Численные методы, Весна 2021 ВШЭ. Задание 8-9.[a]

Задачи типа А.

1. **(5) [integrals]** Постройте узлы и веса двухточечной квадратуры Гаусса. Следуйте инструкциям в classroom.
2. **(5+5) [integrals]** Вычислите определённый интеграл методом трапеций с вычитанием сингулярности
$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$
Вам могут пригодиться значения следующих определенных интегралов:
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx = \pi, \quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx = \pi/2.$$
Следуйте инструкциям в classroom. (5 баллов автопроверка + 5 баллов защита)
3. **(10 + 5) [integrals]** Вычислите определённый интеграл
$$I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)\cos(\cos(x))}{x} dx$$
с относительной точностью 10^{-6}. Для упрощения задачи Вы можете использовать scipy.integrate.quad. Следуйте инструкциям в classroom. (10 баллов автопроверка + 5 баллов защита)

   Заметьте, что для простоты все три задачи реализованы в одном notebook-е `integrals`.

Задачи типа Б.

Исходные данные к задачам размещены в файле `data_89.npz` в Classroom.

1. **(10)** Рассмотрите функцию, отображающую вектор $\vec{x}$ длины n в скаляр:
$$f(\vec{x}|a) = \frac{1}{\exp(a_0 + x_1 a_1 + ... + x_n a_n) + 1},$$
параметризованную коэффициентами $a_0, a_1, ..., a_n$. В строках матрицы A2 содержится набор m векторов $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_m$, а в векторе y2 – набор m чисел $y_1, ..., y_m$. Найдите коэффициенты a такие, что
$$\sum_i (f(\vec{x}_i|a) - y_i)^2$$
минимально. Используйте библиотечные функции пакета `scipy.optimize` : `minimize` или `least_squares`.

   Указание: При правильном использовании синтаксиса NumPy, вычисление целевой функции окажется коротким и читабельным.
2. **(10)** Решите предыдущую задачу, используя метод градиентного спуска с фиксированным γ, в качестве начального приближения выбирая случайный вектор $\vec{a}$. Вычислите градиент двумя способами: разностным приближением и используя пакет autograd.
3. **(10)** Используя стандартный генератор случайных чисел с равномерным распределением на интервале $[0, 1)$, методом обратного преобразования сгенерируйте выборку из экспоненциального распределения с заданным параметром λ, т.е. выборку с плотностью вероятности $p(x) \sim \exp(-\lambda x)$ для $x \in [0, \infty)$. Постройте гистограмму, сравните с ожидаемой плотностью вероятности (либо постройте эмпирическую функцию распределения, сравните с ожидаемой функцией распределения). Прокомментируйте зависимость результатов от размера выборки. Проверьте гипотезу об экспоненциальном распределении сгенерированных данных. Критерий и уровень значимости выберите самостоятельно, выбор обоснуйте.

---

[a] Дополнительно указаны: (количество баллов за задачу)[имя задачи на nbgrader]

4. **(15)** Используя стандартный генератор случайных чисел с равномерным распределением на интервале $[0, 1)$, сгенерируйте выборку из *нормального* распределения, $p(x) \sim \exp\bigl(-x^2/2\bigr)$, на интервале $-\infty < x < \infty$. Используйте метод Бокса-Мюллера: рассмотрите произведение двух независимых нормально распределенных величин и перейдите в полярные координаты. Постройте гистограмму (или эмпирическую функцию распределения), сравните с ожидаемым нормальным распределением. Проверьте гипотезу о нормальном распределении сгенерированных данных. Критерий и уровень значимости выберите самостоятельно, выбор обоснуйте.

5. **(15)** Вычислите следующий интеграл по n–мерному вектору $\vec{x}$ (в бесконечных пределах) методом Монте-Карло:

$$\int \Pi_{i=1}^{n} dx_i \frac{\exp\left(-\vec{x}^T A \vec{x}\right)}{1 + x_1^2 + ... + x_n^2},$$

где матрица A содержится в A4.

6. **(10)** Решите интегральное уравнение на функцию $\phi(x)$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$\phi(x) = \int_0^1 \sqrt{xt}\phi(t)\, dt + 5\sqrt{x}\ ,$$

используя квадратуру Лежандра либо квадратуру Якоби.