École Nationale d'Ingénieurs de Sousse
Enseignant : Mohamed Lassaad AMMARI

Automne 2020

Théorie de l'information et codage
Série 4 : Canaux discrets sans mémoire et codage de canal
À remettre le vendredi .

Exercice 1

Soit X un variable aléatoire qui peut prendre 10 valeurs $X \in \mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Considérons le canal additif suivant :

$$Y = X + Z \pmod{10}$$

avec Z une variable aléatoire qui prend 3 valeurs avec les mêmes probabilités :

$$Z = \begin{cases} 1, & \text{avec } \Pr(Z = 1) = \frac{1}{3} \\ 2, & \text{avec } \Pr(Z = 2) = \frac{1}{3} \\ 3, & \text{avec } \Pr(Z = 3) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

(a) Déterminer la capacité de ce canal.

(b) Déterminer la loi de probabilité marginale de qui permet d'atteindre cette capacité.

Exercice 2

The Z-channel has binary input and output alphabets and transition probabilities p(y|x) given by the following matrix:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad x, y \in \{0, 1\}$$

Find the capacity of the Z-channel and the maximizing input probability distribution.

Exercice 3

Considérons un canal binaire avec bruit additif, c'est-à-dire tel que $Y = X + Z$, où X est binaire et Z est une variable aléatoire indépendante de X pouvant prendre les valeurs

$$Z = \begin{cases} 0, & \text{avec } \Pr(Z = 0) = p \\ a, & \text{avec } \Pr(Z = a) = 1 - p \end{cases}$$

(a) Calculer la capacité de ce canal en fonction de p dans le cas où $a \neq 1$ et $a \neq -1$.

(b) Calculer la capacité de ce canal pour $p = 1/2$ dans les cas où $a = 1$ et $a = -1$.

(c) Dans le cas où l'addition est binaire (c'est-à-dire $a = 1$ et l'addition est un "ou exclusif"), que peut-on dire du canal ?

(d) Qu'obtient-on dans le cas d'un canal analogique à seuil, c'est-à-dire tel que $a \in \mathbb{R}$ et où $y \geq 0.5$ est toujours décodé "1" et $y < 0.5$ est toujours décodé "0".