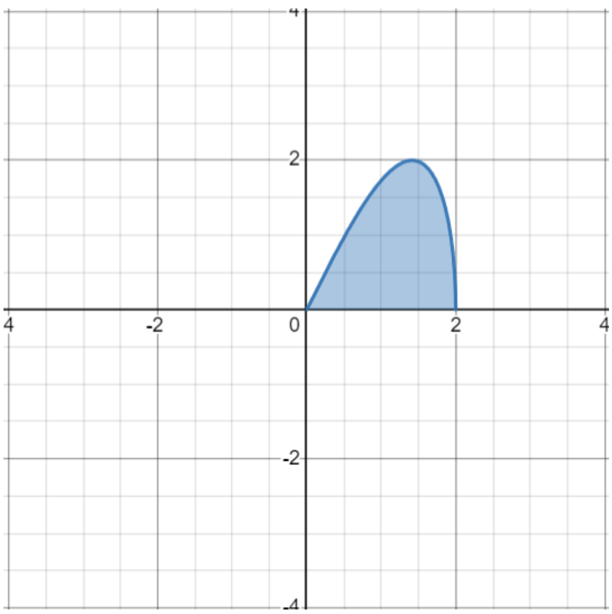
График кривой:



https://www.desmos.com/calculator/2y0dajpihq

Кривая симметрична относительно обеих осей координат: если заменить t на $(\pi - t)$, то переменная x не меняется, а y изменяет только свой знак; следовательно, кривая симметрична относительно оси Ox. При замене же t на $(\pi + t)$ переменная y не меняется, а x меняет только свой знак. Это значит, что кривая симметрична относительно оси Oy.

В силу симметричности фигуры, для нахождения ее площади достаточно рассмотреть только четверть, значение на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$



Тогда искомая площадь будет равна полученному результату, умноженному на 4:

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(x)x'_t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot sin2t \cdot 2 \cdot costdt = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot sint \cdot cos^2tdt = -32\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2td(cost) = -32 \cdot \frac{cos^3t}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{3}$$

3 Задание 4. Приложение Рядов. Шпинева Ульяна. Вариант 6

3.1 Задание 1

Вычислить приближенно значение функции $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ с точностью 0,0001

Возьмем табличное разложение
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
$e^{-\frac{2}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{2}{3})^n}{n!}$
$n = 0:$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^0}{0!} = 1$$

$n = 1:$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^1}{1!} \approx -0,66667$$

$n = 2:$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^2}{2!} \approx 0,22222$$

$n = 3:$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^3}{3!} \approx -0,04938$$

$n = 4:$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^4}{4!} \approx 0,00823$$

$n = 5:$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^5}{5!} \approx -0,00109$$

$n = 6:$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^6}{6!} \approx 0,00012$$

$n = 7:$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^7}{7!} \approx -0,00001$$

Дальнейшие члены не будут изменять точность
$\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} \approx 1 - 0,66667 + 0,22222 - 0,04938 + 0,00823 - 0,00109 + 0,00012 - 0,00001 = 0,51342$

Проверка:

$$\frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}$$

$$= 0.513417119033$$

3.2 Задание 2

Разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью 0,0001

$$\int_0^{\frac{1}{2}} ln(1+x^4)dx$$

Возьмем табличное разложение

$$\int_0^{\frac{1}{2}} ln(1+x^4)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{4n}}{n}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^{n-1}x^{4n}}{n}dx == \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{4n+1}}{n(4n+1)}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^{4n+1}(4n+1)}$$

Подсчитаем первые члены последовательности:

$$n = 1:$$
$$\frac{1}{2^5 \cdot 5} \approx 0,00625$$
$$n = 2:$$
$$\frac{-1}{2 \cdot 2^9 \cdot 9} \approx -0,00011$$
$$n = 3:$$
$$\frac{1}{3 \cdot 2^{13} \cdot 13} \approx 0$$

Дальнейшие члены не будут изменять точность

$$\int_0^{\frac{1}{2}} ln(1+x^4)dx \approx 0,00625 - 0,00011 = 0,00614$$

Проверка:

$$\int_0^{0.5} \ln\left(1+x^4\right)dx$$

$$= 0.00614451521797$$

3.3 Задание 3

Найти в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Ограничиться четырьмя членами ряда.

$$y' = y^2 - 3x$$
$$y(1) = 2$$

Решение в виде ряда Тейлора:

$$y(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)(x-1)^2}{2!} + \frac{y'''(1)(x-1)^3}{3!}$$

1) $y' = y^2 - 3x$

$y'(1) = 2^2 - 3 = 1$

2) $y'' = (y^2 - 3x)' = 2yy' - 3$

$y''(1) = 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 = 1$

3) $y''' = (2yy' - 3)' = 2y'y' + 2yy''$

$y'''(1) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Подставим значения в ряд:

$$y(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)(x-1)^2}{2!} + \frac{y'''(1)(x-1)^3}{3!} =$$

$$= 2 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^3$$

4 Задание 3. Ряд Тейлора

4.1 Задание

Исследуйте ряд Тейлора функции в точке. Изобразите графически несколько различных частичных сумм ряда и график исходной функции. Проведите анализ полученных результатов.

$$f(x) = ln(\frac{x-2}{7-2x}), \quad x_0 = 3$$

Найдем первые 5 производных и их значения в точке x_0

$f(3) = ln(1) = 0$

1) $f'(x) = \dfrac{3}{(x-2)(7-2x)}$

$f'(3) = 3$

2) $f''(x) = \dfrac{12x-33}{(-2x^2+11x-14)^2}$

$f''(3) = 3$

3) $f'''(x) = \dfrac{72x^2-396x+558}{(-2x^2+11x-14)^3}$

$f'''(3) = 18$

4) $f^{IV}(x) = \dfrac{576x^3-4752x^2+13392x-12870}{(-2x^2+11x-14)^4}$

$f^{IV}(3) = 90$

5) $f^{V}(x) = \dfrac{5760x^4-63360x^3+267840x^2-514800x+378792}{(-2x^2+11x-14)^5}$

$f^{V}(3) = 792$

Подставим значения в ряд:

$$f(x) = y(3) + y'(3)(x-3) + \frac{y''(3)(x-3)^2}{2!} + \frac{y'''(3)(x-3)^3}{3!} + \frac{y^{IV}(3)(x-3)^4}{4!} +$$
$$+ \frac{y^{V}(3)(x-3)^5}{5!} + \cdots =$$
$$= 0 + 3\cdot(x-3) + 3\cdot\frac{(x-3)^2}{2!} + 18\cdot\frac{(x-3)^3}{3!} + 90\cdot\frac{(x-3)^4}{4!} + 792\cdot\frac{(x-3)^5}{5!} + \cdots =$$
$$= 0 + 3\cdot(x-3) + \frac{1\cdot 3}{2}\cdot(x-3)^2 + \frac{3\cdot 3}{3}\cdot(x-3)^3 + \frac{5\cdot 3}{4}\cdot(x-3)^4$$
$$+ \frac{11\cdot 3}{5}\cdot(x-3)^5 + \cdots =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{n}(x-3)^n$$

Найдем область сходимости:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2^n+(-1)^{n+1})(n+1)}{n(2^{n+1}+(-1)^{n+2})}\right|=\frac{1}{2}$$

Рассмотрим граничные точки:

$$\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{n}\geq\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2^n-1}{n}$$

Сравним ряд с гармоническим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n-1}{2^n\cdot n}}{\frac{1}{n}}=1 => \text{ряд расходится}$$

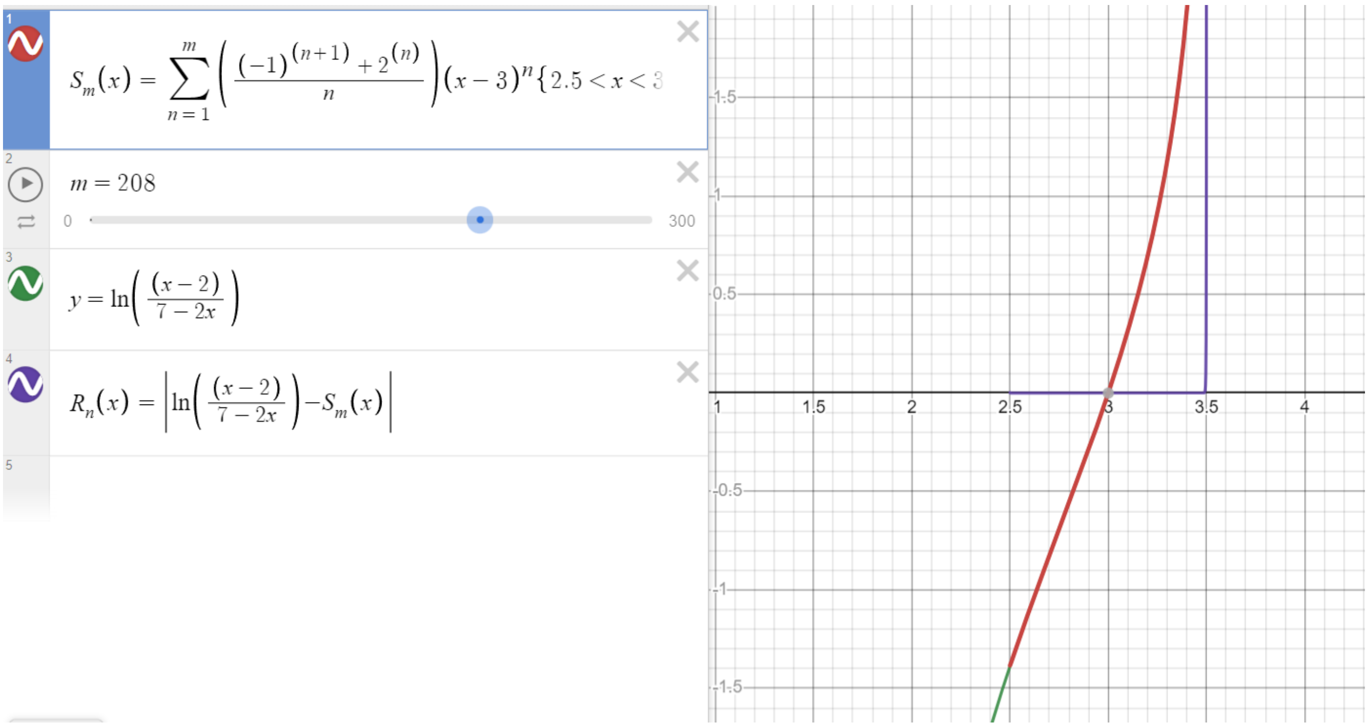
$$\frac{1}{(-2)^n}\cdot\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{n}$$

Рассмотрим первые 3 члена ряда:

$$-\frac{3}{2},\frac{3}{8},-\frac{3}{8}$$

Модуль каждого последующего члена ряда не меньше предыдущего, а значит ряд расходится по признаку Лейбница

Таким образом область сходимости исходного ряда: $(2,5;3,5)$



https://www.desmos.com/calculator/8d2svsbywe?lang=ru