Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

Высшего образования

*Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники*

**Лабораторная работа 4 по вычислительной математике**

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Вариант №13

Группа: P3116

Выполнил:

Сиразетдинов А.Н.

Проверил:

Малышева Т.А.

Г. Санкт-Петербург

2024

# Оглавление

# Цель работы

Найти функцию, являющуюся наилучшим приближением заданной табличной функции по методу наименьших квадратов

# Рабочие формулы метода

## Линейная аппроксимация

Рассмотрим в качестве эмпирической формулы линейную функцию:

$$\varphi(x, a, b) = ax + b$$

Сумма квадратов отклонений запишется следующим образом:

$$S = S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \to min$$

Для нахождения $a$ и $b$ необходимо найти минимум функции $S(a,b)$.

Необходимое условие существования минимума для функции $S$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)x_i = 0 \\ 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

Упростим полученную систему:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

## КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Рассмотрим в качестве эмпирической формулы квадратичную функцию:

$$\varphi(x, a_0, a_1, a_2) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Сумма квадратов отклонений запишется следующим образом:

$$S = S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2 \to min$$

Приравниваем к нулю частные производные $S$ по неизвестным параметрам, получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n} a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i)x_i = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_2} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i)x_i^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{cases}$$

## Аппроксимация с помощью других функций

| Вид функции | Табличный X | Табличный Y |
|---|---|---|
| Степенная | Ln X | Ln Y |
| Экспоненциальная | X | Ln Y |
| Логарифмическая | Ln X | Y |

# Вычислительная часть

*Задание*

| | | |
|---|---|---|
| 13 | $y = \dfrac{31x}{x^4 + 13}$ | $x \in [0, 4]$  $h = 0{,}4$ |

*Таблица табулирования*

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0,00 | 0,40 | 0,80 | 1,20 | 1,60 | 2,00 | 2,40 | 2,80 | 3,20 | 3,60 | 4,00 |
| y | 0,00 | 0,95 | 1,85 | 2,47 | 2,54 | 2,14 | 1,61 | 1,17 | 0,84 | 0,62 | 0,46 |

*Линейная аппроксимация*

$\varphi(x) = a + bx$

$SX = 22$

$SXX = 61{,}6$

$SY = 14{,}64$

$SXY = 27{,}044$

$$\begin{cases} na + SX * b = SY \\ SX * a + SXX * b = SXY \end{cases} \qquad \begin{cases} 11a + 22b = 14{,}64 \\ 22a + 61{,}6b = 27{,}044 \end{cases}$$

$$\Delta = SXX * n - SX * SX = 193{,}6$$

$$\Delta_1 = SXY * n - SX * SY = -24{,}593$$

$$\Delta_2 = SXX * SY - SX * SXY = 306{,}851$$

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -0{,}127$$

$$b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1{,}585$$

$\varphi(x) = -0{,}127x + 1{,}585$

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0,00 | 0,40 | 0,80 | 1,20 | 1,60 | 2,00 | 2,40 | 2,80 | 3,20 | 3,60 | 4,00 |
| y | 0,00 | 0,95 | 1,85 | 2,47 | 2,54 | 2,14 | 1,61 | 1,17 | 0,84 | 0,62 | 0,46 |
| phi | 1,6 | 1,5 | 1,5 | 1,4 | 1,4 | 1,3 | 1,3 | 1,2 | 1,2 | 1,1 | 1,1 |
| (phi-y)^2 | 2,51 | 0,34 | 0,13 | 1,07 | 1,33 | 0,65 | 0,11 | 0,00 | 0,11 | 0,26 | 0,38 |

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum \varphi(x) - y}{\mathrm{n}}} = 0{,}793$

*Квадратичная аппроксимация*

$\varphi(x) = a + a_1 x + a_2 x^2$

| | |
|---|---|
| SX | 22,00 |
| SXX | 61,6 |
| SX^3 | 193,6 |
| SX^4 | 648,525 |
| SY | 14,64 |
| SXY | 27,044 |
| SXXY | 62,341 |

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{cases}$$

*По методу Крамера:*

$$\Delta = \begin{matrix} 11 & 22 & 61.6 \\ 22 & 61.6 & 193{,}6 \\ 61.6 & 193{,}6 & 648{,}525 \end{matrix} = 4252{,}424$$

$$\Delta_1 = \begin{matrix} 14{,}64 & 22 & 61.6 \\ 27{,}044 & 61.6 & 193{,}6 \\ 62{,}341 & 193{,}6 & 648{,}525 \end{matrix} = 1768{,}909$$

$$\Delta_2 = \begin{matrix} 11 & 14{,}64 & 61.6 \\ 22 & 27{,}044 & 193{,}6 \\ 61.6 & 62{,}341 & 648{,}525 \end{matrix} = 7745{,}054$$

$$\Delta_3 = \begin{matrix} 11 & 22 & 14.64 \\ 22 & 61.6 & 27{,}044 \\ 61.6 & 193.6 & 62{,}341 \end{matrix} = -2071{,}326$$

$$a_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0{,}416$$

$$a_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1{,}821$$

$$a_2 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -0{,}487$$

$\varphi(x) = 0{,}416 + 1{,}821x - 0{,}487x^2$

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0,00 | 0,40 | 0,80 | 1,20 | 1,60 | 2,00 | 2,40 | 2,80 | 3,20 | 3,60 | 4,00 |
| y | 0,00 | 0,95 | 1,85 | 2,47 | 2,54 | 2,14 | 1,61 | 1,17 | 0,84 | 0,62 | 0,46 |
| phi | 0,4 | 1,1 | 1,6 | 1,9 | 2,1 | 2,1 | 2 | 1,7 | 1,3 | 0,7 | -0,1 |
| (phi-y)^2 | 0,17 | 0,01 | 0,08 | 0,32 | 0,21 | 0,00 | 0,14 | 0,28 | 0,17 | 0,00 | 0,31 |

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \varphi(x) - y}{n}} = 0{,}393$$

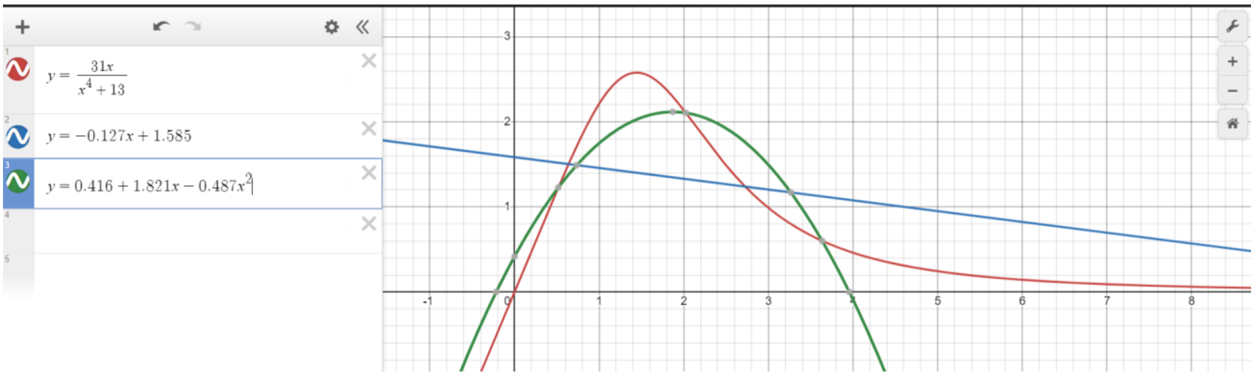
## *Вывод*

Среднеквадратичное отклонение линейной аппроксимации: 0,793

Среднеквадратичное отклонение квадратичной аппроксимации: 0,393

Квадратичная аппроксимация дает наилучшее приближение

## *График*



# Листинг программы

```python
def get_linear_ratio(self) -> tuple[float, float]:
    SX: float = sum([p.x for p in self.table])
    SXX: float = sum([p.x ** 2 for p in self.table])
    SY: float = sum([p.y for p in self.table])
    SXY: float = sum([p.x * p.y for p in self.table])

    delta = SXX * self.n - SX * SX
    delta1 = SXY * self.n - SX * SY
    delta2 = SXX * SY - SX * SXY

    a = delta1 / delta
    b = delta2 / delta
    return a, b
```

```python
def solve(self, file) -> Callable[[float], float]:
    SX = sum([p.x for p in self.table])
    SX2 = sum([p.x**2 for p in self.table])
    SX3 = sum([p.x**3 for p in self.table])
    SX4 = sum([p.x**4 for p in self.table])
    SY = sum([p.y for p in self.table])
    SXY = sum([p.x * p.y for p in self.table])
    SX2Y = sum([p.x**2 * p.y for p in self.table])

    x = np.array([
        [self.n, SX, SX2],
        [SX, SX2, SX3],
        [SX2, SX3, SX4]
    ])
    y = np.array([
        SY,
        SXY,
        SX2Y
    ])
    a = np.linalg.solve(x, y)

    self.func = lambda x: a[0] + a[1] * x + a[2] * x**2
    self.c, self.b, self.a = a
    self.report(file=file)
    return self.func
```

```python
def solve(self, file) -> Callable[[float], float]:
    table_transited = [
        Point(
            x=np.log(p.x),
            y=p.y
        )
        for p in self.table
    ]
    a_, b_, = Linear(table_transited).get_linear_ratio()
    self.func = lambda x: a_ * np.log(x) + b_
    self.a, self.b = a_, b_
    self.report(file=file)
    return self.func
```

```python
def solve(self, file) -> Callable[[float], float]:
    table_transited = [
        Point(
            x=p.x,
            y=np.log(p.y)
        )
        for p in self.table
    ]
    b_, a_, = Linear(table_transited).get_linear_ratio()
    a = np.exp(a_)
    b = b_
    self.func = lambda x: a * np.exp(b * x)
    self.a, self.b = a, b
    self.report(file=file)
    return self.func
```

# Результаты работы программы

```
Вы хотите ввести данные из файла? y/n y
Введите название файла input.txt
Вы хотите выводить данные в файл? y/n n
+-------------------------------------------+
|            Линейная аппроксимация         |
+---+--------+----------+----------+----------+
| N |   x    |    y     |    P     |    e     |
+---+--------+----------+----------+----------+
| 0 | -4.000 | -459.441 | -118.794 | 340.647  |
| 1 | -3.000 | -66.929  | -128.098 | -61.169  |
| 2 | -2.000 |  4.118   | -137.401 | -141.519 |
| 3 | -1.000 |  -7.405  | -146.705 | -139.300 |
| 4 | 0.000  | -10.000  | -156.008 | -146.008 |
| 5 | 1.000  | -23.568  | -165.312 | -141.744 |
| 6 | 2.000  | -143.409 | -174.616 | -31.207  |
| 7 | 3.000  | -504.219 | -183.919 | 320.300  |
+---+--------+----------+----------+----------+
Коэффициент детерминации:  0.01
Точность аппроксимации недостаточна
Коэффициент корреляции Пирсона: -0.11
Связь слабая
```

```
+-------------------------------------------+
|         Квадратичная аппроксимация        |
+---+--------+----------+----------+----------+
| N |   x    |    y     |    P     |    e     |
+---+--------+----------+----------+----------+
| 0 | -4.000 | -459.441 | -402.568 |  56.873  |
| 1 | -3.000 | -66.929  | -168.637 | -101.708 |
| 2 | -2.000 |  4.118   | -15.784  | -19.902  |
| 3 | -1.000 |  -7.405  |  55.991  |  63.396  |
| 4 | 0.000  | -10.000  |  46.687  |  56.687  |
| 5 | 1.000  | -23.568  | -43.694  | -20.126  |
| 6 | 2.000  | -143.409 | -215.155 | -71.746  |
| 7 | 3.000  | -504.219 | -467.693 |  36.526  |
+---+--------+----------+----------+----------+
Коэффициент детерминации:  0.91
Удовлетворительная аппроксимация
3
[[8, -4.0, 44.0, -64.0], [-4.0, 44.0, -64.0, 452.0], [44.0, -64.0, 452.0, -1024.0], [-64.0, 452.0, -1024.0, 5684.0]]
[-1210.8530067364227, 214.67527772814603, -13079.522680025764, 16400.99742287866]
+------------------------------------------+
|         Кубическая  аппроксимация        |
+---+--------+----------+----------+---------+
| N |   x    |    y     |    P     |    e    |
+---+--------+----------+----------+---------+
| 0 | -4.000 | -459.441 | -409.742 |  49.699 |
| 1 | -3.000 | -66.929  | -163.513 | -96.584 |
| 2 | -2.000 |  4.118   |  -8.610  | -12.728 |
| 3 | -1.000 |  -7.405  |  59.065  |  66.470 |
```

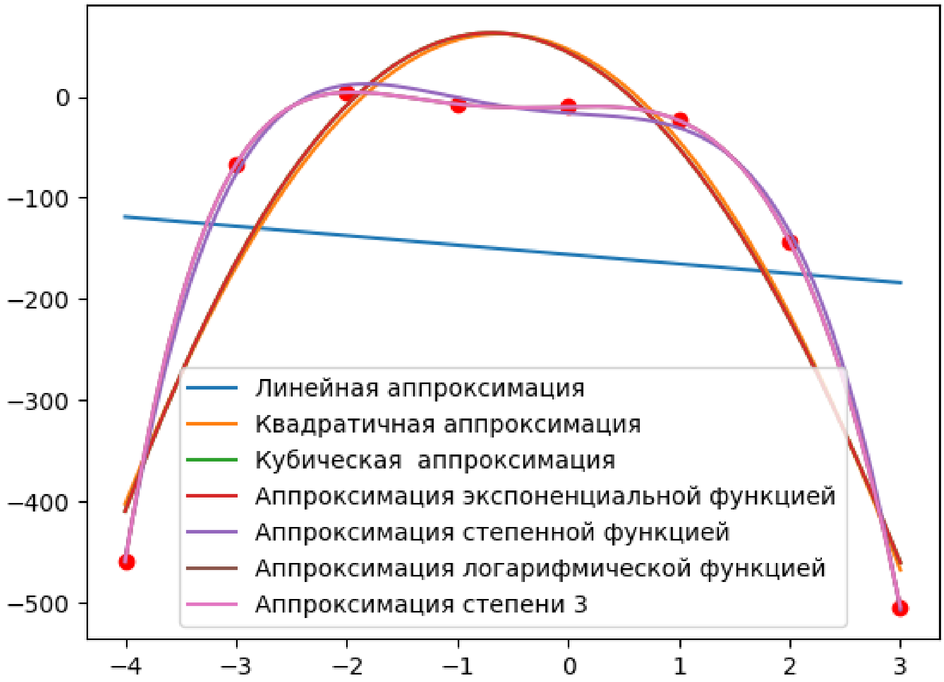
```
+------------------------------------------+
|         Кубическая  аппроксимация        |
+---+--------+----------+----------+---------+
| N |   x    |    y     |    P     |    e    |
+---+--------+----------+----------+---------+
| 0 | -4.000 | -459.441 | -409.742 |  49.699 |
| 1 | -3.000 | -66.929  | -163.513 | -96.584 |
| 2 | -2.000 |  4.118   |  -8.610  | -12.728 |
| 3 | -1.000 |  -7.405  |  59.065  |  66.470 |
| 4 | 0.000  | -10.000  |  43.613  |  53.613 |
| 5 | 1.000  | -23.568  | -50.868  | -27.300 |
| 6 | 2.000  | -143.409 | -220.279 | -76.870 |
| 7 | 3.000  | -504.219 | -460.520 |  43.699 |
+---+--------+----------+----------+---------+
Коэффициент детерминации:  0.91
Удовлетворительная аппроксимация
Коэффициенты для степени 3:  0.6831853071795861 -39.5144028047991 -55.6498564870727 43.61314379824253
+------------------------------------------+
|          Аппроксимация степени 3         |
+---+--------+----------+----------+---------+
| N |   x    |    y     |    P     |    e    |
+---+--------+----------+----------+---------+
| 0 | -4.000 | -459.441 | -409.742 |  49.699 |
| 1 | -3.000 | -66.929  | -163.513 | -96.584 |
| 2 | -2.000 |  4.118   |  -8.610  | -12.728 |
| 3 | -1.000 |  -7.405  |  59.065  |  66.470 |
| 4 | 0.000  | -10.000  |  43.613  |  53.613 |
```

Коэффициент детерминации: 1.00

Высокая точность аппроксимации

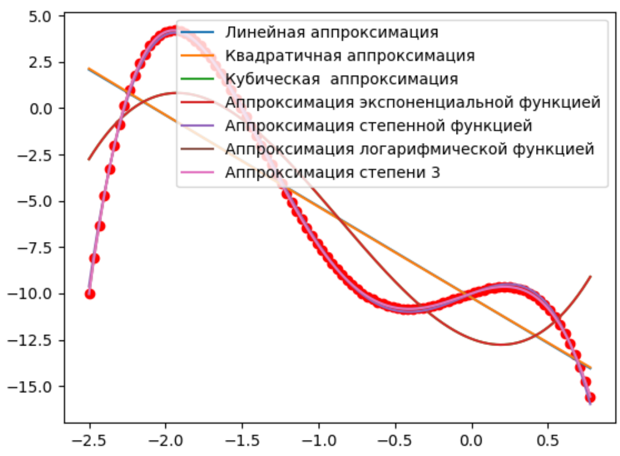
| Выбор аппроксимирующей функции | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Вид функции | a | b | c | d | S | delta | R^2 |
| ax + b | -9.304 | -156.008 | - | - | 304189.677 | 194.997 | 0.012 |
| ax^2 + bx + c | -40.539 | -49.843 | 46.687 | - | 28094.248 | 59.260 | 0.909 |
| ax^3 + bx^2 + cx + d | 0.683 | -39.514 | -55.650 | 43.613 | 27817.003 | 58.967 | 0.910 |
| ax^3 +bx^2 +cx^1 +dx^0 | - | - | - | - | 27817.003 | 58.967 | 0.910 |
| ax^4 +bx^3 +cx^2 +dx^1 +ex^0 | - | - | - | - | 401.143 | 7.081 | 0.999 |
| ax^5 +bx^4 +cx^3 +dx^2 +ex^1 +fx^0 | - | - | - | - | 0.000 | 0.000 | 1.000 |
| ax^6 +bx^5 +cx^4 +dx^3 +ex^2 +fx^1 +gx^0 | - | - | - | - | 0.000 | 0.000 | 1.000 |

Наилучшая аппроксимирующая функция: Аппроксимация степени 5



```
Вы хотите ввести данные из файла? y/n н
Ввод не распознан
Вы хотите ввести данные из файла? y/n y
Введите название файла input2.txt
Вы хотите выводить данные в файл? y/n n
+----------------------------------------+
|          Линейная аппроксимация        |
+----+--------+---------+---------+--------+
| N  |   x    |    y    |    P    |   e    |
+----+--------+---------+---------+--------+
| 0  | -2.500 | -10.030 |  2.083  | 12.113 |
| 1  | -2.467 |  -8.092 |  1.920  | 10.013 |
| 2  | -2.434 |  -6.330 |  1.757  | 8.088  |
| 3  | -2.401 |  -4.735 |  1.594  | 6.329  |
| 4  | -2.368 |  -3.299 |  1.432  | 4.730  |
| 5  | -2.334 |  -2.014 |  1.269  | 3.282  |
| 6  | -2.301 |  -0.872 |  1.106  | 1.978  |
| 7  | -2.268 |  0.133  |  0.943  | 0.809  |
| 8  | -2.235 |  1.010  |  0.780  | -0.230 |
| 9  | -2.202 |  1.764  |  0.617  | -1.148 |
| 10 | -2.169 |  2.404  |  0.454  | -1.950 |
| 11 | -2.136 |  2.936  |  0.291  | -2.645 |
| 12 | -2.103 |  3.365  |  0.128  | -3.237 |
| 13 | -2.070 |  3.699  |  -0.035 | -3.734 |
| 14 | -2.037 |  3.944  |  -0.198 | -4.142 |
| 15 | -2.003 |  4.106  |  -0.361 | -4.466 |
| 16 | -1.970 |  4.189  |  -0.524 | -4.713 |
| 17 | -1.937 |  4.201  |  -0.687 | -4.888 |
```

```
| 97 | 0.711  | -13.986 | -13.986 | -0.000 |
| 98 | 0.744  | -14.739 | -14.739 | -0.000 |
| 99 | 0.777  | -15.571 | -15.571 | -0.000 |
+----+--------+---------+---------+--------+
Коэффициент детерминации:  1.00
Высокая точность аппроксимации
+------------------------------------------------------------------------------------------------------------+
|                                        Выбор аппроксимирующей функции                                      |
+--------------------------------------+--------+---------+---------+---------+----------+-------+-------+
|             Вид функции              |   a    |    b    |    c    |    d    |    S     | delta |  R^2  |
+--------------------------------------+--------+---------+---------+---------+----------+-------+-------+
|                ax + b                | -4.923 | -10.223 |    -    |    -    | 1027.659 | 3.206 | 0.683 |
|            ax^2 + bx + c             | 0.029  |  -4.872 | -10.228 |    -    | 1027.601 | 3.206 | 0.683 |
|         ax^3 + bx^2 + cx + d         | 2.865  |  7.434  |  -3.201 | -12.452 | 642.566  | 2.535 | 0.802 |
|        ax^3 +bx^2 +cx^1 +dx^0        |   -    |    -    |    -    |    -    | 642.566  | 2.535 | 0.802 |
|     ax^4 +bx^3 +cx^2 +dx^1 +ex^0     |   -    |    -    |    -    |    -    |  2.023   | 0.142 | 0.999 |
|   ax^5 +bx^4 +cx^3 +dx^2 +ex^1 +fx^0  |   -    |    -    |    -    |    -    |  0.000   | 0.000 | 1.000 |
| ax^6 +bx^5 +cx^4 +dx^3 +ex^2 +fx^1 +gx^0 |   -    |    -    |    -    |    -    |  0.000   | 0.000 | 1.000 |
+--------------------------------------+--------+---------+---------+---------+----------+-------+-------+
Наилучшая аппроксимирующая функция:  Аппроксимация степени 5
```



# Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была выполнена аппроксимация функции с использованием линейного, квадратичного, экспоненциального и логарифмического приближений. Также был реализован скрипт, которые реализует МНК и строит графики данных функций и аппроксимаций