Машинное обучение, ФКН ВШЭ
Теоретическое домашнее задание №5
Решения

Калмыков Азат

Задача 1. Рассмотрим двойственное представление задачи гребневой регрессии:

$$Q(a) = \frac{1}{2}\|Ka - y\|^2 + \frac{\lambda}{2}a^T K a \to \min_a.$$

Покажите, что решение этой задачи записывается как

$$a = (K + \lambda I)^{-1} y.$$

Решение.

■

Задача 2. Покажите, что функция

$$K(x, z) = \cos(x - z)$$

для $x, z \in \mathbb{R}$ является ядром.

Решение.

$$K(x, z) = \cos(x - z) = \sin(x) \cdot \sin(z) + \cos(x) \cdot \cos(z)$$

Тогда при $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(x) = (\sin(x), \cos(x))$ получим, что $\langle \varphi(x), \varphi(z) \rangle = K(x, z)$. Значит K - ядро.

■

Задача 3. Рассмотрим функцию, равную косинусу угла между двумя векторами $x, z \in \mathbb{R}^d$:

$$K(x, z) = \cos(\widehat{x, z}).$$

Покажите, что она является ядром.

Решение. Распишем по определению:

$$K(x, z) = \frac{\langle x, z \rangle}{\|x\| \, \|z\|} = \langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{z}{\|z\|} \rangle$$

Тогда К - это скалярное произведение, если взять в качестве спрямляющего отображения $\varphi(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Значит K - ядро.

■

Задача 4. Рассмотрим ядра $K_1(x,z) = (xz+1)^2$ и $K_2(x,z) = (xz-1)^2$, заданные для $x, z \in \mathbb{R}$. Найдите спрямляющие пространства для K_1, K_2 и $K_1 + K_2$.

Решение.

$$K_1(x,z) = (xz+1)^2 = x^2z^2 + 2xz + 1 =$$
$$(x^2)(z^2) + (\sqrt{2}x)(\sqrt{2}z) + (1)(1)$$

Тогда при $\varphi_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi_1(x) = (x^2, \sqrt{2}x, 1)$ получим, что $\langle \varphi_1(x), \varphi_1(z) \rangle = K_1(x,z)$. Значит φ_1 - подходящее спрямляющее отображение для K_1.

Можно заметить, что K_2 на самом деле не является ядром. В самом деле, давайте запишем матрицу Грама для 2 точек $x_1 = 1, x_2 = 2$. Получим матрицу:

$$K = \begin{pmatrix} K(1,1) & K(1,2) \\ K(2,1) & K(2,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

По теореме Мерсера мы знаем, что неотрицательная определённость матрицы Грама любого набора точек является необходимым условием того, что функция является ядром. Но $\det K = -1$. Значит это не ядро.

$$(K_1 + K_2)(x,z) = (xz+1)^2 + (xz-1)^2 =$$
$$x^2z^2 + 2xz + 1 + x^2z^2 - 2xz + 1 = (\sqrt{2}x^2)(\sqrt{2}z^2) + \sqrt{2}\sqrt{2}$$

Тогда при $\varphi_{1+2} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi_{1+2}(x) = (\sqrt{2}x^2, \sqrt{2})$ получим, что $\langle \varphi_{1+2}(x), \varphi_{1+2}(z) \rangle = (K_1 + K_2)(x,z)$. Значит φ_{1+2} - подходящее спрямляющее отображение для $K_1 + K_2$.

■

Задача 5. Рассмотрим следующую функцию на пространстве вещественных чисел:

$$K(x,z) = \frac{1}{1 + e^{-xz}}.$$

Покажите, что она не является ядром.

Решение.

Рассмотрим точки $x_1 = 1, x_2 = 2$. Для этой системы точек матрица Грама будет иметь вид:

$$K = \begin{pmatrix} K(1,1) & K(1,2) \\ K(2,1) & K(2,2) \end{pmatrix}$$

По теореме Мерсера мы знаем, что неотрицательная определённость матрицы Грама любого набора точек является необходимым условием того, что функция является ядром. Но

$$\det K = K(1,1)K(2,2) - K(2,1)K(1,2) = \frac{1}{(1+e^{-1})(1+e^{-4})} - \frac{1}{(1+e^{-2})^2} =$$
$$\frac{1+2e^{-2}+e^{-4}-(1+e^{-1}+e^{-4}+e^{-5})}{(1+e^{-1})(1+e^{-4})(1+e^{-2})^2} = \frac{2e^{-2}-e^{-1}-e^{-5}}{(1+e^{-1})(1+e^{-4})(1+e^{-2})^2} <$$
$$\{e>2\} < \frac{e^{-1}-e^{-1}-e^{-5}}{(1+e^{-1})(1+e^{-4})(1+e^{-2})^2} < 0$$

Значит необходимое условие не выполнено и K - не ядро.

■