Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Рассчетно-графическая работа
по дисциплине математический анализ
Интеграл функции одной переменной
Модуль 2
Вариант № 6

Выполнили:
Сиразетдинов А. Н. P3116
Шпинёва У. С. P3116
Лучинкин К. С. P3130.
Преподаватель:
Возианова А. В.

г. Санкт-Петербург
Университет ИТМО
2023г.

Содержание

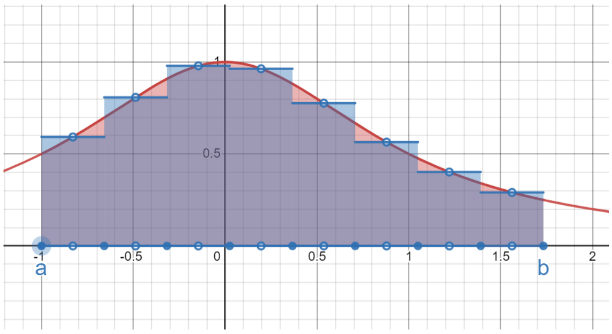
1 Задание 1. Интегральная сумма

1.1 Интегральная сумма

Задание

Исследуйте интегральную сумму функции $\frac{1}{1+x^2}$,заданной на отрезке $\left[-1; \sqrt{3}\right]$

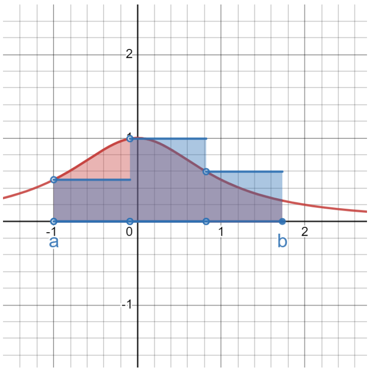
Интегральная сумма функции на заданном отрезке в виде ступенчатой фигуры



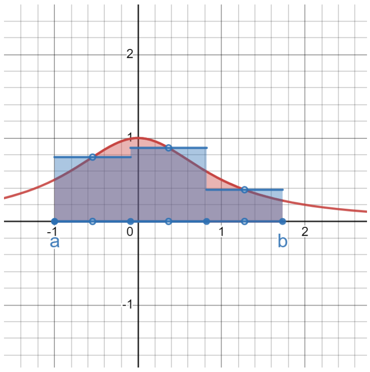
`https://www.desmos.com/calculator/w21pp71fpr`

Исследование ступенчатой фигуры

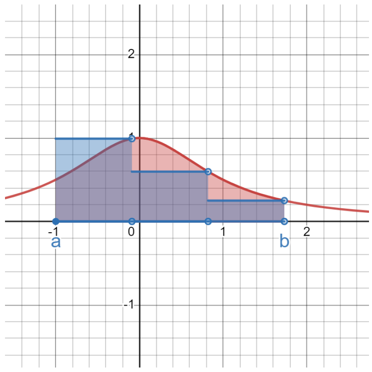
Рассмотрим разбиение на 3, 8 и 50 ступеней:



Крайнее левое положение точек

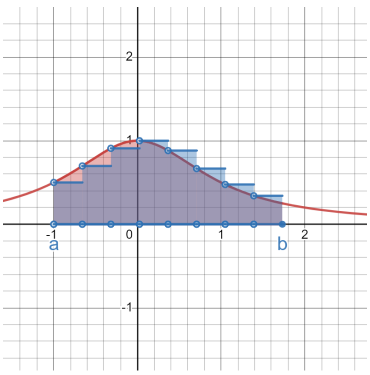


Промежуточное положение точек

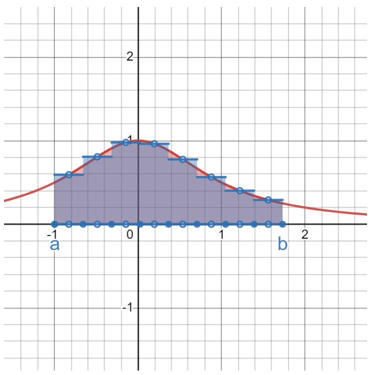


Крайнее правое положение точек

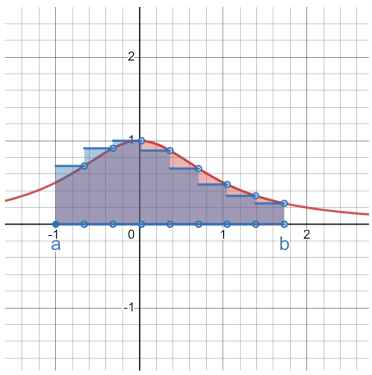
Рис. 1: Разбиение на 3 ступени



Крайнее левое положение точек

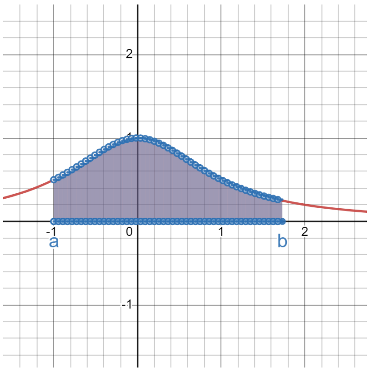


Промежуточное положение точек

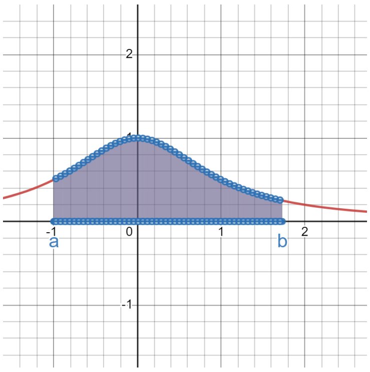


Крайнее правое положение точек

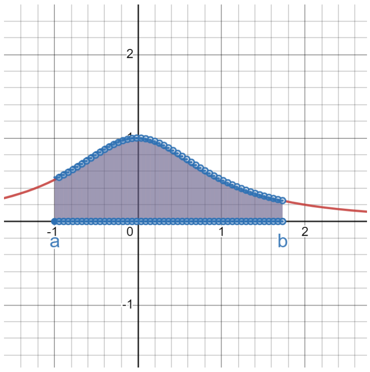
Рис. 2: Разбиение на 8 ступеней



Крайнее левое положение точек



Промежуточное положение точек



Крайнее правое положение точек

Рис. 3: Разбиение на 50 ступеней

Заключение

В процессе выполнения первой части первого задания были построены ступенчатые фигуры по графику. Ступенчатая фигура тем точнее, чем мельче разбиение и чем ближе выбранные точки к серединам разбиений

1.2 Последовательность интегральных сумм

Интегральная сумма

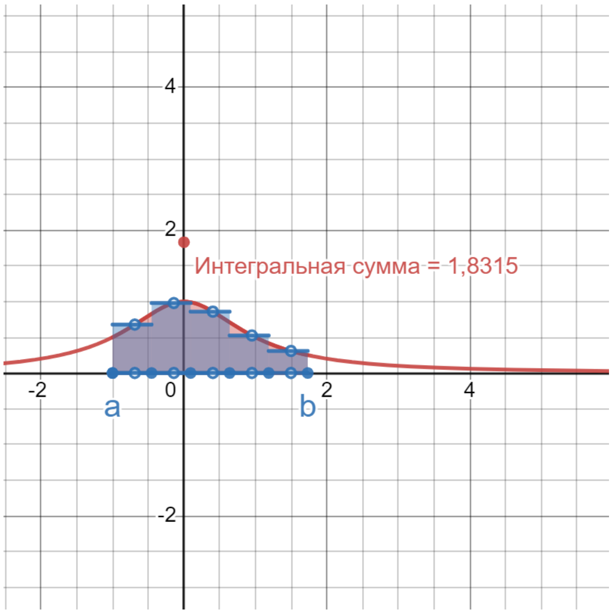
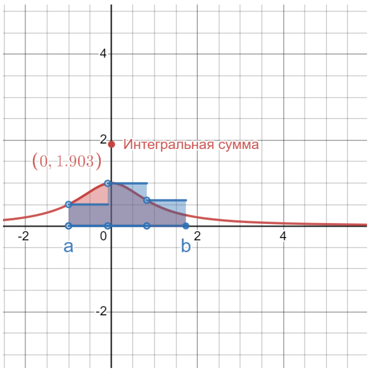
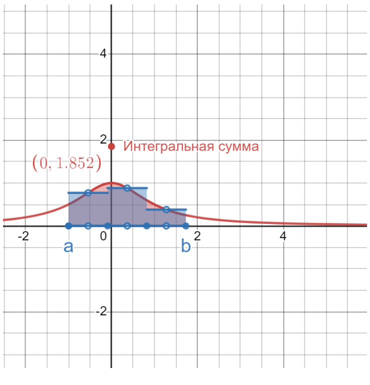


Рис. 4: Подсчет интегральной суммы

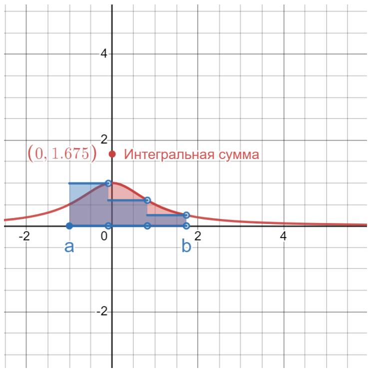
Исследование значения с ростом n при различных положениях точек



Крайнее левое положение точек

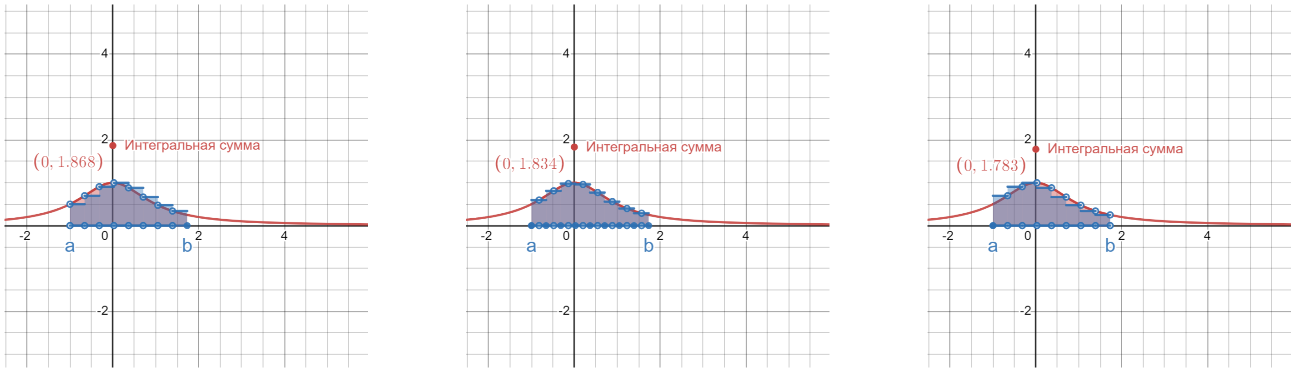


Промежуточное положение точек



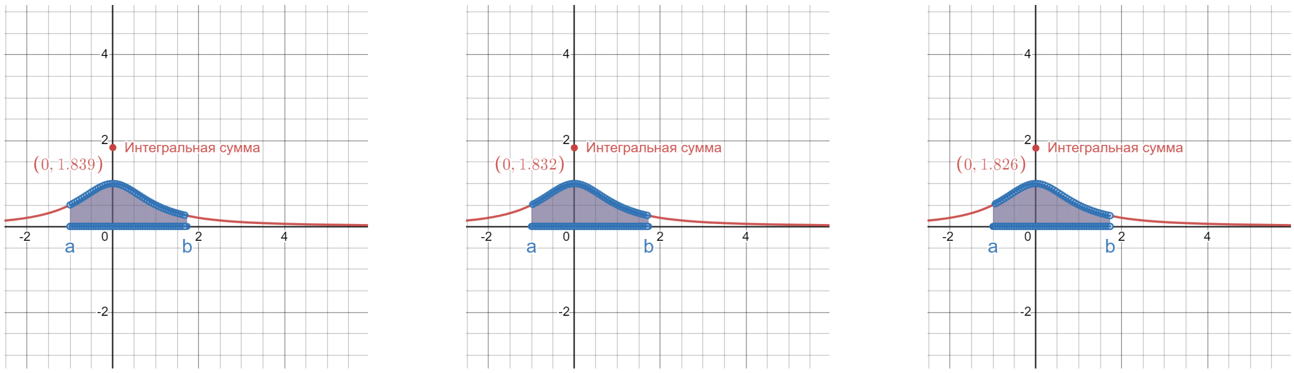
Крайнее правое положение точек

Рис. 5: Разбиение на 3 ступени



Крайнее левое положение точек | Промежуточное положение точек | Крайнее правое положение точек

Рис. 6: Разбиение на 8 ступеней



Крайнее левое положение точек | Промежуточное положение точек | Крайнее правое положение точек

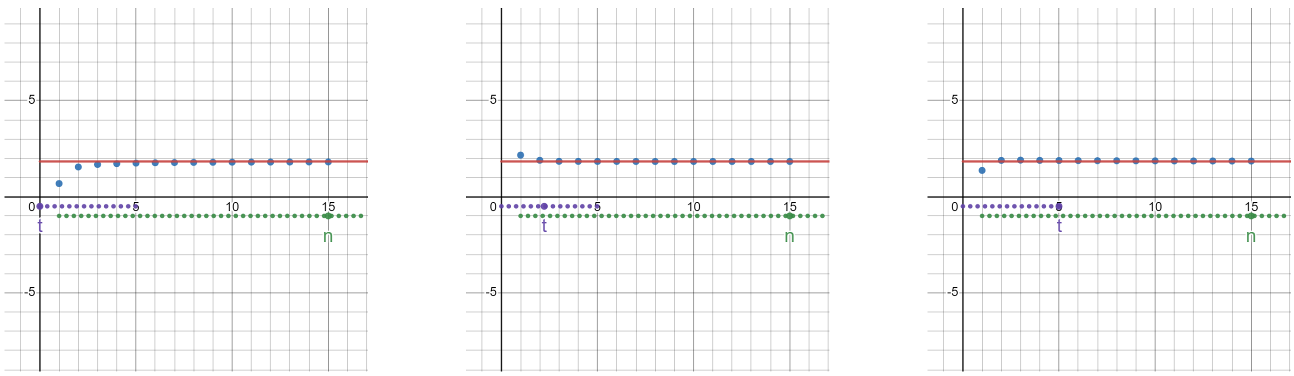
Рис. 7: Разбиение на 50 ступеней

Аналитическое вычисление интеграла

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{12} \approx 1,8326$$

Интегральная сумма тем точнее, чем мельче разбиение и чем ближе выбранные точки к серединам разбиений

Последовательность интегральных сумм



Крайнее левое положение точек | Промежуточное положение точек | Крайнее правое положение точек

Рис. 8: Зависимость от расположения точек
`https://www.desmos.com/calculator/zrwq9vbkt0`

Заключение

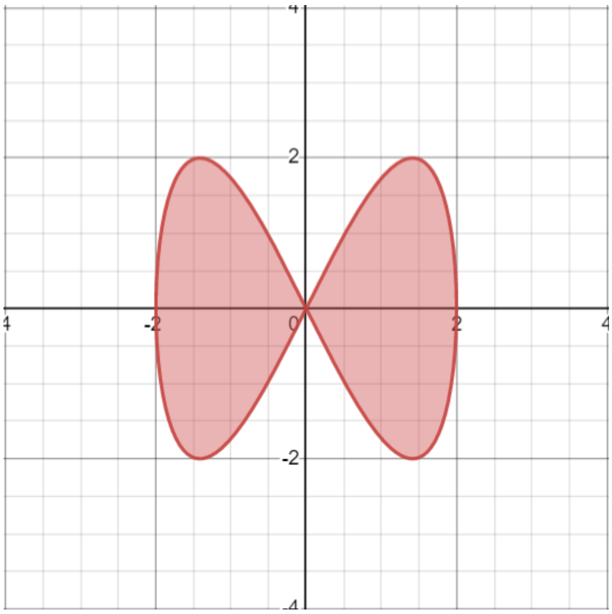
В процессе выполнения части 2 задания 1 были сравнены значения интегральных сумм и аналитического исчисления. Можно сделать вывод, что вычисление определенного интеграла достаточно точное и его точность прямо пропорциональна количеству точек, которые мы выбираем и их близость к середине разбиений

2 Задание 2. Площадь фигуры

Задание

Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой Лиссажу $x = 2sint$, $y = 2sin2t$

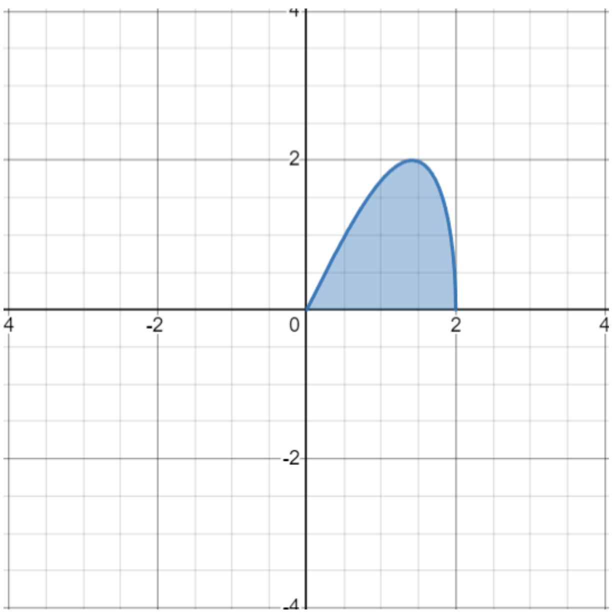
График кривой:



https://www.desmos.com/calculator/2y0dajpihq

Кривая симметрична относительно обеих осей координат: если заменить t на $(\pi - t)$, то переменная x не меняется, а y изменяет только свой знак; следовательно, кривая симметрична относительно оси Ox. При замене же t на $(\pi + t)$ переменная y не меняется, а x меняет только свой знак. Это значит, что кривая симметрична относительно оси Oy.

В силу симметричности фигуры, для нахождения ее площади достаточно рассмотреть только четверть, значение на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$



Тогда искомая площадь будет равна полученному результату, умноженному на 4:

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(x)x'_t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot sin2t \cdot 2 \cdot costdt = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot sint \cdot cos^2tdt = -32\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2td(cost) = -32 \cdot \frac{cos^3t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{3}$$

3 Задание 3. Несобственный интеграл

Исследуем сходимость $\int_1^\infty \frac{dx}{(x^\alpha)1)arctg(x)}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x^\alpha+1)arctg(x)(\frac{1}{x^\alpha})} < lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x^\alpha+1)\frac{\pi}{2}(\frac{1}{x^\alpha})},$$

Поскольку $\operatorname{arctg}(x) < \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x^\alpha+1)\frac{\pi}{2}(\frac{1}{x^\alpha})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\frac{\pi}{2}x^\alpha+\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

Тогда по предельному признаку сравнения $\int_1^\infty \frac{dx}{(x^\alpha)+1)\operatorname{arctg}(x)}$ сходится или расходится одновременно с $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$. Таким образом $\int_1^\infty \frac{dx}{(x^\alpha)+1)\operatorname{arctg}(x)}$ расходится при $\alpha \leq 1$ и сходится при $\alpha > 1$

4 Задание 4. Приложения определенного интеграла

Вычислить работу, необходимую для извлечения деревянной прямоугольной балки, плавающей в воде, если длина балки 5 м, ширина 40 см , высота 20 см, а ее удельный вес равен 0,8.
Удельный вес $\gamma = \frac{P}{V}$, где P - вес балки, V - объём.
Поскольку балка плавает в воде вес балки равен весу воды, вытесняемой подводной частью балки.
т.е. $0.8 \cdot (0.4 \cdot 5 \cdot 0.2) = 1 \cdot (0.4 \cdot 5 \cdot H)$, откуда $H = 0.16$, , поскольку удельный вес воды - 1
значит под водой находится 16см балки.
Чтобы достать балку из воды необходимо понять её на 16см = 0.16м.
F(h) - сила, которую надо приложить, чтобы поднять балку на высоту h.
$F(h) = \gamma \cdot (0.4 \cdot 5 \cdot 0.2) - 1 \cdot (0.16 - h) \cdot 0.4 \cdot 5 \cdot$ Таким образом, работа необходимую для извлечения балки $A = \int_0^{0.1} (F(h))$

$$\int_0^{0.16} (0.32 - 2(0.16 - h))dh = \int_0^{0.16} 2hdh = 0.0256\text{Дж}$$

5 Задание 5. Приближенные вычисления определенного интеграла

5.1 Задание

Найти приближенное значение интеграла $\int_0^{10} e^{-x}dx = 0,999955$ методами прямоугольников, трапеций, парабол , Боде при h=1. Сделать анализ полученных результатов.

5.2 Метод прямоугольников

Отрезок $[a;b]$ разбивается на равные промежутки длины h, t - положение точки в разбиении

$$h = \frac{b-a}{n}$$
$$\epsilon_i = x_{i-1} + h * t$$
$$\int_a^b f(x)dx \approx h * \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1} + h * t\right)$$

Полученное значение $0,959474$, погрешность $0,040481$

```
def rectangle_method(f, a, b, n, t):
  h = (b - a) / n
  result = sum([f(a + (i - t) * h) for i in range(1, n + 1)]) * h
  return result
```

5.3 Метод трапеций

$$x_i = a + ih$$
$$h = \frac{b-a}{n}$$
$$\int_a^b f(x)dx \approx h * \left(\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i\right)$$

Полученное значение $1,081928$, погрешность $0,081973$

```
def trapezoid_method(f, a, b, n):
  h = (b - a) / n
  result = 0.5 * f(a)
    + sum([f(a + i*h) for i in range(1, n)])
    + 0.5 * f(b)
  result *= h
  return result
```

5.4 Метод парабол

$$x_j = a + jh$$
$$h = \frac{b-a}{N}$$
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{N/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{N/2} f(x_{2j-1}) + f(x_N)\right)$$

Полученное значение 1.004941, погрешность $0,004986$

```
def parabola_method(f, a, b,n):
  h = (b - a) / n
  return (h / 3) * (sum([(f(a + h * (i - 1))
    + 4 * f(a + h * i)
    + f(a + h * (i + 1))) for i in range(1, n, 2)]))
```

5.5 Метод Боде

Имея N разбиений

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x)dx \approx \frac{2h}{45}\left(7(f(x_0)+f(x_N))+32\left(\sum_{i\in 1,3,5,\ldots,N-1} f(x_i)\right)+12\left(\sum_{i\in 2,6,10,\ldots,N-2} f(x_i)\right)\right.$$
$$\left.+14\left(\sum_{i\in 4,8,12,\ldots,N-4} f(x_i)\right)\right)$$

Полученное значение $1,001092$, погрешность $0,001137$

```
def bode_method(f, a, b, h):
  splitting = [(a + h*i) for i in range(0, int((b - a) / h) + 1)]
  n = len(splitting)
  return (2 * h / 45 ) * (7 * (f(splitting[0]) + f(splitting[-1]))
    + 32 * (sum([f(splitting[i]) for i in range(1, n, 2)]))
    + 12 * (sum([f(splitting[i]) for i in range(2, n - 1, 4)]))
    + 14 * (sum([f(splitting[i]) for i in range(4, n - 3, 4)])))
```

5.6 Заключение

	Метод прямоугольникв	Метод трапеций	Метод парабол	Метод Боде
Значение	0,959474	1,081928	1.004941	1,001092
Погрешность	0,040481	0,081973	0,004986	0,001137

Самый точный метод - Боде. Компромисс между сложностью скоростью и точностью - парабол, потому что его точность соизмерима с методом Боде, но вычисляется он быстрее

https://colab.research.google.com/drive/1oaMYtnWpOiJltNrdXcKLQt34urXhq8pk?usp=sharing

6 Задание 3. Ряд Тейлора

6.1 Задание

Исследуйте ряд Тейлора функции в точке. Изобразите графически несколько различных частичных сумм ряда и график исходной функции. Проведите анализ полученных результатов.

$$f(x) = ln(\frac{x-2}{7-2x}), \quad x_0 = 3$$

Найдем первые 5 производных и их значения в точке x_0

$f(3) = ln(1) = 0$

1) $f'(x) = \dfrac{3}{(x-2)(7-2x)}$

$f'(3) = 3$

2) $f''(x) = \dfrac{12x-33}{(-2x^2+11x-14)^2}$

$f''(3) = 3$

3) $f'''(x) = \dfrac{72x^2-396x+558}{(-2x^2+11x-14)^3}$

$f'''(3) = 18$

4) $f^{IV}(x) = \dfrac{576x^3-4752x^2+13392x-12870}{(-2x^2+11x-14)^4}$

$f^{IV}(3) = 90$

5) $f^{V}(x) = \dfrac{5760x^4-63360x^3+267840x^2-514800x+378792}{(-2x^2+11x-14)^5}$

$f^{V}(3) = 792$

Подставим значения в ряд:

$$f(x) = y(3) + y'(3)(x-3) + \frac{y''(3)(x-3)^2}{2!} + \frac{y'''(3)(x-3)^3}{3!} + \frac{y^{IV}(3)(x-3)^4}{4!} +$$
$$+ \frac{y^{V}(3)(x-3)^5}{5!} + \dots =$$
$$= 0 + 3\cdot(x-3) + 3\cdot\frac{(x-3)^2}{2!} + 18\cdot\frac{(x-3)^3}{3!} + 90\cdot\frac{(x-3)^4}{4!} + 792\cdot\frac{(x-3)^5}{5!} + \dots =$$
$$= 0 + 3\cdot(x-3) + \frac{1\cdot 3}{2}\cdot(x-3)^2 + \frac{3\cdot 3}{3}\cdot(x-3)^3 + \frac{5\cdot 3}{4}\cdot(x-3)^4$$
$$+ \frac{11\cdot 3}{5}\cdot(x-3)^5 + \dots =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{n}(x-3)^n$$

Найдем область сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2^n+(-1)^{n+1})(n+1)}{n(2^{n+1}+(-1)^{n+2})}\right| = \frac{1}{2}$$

Рассмотрим граничные точки:

$$\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{n} \geq \frac{1}{2^n}\cdot\frac{2^n-1}{n}$$

Сравним ряд с гармоническим:

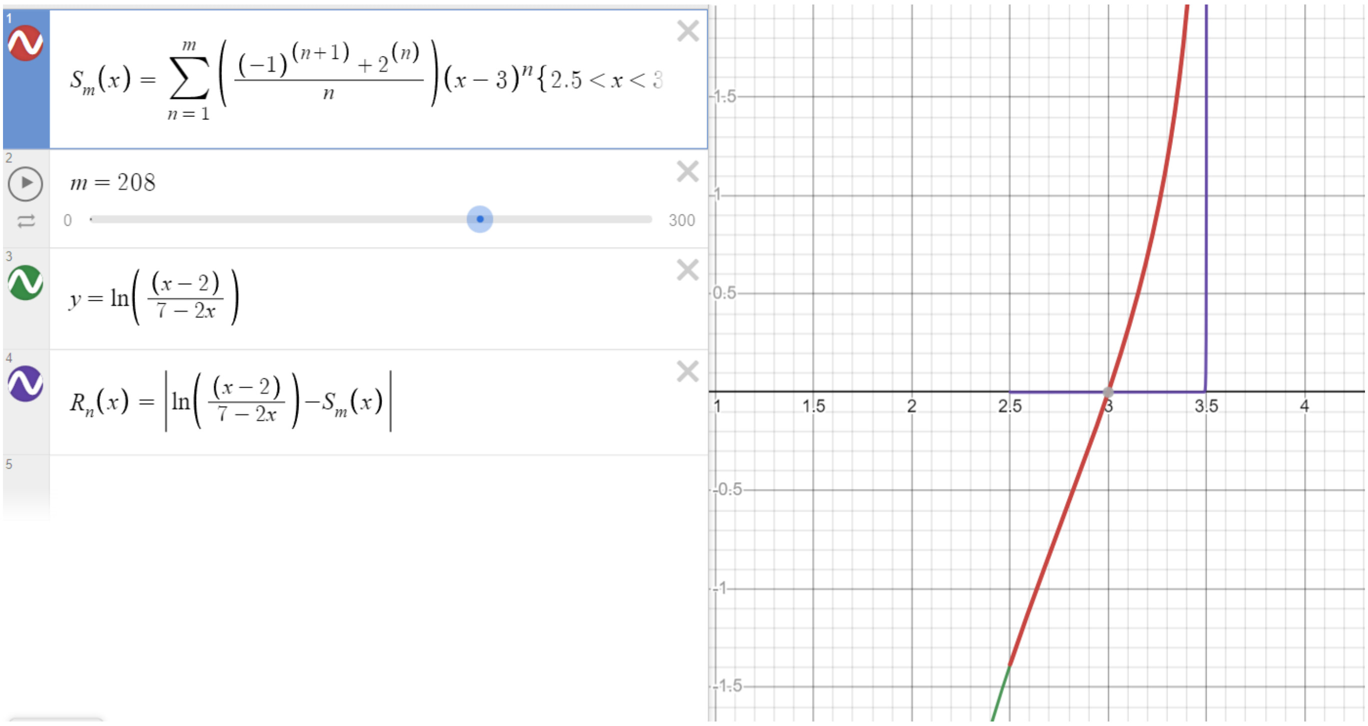
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n-1}{2^n\cdot n}}{\frac{1}{n}} = 1 => \text{ряд расходится}$$

$$\frac{1}{(-2)^n}\cdot\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{n(-2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n(-1)^n 2^n}+\frac{(-1)^{n+1}}{n(-2)^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$$

Получилась разность сходящихся рядов, а значит точка 2,5 входит в область сходимости ряда

Таким образом область сходимости исходного ряда: $[2,5;3,5)$



https://www.desmos.com/calculator/8d2svsbywe?lang=ru

7 Задание 4. Приложение Рядов. Сиразетдинов Азат. Вариант 28

7.1 Задание 1

Вычислить приближенно значение функции $\cos 48°$ с точностью 0,0001

Возьмем табличное разложение

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$
$$\cos 48° = \cos(0,8378)$$

1 член последовательности:

$$\frac{0,8378^0}{1!} \approx 1$$

2 член последовательности:

$$(-1) * \frac{0,8378^2}{2!} \approx -0,35095$$

3 член последовательности:

$$\frac{0,8378^4}{4!} \approx 0,02052$$

4 член последовательности:

$$(-1) * \frac{0,8378^6}{6!} \approx -0,00048$$

4 член последовательности:

$$\frac{0,8378^8}{8!} \approx 0$$

Дальнейшие члены не будут изменять точность

$$\cos(0,8378) \approx 1 - 0,35095 + 0,02052 - 0,00048 \approx 0,66909 \approx 0,6691$$

Проверка:

$$\cos\left(48 \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$
$$= 0.669130606359$$

7.2 Задание 2

Разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью 0,0001

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x^5)}{x^3} dx$$

Возьмем табличное разложение

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x^5)}{x^3} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{5n}}{n}}{x^3} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{5n}}{n x^3} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^{n-1} x^{5n-3}}{n} dx =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{5n-2}}{n(5n-2)} \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^{5n-2} (5n-2)}$$

Подсчитаем первые члены последовательности:

1 член последовательности:

$$\frac{1}{2^3 * 3} \approx 0,04167$$

2 член последовательности:

$$\frac{-1}{2 * 2^8 * 8} \approx -0,00024$$

3 член последовательности:

$$\frac{1}{3 * 2^{13} * 13} \approx 0$$

Дальнейшие члены не будут изменять точность

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x^5)}{x^3} \approx 0,04167 - 0,00024 = 0,04143 \approx 0,0414$$

Проверка:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln\left(1+x^5\right)}{x^3}\,dx$$

$$= 0.041425604099$$

7.3 Задание 3

Найти в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Ограничиться четырьмя членами ряда.

$$y'' = xy' - \ln y$$
$$y(2) = 1$$
$$y'(2) = -1$$

Решение в виде ряда Тейлора:

$$y(x) = y(2) + y'(2)(x-2) + \frac{y''(2)(x-2)^2}{2!} + \frac{y'''(2)(x-2)^3}{3!}$$

1) $y'' = xy' - \ln y$

$$y''(2) = 2y'(2) - \ln y(2) = 2(-1) - \ln 1 = -2$$

2) $y''' = (xy' - \ln y)' = y' + xy'' - \dfrac{1}{y}$

$$y'''(2) = y'(2) + 2y''(2) - \frac{1}{y(2)} = -1 + 2(-2) - 1 = -4$$

Подставим значения в ряд:

$$y(x) = y(2) + y'(2)(x-2) + \frac{y''(2)(x-2)^2}{2!} + \frac{y'''(2)(x-2)^3}{3!} =$$
$$= 1 - (x-2) + \frac{-2(x-2)^2}{2} + \frac{-4(x-2)^3}{6} =$$
$$= 1 - (x-2) - (x-2)^2 - \frac{2(x-2)^3}{3}$$

8 Задание 4. Приложение Рядов. Шпинева Ульяна. Вариант 6

8.1 Задание 1

Вычислить приближенно значение функции $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ с точностью 0,0001

Возьмем табличное разложение
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
$e^{-\frac{2}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{2}{3})^n}{n!}$
$n = 0:$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^0}{0!} = 1$$

$n = 1:$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^1}{1!} \approx -0,66667$$

$n = 2:$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^2}{2!} \approx 0,22222$$

$n = 3:$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^3}{3!} \approx -0,04938$$

$n = 4:$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^4}{4!} \approx 0,00823$$

$n = 5:$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^5}{5!} \approx -0,00109$$

$n = 6:$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^6}{6!} \approx 0,00012$$

$n = 7:$

$$\frac{(-\frac{2}{3})^7}{7!} \approx -0,00001$$

Дальнейшие члены не будут изменять точность
$\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} \approx 1 - 0,66667 + 0,22222 - 0,04938 + 0,00823 - 0,00109 + 0,00012 - 0,00001 = 0,51342$

Проверка:

$$\frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}$$

$$= 0.513417119033$$

8.2 Задание 2

Разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью 0,0001

$$\int_0^{\frac{1}{2}} ln(1+x^4)dx$$

Возьмем табличное разложение

$$\int_0^{\frac{1}{2}} ln(1+x^4)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{4n}}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^{n-1}x^{4n}}{n} dx == \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{4n+1}}{n(4n+1)}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^{4n+1}(4n+1)}$$

Подсчитаем первые члены последовательности:

$$n = 1:$$
$$\frac{1}{2^5 \cdot 5} \approx 0,00625$$
$$n = 2:$$
$$\frac{-1}{2 \cdot 2^9 \cdot 9} \approx -0,00011$$
$$n = 3:$$
$$\frac{1}{3 \cdot 2^{13} \cdot 13} \approx 0$$

Дальнейшие члены не будут изменять точность

$$\int_0^{\frac{1}{2}} ln(1+x^4)dx \approx 0,00625 - 0,00011 = 0,00614$$

Проверка:

$$\int_0^{0.5} \ln\left(1+x^4\right)dx$$
$$= 0.00614451521797$$

8.3 Задание 3

Найти в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Ограничиться четырьмя членами ряда.

$$y' = y^2 - 3x$$
$$y(1) = 2$$

Решение в виде ряда Тейлора:

$$y(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)(x-1)^2}{2!} + \frac{y'''(1)(x-1)^3}{3!}$$

1) $y' = y^2 - 3x$

$y'(1) = 2^2 - 3 = 1$

2) $y'' = (y^2 - 3x)' = 2yy' - 3$

$y''(1) = 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 = 1$

3) $y''' = (2yy' - 3)' = 2y'y' + 2yy''$

$y'''(1) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Подставим значения в ряд:

$$y(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)(x-1)^2}{2!} + \frac{y'''(1)(x-1)^3}{3!} =$$

$$= 2 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^3$$

9 Задание 4. Приложение Рядов. Лучинкин Константин Вариант 23

9.1 Задание 1.

$f(x) = e^x$

Требуется посчитать $f(-\frac{9}{10}) = \frac{1}{\sqrt[10]{e^9}}$

Разложим $f(x)$ в ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Рассмотрим частичные суммы рядя $S_{(N,x)} = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$:

$$S_{(1,x)} = 1 + x; \quad S_{(1,-0.9)} = 0.1$$

$$S_{(2,x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2}; \quad S_{(2,-0.9)} = 0.505$$

$$S_{(3,x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}; \quad S_{(3,-0.9)} = 0.3835$$

...

$$S_{(7,x)} = \sum_{n=0}^{7} \frac{x^7}{7!}; \quad S_{(7,-0.9)} \approx 0.40655$$

$$S_{(8,x)} = \sum_{n=0}^{8} \frac{x^8}{8!}; \quad S_{(8,-0.9)} \approx 0.40657$$

Таким образом $f(x) \approx 0.4065$ (с точностью до 0.0001)

9.2 Задание 2

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{16 + x^4}}$$

Разложим $f(x)$ в ряд:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[4]{16 + x^4}} = \frac{x^2}{2\sqrt[4]{\frac{x^4}{16} + 1}} = \frac{x^2}{2}\Big(\frac{x^4}{16} + 1\Big)^{-\frac{1}{4}} = \frac{x^2}{2}\Big(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{n-1}\Big(-\frac{1}{4} - i\Big)}{n!}\Big(\frac{x^4}{16}\Big)^n\Big)$$

$$\int_0^1 \Big(\frac{x^2}{2}\Big) dx \approx 0.1666$$

$$\int_0^1 \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{128}\Big) dx \approx 0.1655$$

$$\int_0^1 \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{128} + \frac{5x^{10}}{16384}\Big) dx \approx 0.1655$$

Таким образом $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{16 + x^4}} \approx 0.1655$ (с точностью до 0.0001)

9.3 Задание 3

Найти в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Ограничиться четырьмя членами ряда.

$y'' = e^{y-2} \ln y' + x$

$y(3) = 2$

$y'(3) = 1$

Запишем формулу Тейлора для $x = 3$:

$f(x) = y(3) + y'(3)(x-3) + y''(3)(x-3)^2 + y'''(3)(x_3)^3$
$y''(3) = e^{y(3)-2} \ln y'(3) + 3 = 3$
$y'''(3) = e^{y(3)-2}(1) + 1 = 2$
$f(x) = 2 + (x-3) + 3(x-3)^2 + 2(x-3)^3 + r$ $\qquad$ r-остаточный член

10 Задание 5. Ряд Фурье

10.1 Задание

С помощью разложения в ряд Фурье данной функции в интервале найдите сумму указанного числового ряда. Изобразите графически три различные частичные суммы разложения функции в ряд Фурье, взяв первые несколько слагаемых ряда, а также исходную функцию.

$$f(x) = 1 - x^2, \quad \sum_{n=4}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n-2)^2}$$

Функция периодичная и четная, ряд Фурье будет иметь вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-x^2)dx = \frac{6-2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nxdx = \frac{2}{\pi n}\sin x\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nxdx =$$

$$u = x^2, du = 2xdx$$

$$dv = cosnxdx, v = \frac{1}{n}\sin nx$$

$$= -\frac{2}{\pi}(x^2\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{2x}{n}\sin nxdx) = \frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nxdx =$$

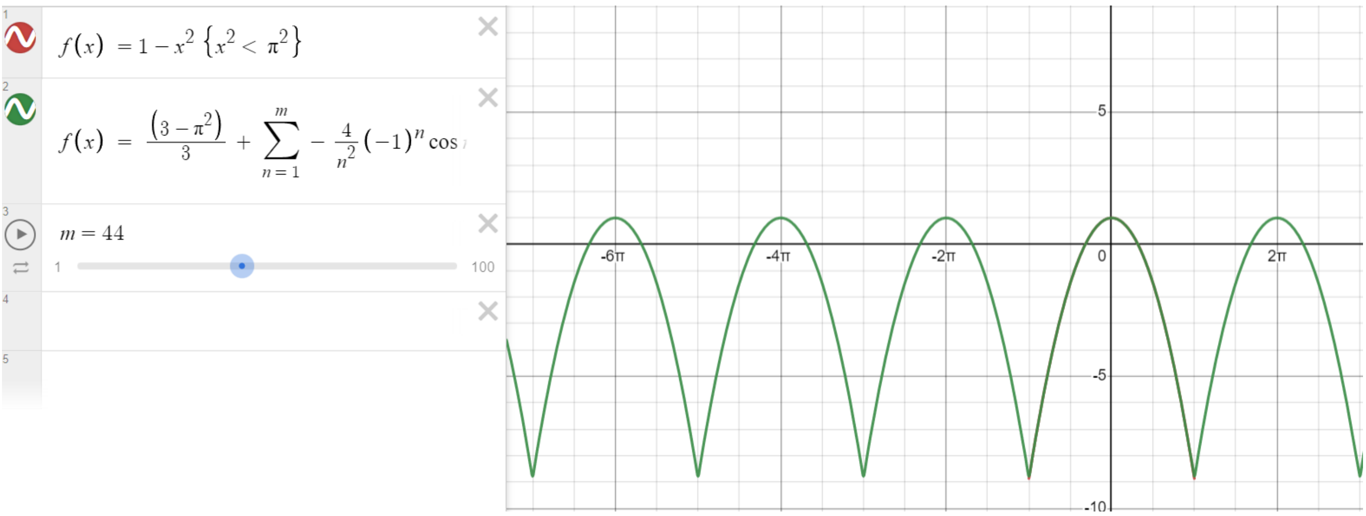
$$u = x, du = dx$$

$$dv = \sin nxdx, v = -\frac{1}{n}\cos nx$$

$$= \frac{4}{\pi n}(-x\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos nxdx) = -\frac{4}{\pi n}\pi\frac{1}{n}\cos\pi n = -\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$a_0 = \frac{6-2\pi^2}{3}, a_n = -\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$f(x) = 1 - x^2 = \dfrac{3-\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} -\dfrac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx$, при $x \in (-\pi;\pi)$



https://www.desmos.com/calculator/kbwdhz0aqe?lang=ru рассмотрим x = 0:

$$1 - 0 = \frac{3-\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n = \frac{3-\pi^2}{3} - 1$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n = -\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{(n-2)^2}(-1)^n = 4\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)^2}(-1)^{n+1} = 4 + 4\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-2)^2}(-1)^{n+1}$$

Тогда искомый ряд:

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-2)^2}(-1)^{n+1} = \frac{\frac{3-\pi^2}{3} - 1 - 4}{4} = -\frac{12+\pi^2}{12}$$